ВЕСТНИК ДОНЕЦКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА СЕРИЯ А ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ №1/2016

ISSN 2415-7058

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Основан в 1997 году

Серия А
Естественные науки

1/2016

Редакционная коллегия серии А (естественные науки)

Главный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

Зам. главного редактора – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

Ответственные секретари: канд. физ.-мат. наук, доц. **Е.В. Алтухов;** канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

Члены редколлегии: д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; д-р биол. наук, проф. **М.И. Бойко**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров;** д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р техн. наук, проф. **А.Н. Семко**; д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

The Editorial Board of a Series A (Natural Sciences)

The Editor-in-Chief – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

The Deputy of the Editor-in-Chief – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

Executive Secretaries: Cand. of phys. and math., docent **E.V. Altukhov,** Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

The Members of the Editorial Board: Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr. of biol., prof. **M.I. Boyko**; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V.Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov;** Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of tech., prof. **A.N. Semko**; Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

Адрес редакции: ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
ул. Университетская, 24
83001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru/vestnikA

Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»
Протокол № 5 от 29.04.2016 г.

© ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», 2016

Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. **Естественные науки** **№ 1/ 2016**

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

Донецк, 2016

Bulletin of Donetsk National University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

Series A. Natural Sciences **№ 1/ 2016**

CONTENTS

Mathematics

Donetsk, 2016

УДК 519.21

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ П. КЛАРКА. ВЕРОЯТНОСТЬ НЕРАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, РАБОТАЮЩЕЙ НА (B,S)–РЫНКЕ. МОДЕЛЬ ЛУНДБЕРГА

© 2016. ***Б. В. Бондарев, М. И. Хмелина***

Представлен новый способ выведения интегро–дифференциальных уравнений для вероятности неразорения в моделях страховых компаний, функционирующих на финансовом (B,S)–рынке на конечном и бесконечном интервалах времени. В качестве модели рискового актива рассматривается модель Кларка с добавленной диффузионной частью.

***Ключевые слова*:** страховая компания, вероятность неразорения, финансовый (B,S)–рынок, модель П. Кларка, полугруппа операторов, инфинитезимальный оператор, резольвента.

Введение. Несмотря на необычайную популярность модели Самуэльсона [1–3]:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W\left(t\right)\right\}, \tag{1}$$

которая описывает эволюцию цены рискового актива (акции), где $W(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ — стандартный винеровский процесс, все же исходя из задач практики, во–первых вряд ли можно предполагать непрерывность случайных воздействий на цену акции, во–вторых вряд ли можно предполагать нормальность логарифма приращений. Если первый факт не вызывает сомнений — цена акции меняется скачками, то второму факту следует уделить особое внимание.

В модели (1) «основным» процессом является винеровский процесс, приращения которого имеют нормальное распределение. Вместе с тем [4] замечено, что на интервалах времени сравнительно небольшой длины (до 2–3 недель) приращения отличны от нормальных. Первые работы, в которых отмечено это явление, появились ещё в 1915 году. Результаты очень серьёзного статистического анализа, подтверждающего отличие упомянутых распределений от нормального, были опубликованы М. Кендаллом в 1953 году в [5]. Оказалось, что отмеченный феномен является всеобщим [4]: ненормальность приращений проявляется на всех биржах независимо от объекта торговли. Отмеченная ненормальность приращений проявлялась в том, что [4] в действительности наблюдалось заметно больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине приращений, нежели их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Другими словами, наблюдаемые распределения приращений биржевых цен на интервалах времени умеренной длины являются более «островершинность», нежели нормальные, имея заметно более тяжёлые хвосты. Стоит отметить, что подобными свойствами обладают распределения, эксцесс которых положителен [6]. Поэтому винеровские процессы оказались отнюдь не бесспорными для построения моделей динамики биржевых цен.

Вместо «основного» винеровского процесса $W(t)$ П. Кларк [7, 8] предложил для описания биржевых цен использовать модель с «основным» процессом $W(Z(t))$, то есть в качестве «основного» П. Кларк предложил взять подчинённый винеровский процесс, где $W(t)$— стандартный винеровский процесс, а $Z(t)$ — процесс с неубывающими траекториями, начинающимися в нуле. Если в качестве $Z(t)$ взять процесс Пуассона с параметром λ, независящий от $W(t)$, то величина $W(Z(t))$ будет иметь положительный эксцесс. Действительно, [9]

$$MW^2\left(Z(t)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} MW^2\left(k\right)\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \lambda t,$$
$$MW^4\left(Z(t)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} MW^4\left(k\right)\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} 3k^2\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t} = 3\left(\lambda t\right)^2 + 3\lambda t,$$

тогда γ_2 — коэффициент эксцесса [9] будет равен

$$\gamma_2 = \frac{MW^4\left(Z(t)\right)}{\left[MW^2\left(Z(t)\right)\right]^2} - 3 = \frac{3}{\lambda t} > 0, \tag{2}$$

что означает большую, чем у нормального «островершинность» распределения. Из (2), в частности, следует, что с ростом времени коэффициент эксцесса убывает, а наибольшая «островершинность» наблюдается при малых $t > 0$.

Таким образом, предложенная П. Кларком модель эволюции цены рискового актива

$$S(t) = S(0)\exp\left\{ct + W\left(Z(t)\right)\right\}$$

больше соответствует реальным данным, чем модель П. Самуэльсона. В данной статье [9] в качестве модели, описывающей цену акции, будет взята модель

$$\bar{S}(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \lambda\left[\sqrt{e} - 1\right]\right)t + W\left(Z(t)\right)\right\}. \tag{3}$$

Как показано в [9] модель (3) отличается от модели П. Кларка тем, что параметр $\mu > 0$ как и в модели П. Самуельсона (1) имеет смысл локальной доходности. В [9] установлена также безарбитражность модели (3). Вместе с тем и в модели (3) есть одно важное свойство, которое также не согласуется с реальностью и оно состоит в следующем: как известно, до некоторого показательно распределённого момента τ_1, первого скачка пуассоновского процесса $Z(t)$, процесс $W(Z(t))$ будет тождественно равен нулю, то есть до этого момента времени в модели (3) отсутствуют случайности, что конечно же не согласуется с действительностью.

В данной работе рассматривается математическая модель функционирования страховых компаний, которые имеют возможность вкладывать средства на финансовый (B, S)–рынок. В качестве модели акции будет использована модифицированная модель П. Кларка. В качестве цены рискового актива рассмотрим видоизмененную модель П. Кларка с добавленной диффузионной частью, т.е.

$$P(t) = P(0)\exp\left\{\left(\mu - \lambda\left[\sqrt{e} - 1\right]\right)t + W\left(Z(t)\right) - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_1\left(t\right)\right\}, \tag{4}$$

где $P(0)$ — цена акции в нулевой момент времени, $W(t)$ и $W_1(t)$ — винеровские процессы, независимые между собой и от $Z(t)$ (процесса Пуассона с параметром λ). Параметр $\mu > 0$ как и в модели П. Самуэльсона имеет смысл локальной доходности.

Безарбитражность предложенной модели. Свойство модели П. Кларка. Покажем, что эксцесс в модели (4) также является положительной величиной. Действительно,

$$\begin{gathered}M\left[W\left(Z(t)\right)+W_1\left(t\right)\right]^2 = MW^2\left(Z(t)\right)+MW_1^2\left(t\right)=\lambda t+t,\\ M\left[W\left(Z(t)\right)+W_1\left(t\right)\right]^4 = MW^4\left(Z(t)\right)+6MW^2\left(Z(t)\right)MW_1^2\left(t\right)+\\ +MW_1^4\left(t\right)=3\left(\lambda t\right)^2+3\lambda t+6\lambda t^2+3t^2=\left(3\lambda^2+6\lambda+3\right)t^2+3\lambda t,\\ \gamma_2=\frac{\left(3\lambda^2+6\lambda+3\right)t^2+3\lambda t}{\left(\lambda+1\right)^2t^2}-3=\frac{3\lambda}{\left(\lambda+1\right)^2t}\geqslant 0,\end{gathered}$$

что означает большую, чем у нормального «островершинность» распределения, а это означает, что больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине приращений, нежели их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Последний факт и наблюдается в действительности.

Модель (4) является безарбитражной, что несложно проверить. Действительно, найдем плотность перехода $\tilde{\rho}(t)$ от исходной меры $\tilde{P}$ к некоторой эквивалентной мере $\tilde{P}_1$, по которой $P(0)\exp\left\{\left(\mu-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)t+W\left(Z(t)\right)-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_1\left(Z(t)\right)\right\}$ будет мартингалом. Если $\tilde{\rho}(t)$ существует, тогда модель (4) будет безарбитражной. Нетрудно заметить, что процесс $W(Z(t))$ допускает представление

$$W\left(Z(t)\right)=\sum_{i=0}^{Z(t)}\zeta_i,$$

где $\zeta_0=0,\ \zeta_i, i\geqslant 1$ — независимые $N(0,1)$ – распределённые величины. В силу того, что для сложного процесса Пуассона справедливо представление

$$\sum_{i=0}^{Z_2(t)}\zeta_i=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,ds)$$

в виде стохастического интеграла по пуассоновской мере $\nu_2(A,t)$, в данном случае

$$M\nu(A,t)=\lambda t\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\gamma^2/2}d\gamma,\tilde{\nu}(A,t)=\nu(A,t)-M\nu(A,t), \tag{5}$$

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,ds)=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\nu(d\gamma,ds)-\lambda\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\gamma^2/2}\,d\gamma\,ds.$$

Плотность $\tilde{\rho}(t)$ будем искать в виде $\tilde{\rho}(t)=\exp\left(\pi(t)\right)$. Пользуясь обобщенной формулой Ито [10], можно убедиться, что если

$$\pi(t)=-\lambda\left(e^{\alpha^2/2}-1\right)t+\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)-\frac{1}{2}t+W_1(t),$$

где $\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)$ — мера (5), тогда процесс $\tilde{\rho}(t)=\exp\left(\pi(t)\right)$ будет мартингалом.

Действительно, обозначим $\chi(t)=\left(\mu-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)t+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)-\sigma^2t/2+\sigma W_1\left(t\right)$. Пользуясь обобщенной формулой Байеса, получим

$$\begin{gathered}M_{\tilde{P}_1}(P(t)/\Im_0^s)=\frac{1}{\tilde{\rho}(s)}M_{\tilde{P}}(\tilde{\rho}(t)P(t)/\Im_0^s)=P(s)=\\ =P(0)\exp\left(-\pi(s)\right)M\left\{\exp\left(\pi(t)+\chi(t)\right)/\Im_0^s\right\}=P(0)\exp\left(\chi(s)\right).\end{gathered}$$

Отсюда имеем $M\left\{\exp\left(\pi(t)+\chi(t)\right)/\Im_0^s\right\}=\exp\left(\chi(s)\right)\exp\left(\pi(s)\right)$. Обозначим

$$\zeta(t)=\pi(t)+\chi(t)=\left(\mu-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)t+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)-$$
$$-\sigma^2t/2+\sigma W_1\left(t\right)-\lambda\left(e^{\alpha^2/2}-1\right)t+\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)-t/2+W_1(t)=$$
$$=\left(\mu-\lambda\left[\sqrt{e}+e^{\alpha^2/2}-2\right]\right)t+(\alpha+1)\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)-(\sigma^2+1)t/2+\left(\sigma+1\right)W_1\left(t\right),$$

тогда достаточно показать, что $M\left\{\exp\left(\zeta(t)\right)/\Im_0^s\right\}=\exp\left(\zeta(s)\right)$, т.е. что процесс $\exp\left(\zeta(t)\right)$ является мартингалом. Применим к (6) формулу Ито и получим

$$e^{\zeta(t)}=e^{\zeta(s)}+\int_s^t e^{\zeta(\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{(\alpha+1)\gamma}-1\right]\tilde{\nu}(d\gamma,ds)+$$
$$+\int_s^t e^{\zeta(\tau)}\left(\mu-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]-(\sigma^2+1)/2+\lambda\left[e^{(1+\alpha)^2/2}-e^{(\alpha^2)/2}\right]+\left(\sigma+1\right)^2/2\right)d\tau+$$
$$+\int_s^t e^{\zeta(\tau)}\left(\sigma+1\right)W_1\left(\tau\right).$$

Для того, чтобы процесс $\exp\left(\zeta(t)\right)$ был мартингалом, необходимо существование α — корня уравнения:

$$\mu-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]+\sigma=-\lambda\left[e^{(1+\alpha)^2/2}-e^{\alpha^2/2}\right],$$
$$-\frac{\mu}{\lambda}+\left[\sqrt{e}-1\right]-\frac{\sigma}{\lambda}=e^{\alpha^2/2}\left[e^{1/2+\alpha}-1\right],$$
$$\left(-\frac{\mu}{\lambda}+\left[\sqrt{e}-1\right]-\frac{\sigma}{\lambda}\right)e^{-\alpha^2/2}=e^{1/2+\alpha}-1. \qquad (7)$$

Вторым условием является равенство нулю математического ожидания стохастических интегралов. Начнём с последнего. Из свойств стохастических интегралов для того, чтобы математическое ожидание равнялось нулю, достаточно выполнение условия:

$$M\int_0^T e^{2\zeta(\tau)}d\tau<+\infty,\quad \int_0^T Me^{2\zeta(\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{(\alpha+1)\gamma}-1\right]^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\gamma^2/2}d\gamma d\tau<+\infty. \qquad (8)$$

Нетрудно заметить, что (8) будет иметь место, если [10, стр. 465] $M\exp\left\{2\zeta\left(t\right)\right\}\leqslant e^{lt}$, где

$$\left(\sigma+1\right)^2+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{(\alpha_0+1)\gamma}-1\right]^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\gamma^2/2}d\gamma=$$
$$=\left(\sigma+1\right)^2+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{2(\alpha_0+1)\gamma}-2e^{(\alpha_0+1)\gamma}+1\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\gamma^2/2}d\gamma$$

если α_0 — конечная величина.

Решая уравнение (7) графически для разных случаев, можно увидеть, что уравнение всегда имеет единственный корень $\alpha_0<0$, $|\alpha_0|<+\infty$.

Тогда процесс $\pi(t)$ принимает конкретный вид:

$$\pi(t)=-\lambda\left(e^{\alpha_0^2/2}-1\right)t+\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma\tilde{\nu}(d\gamma,d\tau)-\frac{1}{2}t+W_1(t).$$

Значит, для меры $\tilde{P}$ определена эквивалентная мера $\tilde{P}_1$, по которой процесс $P(t)=P(0)\exp\left\{\left(\mu-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)t+W\left(Z(t)\right)-\sigma^2t/2+\sigma W_1\left(t\right)\right\}$ будет мартингалом. Таким образом, установлена безарбитражность модели (4).

Вывод уравнения для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S) – рынке. Вероятность неразорения будем рассматривать как критерий качества. Исследованиям оптимизации работы страховых компаний, когда критерием качества выступает вероятность неразорения, посвящено множество работ как зарубежных, так и отечественных авторов. Главной сложностью при решении задач такого рода является нахождение условий, обеспечивающих необходимую гладкость вероятности неразорения, как функции начального капитала страховой компании. Вопрос получил свое разрешение [11–13] для классической модели риска, а также для некоторых моделей со стохастическими премиями. В случае отсутствия диффузионной составляющей в основном процессе П. Самуэльсона требовалось существование гладких плотностей распределения размеров премий, исков и цен акций [1, 13, 14], что накладывало дополнительные ограничения. Целью данной работы является изложение нового способа выведения уравнений для вероятности неразорения страховой компании на конечном и бесконечном интервалах времени в случае поступления премий с постоянной скоростью.

Рассмотрим функционирование страховой компании на бесконечном промежутке времени. Пусть в нулевой момент времени $t = 0$ компания распоряжается начальным капиталом $\xi_x(0) = x$, а $\xi_x(t)$ — капитал компании в момент времени t. Определим вероятность неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени $\varphi(x) = P\left\{\xi_x(t) \leqslant 0, \, \forall t \leqslant 0\right\}$.

Премии страховой компании поступают со скоростью $c > 0$. Страховые иски к компании будем считать стохастическими. Пусть количество поступающих исков подчиняется пуассоновскому закону распределения $Z_1(t)$. Пусть η_k — величины исков с функцией распределения $P(\eta_k < y) = F(y)$, $F(dy) = F(y + dy) - F(y)$. Суммарные иски $\sum_{k=1}^{Z_1(t)} \eta_k$, где $\sum_{k=1}^{0} \eta_k = 0$, составляют сложный пуассоновский процесс с параметром λ, представимый в виде стохастического интеграла:

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} \alpha \nu_1(d\alpha, ds),$$

где $\nu_1(d\alpha, ds)$ — пуассоновская мера, $M\nu_1(d\alpha, ds) = \lambda_1 F(d\alpha) ds$, а $F(d\alpha)$ — мера интервала $(\alpha, \alpha + d\alpha)$.

Будем считать, что страховая компания размещает весь свой капитал на финансовом на (B, S)–рынке, а именно, в каждый момент времени капитал компании разбивается на две части: доля $0 \leqslant u \leqslant 1$ отводится на покупку акций, доля $(1 - u)$ — на банковский счет под процентную ставку r. Эволюция безрискового актива задается формулой $dB(t) = rB(t)dt$, где $B(0)$ — начальный счет. С помощью формулы Ито имеем

$$dP(t) = P(t)\left(\mu dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\gamma} - 1)\tilde{\nu}(d\gamma, dt) + \sigma dW_1(t)\right).$$

Из этого следует

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx P(t)\left(\mu \Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\gamma} - 1)\tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma \Delta W_1(t)\right),$$

откуда следует

$$P(t + \Delta t) = P(t)\left(1 + \mu \Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\gamma} - 1)\tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma \Delta W_1(t)\right).$$

$\dfrac{u\xi_x(t)}{P(t)}$ — количество акций, которое можно купить на сумму $u\xi_x(t)$ по цене $P(t)$ за акцию, отсюда цена рискового актива к моменту времени $t+\Delta t$:

$$u\xi_x(t)\left[1+\mu\Delta t+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\gamma}-1)\tilde{\nu}(d\gamma,\Delta t)+\sigma\Delta W_1(t)\right].$$

Следовательно, эволюция капитала компании будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\xi_x(t+\Delta t)=c\Delta t-\textstyle\int_0^{+\infty}\alpha\nu_1(d\alpha,\Delta t)+(1-u)\xi_x(t)(1+r\Delta t)+\\ +u\xi_x(t)\left[1+\mu\Delta t+\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{y}-1)\tilde{\nu}(dy,\Delta t)+\sigma\Delta W_1(t)\right].\end{gathered}$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ в последнем выражении, получим

$$\begin{gathered}d\xi_x(t)=\xi_x(t)\left(u\mu-ur+r-u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)dt+\\ +u\sigma\xi_x(t)dW_1(t)+cdt-\int_0^{+\infty}\alpha\nu_1(d\alpha,dt)+\\ +u\xi_x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{y}-1)\nu(dy,dt).\end{gathered}\tag{9}$$

Пусть первый скачок капитала происходит в момент времени $\tau=s$, а его величина равна y. До этого момента уравнение эволюции капитала очевидно имеет вид:

$$\begin{gathered}d\xi_x(s)=\xi_x(s)\left(u\mu-ur+r-u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)ds+\\ +cds+u\sigma\xi_x(s)dW_1(s),\ \xi_x(0)=x,s\geqslant 0.\end{gathered}\tag{10}$$

Пусть τ_1 — первый скачёк процесса $Z(t)$, β_1 — момент первого иска. В силу определения процессов эти моменты времени показательно распределены соответственно с параметрами $\lambda>0$ и $\lambda_1>0$. Приведём следующие рассуждения [11, 12]. Распределение величины $\min(\tau_1,\beta_1)$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda+\lambda_1$. Действительно, $P\{\min(\tau_1,\beta_1)>t\}=P\{\tau_1>t\}P\{\beta_1>t\}=e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$. Далее

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta s\to 0}P\{\tau_1\in[s,\Delta s)\,/\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s)\}=\\ =\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P\{\tau_1\in[s,\Delta s)\,,\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s)\}}{P(\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s))}=\\ =\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P\{\tau_1\in[s,\Delta s)\,,\beta_1\geqslant s+\Delta s\}}{P(\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s))}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\int_s^{s+\Delta s}\lambda\exp\{-\lambda t\}\,dt\exp\{-\lambda_1[s+\Delta s)\}}{\int_s^{s+\Delta s}(\lambda+\lambda_1)\exp\{-(\lambda+\lambda_1)t\}\,dt}=\\ =\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\lambda\exp\{-\lambda s\}\exp\{-\lambda_1[s+\Delta s)\}}{(\lambda+\lambda_1)\exp\{-(\lambda+\lambda_1)s\}}=\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}.\end{gathered}$$

Аналогично

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta s\to 0}P\{\beta_1\in[s,\Delta s)\,/\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s)\}=\\ =\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P\{\beta_1\in[s,\Delta s)\,,\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s)\}}{P(\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s))}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P\{\beta_1\in[s,\Delta s)\,,\beta_1\geqslant s+\Delta s\}}{P(\min(\tau_1,\beta_1)\in[s,\Delta s))}=\\ =\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\int_s^{s+\Delta s}\lambda_1\exp\{-\lambda_1 t\}\,dt\exp\{-\lambda[s+\Delta s)\}}{\int_s^{s+\Delta s}(\lambda+\lambda_1)\exp\{-(\lambda+\lambda_1)t\}\,dt}=\\ =\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\lambda_1\exp\{-\lambda_1 s\}\exp\{-\lambda[s+\Delta s)\}}{(\lambda+\lambda_1)\exp\{-(\lambda+\lambda_1)s\}}=\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}.\end{gathered}$$

Пусть $P\,(x,s,A) = P\,\{\xi_x(s) \in A\}\,,\ \xi_x(s)$ — решение уравнения (10). Действительно, если на отрезке времени $[0,t]$ скачка траектории процесса $\xi_x\,(s)\,, 0 \leqslant s \leqslant t$ нет, то вероятность этого события равна $P\,\{\min\,(\tau_1,\beta_1) > t\} = P\,\{\tau_1 > t\}\,P\,\{\beta_1 > t\} = e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$. Вероятность скачка на временном интервале $[s, s + \Delta s)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $(\lambda + \lambda_1)\exp\{-(\lambda + \lambda_1)\,s\}\,\Delta s$. Умножив последнее на условную вероятность $P\,\{\tau_1 \in [s,\Delta s)\,/\min\,(\tau_1,\beta_1) \in [s,\Delta s)\}$ будем иметь: вероятность того, что первый скачёк произойдёт на интервале $[s, s + ds)$ и он будет осуществлён за счёт процесса $W(Z(v))$ будет равна $(\lambda + \lambda_1)\exp\{-(\lambda + \lambda_1)\,s\}\,\dfrac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}ds =$ $\lambda\exp\{-(\lambda + \lambda_1)\,s\}\,ds$. Аналогично, вероятность того, что первый скачёк произойдёт на интервале $[s, s + ds)$ и он будет осуществлён за счёт процесса иска будет равна $(\lambda + \lambda_1)\exp\{-(\lambda + \lambda_1)\,s\}\,\dfrac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}ds = \lambda_1\exp\{-(\lambda + \lambda_1)\,s\}\,ds$.

С помощью формулы полной вероятности составим уравнение для вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени $[0,t]$:

$$\varphi(x,t) = \int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\int_0^{+\infty} P(x,s,dz)\left(\lambda\int_0^z \varphi(z-y,t-s)dF(y) + \right.$$
$$\left. +\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left((z + uz\,[e^y - 1])\,,t-s\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\right)ds + e^{-(\lambda+\lambda_1)t}, \tag{11}$$

Действительно, в случае, если первый скачёк $\xi_x\,(\rho)$ происходит в момент времени $0 < s < t$ за счёт поступления иска, то за оставшееся время $(t - s)$ разорение не наступит, если величина иска не будет превышать величины $\xi_x\,(s-0)$, что в наших обозначениях не превысит $z > 0$. Данный случай описывает первое слагаемое (11). Далее, если первый скачёк $\xi_x\,(\rho)$ происходит в момент времени $0 < s < t$ за счёт скачка $Z(\rho)$, то за оставшееся время $(t - s)$ вероятность неразорения, если скачёк будет величиной y, а перед скачком значение $\xi_x\,(s-0) = z > 0$, будет равна $\varphi\left((z + uz\,[e^y - 1])\,,t-s\right)$, после чего необходимо произвести усреднение по распределению величины скачка. Данный случай описывает второе слагаемое (11). Тогда очевидно, что уравнение для вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени $[0,t)$ примет вид:

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\int_0^{+\infty} P(x,s,dz)\left(\lambda\int_0^z \varphi(z-y)dF(y) + \right.$$
$$\left. +\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(((1-u) + ue^y)\,z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\right)ds. \tag{12}$$

где $P(x,t,A) = P\,\{\xi_x(t) \in A\}$ — вероятность перехода процесса $\xi_x(t)$ из точки x за время $t > 0$ во множество A. Основной проблемой при переходе от уравнений (11) и (12) к соответствующим интегро–дифференциальным уравнениям является доказательство определённой гладкости для вероятности неразорения [11, 15–18].

Предположим, что существует плотность величины исков: $f(x) = F'(x)$. Пусть $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x)$ — непрерывна, тогда взяв частные производные по z, будем иметь

$$Q_1(z,t)=\int_0^z\varphi(z-y,t)f(y)dy=\int_0^z\varphi(y,t)f(z-y)dy,$$

$$Q_1^{'}(z,t)=\varphi(z,t)f(0)+\int_0^z\varphi(y,t)f'(z-y)dy,$$

$$Q_1^{''}(z,t)=\varphi(z,t)f'(0)+\int_0^z\varphi(y,t)f''(z-y)d.$$

Обозначим $Q_2(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z,t\right)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy$. Введя замену $b=\left((1-u)+ue^y\right)z$, получим:

$$Q_2(z,t)=\int_{(1-u)z}^{+\infty}\frac{\varphi\left(b,t\right)}{b-(1-u)z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\dfrac{\ln^2\left(b/uz-1/u+1\right)}{2}}db.$$

Тогда первая частная производная по переменной z примет вид

$$Q_2^{'}(z,t)=\int_{(1-u)z}^{+\infty}\frac{\varphi(b,t)}{\sqrt{2\pi}(b-(1-u)z)}e^{-(\ln^2(b/uz-1/u+1))/2}\left\{\frac{b\ln(b/uz-1/u+1)}{uz^2(b/uz-1/u+1)}-\frac{u-1}{b-(1-u)z}\right\}db,$$

то есть производная по нижнему пределу равна нулю.

Аналогично, вторая и третья частные производные от $Q_2(z,t)$ по z также существуют и обладают таким же свойством, не приведены в тексте из-за объемности выражений.

Обозначим

$$a_t(x)=\lambda\int_0^x\varphi(x-y,t)dF(y)+\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy. \quad (13)$$

Введем следующую функцию $U_t(s,x), 0\leqslant s\leqslant t$: $U_t(s,x)=Ma_t\left(\xi_x(s)\right), 0\leqslant s\leqslant t$, где $t>0$, $x\in R$, $U_t(0,x)=a_t(x)$. По переменной x функция $a_t(x)\in C^2$ — дважды непрерывно дифференцируемая, коэффициенты обладают соответствующей гладкостью [19].

Тогда $U_t(s,x)$ удовлетворяет уравнению [19]

$$\frac{\partial U_t(s,x)}{\partial s}=\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2U_t(s,x)}{\partial x^2}+\left[\left(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x+c\right]\frac{\partial U_t(s,x)}{\partial x}. \quad (14)$$

$U_t(s,x)$ также можно записать в виде

$$U_t(s,x)=\int_0^{+\infty}a_t(z)P(x,s,dz), \quad (15)$$

где $P(x,s,A)$ — вероятность перехода процесса $\xi_x(s)$ из состояния x во множество A. Из (10) следует, что

$$\varphi(x,t)=\int_0^te^{-(\lambda+\lambda_1)s}\int_0^{+\infty}P(x,s,dz)a_t\left(z\right)ds+e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$$

либо

$$\varphi(x,t)=\int_0^te^{-(\lambda+\lambda_1)s}U_t\left(s,x\right)ds+e^{-(\lambda+\lambda_1)t}. \quad (16)$$

Из (16) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) = -\frac{1}{\lambda+\lambda_1}\int_0^t U_t\left(s,x\right)de^{-(\lambda+\lambda_1)s} + e^{-(\lambda+\lambda_1)t} = \\ = -\frac{1}{\lambda+\lambda_1}\left[e^{-(\lambda+\lambda_1)t}U_t\left(t,x\right) - a_t\left(x\right)\right] + \\ +\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\frac{\partial U_t\left(s,x\right)}{\partial s}ds + e^{-(\lambda+\lambda_1)t}.\end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda}[-e^{-(\lambda+\lambda_1)t}U_t\left(t,x\right) + \lambda\int_0^x \varphi(x-y,t)dF(y) + \\ +\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy] + \frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} + \\ +\left\{\left(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x+c\right\}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} + e^{-(\lambda+\lambda_1)t}.\end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) - e^{-(\lambda+\lambda_1)t} = \textstyle\int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}U_t\left(s,x\right)ds \rightarrow \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + (\lambda+\lambda_1)e^{-(\lambda+\lambda_1)t} = \\ = U_t\left(t,x\right)e^{-(\lambda+\lambda_1)t} \rightarrow \\ \rightarrow U_t\left(t,x\right) = \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}e^{(\lambda+\lambda_1)t} + (\lambda+\lambda_1)\end{aligned} \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем:

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) = \frac{1}{\lambda+\lambda_1}[-\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \lambda\int_0^x \varphi(x-y,t)dF(y) + \\ +\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy] + \\ +\frac{1}{\lambda+\lambda_1}\left[\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} + \left[\left(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x+c\right]\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right]\end{aligned} \tag{19}$$

В случае бесконечного времени функционирования страховой компании из (11) следует

$$a(x) = \lambda\int_0^x \varphi(x-y)dF(y) + \lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy. \tag{20}$$

Пусть T_s — полугруппа операторов: $T_s a\left(x\right) = \int_0^{+\infty} P(x,s,dz)a\left(z\right)$, отметим, что $U(t,x) = T_t(a(x))$, $R_{\lambda+\lambda_1}a\left(x\right) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\lambda_1)s}T_s a\left(x\right)ds$ — резольвента.

Пусть A — инфинитезимальный оператор, тогда [20]

$$\begin{aligned}\lim_{h\rightarrow+0}\tfrac{1}{h}\left(T_h a(x) - a(x)\right) = Aa(x) = \\ = \lim_{h\rightarrow+0}\tfrac{1}{h}\left(U(h,x) - U(0,x)\right) = \tfrac{\partial U}{\partial t}(t=0) = \\ = \tfrac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\tfrac{\partial^2 a(x)}{\partial x^2} + \left[\left(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x+c\right]\tfrac{\partial a(x)}{\partial x}.\end{aligned} \tag{21}$$

При наших предположениях функция $a\,(x)$ принадлежит области определения оператора A, резольвента $R_{\lambda+\lambda_1}a(x)$ также принадлежит области определения оператора A, тогда воспользуемся теоремой [20, с. 149] и получим:

$$AR_{\lambda+\lambda_1}a(x) = (\lambda+\lambda_1)R_{\lambda+\lambda_1}a(x) - a(x). \tag{22}$$

Заметим, что $R_{\lambda+\lambda_1}a(x) = \varphi(x)$, следовательно, $AR_{\lambda+\lambda_1}a(x) = A\varphi(x)$.

$$\begin{gathered}(\lambda+\lambda_1)\varphi\,(x) = \tfrac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi''(x)+\\ +\left[(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right])\,x+c\right]\varphi'(x)+\\ +\lambda\int_0^x\varphi(x-y)dF(y)+\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(((1-u)+ue^y)\,z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy.\end{gathered}$$

Подводя итоги, имеем, в рамках сделанных предположений, уравнение для вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени.

Сформулируем теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $f(0)=f'(0)=0$, $f''(x)$ *– непрерывна, тогда на конечном промежутке времени* $[0,t]$ *функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданного уравнением* (9), $\varphi\,(x,t)$ *– вероятность неразорения страховой компании имеет производные* $\varphi'_x(x,t)$ *и* $\varphi''_{xx}(x,t)$ *и удовлетворяет интегро–дифференциальному уравнению*

$$\begin{gathered}(\lambda+\lambda_1)\,\varphi(x,t)+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}+\\ +\left[(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right])\,x+c\right]\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}+\lambda\int_0^x\varphi(x-y,t)dF(y)+\\ +\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(((1-u)+ue^y)\,z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy.\end{gathered}\tag{23}$$

Теорема 2. *Пусть* $f(0)=f'(0)=0$, $f''(x)$ *– непрерывна, тогда на бесконечном промежутке времени* $[0,\infty)$ *функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданного уравнением* (9), $\varphi\,(x)$ *– вероятность неразорения страховой компании за бесконечное время, имеет производные* $\varphi'(x)$ *и* $\varphi''(x)$ *и удовлетворяет интегро–дифференциальному уравнению*

$$\begin{gathered}(\lambda+\lambda_1)\varphi\,(x)=\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi''(x)+\\ +\left[(\mu u+(1-u)r-u\lambda_1\left[\sqrt{e}-1\right])\,x+c\right]\varphi'(x)+\lambda\int_0^x\varphi(x-y)dF(y)+\\ +\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(((1-u)+ue^y)\,z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy.\end{gathered}\tag{24}$$

Замечание. *Следует отметить, что формальным переходом при* $t\to+\infty$ *уравнение* (24) *получается из уравнения* (23)*, однако необходимо математически строгое обоснование предела* $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\partial\varphi\,(x,t)}{\partial t}=0$*, что совсем не очевидно.*

Выводы. Таким образом, для модели страховой компании с премиями $ct, c>0$, функционирующей на (B,S)–рынке, был предложен метод выведения интегро–дифференциального уравнения как на конечном, так и на бесконечном интервалах времени.

Особенностью такого способа получения уравнений для вероятности неразорения является то, что на примерах он показывает существование производных функции вероятности неразорения вплоть до второго порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельников А. В. Математика финансовых обязательств / А. В. Мельников, С. Н. Волков, М. Л. Нечаев. – М.: ГУ ВШЭ. – 2001. – 260 с.
2. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1, 2 / А. Н. Ширяев. – М.: Фазис. – 1998. – 1056 с.
3. Samuelson P. A. Rational theory of warrant pricing / P. A. Samuelson // Industrial Management Review. – 1965. – Vol. 6. – P. 13–31.
4. Королев В. Ю. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования / В. Ю. Королев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1997. – Т. 4, вып. 1. – С. 86–100.
5. Kendal M. G. The analysis of economic time–series. Part 1. Prices / M. G. Kendal // Journal of the Royal Statistical Society. – 1953. – Vol. 96. – P. 11–25.
6. Корн Г. Справочник математика (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука. – 1968. – 720 с.
7. Clarc P. K. A Subordinated Stochastic Process Model of Cotton Futures Prices / P. K. Clarc. – Cambridge, Ma.: Harvard University. – 1970.
8. Clarc P. K. A Subordinated Stochastic Process Model with finite variance for speculative prices / P. K. Clarc. – Econometrica. – 1973. – P. 135–155.
9. Бондарев Б. В. Некоторые задачи для модели Кларка. I. Оценка вероятности неразорения страховой компании / Б. В. Бондарев, О. Е. Сосницкий // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 10. – С. 139–149.
10. Бондарев Б. В. Некоторые задачи для модели Кларка. II. Оценка вероятности неразорения страховой компании / Б. В. Бондарев, О. Е. Сосницкий // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 5. – С. 99–111.
11. Бондарев Б. В. Вывод уравнения для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S) – рынке / Б. В. Бондарев, В. О. Болдырева // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 113–121.
12. Рагуліна О. Ю. Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою / О. Ю. Рагуліна // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2010. – № 1–2. – С. 82–116.
13. Pervozvansky A. A. Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force / A. A. Pervozvansky // Insurance: Mathematics and Economics. – 1998. – Vol. 23, Issue 3. – P. 287–295.
14. Теоретико–ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. – К.: Інформтехніка. – 1995. – 380 с.
15. Белкина Т. А. О проблеме оптимального управления инвестициями в динамических моделях страхования. II. Модель Крамера–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований / Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, А. О. Куркина // Обозрение прикладной и промышленной математики.– 2010. – Т. 17, вып. 1. – С. 3–24
16. Белкина Т. А. О проблеме оптимального управления инвестициями в динамических моделях страхования. I. Различные инвестиционные стратегии и вероятность разорения / Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, А. О. Куркина // Обозрение прикладной и промышленной математики.– 2009. – Т. 16, вып. 6. – С. 961–981
17. Белкина Т. А. Сингулярная краевая задача для интегро–дифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение / Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, А. О. Куркина // Вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, №. 10. – С. 1812–1846
18. Белкина Т. А. Сингулярные начальные и краевые задачи для интегро–дифференциальных уравнений в динамических моделях страхования с учетом инвестиций / Т. А. Белкина, Н. Б. Конюхова, А. О. Куркина // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2014. – Т. 53. – С. 5–29
19. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, В. И. Скороход. –

К.: Наукова думка. – 1968. – 354 с.
20. Гихман И. И. Теория случайных процессов. Т. 2 / И. И. Гихман, В. И. Скороход. – М.: Наука. – 1973. – 640 с.

Поступила в редакцию 28.03.2016 г.

MODIFIED MODEL P. CLARK. THE PROBABILITY OF NON–RUIN INSURANCE COMPANIES WORKING ON (B, S)–MARKET. MODEL LUNDBERG

B. V. Bondarev, M. I. Khmelina

This paper shows how to derive integral–differential equations for the probability of non–ruin of insurance companies operating in the financial (B, S)–market on the finite and infinite time intervals. The model of Clark with additional diffusion part is considered as a model of risky asset.

Keywords: insurance company, survival probability, financial (B, S)–market, P. Clark model, semigroup of operators, infinitesimal operator, resolvent.

Бондарев Борис Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
зав. кафедрой теории вероятностей и математической статистики
bondarev.mart@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-050-6260732

Хмелина Мария Игоревна
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
аспирантка кафедры теории вероятностей и математической статистики
grad_mariya@mail.ru
+38-095-7220765

Bondarev Boris Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor
Donetsk National University, Donetsk
Head of the Department of probability theory and mathematical statistics

Khmelina Mariia Ihorevna
Donetsk National University, Donetsk
Postgraduate at the Department of probability theory and mathematical statistics

ISSN 2415-7058. Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1

УДК 517.444

ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2016. *В. В. Волчков, Вит. В. Волчков*

Рассматривается задача об описании множества непрерывных функций на симметрическом пространстве X ранга один некомпактного типа, имеющих нулевые интегралы по всем сферам, охватывающим данный шар. Получено решение этой задачи и ее обобщений для кольцевых областей в X. В качестве приложения доказана новая теорема единственности для функций с нулевыми сферическими средними.

***Ключевые слова*:** сферические средние, симметрические пространства, трансмутационные операторы.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. При изучении инъективности преобразования Радона на $\mathbb{R}^n$ важную роль играет следующее утверждение о функциях с нулевыми сферическими средними.

Теорема А [1]. *Пусть $f \in C(\mathbb{R}^n)$ имеет нулевой интеграл по любой сфере, содержащей внутри себя шар $|x| \leqslant 1$. Пусть также*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^k |f(x)| < \infty, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{1}$$

Тогда $f(x) = 0$ при $|x| > 1$.

В работах [1; 2, гл. 1; 3, гл. 1.8] показано, что быстрое убывание f в этом утверждении нельзя опустить или существенно ослабить.

В работе [4] С. Хелгасон предложил распространить теорему А на произвольное полное односвязное риманово многообразие M отрицательной кривизны. Для многообразий M, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, это было сделано Е. Гринбергом и Е. Т. Квинто [5] с помощью техники микролокального анализа, основанной на изучении аналитических волновых фронтов распределений.

С другой стороны, в связи с необходимостью условия (1) в теореме А, возникает задача об описании класса непрерывных функций в области $\alpha < |x| < \beta$, имеющих нулевые интегралы по всем сферам, охватывающим шар $|x| \leqslant \alpha$. Постановка и решение ее двумерного варианта принадлежат Й. Глобевнику [6]. Обобщения на n-мерный случай изучались К. Эпстейном, Б. Клейнером [7] и В. В. Волчковым [8]. Позже были установлены соответствующие аналоги полученных в [6–8] результатов для некоторых гиперболических пространств [9, 10].

В данной работе получен аналог теоремы А для произвольного риманова симметрического пространства X ранга 1 некомпактного типа (см. теорему 2 ниже). Доказательство этого результата основано на описании функций с нулевыми интегралами по сферам, охватывающим фиксированный шар в X (см. теорему 1). Как известно (см. [11, гл. 1, § 4, п. 2,3]), всякое такое X изометрично одному из следующих пространств: 1) вещественному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$; 2) комплексному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$; 3) кватернионному гиперболическому пространству $\mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$; 4) гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$.

Формулировки основных результатов. Далее используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_+$ — соответственно множества вещественных, комплексных и целых неотрицательных чисел; $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; dx — мера Лебега в евклидовом пространстве.

Пусть X — риманово симметрическое пространство ранга 1 некомпактного типа, $d(\cdot,\cdot)$ — функция расстояния на X, 0 — фиксированная точка (начало) в X. Ниже будут встречаться следующие множества в X:

$$B_R(x) = \{y \in X : d(x,y) < R\}, \quad B_R = B_R(0), \quad B_{a,b} = \{y \in X : a < d(0,y) < b\},$$

$$S_R(x) = \{y \in X : d(x,y) = R\}, \quad S_R = S_R(0).$$

Буквой $\mathcal{O}$ будет обозначаться открытое множество в X.

Далее, нам потребуются следующие классы функций: $C^s(\mathcal{O})$ ($s \in \mathbb{Z}_+$ или $s = \infty$) — пространство s раз непрерывно дифференцируемых на $\mathcal{O}$ функций; $\mathcal{E}(\mathcal{O}) = C^\infty(\mathcal{O})$; $L^p(\mathcal{O})$ и $L^{p,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ ($p \in [1,+\infty)$) — класс p-интегрируемых и соответственно p-локально интегрируемых на $\mathcal{O}$ функций по римановой мере $d\mu$ (см. равенство (3) ниже); если E — произвольное множество функций на $\mathcal{O}$, то $\mathcal{L}in\, E$ — совокупность всех конечных линейных комбинаций функций из E;

Обозначим также через L оператор Лапласа–Бельтрами на X. Относительно геометрических и теоретико-групповых свойств пространств X см. [11, гл. 1, § 4, п. 2,3].

Дальнейшие построения опираются на классификацию симметрических пространств ранга 1 некомпактного типа и их реализации.

Будем считать, что минимум секционной кривизны пространства X равен -4. Тогда X можно рассматривать как риманово многообразие $(\mathcal{D}, ds^2)$, где область $\mathcal{D}$ и риманова метрика ds^2 задаются следующим образом (см. [12, часть 1, гл. 2, 3]):

1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $ds^2 = (1-|x|^2)^{-2}|dx|^2$;

2) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$,

$$ds^2 = (1-|z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1-|z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_1(z,dz),$$

где

$$\mathfrak{F}_1(z,dz) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i z_j dz_i d\overline{z}_j;$$

3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{2n} : |z| < 1\}$,

$$ds^2 = (1-|z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1-|z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_2(z,dz),$$

где

$$\mathfrak{F}_2(z,dz) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\big(\overline{z}_i z_j + z_{n+i}\overline{z}_{n+j}\big) dz_i d\overline{z}_j +$$

$$+ \big(\overline{z}_i z_{n+j} - z_{n+i}\overline{z}_j\big) dz_i d\overline{z}_{n+j} + \big(\overline{z}_{n+i} z_j - z_i \overline{z}_{n+j}\big) dz_{n+i} d\overline{z}_j +$$

$$+ \big(z_i \overline{z}_j + \overline{z}_{n+i} z_{n+j}\big) dz_{n+i} d\overline{z}_{n+j} \Big);$$

4) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{16} : |x| < 1\}$,

$$ds^2 = (1 - |x|^2)^{-1}|dx|^2 + 2^{-1}(1 - |x|^2)^{-2}\mathfrak{F}_3(x, dx),$$

где

$$\mathfrak{F}_3(x, dx) = \sum_{i,j=1}^{16} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(\Phi(x, y)\big)dx_i dx_j,$$

$$\Phi(x, y) = 2\big(p_1(x)p_1(y) + \cdots + p_8(x)p_8(y)\big) + p_9(x)p_9(y) + p_{10}(x)p_{10}(y),$$

$$p_1(x) = x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6 - x_7x_8 - x_9x_{10} - x_{11}x_{12} - x_{13}x_{14} - x_{15}x_{16},$$

$$p_2(x) = x_1x_4 - x_9x_{12} - x_5x_8 - x_{13}x_{16} + x_3x_2 + x_{11}x_{10} + x_7x_6 + x_{15}x_{14},$$

$$p_3(x) = x_1x_6 - x_9x_{14} + x_5x_2 + x_{13}x_{10} + x_3x_8 + x_{11}x_{16} - x_7x_4 - x_{15}x_{12},$$

$$p_4(x) = x_1x_8 + x_9x_{16} + x_5x_4 - x_{13}x_{12} - x_3x_6 + x_{11}x_{14} + x_7x_2 - x_{15}x_{10},$$

$$p_5(x) = x_1x_{10} + x_9x_2 + x_5x_{14} - x_{13}x_6 + x_3x_{12} - x_{11}x_4 - x_7x_{16} + x_{15}x_8,$$

$$p_6(x) = x_1x_{12} + x_9x_4 - x_5x_{16} + x_{13}x_8 - x_3x_{10} + x_{11}x_2 - x_7x_{14} + x_{15}x_6,$$

$$p_7(x) = x_1x_{14} + x_9x_6 - x_5x_{10} + x_{13}x_2 + x_3x_{16} - x_{11}x_8 + x_7x_{12} - x_{15}x_4,$$

$$p_8(x) = x_1x_{16} - x_9x_8 + x_5x_{12} + x_{13}x_4 - x_3x_{14} - x_{11}x_6 + x_7x_{10} + x_{15}x_2,$$

$$p_9(x) = x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_{15}^2, \quad p_{10}(x) = x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{16}^2.$$

Отметим, что многочлены $p_1, \ldots, p_8$ и форма $\Phi(x, y)$ наглядно интерпретируются в терминах чисел Кэли (см. [11, гл. 1, § 4, п. 2; 13, гл. 1, § 11]).

Расстояние на X в указанных выше моделях определяется равенством

$$d(0, x) = \operatorname{arth}|x| \tag{2}$$

и условием инвариантности d относительно группы изометрий G пространства X. Обозначим через a_X вещественную размерность пространства X. Соотношение (2) показывает, что геодезический шар B_R совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и радиусом $\operatorname{th} R$.

Положим $\alpha_X = \dfrac{a_X - 2}{2}$, а

$$\beta_X = \frac{n-2}{2}, \ 0, \ 1, \ 3$$

соответственно в каждом из следующих четырех случаев: 1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$; 2) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$; 3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$; 4) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$. Параметры α_X, β_X и

$$\rho_X = \alpha_X + \beta_X + 1$$

просто выражаются через кратности корневых подпространств алгебры Ли группы G (см. [11, гл. 1, § 4, п. 2; 13, гл. 1, § 11]). Риманова мера на X имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx}{(1 - |x|^2)^{\rho_X + 1}}. \tag{3}$$

Площадь сферы радиуса r в X связана с площадью b_X единичной сферы в $\mathbb{R}^{a_X}$ равенством

$$A_X(r) = b_X \,\frac{(\operatorname{th} r)^{2\alpha_X+1}}{(1-\operatorname{th}^2 r)^{\rho_X}}.$$

Пусть $\mathcal{H}^k_{a_X}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ — пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$. Обозначим

$$M_X(k) = \begin{cases} 0, & X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \\ [k/2]\,, & X \neq \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Для $m \in \big\{0, \dots, M_X(k)\big\}$, $X \neq \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ определим

$$\mathcal{H}^{k,m}_X = \big\{ f \in \mathcal{H}^k_{a_X} : (Lf)(x) = 4(\beta_X - m)(k-m)(1-|x|^2)f(x) \big\}.$$

В случае, когда $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, положим $\mathcal{H}^{k,m}_X = \mathcal{H}^k_{a_X}$. Отождествим $\mathcal{H}^{k,m}_X$ с пространством сужений его элементов на сферу

$$\mathbb{S}^{a_X-1} = \{x \in \mathbb{R}^{a_X} : |x| = 1\}.$$

Произвольная точка $x \in \mathbb{R}^{a_X} \setminus \{0\}$ представима в виде

$$x = \varrho\sigma, \qquad \text{где} \quad \varrho = |x|,\, \sigma = x/|x|.$$

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое K-инвариантное множество в X. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d^{k,m}_X} f_{k,m,j}(\varrho) Y^{k,m}_j(\sigma), \tag{4}$$

где $d^{k,m}_X$ — размерность $\mathcal{H}^{k,m}_X$, $\{Y^{k,m}_j\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{k,m}_X$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$ и

$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\sigma)\overline{Y^{k,m}_j(\sigma)}\,d\omega(\sigma). \tag{5}$$

Далее будем считать, что $Y^{0,0}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{b_X}}$. Если $f \in \mathcal{E}(\mathcal{O})$, то ряд (4) сходится к f в пространстве $\mathcal{E}(\mathcal{O})$.

Пусть $b > a \geqslant 0$. Определим класс $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ равенством

$$\mathcal{Z}(B_{a,b}) = \left\{ f \in C(B_{a,b}) : \int\limits_{S_r(y)} f(x)d\mu_0(x) = 0 \quad \forall r \in (a,b),\;\; y \in B_{\min\{r-a,\, b-r\}} \right\} \tag{6}$$

(здесь и далее $d\mu_0$ — риманова мера на $S_r(y)$, индуцированная мерой $d\mu$). Класс $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ является аналогом классов, рассматриваемых ранее Глобевником, Хелгасоном и др. (см. § 1 выше).

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \big\{0, \dots, M_X(k)\big\}$ положим

$$E_{k,m} = \mathcal{L}in\,\big\{u_p(\varrho),\ 1 \leqslant p \leqslant k-m;\ v_p(\varrho),\ 1 \leqslant p \leqslant m\big\}, \tag{7}$$

где

$$u_p(\varrho) = \frac{(1-\varrho^2)^{p+\alpha_X+\beta_X}}{\varrho^{k+2\alpha_X}}, \tag{8}$$

$$v_p(\varrho) = \begin{cases} \dfrac{(1-\varrho^2)^{\alpha_X+p}}{\varrho^{k+2\alpha_X}}, & 1 \leqslant p \leqslant \beta_X + 1 \\ \dfrac{(1-\varrho^2)^{\alpha_X+p}\ln(1-\varrho^2)}{\varrho^{k+2\alpha_X}}, & \beta_X + 2 \leqslant p \leqslant m\,, \end{cases} \quad \text{если} \quad \beta_X + 2 \leqslant m, \tag{9}$$

и

$$v_p(\varrho) = \frac{(1-\varrho^2)^{\alpha_X+p}}{\varrho^{k+2\alpha_X}}, \quad \text{если} \quad \beta_X + 2 > m. \tag{10}$$

В случае, когда неравенство $1 \leqslant p \leqslant k-m$ или $1 \leqslant p \leqslant m$ не имеет решений $p \in \mathbb{N}$, соответствующий набор функций в (7) заменяется на нулевую функцию.

Ясно, что $E_{k,m} = \{0\}$ при $k = 0$. При $k \geqslant 1$ функции из $E_{k,m}$ можно охарактеризовать как ядро некоторого дифференциального оператора, связанного с инфинитезимальными операторами группы G (см. лемму 3, а также доказательство леммы 6 ниже).

Следующий результат дает описание класса $\mathcal{Z}(B_{a,b})$ в терминах разложений в ряды по сферическим гармоникам.

Теорема 1. *Пусть* $b > a \geqslant 0$, $f \in C(B_{a,b})$. *Тогда для того чтобы* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f_{k,m,j} \in E_{k,m}$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \big\{0, \dots, M_X(k)\big\}$, $j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$.

Равенства (8)–(10) показывают, что не существует нетривиальной функции $f \in \mathcal{Z}(B_{a,\infty})$ с быстрым стремлением к нулю при $d(0,x) \to \infty$. Точнее, имеет место

Теорема 2. *Пусть* $a > 0$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Пусть* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,\infty})$ *и при любом* $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\sup_{x \in B_{a,\infty}} \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^N |f(x)| < \infty. \tag{11}$$

Тогда $f = 0$ *в* $B_{a,\infty}$.

(ii) *Для любого* $N \in \mathbb{Z}_+$ *существует ненулевая функция* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,\infty})$ *с условием* (11).

Обозначения и вспомогательные конструкции. Пусть Γ — гамма-функция, $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$R_\mu^{(\alpha,\beta)}(t) = F(-\mu, \mu+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-t)/2)$$

— функции Якоби первого рода, $\mathrm{O}(n)$ — ортогональная группа в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций. Пусть $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ — соответственно пространства распределений и распределений с компактными носителями на $\mathcal{O}$. Носитель распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ будет обозначаться $\operatorname{supp} f$.

Символ × используется для свертки распределений на областях в X в тех случаях, когда она существует [11, гл. 2, § 5]. Для свертки распределений на $\mathbb{R}^n$ сохраняется обычный значок " $*$ ".

Интегральное условие в (6) можно записать в виде

$$(f \times \sigma_r)(y) = 0, \tag{12}$$

где σ_r — поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на S_r.

После отождествления $\mathcal{H}_X^{k,m}$ с пространством сужений его элементов на сферу $\mathbb{S}^{a_X-1}$, пространство $\mathcal{H}_X^{k,m}$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}$ группы $K = G \cap \mathrm{O}(a_X)$ на $L^2\left(\mathbb{S}^{a_X-1}\right)$. Сужения $\mathfrak{T}^{k,m}$ представления $\mathfrak{T}$ на $\mathcal{H}_X^{k,m}$ являются попарно неэквивалентными неприводимыми унитарными представлениями, причем имеет место следующее разложение в ортогональную прямую сумму:

$$\mathfrak{T} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \mathfrak{T}^{k,m}$$

(см. [12, часть 1, гл. 4]).

Пусть $\{t_{i,j}^{k,m}(\tau)\}$, $i, j \in \{1, \ldots, d_X^{k,m}\}$, — матрица представления $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ в базисе $\{Y_j^{k,m}\}$, $d\tau$ — мера Хаара на K общей массы 1. Разложение (4) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ следующим образом:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d_X^{k,m}} f^{k,m,j}, \tag{13}$$

где ряд (13) сходится к f в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ и распределение $f^{k,m,j}$ действует на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ по правилу

$$\langle f^{k,m,j}, \psi \rangle = \left\langle f, d_X^{k,m} \int_K \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^{k,m}(\tau) d\tau \right\rangle = \langle f, \overline{\left(\overline{\psi}\right)_{k,m,j}(\varrho)}\ \overline{Y_j^{k,m}(\sigma)} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{14}$$

Для всякого множества $\mathfrak{W}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ положим

$$\mathfrak{W}_{k,m,j}(\mathcal{O}) = \left\{ f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{k,m,j} \right\},$$

$$\mathfrak{W}_{\natural}(\mathcal{O}) = \mathfrak{W}_{0,0,1}(\mathcal{O}). \tag{15}$$

Отметим, что аналогом класса (15) в одномерном случае является совокупность $\mathfrak{W}_{\natural}(-R, R)$ всех чётных распределений из заданного множества $\mathfrak{W}(-R, R)$ в $D'(-R, R)$. Нетрудно видеть, что носитель распределения $f \in \mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ является K-инвариантным. Для $f \in \mathcal{E}'_{k,m,j}(B_R)$ положим

$$r(f) = \inf\, \{r > 0 : \operatorname{supp} f \subset B_r\}.$$

Пусть $\alpha(k) = \alpha_X + k$, $\beta(k, m) = \beta_X + k - 2m$,

$$\nu_X(\lambda) = \frac{\rho_X + i\lambda}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

При отождествлении представлений $\mathfrak{T}^{k,m}$ с парами (k,m), числа $\alpha(k)$ и $\beta(k,m)$ совпадают с параметрами обобщенных сферических функций типа (k,m) на симметрических пространствах ранга один (см. [13, гл. 3, с. 372]). Обозначим

$$c_1(k,m,\lambda)=\frac{-2(\nu_X(\lambda)+k-m)(\nu_X(-\lambda)+k-m)}{k+\alpha_X+1},$$

$$c_2(k,m,\lambda)=\frac{-2(\nu_X(\lambda)+m-\beta_X)(\nu_X(-\lambda)+m-\beta_X)}{k+\alpha_X+1},$$

$$c_3(k,m)=2(k+\alpha_X).$$

Введем функции

$$\Phi_\lambda^{k,m,j}(x)=\sqrt{b_X}\,\Phi_\lambda^{k,m}(\varrho)\,Y_j^{k,m}(\sigma),\quad x\in X\backslash\{0\},\tag{16}$$

где

$$\Phi_\lambda^{k,m}(\varrho)=\varrho^k\,(1-\varrho^2)^{m-k}\,R^{(\alpha(k),\,\beta(k,m))}_{m-k-\nu_X(-\lambda)}\left(\frac{1+\varrho^2}{1-\varrho^2}\right).\tag{17}$$

Определим операторы $D(\alpha,\beta)$ равенством

$$\left(D(\alpha,\beta)\varphi\right)(\varrho)=\frac{(1-\varrho^2)^{\beta+1}}{\varrho^\alpha}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{\varrho^\alpha}{(1-\varrho^2)^\beta}\varphi(\varrho)\right).\tag{18}$$

При некоторых значениях параметров α, β операторы $D(\alpha,\beta)$ тесно связаны с инфинитезимальными операторами, порожденными инволютивными изометриями пространства X (см. [12, гл. 16]). Действие этих операторов на функции $\Phi_\lambda^{k,m}$ приводит к понижению или повышению верхних индексов. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $k\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\{0,\dots,M_X(k)\}$. Тогда:*

(i) *имеет место равенство*

$$D(-k,m-k)\Phi_\lambda^{k,m}=c_1(k,m,\lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m};\tag{19}$$

(ii) *если $m\leqslant M_X(k+1)-1$, то*

$$D(-k,\beta_X-m)\Phi_\lambda^{k,m}=c_2(k,m,\lambda)\Phi_\lambda^{k+1,m+1};\tag{20}$$

(iii) *если $k\geqslant 1$ и $m\leqslant M_X(k-1)$, то*

$$D(k+2\alpha_X,k+\rho_X-1-m)\Phi_\lambda^{k,m}=c_3(k,m)\Phi_\lambda^{k-1,m};\tag{21}$$

(iv) *если $m\geqslant 1$, то*

$$D(k+2\alpha_X,\alpha_X+m)\Phi_\lambda^{k,m}=c_3(k,m)\Phi_\lambda^{k-1,m-1}.\tag{22}$$

Доказательство. Применяя формулы дифференцирования гипергеометрической функции (см. [14, формулы 2.8 (20), 2.8 (22), 2.8 (24), 2.8 (27)]) и учитывая, что

$$F(\alpha,\beta;\gamma;t)=(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;t),$$

получаем (19)–(22) прямым вычислением с использованием (17), (18). ☐

Из (16) нетрудно видеть, что $\Phi_\lambda^{k,m,j}$ допускают непрерывное продолжение в точку $x=0$. Лемма 1 и [12, предложение 11.1] показывают, что доопределенные по непрерывности в нуле, функции $\Phi_\lambda^{k,m,j}$ становятся вещественно аналитическими на X и

$$(L+\lambda^2+\rho_X^2)\Phi_\lambda^{k,m,j}=0.$$

Пусть $f\in\mathcal{E}'_\natural(X)$,

$$\widetilde{f}(\lambda)=\left\langle f,\Phi_\lambda^{0,0,1}\right\rangle. \tag{23}$$

Функция $\widetilde{f}$ является четной целой функцией переменной λ. Она называется сферическим преобразованием распределения f [11, гл. 4]. Теоремы Винера-Пэли для преобразования (23) и классического преобразования Фурье (см. [12, гл. 9–11]) показывают, что $\widetilde{f}(\lambda)$ является преобразованием Фурье распределения из $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^1)$. Обозначим это распределение символом $\Lambda(f)$.

Из теоремы Хана-Банаха следует (см. [12, доказательство предложения 9.9]), что $\mathcal{L}in\,\{\Phi_\lambda^{k,m,j},\ \lambda\in\mathbb{C}\}$ является плотным множеством в пространстве $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ с топологией, индуцируемой $\mathcal{E}(B_R)$. Определим оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ на функциях $\Phi_\lambda^{k,m,j}$ равенством

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(\Phi_\lambda^{k,m,j})(t)=\cos(\lambda t),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ продолжается до гомеоморфизма $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ на $\mathcal{D}'_\natural(-R,R)$, который обозначается той же буквой. В следующем утверждении содержатся основные свойства отображения $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ (см. [12, гл. 9–11]).

Лемма 2.

(i) *Отображение* $\mathfrak{A}_{k,m,j}$ *является гомеоморфизмом между* $\mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$ *и* $\mathcal{E}_\natural(-R,R)$.

(ii) *Пусть* $f\in\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$, $r\in(0,R]$. *Тогда* $f=0$ *в* B_r *в том и только том случае, когда* $\mathfrak{A}_{k,m,j}(f)=0$ *на* $(-r,r)$.

(iii) *Для любого* $T\in\mathcal{E}'_\natural(B_R)$ *на интервале* $(r(T)-R,R-r(T))$ *имеет место обобщенное трансмутационное свойство*

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(f\times T)=\mathfrak{A}_{k,m,j}(f)*\Lambda(T),\quad f\in\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R).$$

Полагая

$$\mathcal{A}_j^{k,m}=\mathfrak{A}_{0,0,1}^{-1}\mathfrak{A}_{k,m,j}, \tag{24}$$

получаем отображение из $\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$ в $\mathcal{D}'_\natural(B_R)$ со свойствами:

1) имеет место равенство

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(\Phi_\lambda^{k,m,j})=\Phi_\lambda^{0,0,1}; \tag{25}$$

2) если $T\in\mathcal{E}'_\natural(B_R)$, $f\in\mathcal{D}'_{k,m,j}(B_R)$, то

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f\times T)=\mathcal{A}_j^{k,m}(f)\times T\quad\text{в}\quad B_{R-r(T)}. \tag{26}$$

Следующая лемма дает явное представление для $\mathcal{A}_j^{k,m}$ в виде суперпозиции дифференциальных операторов.

Лемма 3. *Пусть*

$$c_k = \left(\sqrt{b_X}\ 2^k \prod_{l=0}^{k-1}(k-l+\alpha_X)\right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $f \in \mathcal{E}_{k,m,j}(B_R)$*,* $R \in (0,\infty]$*, имеем:* $\mathcal{A}_j^{k,m}(f) = f$*, если* $k = 0$*,*

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f) = c_k D(1+2\alpha_X, \rho_X)\dots D(k+2\alpha_X, k+\rho_X-1)(f_{k,m,j}), \tag{27}$$

если $k \geqslant 1$*,* $m = 0$*, и*

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f) = c_k D(1+2\alpha_X, \rho_X)\dots D(k-m+2\alpha_X, k-m+\rho_X-1)\cdot$$

$$D(k-m+1+2\alpha_X, \alpha_X+1)\dots D(k+2\alpha_X, \alpha_X+m)(f_{k,m,j}), \tag{28}$$

если $m \geqslant 1$*.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $f = \Phi_\lambda^{k,m,j}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. В этом случае равенства (27), (28) следуют из (25) и леммы 1 (iii) (iv). ☐

Свойства класса $\mathcal{Z}(B_{a,b})$. Для $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ положим

$$\mathcal{Z}^s(B_{a,b}) = \mathcal{Z}(B_{a,b}) \cap C^s(B_{a,b}).$$

Лемма 4. *Пусть* $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$*. Тогда* $f^{k,m,j} \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$*,* $m \in \big\{0,\dots,M_X(k)\big\}$*,* $j \in \{1,\dots,d_X^{k,m}\}$*. Аналогичное утверждение справедливо и для класса* $\mathcal{Z}^s(B_{a,b})$*.*

Доказательство. Из соотношений (5), (14) имеем

$$f^{k,m,j}(x) = d_X^{k,m}\int_K f(\tau^{-1}x)\overline{t_{j,j}^{k,m}(\tau)}d\tau. \tag{29}$$

Поскольку $f \in \mathcal{Z}(B_{a,b})$, то для любых $\tau \in K$, $r \in (a,b)$, $y \in B_{\min\{r-a,\,b-r\}}$ получаем

$$\int\limits_{S_r(y)} f(\tau^{-1}x)d\mu_0(x) = 0.$$

Отсюда и из (29) следует требуемое утверждение. ☐

Лемма 5. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}_+$*,* $m \in \{0,\dots,M_X(k)\}$*. Предположим, что* $\varphi(\varrho)Y(\sigma) \in \mathcal{Z}^s(B_{a,b})$ *для некоторых* $Y \in \mathcal{H}_X^{k,m} \setminus \{0\}$ *и* $s \in \mathbb{N}$*. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Функция* $(D(-k,m-k)\varphi)(\varrho)Y_j^{k+1,m}(\sigma)$ *принадлежит классу* $\mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *при всех* $j \in \{1,\dots,d_X^{k+1,m}\}$*.*

(ii) *Если* $m \leqslant M_X(k+1)-1$*, то* $(D(-k,\beta_X-m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k+1,m+1}(\sigma) \in \mathcal{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *при всех* $j \in \{1,\dots,d_X^{k+1,m+1}\}$*.*

(iii) *Если* $k \geqslant 1$ *и* $m \leqslant M_X(k-1)$, *то* $(D(k+2\alpha_X, k+\rho_X-1-m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k-1,m}(\sigma) \in \mathscr{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *при всех* $j \in \{1,\dots,d_X^{k-1,m}\}$.

(iv) *Если* $m \geqslant 1$, *то* $(D(k+2\alpha_X, \alpha_X+m)\varphi)(\varrho)Y_j^{k-1,m-1}(\sigma) \in \mathscr{Z}^{s-1}(B_{a,b})$ *при всех* $j \in \{1,\dots,d_X^{k-1,m-1}\}$.

Доказательство. Утверждения леммы 5 следуют из (6), (12) и [12, предложения 14.6, 16.4] (см. также [12, комментарии к части 3]). ☐

Лемма 6. *Пусть* $f(x) = \varphi(\varrho)Y(\sigma)$, *где* $\varphi \in E_{k,m}$, $Y \in \mathcal{H}_X^{k,m}$. *Тогда* $f \in \mathscr{Z}(B_{0,\infty})$.

Доказательство. Определение множества $E_{k,m}$ и лемма 3 показывают, что $\mathcal{A}_j^{k,m}f = 0$. Поэтому равенство (26) влечет соотношение

$$\mathcal{A}_j^{k,m}(f \times \sigma_r) = \mathcal{A}_j^{k,m}(f) \times \sigma_r = 0.$$

Теперь используя (24) и лемму 2, получаем требуемое утверждение. ☐

Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $f \in \mathscr{Z}(B_{a,b})$. Применяя лемму 4 при $k = 0$, имеем $f_{0,0,1}(\varrho) \in \mathscr{Z}(B_{a,b})$. Тогда по определению класса $\mathscr{Z}(B_{a,b})$

$$\int\limits_{S_r} f_{0,0,1}(\varrho)\, d\mu_0 = 0 \qquad \text{для любого } r \in (a,b),$$

что эквивалентно равенству $f_{0,0,1}(\operatorname{th} r) = 0$. Следовательно, $f_{0,0,1} \in E_{0,0}$. Требуемое утверждение для гладких f получается отсюда с помощью лемм 4 и 5. Общий случай сводится к рассмотренному сглаживанием функции f свертками $f \times \varphi_\varepsilon$, где φ_ε — радиальная функция класса $C^\infty(X)$ с носителем в шаре B_ε.

Достаточность. Пусть $f \in C(B_{a,b})$ и $f_{k,m,j} \in E_{k,m}$. Тогда по лемме 6

$$f^{k,m,j} \in \mathscr{Z}(B_{a,b}) \quad \text{при всех } k \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \bigl\{0,\dots,M_X(k)\bigr\},\ j \in \{1,\dots,d_X^{k,m}\}. \tag{30}$$

Для $r \in (a,b)$ положим

$$I(y) = \int\limits_{S_r(y)} f(x)d\mu_0(x), \quad y \in B_{\min\{r-a,\, b-r\}}.$$

Используя (29), (30), получаем

$$\int\limits_K I(\tau^{-1}y)\overline{t_{j,j}^{k,m}(\tau)}\, d\tau = \int\limits_K \int\limits_{S_r(y)} f(\tau^{-1}x)d\mu_0(x)\ \overline{t_{j,j}^{k,m}(\tau)}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_r(y)} \int\limits_K f(\tau^{-1}x)\overline{t_{j,j}^{k,m}(\tau)}\, d\tau\ d\mu_0(x) = 0.$$

В силу полноты системы $\bigl\{Y_j^{k,m}\bigr\}$ в $L^2\left(\mathbb{S}^{a_X-1}\right)$ это означает, что $I \equiv 0$. Таким образом, $f \in \mathscr{Z}(B_{a,b})$.

Доказательство теоремы 2. Пусть f удовлетворяет условию в пункте (i) теоремы. Тогда тем же свойством обладает каждое слагаемое ряда (4), поскольку для любого $x \in B_{a,\infty}$

$$\big(1-|x|\big)^{-N}\,|f^{k,m,j}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant d_X^{k,m}\int\limits_K \big(1-|\tau^{-1}x|\big)^{-N}\,|f(\tau^{-1}x)|\,|t_{j,j}^{k,m}(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant d_X^{k,m}\sup_{y\in B_{a,\infty}}\big(1-|y|\big)^{-N}\,|f(y)|$$

(см. формулу (29) и [15, гл. 1, § 1, п. 5, формула (3)]). В частности,

$$\sup_{\varrho\in(\operatorname{th}a,\,1)}\big(1-\varrho\big)^{-N}\,|f_{k,m,j}(\varrho)|<\infty \quad \text{для любого } N\in\mathbb{Z}_+. \tag{31}$$

Кроме того, по теореме 1 коэффициенты $f_{k,m,j}$ имеют вид

$$f_{k,m,j}(\varrho)=\sum_{1\leqslant p\leqslant k-m}c_p u_p(\varrho)+\sum_{1\leqslant p\leqslant m}d_p v_p(\varrho),$$

где $c_p, d_p \in \mathbb{C}$. Отсюда и из (31) следует, что все $f_{k,m,j}$ равны нулю на $(\operatorname{th}a,\,1)$, а значит, f — нулевая функция.

Наконец, по лемме 6 функция

$$f(x)=\frac{(1-\varrho^2)^{N+\alpha_X+\beta_X}}{\varrho^{N+2\alpha_X}}\,Y_1^{N,0}(\sigma)$$

удовлетворяет всем требованиям второго утверждения теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Helgason S. A duality in integral geometry: some generalizations of the Radon transform / S. Helgason // Bull. Amer. Math. Soc. –1964. – Vol. 70. – P. 435–446.
2. Helgason S. Integral Geometry and Radon Transforms/ S. Helgason. – New York: Springer, 2010. – 301 p.
3. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. Helgason S. A duality in integral geometry on symmetric spaces / S. Helgason // Proc. U. S. - Japan Seminar in Differential Geometry. –1966. – P. 37–56.
5. Grinberg E. Morera theorems for complex manifolds / E. Grinberg, E. T. Quinto // J. Funct. Anal. – 2000. – Vol. 178. – P. 1–22.
6. Globevnik J. Zero integrals on circles and characterizations of harmonic and analytic functions/ J. Globevnik // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 317. – P. 313–330.
7. Epstein C. L., Kleiner B. Spherical means in annular regions / C. L. Epstein, B. Kleiner // Comm. Pure Appl. Math. – 1993. – Vol. 46, N 3. – P. 441–450.
8. Волчков В. В. Сферические средние на евклидовых пространствах / В. В. Волчков // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, N 10. – С. 1310–1315.
9. Волчков В. В. Шаровые средние на симметрических пространствах / В. В. Волчков // Доповіді НАН України. – 2002. – N 3. – С. 15–19.
10. Rawat R. Spherical means in annular regions in the n-dimensional real hyperbolic spaces/ R. Rawat, R. K. Srivastava. // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). – 2011. – Vol. 121, N 3. – P. 311–325.
11. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1987. – 735 с.

12. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
13. Helgason S. Geometric analysis on symmetric spaces/ S. Helgason. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. – 601 p.
14. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции I / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М: Наука, 1973. – 294 с.
15. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. – М: Наука, 1991. – 576 с.

Поступила в редакцию 12.03.2016 г.

FUNCTIONS WITH ZERO SPHERICAL MEANS ON SYMMETRIC SPACES

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

We consider the problem of the description of the set of continuous functions on a rank one symmetric space X of the non-compact type having vanishing integrals over every sphere which encloses a given ball. The solution of this problem and its generalizations for annular domains in X is obtained. As an application, we prove a new uniqueness theorem for functions with zero spherical means.

Keywords: spherical means, symmetric spaces, transmutation operators.

Волчков Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
valeriyvolchkov@gmail.com
83001, г. Донецк, ул. Университетская 24

Волчков Виталий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
volna936@gmail.com
83001, г. Донецк, ул. Университетская 24

Volchkov Valery Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor
Donetsk National University, Donetsk

Volchkov Vitaly Vladimirovich
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor
Donetsk National University, Donetsk

ISSN 2415-7058. Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1

УДК 517.5

АНАЛОГ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА БЕССЕЛЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ

© 2016. *Н. П. Волчкова*

Изучаются асимптотические свойства гипергеометрической функции Гаусса. Получен аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Якоби первого рода.

Ключевые слова: асимптотический ряд, функции Якоби, симметрические пространства.

Введение. Пусть $F(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, т.е. аналитическое продолжение степенного ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(a)_l\,(b)_l}{(c)_l\;l!}\,z^l,\quad |z|<1,$$

где

$$(\alpha)_l=\frac{\Gamma(\alpha+l)}{\Gamma(\alpha)}\text{ — символ Похгаммера},\quad \Gamma\text{ — гамма-функция.}$$

В работе [1] (см. также [2, гл. 6, п. 198], [3, гл. 2, п. 2.3, формула (17)]) Г. Н. Ватсон получил следующее асимптотическое разложение:

$$F\left(\alpha+\lambda,\,\beta-\lambda;\,\gamma;\,\frac{1-\mu}{2}\right)\sim\frac{\Gamma(\lambda-\beta+1)\,\Gamma(\gamma)}{\pi\,\Gamma(\gamma-\beta+\lambda)}\,2^{\alpha+\beta-1}\,(1-e^{-\zeta})^{1/2-\gamma}\times$$

$$\times\,(1+e^{-\zeta})^{\gamma-\alpha-\beta-1/2}\left(e^{(\lambda-\beta)\zeta}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s\,\Gamma(s+1/2)}{\lambda^{s+1/2}}+\right.$$

$$\left.+\,e^{\mp\,\pi i(1/2-\gamma)}\,e^{-(\lambda+\alpha)\zeta}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s'\,\Gamma(s+1/2)}{\lambda^{s+1/2}}\right). \tag{1}$$

Это разложение справедливо при больших $|\lambda|$ и

$$-\frac{\pi}{2}-\omega_2+\varepsilon<\arg\lambda<\frac{\pi}{2}+\omega_1-\varepsilon,\quad \varepsilon>0;$$

в $e^{\mp\,\pi i(1/2-\gamma)}$ верхний или нижний знак берется соответственно в случаях $\operatorname{Im}\lambda>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$ и при этом

$$1-e^{\zeta}=e^{\zeta}\,(1-e^{-\zeta})\,e^{\mp\,\pi i}.$$

В этих формулах

$$\mu=\operatorname{ch}\zeta=\operatorname{ch}(\xi+i\eta),$$

$$\omega_2 = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \quad -\omega_1 = \operatorname{arctg}\frac{\eta-\pi}{\xi}, \quad \eta \geqslant 0,$$

$$\omega_2 = \operatorname{arctg}\frac{\eta+\pi}{\xi}, \quad -\omega_1 = \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \quad \eta \leqslant 0.$$

Числа c_s в (1) таковы, что

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{L + M\,e^{\zeta} + N\,e^{2\zeta}}{2\,(1-e^{2\zeta})},$$

где

$$L = (\alpha+\beta-2\gamma+1)^2 - \alpha + \beta - \frac{1}{2},$$

$$M = -2(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2\gamma+1),$$

$$N = (\alpha+\beta-1)^2 + \alpha - \beta + \frac{1}{2}.$$

Число c_0' также равно единице, а c_1' получается из c_1 изменением знака ζ. Общая формула для коэффициентов c_s автору неизвестна.

Из (1) следует подобное разложение для функций Якоби первого рода

$$R_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\left(-\lambda, \lambda+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-t}{2}\right). \tag{2}$$

Функции Якоби тесно связаны со сферическими функциями на симметрических пространствах ранга один (см. [4, гл. 4]). Сферические функции на евклидовых пространствах легко выражаются через классические функции Бесселя [4, гл. 4]. Функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ имеют при $z \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0,\pi)$) асимптотическое разложение

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu,2k)(2z)^{-2k} - \right.$$

$$\left.\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nu,2k+1)(2z)^{-2k-1}\right], \tag{3}$$

где

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}$$

(см. [3, том 2, гл. 2, § 29, формула (29.4)]). Разложения такого типа с явными формулами для коэффициентов играют важную роль в ряде вопросов анализа (см., например, [5–8]).

В данной работе исследуются асимптотические свойства функций

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2}; \alpha+1; \sin^2 r\right) \tag{4}$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq -1, -2, \ldots; 0 < r < \pi/2)$ при $\lambda \to \infty$. В силу (2) и (4) они связаны с функциями Якоби равенством

$$R_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(\cos 2r) = \varphi_{2\lambda+\alpha+\beta+1,\alpha,\beta}(r).$$

Разложение (1) и формула Стирлинга для гамма-функции показывают, что

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(\sin r)^{\alpha+1/2}(\cos r)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{\cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)}{\lambda^{\alpha+1/2}} + O\left(\frac{e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}}{\lambda^{\alpha+3/2}}\right).$$

Наша цель — получить общее явное разложение для $\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)$, аналогичное асимптотическому ряду (3).

Формулировка основного результата. Положим

$$a_0(r) = 0, \quad a_{2k}(r) = \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k)!}, \quad a_{2k-1}(r) = \frac{(-1)^k}{2(2k-1)!}\operatorname{tg} r, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$d_0(r) = 0, \quad d_{2k}(r) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad d_{2k-1}(r) = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\operatorname{ctg} r, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$c_k = \sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k} \frac{(1/2+\beta)_{l_1+\cdots+l_k}(1/2-\beta)_{l_1+\cdots+l_k}}{l_1!\ldots l_k!\,(1/2+\alpha)_{l_1+\cdots+l_k}}\, a_1^{l_1}(r)\ldots a_k^{l_k}(r), \tag{7}$$

$$c_k^* = \sum_{j=1}^{k} \frac{(1/2+\beta)_j(1/2-\beta)_j}{j!\,(1/2+\alpha)_j} \sum_{l_1+\cdots+l_j=k} a_{l_1}(r)\ldots a_{l_j}(r), \tag{8}$$

$$\gamma_k = \sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k} \frac{(-1)^{l_1+\cdots+l_k}(1/2-\alpha)_{l_1+\cdots+l_k}}{l_1!\ldots l_k!\,(\sin r)^{1/2-\alpha}}\, d_1^{l_1}(r)\ldots d_k^{l_k}(r), \tag{9}$$

$$\gamma_k^* = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j(1/2-\alpha)_j}{j!\,(\sin r)^{1/2-\alpha}} \sum_{l_1+\cdots+l_j=k} d_{l_1}(r)\ldots d_{l_j}(r). \tag{10}$$

Ниже будет показано (см. леммы 5, 6), что $c_k = c_k^*$, $\gamma_k = \gamma_k^*$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\alpha > -\dfrac{1}{2}$. *Тогда при* $\lambda \to \infty$, $|\arg\lambda| \leqslant \pi - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) \sim 2\cos\Big(\lambda r - \frac{\pi}{4}(1+2\alpha)\Big)\, e^{i\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!}\frac{A_{2\nu}^*}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{1}{2}}} +$$

$$+2\sin\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(1+2\alpha)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(3+2\alpha)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac{3}{2}\right)}{(2\nu+1)!}\frac{A^*_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}.$$

Коэффициенты A^*_k *могут быть вычислены по формуле*

$$A^*_k=\frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1)\sin^{-2\alpha}r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)\cos^{\beta+1/2}r}\,A_k, \tag{11}$$

где

$$A_k=k!\sum_{m=0}^{k}\gamma_m c_{k-m}=k!\sum_{m=0}^{k}\gamma^*_m c^*_{k-m}. \tag{12}$$

Следствие 1. *Пусть* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. *Тогда при* $\lambda\to\infty$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\pi)$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\frac{\sqrt{\pi}\,(\sin r)^{\alpha+1/2}(\cos r)^{\beta+1/2}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r)=\frac{\cos\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)}{\lambda^{\alpha+1/2}}+$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\operatorname{ctg}r+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}r}{2}\cdot\frac{\sin\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)}{\lambda^{\alpha+3/2}}+O\left(\frac{e^{r|\mathrm{Im}\lambda|}}{\lambda^{\alpha+5/2}}\right). \tag{13}$$

Отметим, что разложение из следствия 1 содержится в [9, предложение 7.8]. Относительно других частных случаев теоремы 1, см. [2, гл. 6], [7, часть 2, гл. 3], [10, часть 1, гл. 4, предложение 4.5], [11].

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если* $h_0\in C^\infty[a,b]$, $0\leqslant a<b$, $\mathrm{Re}\,c>0$, $\mathrm{Re}\,d>0$, *то при* $\lambda\to\infty$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varepsilon$ *имеет место асимптотическое разложение*

$$\int\limits_a^b e^{i\lambda t}(t-a)^{c-1}(b-t)^{d-1}h_0(t)dt\sim$$

$$e^{i\lambda a+ic\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k+c)}{k!}A_k(i\lambda)^{-k-c}+e^{i\lambda b}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k+d)}{k!}B_k(i\lambda)^{-k-d},$$

где

$$A_k=\frac{d^k}{dt^k}\left((b-t)^{d-1}h_0(t)\right)\bigg|_{t=a},$$

$$B_k=\frac{d^k}{dt^k}\left((t-a)^{c-1}h_0(t)\right)\bigg|_{t=b}.$$

Утверждение леммы 1 является частным случаем результата, полученного в [12, гл. 2, теорема 10.2]).

Лемма 2. *Если* $\operatorname{Re}\alpha > -\dfrac{1}{2}$, *то*

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}\,(\sin r)^{-2\alpha}(\cos r)^{-\beta-1/2}\times$$

$$\int\limits_0^r \cos(\lambda x)(\cos x-\cos r)^{\alpha-1/2}\times$$

$$F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}-\beta;\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos r-\cos x}{2\cos r}\right)dx.$$

При $\alpha = \beta$ указанная формула совпадает с известной формулой Мелера-Дирихле (см. [3, гл. 3, п. 3.7, формула (27)]). В общем случае утверждение леммы 2 содержится в [9, гл. 7].

Лемма 3. *Для любых* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *справедливо равенство*

$$\frac{\cos^2 t}{\Gamma(\alpha+1)}\,\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{\sin^2 r}{4\Gamma(\alpha+3)}\left((\alpha-\beta+3)^2-\lambda^2\right)\varphi_{\lambda,\alpha+2,\beta-2}(r)+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\left(\alpha+1-(\alpha-\beta+2)\sin^2 r\right)\varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta-1}(r). \qquad (14)$$

Доказательство. В силу определения (4) имеем

$$\varphi_{\lambda,\alpha+1,\beta-1}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2},\frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2};\alpha+2;\sin^2 r\right), \qquad (15)$$

$$\varphi_{\lambda,\alpha+2,\beta-2}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2},\frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2};\alpha+3;\sin^2 r\right). \qquad (16)$$

Используя (4), (15), (16) и формулу

$$c\,(c-1)\,(z-1)\,F(a,b;c-1;z)+c\,[c-1-(2c-a-b-1)\,z]\,F(a,b;c;z)+$$

$$(c-a)\,(c-b)\,z\,F(a,b;c+1;z)=0.$$

(см. [3, формула 2.8 (30)]), получаем (14). □

Лемма 4. *Для производной порядка* p *от суперпозиции двух функций имеет место формула*

$$(f(\tau(t)))^{(p)} = \sum_{m=0}^{p}\frac{f^{(m)}(\tau(t))}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k(\tau(t))^k(\tau^{m-k}(t))^{(p)}, \quad p\geqslant 0. \qquad (17)$$

Указанное утверждение содержится в [13, доказательство теоремы 2.11].

Следствие 2. *Если* $\tau(0)=0$, *то*

$$(f\circ\tau)^{(p)}(0)=\sum_{m=1}^{p}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\sum_{k_1+\cdots+k_m=p}\frac{p!}{k_1!\ldots k_m!}\,\tau^{(k_1)}(0)\ldots\tau^{(k_m)}(0),\quad p\geqslant 1. \qquad (18)$$

Доказательство. Поскольку $\tau(0)=0$, из (17) имеем

$$(f\circ\tau)^{(p)}(0)=\sum_{m=1}^{p}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}\,(\tau^m)^{(p)}(0),\quad p\geqslant 1. \qquad (19)$$

Теперь воспользуемся формулой Лейбница

$$(f_1\ldots f_m)^{(p)}=\sum_{k_1+\cdots+k_m=p}\frac{p!}{k_1!\ldots k_m!}f_1^{(k_1)}\ldots f_m^{(k_m)}.$$

Положив в этой формуле $f_1=\ldots=f_m=\tau$, получим

$$(\tau^m)^{(p)}=\sum_{k_1+\cdots+k_m=p}\frac{p!}{k_1!\ldots k_m!}\tau^{(k_1)}\ldots\tau^{(k_m)},\quad m\geqslant 1. \qquad (20)$$

Комбинируя (19) с (20), приходим к равенству (18). ☐

Нам потребуются также следующие формулы, связанные с подстановкой ряда в ряд (см. [14, приложение 1, § 1.3, п. 1.3.6]):

$$\sum_{l=0}^{\infty}b_l\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,z^k\right)^l=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,z^k,\quad |z|<R_1,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|a_k\,z^k|<R_2, \qquad (21)$$

$$c_k=\sum_{l_1+2l_2+\ldots+kl_k=k}\frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1!\ldots l_k!}\,b_{l_1+\cdots+l_k}\,a_1^{l_1}\ldots a_k^{l_k}. \qquad (22)$$

В частности,

$$c_0=b_0,\quad c_1=a_1\,b_1,\quad c_2=a_1\,b_2+a_2\,b_1,$$

$$c_3=a_3\,b_1+2\,a_1\,a_2\,b_2+a_1^3\,b_3,$$

$$c_4=a_4\,b_1+2\,a_1\,a_3\,b_2+a_2^2\,b_2+3\,a_1^2\,a_3\,b_3+a_1^4\,b_4.$$

Лемма 5. *Пусть*

$$f_1(t)=\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

Тогда

$$f_1^{(k)}(0) = k!\,\gamma_k = k!\,\gamma_k^*,$$

где константы γ_k *и* γ_k^* *определены в* (9), (10).

Доказательство. Используя разложение косинуса и синуса в степенной ряд, имеем

$$\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t} = \sin r\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k(r)\,t^k\right), \tag{23}$$

где коэффициенты $d_k(r)$ определены равенством (6). Поскольку

$$f(z) := (1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_l}{l!}\, z^l,$$

то из (23) и (21), (22) находим

$$\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} = (\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k(r)t^k\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} =$$

$$= (\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_l}{l!}\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(r)t^k\right)^l = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\, t^k,$$

где коэффициенты γ_k определены в (9). Таким образом, $f_1^{(k)}(0) = k!\,\gamma_k$.

Далее, положим

$$\tau(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(r)\, t^k.$$

Тогда $\tau(0)=0$ и $f_1(t) = (\sin r)^{\alpha-\frac{1}{2}} f(\tau(t))$. Учитывая, что

$$\tau^{(k)}(0) = k!\, d_k(r), \quad f^{(k)}(0) = (-1)^k\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_k,$$

по следствию 2 получаем $f_1^{(k)}(0) = k!\,\gamma_k^*$. Это завершает доказательство леммы. ☐

Лемма 6. *Пусть*

$$f_2(t) = F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}\right). \tag{24}$$

Тогда

$$f_2^{(k)}(0) = k!\,c_k = k!\,c_k^*,$$

где константы c_k *и* c_k^* *определены в* (7), (8).

Доказательство. Аргумент гипергеометрической функции в (24) можно разложить следующим образом:

$$\tau_*(t) := \frac{\cos r - \cos(t-r)}{2\cos r} = \frac{(1-\cos t)\cos r - \sin t \sin r}{2\cos r} =$$

$$= \frac{1}{2\cos r}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}t^{2k}\cos r + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}t^{2k+1}\sin r\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2\cdot(2k)!}t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2\cdot(2k+1)!}t^{2k+1}\operatorname{tg} r =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m(r)t^m, \tag{25}$$

где коэффициенты $a_k(r)$ определены в (12). Согласно разложению гипергеометрической функции в степенной ряд

$$F(z) := F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; z\right) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l\, z^l, \tag{26}$$

где

$$b_l = \frac{\left(\frac{1}{2}+\beta\right)_l \left(\frac{1}{2}-\beta\right)_l}{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)_l \; l!}. \tag{27}$$

Из (21), (22) и (25)–(27) получаем

$$F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos(t-r)}{2\cos r}\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} b_l \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(r)t^m\right)^l = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^k.$$

Отсюда $f_2^{(k)}(0) = k!\, c_k$. Далее, поскольку $\tau_*(0) = 0$, $\tau_*^{(k)}(0) = k!\, a_k(r)$,

$$F^{(l)}(0) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\beta\right)_l \left(\frac{1}{2}-\beta\right)_l}{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)_l},$$

из следствия 2 получаем $f_2^{(k)}(0) = k!\, c_k^*$. Таким образом, лемма 6 доказана. ☐

Доказательство теоремы 1. По лемме 2 имеем равенство

$$\varphi_{\lambda,\alpha,\beta}(r) = \frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}(\sin r)^{-2\alpha}(\cos r)^{-\beta-1/2}\, I(\lambda), \tag{28}$$

где

$$I(\lambda) = 2\int_0^r \cos(\lambda x)(\cos x - \cos r)^{\alpha-1/2} F\left(\frac{1}{2}+\beta, \frac{1}{2}-\beta; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{\cos r - \cos x}{2\cos r}\right) dx.$$

Представление для $I(\lambda)$ можно записать в виде

$$I(\lambda)=\int\limits_{-r}^{r}e^{i\lambda x}\left(\cos x-\cos r\right)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}-\beta;\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos r-\cos x}{2\cos r}\right)dx=$$

$$=e^{-i\lambda r}\int\limits_{0}^{2r}e^{i\lambda t}\left(\cos(t-r)-\cos r\right)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}-\beta;\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}\right)dt=$$

$$=e^{-i\lambda r}\int\limits_{0}^{2r}e^{i\lambda t}\,t^{\alpha-1/2}\left(2r-t\right)^{\alpha-1/2}\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t\,(2r-t)}\right)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}-\beta;\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}\right)dt.$$

Из асимптотического разложения интегралов Фурье (см. лемму 1) имеем

$$I(\lambda)\sim e^{-i\lambda r}\left(e^{i\pi\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\,\frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{k!}\frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.e^{2i\lambda r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{k!}\frac{A_k}{(i\lambda)^{k+\alpha+\frac{1}{2}}}\right),$$

где

$$A_k=\frac{d^k}{dt^k}\left(\left(\frac{\cos(t-r)-\cos r}{t}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\times\right.$$

$$\left.\left.F\left(\frac{1}{2}+\beta,\frac{1}{2}-\beta;\alpha+\frac{1}{2};\frac{\cos r-\cos(t-r)}{2\cos r}\right)\right)\right|_{t=0},\quad k\geqslant 0. \tag{29}$$

Отсюда

$$I(\lambda)\sim 2\cos\left(\lambda r-\frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right)e^{i\frac{\pi}{4}(2\alpha+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2\nu+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu)!}\frac{A_{2\nu}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{1}{2}}}+$$

$$+ 2\sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}(2\alpha+1)\right) e^{i\frac{\pi}{4}(2\alpha+3)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2\nu+1+\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \frac{A_{2\nu+1}}{(i\lambda)^{2\nu+\alpha+\frac{3}{2}}}. \tag{30}$$

При этом для коэффициентов A_k из (29) справедливо соотношение

$$A_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!\,(k-m)!} f_1^{(m)}(0)\, f_2^{(k-m)}(0) = k! \sum_{m=0}^{k} \gamma_m c_{k-m} = k! \sum_{m=0}^{k} \gamma_m^* c_{k-m}^* \tag{31}$$

(см. леммы 5, 6). Используя (28), (30) и (31) получаем утверждение теоремы 1.

В заключение отметим, что разложение (13) при $\operatorname{Re}\alpha > -\dfrac{1}{2}$ является непосредственным следствием теоремы 1. В общем случае (13) получается отсюда методом продолжения по параметру с использованием леммы 3 (см. [12, гл. 2, § 10, п. 10.3, доказательство формулы (10.61)]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Watson G. N. Asymptotic expansions of hyperheometric functions / G. N. Watson // Trans. Cambridge. Philos. Soc. – 1918. – Vol. 22. – P. 277–308.
2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций/ Е. В. Гобсон. – М.: ИЛ, 1952. – 476 с.
3. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции I, II /Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М: Наука, 1973. – 294 с.
4. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
5. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) / M. El Harchaoui. // J. Analyse Math. – 1995. – Vol. 67. – P. 1–37.
6. Berkani M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique (Cas des deux boules) / M. El Harchaoui, R. Gay // J. Complex Variables. – 2000. – Vol. 43.– P. 29–57.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Волчков Вит. В. Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве / Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова. // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, N 5. – С. 169–197.
9. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
10. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
11. Волчкова Н. П. Аналог асимптотического ряда Бесселя для функций Ферререса / Н. П. Волчкова // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 34–38.
12. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. I / Э. Я. Риекстыньш. – Рига: Зинатне, 1974. – 370 с.
13. Nessel R. J. Local Multiplier Criteria in Banach Spaces / R. J. Nessel, E. Wickeren. – Mathematica Balkanica. New Series. – 1988. – Vol. 2, N 2-3. – P. 114–132.
14. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, А. П. Брычков, О. И. Маричев. – М: Наука, 1983. – 750 с.

Поступила в редакцию 21.02.2016 г.

AN ANALOG OF THE BESSEL ASYMPTOTIC EXPANSION FOR THE JACOBI FUNCTIONS

N. P. Volchkova

We study asymptotic properties of the Gauss hyperheometric function. An analog of the Bessel asymptotic expansion for the Jacobi functions of the first kind is obtained.

Keywords: asymptotic expansion, Jacobi functions, symmetric spaces.

Волчкова Наталья Петровна
кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО "Донецкий национальный технический университет", г. Донецк
volna936@gmail.com
83000, Донецк, ул. Артема 58

Volchkova Natalia Petrovna
Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Donetsk National Technical University, Donetsk

ISSN 2415-7058. Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1

УДК 517.5

ПРОИЗВОДНАЯ ПЕАНО И m-КРАТНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

© **2016.** ***Д. А. Зарайский***

В работе даётся простое доказательство совпадения m-кратной непрерывной дифференцируемости для производной Пеано и для обычной производной (теорема Данжуа — Оливера). Рассмотрен также многомерный случай.

***Ключевые слова*:** производная Пеано, формула Тейлора.

Введение. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, если функция f, определённая на интервале $I \subset \mathbb{R}$, дифференцируема в точке t_0, то

$$f(t) = f(t_0) + a_1(t_0)(t - t_0) + \ldots + a_m(t_0)(t - t_0)^m + o((t - t_0)^m), \quad t \to t_0, \qquad (1)$$

где $a_j(t_0) = f^{(j)}(t_0)/m!$, $j = 1, \ldots, m$. Если в точке t_0 имеет место разложение (1), то говорят, что f имеет m-ю *производную Пеано* в точке t_0, которая обозначается обычно как $f_{(m)}(t_0) = m!a_m(t_0)$.

Как известно, выполнение (1) во всех точках $t_0 \in I$ не гарантирует ещё m-кратной дифференцируемости f. В достаточно подробных учебниках по анализу приводят обычно следующее обращение формулы Тейлора. Если для непрерывной функции f разложение (1) выполнено локально равномерно по t_0, то $f \in C^m(I)$. Последнее очень просто можно доказать с использованием теории распределений. В этом случае $m!\, a_m(t)$ непрерывна и является m-й производной $f(t)$ в смысле теории распределений, поэтому $f \in C^m(I)$.

Оказывается, что если функция $a_m(t)$ в (1) непрерывна, равномерную малость остатка можно не предполагать. Вычитанием m-й первообразной всё сводится к случаю $a_m = 0$, рассмотренному Данжуа, [1]. Имеет место и более общее утверждение. Если $a_m(t)$ ограниченна сверху или снизу, то f имеет m-ю производную, равную $m!a_m(t)$ (т. Оливера [2, Th. 3]). Многомерное обобщение теоремы Оливера, предполагающее полуограниченность частных производных, дано в [3].

Мы дадим достаточно простое доказательство теоремы Данжуа — Оливера в случае непрерывной m-й производной Пеано. Далее приведём многомерное обобщение (отличного от имеющегося в [3] вида). В последнем разделе работы мы рассмотрим случай односторонней производной Пеано и получим соответствующий многомерный результат.

Доказательство результатов для функций одной переменной не вызывает затруднений. Многомерный случай, к сожалению, несколько менее элементарен (используются метод сглаживания и полнота пространства C^m). Кроме того, в некоторых местах мы укажем, как использование теории распределений позволяет дать альтернативное более короткое доказательство.

Критерии m-кратной непрерывной дифференцируемости.

Теорема 1 (Данжуа — Оливер). *Пусть f — некоторая функция на интервале I, такая, что для всех $t_0 \in I$ имеет место разложение* (1) *(с некоторыми*

$a_1(t_0), \ldots, a_m(t_0)$, равномерность оценки по t_0 не предполагается). Тогда, если $a_m(t)$ непрерывна на интервале I, то $f \in C^m(I)$.

В нижеприведённом доказательстве нетрудно узнать идею доказательства теоремы Коши об обращении в нуль контурного интеграла.

Доказательство. Для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset I$ продолжение $f|_{[t_1,t_2]}$ полиномами $f(t_j) + a_1(t_j)(t - t_j) + \ldots + a_m(t_j)(t - t_j)^m$, $j = 1, 2$, слева и справа от $[t_1, t_2]$ даёт функцию, удовлетворяющую условиям леммы на всей вещественной прямой, поэтому можно считать, что $I = \mathbb{R}$.

Пусть F — m-я первообразная от $m!a_m(t)$ и $g = f - F$. Тогда $F \in C^m$ и для некоторых $b_1(t), \ldots, b_{m-1}(t)$ имеем:

$$g(t) = g(t_0) + b_1(t_0)(t - t_0) + \ldots + b_{m-1}(t_0)(t - t_0)^{m-1} + o((t - t_0)^m), \quad t \to t_0.$$

Будем обозначать $\Delta_h \varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$, $T_h \varphi(x) = \tau_{-h}\varphi(x) = \varphi(x+h)$. Тогда $\Delta_h = T_h - 1$ (мы отождествляем кратные тождественного оператора с соответствующим скаляром), и операторы Δ_h и T_h коммутируют.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

Построим по индукции последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ таким образом, чтобы отрезки $[x_k, x_k + 2^{-k}mh]$ были вложены один в другой и выполнялось неравенство

$$\left|\Delta^m_{2^{-k}h} g(x_k)\right| \geqslant 2^{-mk} \left|\Delta^m_h g(x_0)\right|.$$

Поскольку для произвольного h, $\Delta_{2h} = T_{2h} - 1 = T_h^2 - 1 = (T_h + 1)\Delta_h$, то $\Delta^m_{2h} = (1 + T_h)^m \Delta^m_h = \sum_{j=0}^m C^j_m T_{jh} \Delta^m_h$, и (заменяя h на $2^{-k}h$)

$$\Delta^m_{2^{-(k-1)}h} g(x_{k-1}) = \sum_{j=0}^{m} C^j_m \Delta^m_{2^{-k}h} g(x_{k-1} + j2^{-k}h).$$

Если для всех $j = 0, 1, \ldots, m$ выполнено неравенство

$$\left|\Delta^m_{2^{-k}h} g(x_{k-1} + j2^{-k}h)\right| < 2^{-mk} \left|\Delta^m_h g(x_0)\right|,$$

то $\left|\Delta^m_{2^{-(k-1)}h} g(x_{k-1})\right| < 2^m 2^{-mk} \left|\Delta^m_h g(x_0)\right|$, что противоречит предположению индукции. Поэтому можно положить $x_k = x_{k-1} + j2^{-k}h$ для некоторого $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ (тогда $[x_k, x_k + 2^{-k}mh] \subset [x_{k-1}, x_{k-1} + 2^{-(k-1)}mh]$).

Пусть $\bigcap_{k=0}^{\infty} [x_k, x_k + 2^{-k}mh] = \{t_0\}$. Тогда

$$g(t) = g(t_0) + b_1(t_0)(t - t_0) + \ldots + b_{m-1}(t_0)(t - t_0)^{m-1} + \varphi(t - t_0),$$

и, поскольку $\Delta^m_{2^{-k}h}$ обращает в 0 полиномы степени ниже m,

$$\Delta^m_{2^{-k}h} g(x_k) = \Delta^m_{2^{-k}h} \varphi(x_k - t_0) = \sum_{j=0}^{m} C^j_m (-1)^{m-j} \varphi(x_k + j2^{-k}h - t_0).$$

Но $\left|x_k + j2^{-k}h - t_0\right| \leqslant 2^{-k}mh \to 0$ при $k \to \infty$, и $\varphi(x) = o(|x|^m)$ при $x \to 0$. Поэтому

$$2^{-mk} \left|\Delta^m_h g(x_0)\right| \leqslant \left|\Delta^m_{2^{-k}h} g(x_k)\right| = o\left((2^{-k})^m\right), \quad k \to \infty.$$

Значит, $\Delta^m_h g(x_0) = 0$. Ввиду произвольности $x_0 \in \mathbb{R}$ и $h > 0$, по лемме 1, g — полином степени не выше $m - 1$, и $f \in C^m$. □

Лемма 1. *Если* $f \in C(\mathbb{R})$ *и* $\Delta_h^m f(x) = 0$ *для всех* $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$, *то* f *— полином степени не выше* $m - 1$.

Доказательство. Пусть $f^{(m)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ — m-я производная f в смысле теории распределений. Тогда $h^{-m}\Delta_h^m f \to f^{(m)}$ в $*$-слабой топологии $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, откуда $f^{(m)} = 0$, и f — полином. Известно и более элементарное доказательство [4, § III.3]. Рассматривая равенство $\Delta_h^m f(x) = 0$ как рекуррентное соотношение на арифметической прогрессии $h\mathbb{Z}$ и интерполируя f полиномом степени не выше $m - 1$ в m последовательных её точках, получаем, что f совпадает с некоторым полиномом на $h\mathbb{Z}$. Если h_1 и h_2 соизмеримы, то $h_1\mathbb{Z} \cap h_2\mathbb{Z}$ бесконечно, и соответствующие полиномы совпадают. Поэтому f является полиномом на $\mathbb{Q}$, а, значит, по непрерывности, и на всём $\mathbb{R}$. □

Следующий многомерный результат вытекает из одномерного и леммы 2, приведённой ниже.

Теорема 2. *Пусть* f *— некоторая функция, определённая на открытом множестве* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, *такая, что для всех* $x \in \mathcal{U}$ *имеет место разложение*

$$f(x + ty) = f(x) + P_1(x, ty) + \ldots + P_m(x, ty) + o(t^m), \quad t \to 0$$

(равномерность оценки не предполагается), где $P_k(x, y)$ *— функции на* $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, *однородные степени* k *по второму аргументу и имеющие по второму аргументу ту же чётность, что и* k *(т. е.* $P_k(x, ty) = t^k P_k(x, y)$, $t \in \mathbb{R}$*). Тогда, если* $P_m(x, y)$ *непрерывна по* x *при фиксированном* y, *то* $f \in C^m(\mathcal{U})$, *и, значит,* $P_k(x, y)$ *— однородные полиномы по* y.

Как будет видно из доказательства, на самом деле используется указанное разложение при $y \in \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid 0 < k_1 + \ldots + k_n \leqslant m\}$, и, если $P_k(x, y)$ определены лишь на $\mathcal{U} \times C$, $C \supset \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid 0 < k_1 + \ldots + k_n \leqslant m\}$ — центрально-симметричный конус в $\mathbb{R}^n$, они автоматически продолжаются до функции на $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, полиномиальной по второму аргументу.

Полилинейные формы и поляризация. Полилинейное отображение — это отображение $E \times \ldots \times E \to F$ (E, F векторные пространства), линейное по каждому своему аргументу. Оно называется симметрическим, если не изменяется при перестановке аргументов. Через квадратичную форму $Q(x) = B(x, x)$ исходная симметрическая билинейная форма B выражается как $B(x, y) = 0{,}5\,(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$. Восстановление симметрической полилинейной формы B по соответствующей однородной форме $P(x) = B(x, \ldots, x)$ называется поляризацией. Для старших степеней поляризационные формулы имеют более сложный вид. Дадим здесь их доказательство для удобства читателя (более подробное изложение вопроса см., например, в [5, § 7] и приведённых там источниках).

Напомним, что k-я полная производная в точке x выражается как

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{\partial^k}{\partial t_1 \ldots \partial t_k} f\left(x + \sum_1^k t_j v_j\right)\Bigg|_{t_1 = \ldots = t_k = 0}.$$

Будем обозначать также $\dfrac{d^k}{dv^k} f(x) = D^k f(x)(v, \ldots, v) = \dfrac{d^k}{dt^k} f(x + tv)\Big|_{t=0}$ k-ю производную по направлению v.

$D^k f(x)$ — симметрическая k-линейная форма. Любая симметрическая k-линейная форма восстанавливается по соответствующей ей однородной форме степени k с помощью взятия k-й полной производной.

Предложение 1. *Если B — симметрическая k-линейная форма на E и P — соответствующая ей однородная форма, то $B(v_1,\dots,v_k)=\dfrac{1}{k!}D^kP\,(x)\cdot(v_1,\dots,v_k)$ (производная не зависит от точки x).*

Доказательство. Пусть $v_0,v_1,\dots,v_k\in E$, $t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}$. Тогда

$$P\left(v_0+\sum_1^k t_jv_j\right)=B(v_0+\sum_1^k t_jv_j,\dots,v_0+\sum_1^k t_jv_j)=$$
$$=\sum_{(j_1,\dots,j_k)\in\{0,\dots,k\}^k} B(v_{j_1},\dots,v_{j_k})t_{j_1}\dots t_{j_k}$$

(мы полагаем $t_0=1$). Но производная $\dfrac{\partial^k}{\partial t_1\dots\partial t_k}t_{j_1}\dots t_{j_k}$ отлична от нуля лишь в случае, когда $j_1,\dots,j_k$ принимают все значения от 1 до k, и в этом случае она равна 1. Из симметричности B получаем:

$$D^kP\,(v_0)\cdot(v_1,\dots,v_k)=\frac{\partial^k}{\partial t_1\dots\partial t_k}P\left(v_0+\sum_1^k t_jv_j\right)=k!B(v_1,\dots,v_k).$$

□

Предложение 2 (поляризационное тождество). *Если B — симметрическая k-линейная форма на E и $P(x)=B(x,\dots,x)$, то для $v_0,v_1,\dots,v_k\in E$*

$$B(v_1,\dots,v_k)=\frac{1}{k!}\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-\sum_1^k\epsilon_j}P\left(v_0+\sum_1^k\epsilon_jv_j\right)=\frac{1}{k!}\Delta_{v_1}\dots\Delta_{v_k}P.$$

Доказательство. По предыдущему, т. к. $D^kP\,(x)$ не зависит от x,

$$B(v_1,\dots,v_k)=\frac{1}{k!}\int_0^1\dots\int_0^1\frac{\partial^k}{\partial t_1\dots\partial t_k}P\left(v_0+\sum_1^k t_jv_j\right)dt_1\dots dt_k=$$
$$=\frac{1}{k!}P\left(v_0+\sum_1^k t_jv_j\right)\Bigg|_{t_1=0}^{1}\dots\Bigg|_{t_k=0}^{1}=\frac{1}{k!}\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-\sum_1^k\epsilon_j}P\left(v_0+\sum_1^k\epsilon_jv_j\right).$$

Возможно и чисто алгебраическое доказательство, см. [5, Lemma 7.13]. Тогда можно, наоборот, вывести из этого предложения предыдущее. □

Сведение многомерного случая к одномерному. Из примера функции $f(x,y)=xy\ln\ln\dfrac{1}{x^2+y^2}$ (В. И. Юдович, см. [6, § 9] и приведённые там ссылки) видно, что непрерывность функции и её вторых производных в направлении координатных осей не обеспечивает ещё непрерывности смешанной производной. Следующая лемма показывает, что имеется конечное число направлений, непрерывность m-х производных вдоль которых уже достаточна для принадлежности непрерывной функции к C^m.

Лемма 2. *Пусть непрерывная функция f, определённая на открытом множестве $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, имеет m-е производные по направлению v на каждой прямой, параллельной вектору v, обозначим их $f_v^{(m)}$, для*

$$v \in \{\,(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid 0 < k_1 + \ldots + k_n \leqslant m\,\};$$

и пусть для этих v, $f_v^{(m)} \in C(\mathcal{U})$. Тогда $f \in C^m(\mathcal{U})$.

Доказательство. Нужно перейти к контексту, в котором производные заведомо существуют, выразить смешанные производные через кратные производные по направлению, используя поляризацию, и из их непрерывности заключить принадлежность f к классу C^m. Можно использовать либо теорию распределений, либо сглаживание (что на самом деле практически одно и то же: равенство $\dfrac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x^\alpha} = f$ в смысле теории распределений равносильно равенствам $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\varphi_k * F) = \varphi_k * f$, $\varphi_k \to \delta_0$). Первый подход использует два факта. Первый факт: если у непрерывной функции f существует непрерывная же m-я производная по направлению v вдоль прямых, параллельных v, то $\dfrac{\partial^m}{\partial v^m} f$ в смысле теории распределений совпадает с этой производной. Второй: если $f \in \mathscr{D}'(\mathcal{U})$, и $f'_{x_j} \in C(\mathcal{U})$, то $f \in C^1(\mathcal{U})$. Изложим теперь доказательство, использующее сглаживание.

Прежде всего, заметим, что можно считать, что $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$. Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность неотрицательных гладких функций с интегралом, равным 1, носители которых при $k \to \infty$ лежат в сколь угодно малой окрестности нуля. Свёртка $\varphi_k * f$ сходится к f равномерно на компактах. Тогда, по теореме Фубини,

$$\frac{\partial^m}{\partial v^m}(\varphi_k * f)(x) = \left(\left(\frac{\partial^m}{\partial v^m}\varphi_k\right) * f\right)(x) = \left\langle f, \left(\frac{\partial^m}{\partial v^m}\varphi_k\right)(x - \cdot)\right\rangle =$$
$$= (-1)^m \left\langle f, \frac{\partial^m}{\partial v^m}\left(\varphi_k(x - \cdot)\right)\right\rangle = \left\langle f_v^{(m)}, \varphi_k(x - \cdot)\right\rangle = \left(\varphi_k * f_v^{(m)}\right)(x).$$

Поэтому $\dfrac{\partial^m}{\partial v^m}(\varphi_k * f) \to f_v^{(m)}$ равномерно на компактах. Значит, и для всех смешанных производных порядка m имеем (мы полагаем $f_0^{(m)} = 0$)

$$\frac{\partial^m}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_m}}(\varphi_k * f) = D^m(\varphi_k * f) \cdot (e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_m}) =$$
$$= \frac{1}{m!} \sum_{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m) \in \{0,1\}^m} (-1)^{m - \sum_1^m \epsilon_j} D^m(\varphi_k * f) \cdot \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j e_{\nu_j}, \ldots, \sum_{j=1}^m \epsilon_j e_{\nu_j}\right) =$$
$$= \frac{1}{m!} \sum_{\{\epsilon_j\}_1^m \in \{0,1\}^m} (-1)^{m - \sum_1^m \epsilon_j} (\varphi_k * f)^{(m)}_{\sum_1^m \epsilon_j e_{\nu_j}} \to \frac{1}{m!} \sum_{\{\epsilon_j\}_1^m \in \{0,1\}^m} (-1)^{m - \sum_1^m \epsilon_j} f^{(m)}_{\sum_1^m \epsilon_j e_{\nu_j}},$$

сходимость имеет место равномерно на компактах. Таким образом, последовательность $\varphi_k * f$ фундаментальна в $C^m(\mathbb{R}^n)$ (это вытекает из известного результата о промежуточных производных, сформулированного ниже как лемма 3), а, значит, и сходится в нём к некоторой функции, которая, конечно же, должна совпадать с f.$\square$

Лемма 3. *Стандартная топология в* $C^m(\mathcal{U})$, *которая порождена полунормами* $\|f\|_{K,\alpha} = \max_K |f^{(\alpha)}|$, K *— компакт в* $\mathcal{U}$, $|\alpha| \leqslant m$, *(или* $\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\cdot\|_{K,\alpha}$*), порождается также полунормами* $\|f\|_K = \|f\|_{K,0} + \sum_{|\alpha|=m} \|f\|_{K,\alpha}$. ☐

Однородные формы и односторонние производные. Естественно спросить, можно ли в теореме 1 ограничиться лишь однородностью $P_k(x,y)$. Ответ положительный, однако, как видно из примера функции $|x_1|x_1^{k-1}$, в этом случае нельзя опустить требование непрерывности $P_k(x,y)$ при $k < m$.

Теорема 3. *Пусть* f *— некоторая функция, определённая на открытом множестве* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, *такая, что для всех* $x \in \mathcal{U}$ *имеет место разложение*

$$f(x+ty) = f(x) + P_1(x,ty) + \ldots + P_m(x,ty) + o(t^m), \quad t \to +0$$

(равномерность оценки не предполагается), где $P_k(x,y)$ *— функции на* $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, *однородные степени* k *по второму аргументу (т. е.* $P_k(x,ty) = t^k P_k(x,y)$, $t \geqslant 0$*). Тогда, если* $P_1(x,y), \ldots, P_m(x,y)$ *непрерывны по* x *при фиксированном* y, *то* $f \in C^m(\mathcal{U})$, *и, значит,* $P_k(x,y)$ *— однородные полиномы по* y.

Теорема также сводится к одномерному случаю и также можно потребовать выполнение оценки лишь для y из $\{(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid 0 < k_1 + \ldots + k_n \leqslant m\}$. В одномерном случае можно предполагать наличие разложения только в правой окрестности точки.

Теорема 4. *Пусть* f *— непрерывная функция на интервале* I, *такая, что для всех* $t_0 \in I$ *имеет место разложение*

$$f(t) = f(t_0) + a_1(t_0)(t-t_0) + \ldots + a_m(t_0)(t-t_0)^m + o((t-t_0)^m), \quad t \to t_0 + 0$$

(с некоторыми $a_1(t_0), \ldots, a_m(t_0)$*). Тогда, если* $a_1(t), \ldots, a_m(t)$ *непрерывны на интервале* I, *то* $f \in C^m(I)$.

Доказательство. Будем считать, что $I = \mathbb{R}$. Кроме того, ясно, что рассматривая отдельно вещественную и мнимую части f, достаточно доказать теорему для вещественнозначных f. Доказательство будем вести индукцией по m. При $m = 0$ заключение теоремы уже содержится в посылке. Пусть теперь $m \geqslant 1$.

Пусть F — m-я первообразная от $m!a_m(t)$ и $g = f - F$. По предположению индукции, $f, g \in C^{m-1}$. Мы хотим теперь заключить, что g полином. Это можно сделать, применяя [7, Th. 19] к g, а затем к $-g$. Дадим, однако, здесь прямое доказательство.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Имеется (и единственен) полином P степени не выше m, такой, что

$$P(x_0 + jh) = g(x_0 + jh), \quad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Пусть p_m — коэффициент при степени m полинома P. Для $u = g - P$ имеет место разложение

$$u(t) = u(t_0) + b_1(t_0)(t-t_0) + \ldots + b_{m-1}(t_0)(t-t_0)^{m-1} - p_m(t-t_0)^m + o((t-t_0)^m), \quad t \to t_0 + 0. \tag{3}$$

Из единственности разложения и принадлежности u пространству C^{m-1} вытекает, что $b_j(t_0) = u^{(j)}(t_0)/j!$.

Функция u лежит в C^{m-1} и имеет не менее $m+1$ различного нуля на промежутке $[x_0, x_0 + mh]$. Поэтому $u^{(m-1)}$ непрерывна и имеет по крайней мере два различных нуля $t_1 < t_2$ на $[x_0, x_0 + mh]$. Так как $u^{(m-1)}(t_1) = u^{(m-1)}(t_2)$, то $u^{(m-1)}$ достигает максимума на полуинтервале $[t_1,t_2)$ в некоторой точке $t_0 \in [t_1,t_2)$. Формула Тейлора порядка $m-1$ с остаточным членом в форме Лагранжа (либо тривиальное равенство $u(t)=u(t)$ при $m=1$) даёт:

$$u(t)=u(t_0)+u'(t_0)(t-t_0)+\ldots+\frac{u^{(m-2)}(t)}{(m-2)!}(t-t_0)^{m-2}+\frac{u^{(m-1)}(\xi)}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1}, \quad t>t_0,$$

где $\xi=\xi(t)\in(t_0,t]$. Сравнивая с уже имеющимся разложением (3), получаем:

$$\frac{u^{(m-1)}(\xi(t))}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1}-\frac{u^{(m-1)}(t_0)}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1}=-p_m(t-t_0)^m+o((t-t_0)^m), \quad t\to t_0+0,$$

откуда $p_m \geqslant 0$. Аналогично, беря в качестве t_0 точку минимума $u^{(m-1)}$ на полуинтервале $[t_1,t_2)$, получаем $p_m \leqslant 0$.

Поэтому $p_m=0$. Значит, $\deg P \leqslant m-1$, и, учитывая (2), $\Delta_h^m g(x_0)=\Delta_h^m P(x_0)= =0$. Ввиду произвольности $x_0\in\mathbb{R}$, $h>0$, отсюда следует, что g — полином степени не выше $m-1$. Поэтому $f=F+g\in C^m$, что и завершает шаг индукции. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Denjoy A. Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur / A. Denjoy // Fund. Math. – 1935. – V. 25. – P. 273–326.
2. Oliver H. W. The exact Peano derivative / H. W. Oliver // Trans. Amer. Math. Soc. – 1954. – Vol. 76. – P. 444–456.
3. Fischer A. Differentiability of Peano derivatives / A. Fischer // Proc. Amer. Math. Soc. – 2008. – V. 136. – P. 1779–1785.
4. Избранные задачи по вещественному анализу / Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов. – М.: Наука, 1992. – 432 с.
5. Kriegl A. The Convenient Setting of Global Analysis / A. Kriegl, P. W. Michor. – Providence: AMS, 1997. – 618 p.
6. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
7. Bullen P. S. A criterion for n-convexity / P. S. Bullen // Pacific J. Math. – 1971. – Vol. 36, No. 1. – P. 81–98.

Поступила в редакцию 22.03.2016 г.

PEANO DERIVATIVE AND m-FOLD CONTINUOUS DIFFERENTIABILITY

D. A. Zaraisky

A simple proof of coincidence of m-th continuous differentiability notions for Peano and ordinary derivatives (the Denjoy – Oliver theorem) is given. The multidimensional case is also considered.

Keywords: Peano derivative, Taylor formula.

Зарайский Даниил Анатольевич
Государственное учреждение «Институт прикладной математики и механики», г. Донецк,
отдел теории функций
d.zaraisky@gmail.com
83114, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, 74,

Zaraisky Daniel Anatolievich
State Institution "Institute of Applied Mathematics and Mechanics," Donetsk

УДК 517.988.28

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ И ПРОБЛЕМА ШЁНБЕРГА

© 2016. ***В. П. Заставный***

Для широкого класса функций $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ доказано, что функция $f(\rho^\lambda(x))$ является положительно определённой на нетривиальном вещественном линейном пространстве $E \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E, \rho)$. Здесь ρ – неотрицательная, однородная функция на E и $\rho(x) \not\equiv 0$, а $\alpha(E, \rho)$ – константа Шёнберга.

***Ключевые слова*:** положительно определённые функции, вполне монотонные функции, проблема Шёнберга.

Введение. Пусть E – нетривиальное вещественное линейное пространство. Функция $f: E \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на E ($f \in \Phi(E)$), если при любом $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $x_1, \ldots, x_m$ из E и для любой системы комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_m$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^m c_k \bar{c}_j f(x_k - x_j) \geqslant 0$.

Линейное пространство E и функцию $\rho: E \to \mathbb{R}$ с условиями $\rho(x) \geqslant 0$, $\rho(tx) = |t|\rho(x)$, $x \in E$, $t \in \mathbb{R}$, и $\rho(x) \not\equiv 0$ на E, мы обозначим (E, ρ). Символом $\Phi(E, \rho)$ обозначим класс всех непрерывных функций $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ таких, что функция $f \circ \rho \in \Phi(E)$. Так как $\rho(x) \not\equiv 0$ на E, то из условия $f \circ \rho \in \Phi(E)$ следует, что $f(|t|) \in \Phi(\mathbb{R})$.

В данной работе рассматривается следующая задача. Для заданной пары (E, ρ) и непрерывной функции $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ требуется определить такие $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых функция $f(t^\lambda)$ принадлежит классу $\Phi(E, \rho)$. Необходимым условием такой принадлежности должна быть непрерывность функции $f(t^\lambda)$ на промежутке $[0, +\infty)$. При $\lambda > 0$ это условие выполнено. Для выполнения этого условия при $\lambda = 0$, мы доопределяем функцию t^0, $t \in (0, +\infty)$, в точке $t = 0$ по непрерывности справа, полагая $0^0 := 1$. Тогда, очевидно, $f(t^0) \in \Phi(E, \rho) \iff f(1) \geqslant 0$. При $\lambda < 0$ функцию $f(t^\lambda)$, $t \in (0, +\infty)$, можно доопределить в точке $t = 0$ по непрерывности справа $\iff$ существует конечный предел $f(+\infty) := \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ и в этом случае полагаем $f(0^\lambda) := f(+\infty)$.

Замечание 1. Если функция f непрерывна, убывает и ограничена на $[0, +\infty)$, то не трудно доказать, что $f(t^\lambda) \in \Phi(E, \rho), \lambda < 0 \iff f \equiv const \geqslant 0$.

В частных случаях рассматриваемой задачи получаются следующие известные проблемы.

1) Если взять $f(t) = (1-t)_+^\delta$, $\delta > 0$, то получается проблема Куттнера-Голубова. В случае пары $(\mathbb{R}^n, \rho)$, где $\rho(x)$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, качественное решение этой задачи получили в 1944 г. Куттнер [1] при $n = 1$ и в 1981 г. Голубов Б.И. [2] при $n \geqslant 2$. В общем случае качественное решение проблемы Куттнера-Голубова получил в 2000 г. автор в работе [3], в которой также установлена связь проблемы Куттнера-Голубова с проблемой Шёнберга.

2) Если взять $f(t) = e^{-t}$, то получается проблема Шёнберга. Для пространств l_p^n при $n \geqslant 2$ и $2 < p \leqslant \infty$ эта проблема в 1938 была поставлена Шёнбергом [4, Problems

1,2]. Здесь символом l_p^n обозначается пара $(\mathbb{R}^n, \rho)$, $n \in \mathbb{N}$, с функцией $\rho(x) := \|x\|_p$, $0 < p \leqslant \infty$, где $\|x\|_p^p := \sum_{k=1}^n |x_k|^p$ при $0 < p < \infty$ и $\|x\|_\infty := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$ для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Бесконечномерные пространства l_p определяются аналогично. Хорошо известно, что $\exp\left(-t^\lambda\right) \in \Phi(E, \rho) \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E, \rho)$, где

$$\alpha(E, \rho) := \sup\left\{\lambda \geqslant 0 : \ \exp\left(-t^\lambda\right) \in \Phi(E, \rho)\right\}. \tag{1}$$

Величину (1) для данного (E, ρ) будем называть константой Шёнберга. Известно (см., например, [3]), что $0 \leqslant \alpha(E, \rho) \leqslant 2$, а *если* $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ *и* $\rho(x) > 0$ *для* $x \neq 0$, *то* $\alpha(\mathbb{R}^n, \rho) = 2 \iff (\mathbb{R}^n, \rho)$ *и* l_2^n *изометричны.* Для пространств l_p^n константы Шёнберга найдены:

$$\alpha\left(l_p^n\right) = \begin{cases} 2\,, & \text{если } n = 1,\ 0 < p \leqslant \infty; \\ p\,, & \text{если } n \geqslant 2,\ 0 < p \leqslant 2; \\ 1\,, & \text{если } n = 2,\ 2 < p \leqslant \infty; \\ 0\,, & \text{если } n \geqslant 3,\ 2 < p \leqslant \infty. \end{cases} \tag{2}$$

При $0 < p \leqslant 2$ этот результат был известен Шёнбергу, а в остальных случаях независимо и разными методами был доказан в 1991 Колдобским [5] и автором [6, 7, 8] ($2 < p \leqslant \infty$, $n \geqslant 2$). Случай $p = \infty$ исследовали в 1989 Misiewiez [9] ($n \geqslant 3$) и Курицын [10] ($n = 2$).

Из результата Герца [11] вытекает что, если ρ – норма в E и $\dim E = 2$, то $\alpha(E, \rho) \geqslant 1$. В 1991 автором [6, 7, 8] получены общие достаточные условия на двумерную норму ρ, при выполнении которых выполняется равенство $\alpha(E, \rho) = 1$. Этим условиям удовлетворяют, например, пространства l_p^2, $2 < p \leqslant \infty$, $p = 1$, и все двумерные нормированные пространства, норма в которых не является строго выпуклой. В этих же работах найдены достаточные условия тривиальности классов $\Phi(E, \rho)$, $\dim E \geqslant 3$ (этим условиям удовлетворяют, например пространства l_p^n, $3 \leqslant n \leqslant \infty$, $2 < p \leqslant \infty$). Другие достаточные условия тривиальности классов $\Phi(E, \rho)$, $\dim E \geqslant 4$ найдены в работе Колдобского [12].

Проблема Шенберга связана с изометрическим вложением (E, ρ) в пространство $L_p(\Omega, \mu)$, $0 < p \leqslant 2$ (Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine [13], Колдобский [14, 15, 16], Williams, Wells [17]).

3) Если взять $f(t) = 1/(1+t)^\beta$, $\beta > 0$, то в случае евклидова пространства l_2^n получается задача, которая при $\lambda > 0$ эквивалентна следующей задаче из теории вероятностей. При каких $\lambda > 0$ функция $f(\|x\|_2^\lambda)$ является характеристической функцией некоторого распределения в $\mathbb{R}^n$? Ответ известен: функция $1/(1 + \|x\|_2^\lambda)^\beta$, $\beta > 0$, является характеристической функцией некоторого распределения в $\mathbb{R}^n$ $\iff$ $0 < \lambda \leqslant 2$. В одномерном случае при $\lambda = 2$, $\beta = 1$ это распределение Лапласа, а при $0 < \lambda \leqslant 2$, $\beta = 1$ это распределения Линника Ю.В., который их исследовал в 1953 г. [18, 19]. В многомерном случае распределения Линника Ю.В. рассмотрел в 1990 г. Anderson D.N. [20], а аналитические и асимптотические свойства в 1995 г. изучил Островский И.В. [21]. Для произвольных параметров $0 < \lambda \leqslant 2$, $\beta > 0$ в одномерном случае эти распределения рассмотрел в 1990 г. Devroye L. [22], а многомерный случай отмечен в 2004 г. в работе Gneiting T., Schlatter M. [23].

В теореме 1 показано, что всегда можно считать, что функция ρ непрерывна на E и $\rho(x) > 0$ при всех $x \in E$, $x \neq 0$.

В теореме 2 для широкого класса функций f найдены все $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых функция $f(t^{\lambda})$ принадлежит классу $\Phi(E,\rho)$. Ответ дан в терминах константы Шёнберга (2).

Если $\rho(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, и при некотором $\lambda > 0$ функция $\exp(-\rho^{\lambda}(x)) \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, то её преобразование Фурье неотрицательно на $\mathbb{R}^n$. В случае эвклидовой нормы на самом деле это преобразование Фурье положительно (см., например, Куттнер [1, Lemma 2], Линник Ю.В. [18, §47] при $n = 1$ и Голубов Б.И. [2, Lemma 2] при $n \geqslant 2$). В теореме 3 этот факт доказан в общем случае.

Формулировка результатов. Пусть E нетривиальное вещественное линейное пространство. Символом $C(E)$ обозначим множество всех функций $f : E \to \mathbb{C}$, которые непрерывны на любом конечномерном подпространстве в топологии покоординатной сходимости в каком-нибудь базисе этого пространства.

Теорема 1. *Если класс* $\Phi(E,\rho)$ *нетривиален, то:*
1) *Множество* $E_0 = \{x \in E : \ \rho(x) = 0\}$ *является линейным и* $\rho(x+y) = \rho(x)$ *для всех* $x \in E$ *и* $y \in E_0$. *Кроме того, любое алгебраическое дополнение* E_1 *к* E_0 (*оно всегда существует*) *является нетривиальным подпространством в* E, $\rho(x) > 0$ *для всех* $x \in E_1$, $x \neq 0$, *и* $\Phi(E_1,\rho) = \Phi(E,\rho)$.
2) *Функция* $\rho \in C(E)$.

Замечание 2. Утверждение о существовании линейного подпространства E_1 с указанными свойствами отмечено без доказательства в [3, Remark 2] для конечномерного E в предположении, что ρ непрерывна и $\exp(-t^{\mu}) \in \Phi(E,\rho)$ для некоторого $\mu > 0$. Утверждение о линейности E_0 при дополнительном условии доказано в работе автора [3, Theorem 1]: *Пусть функция* $f \in \Phi(E)$ *и существуют* $\mu > 0$, $\beta > 0$ *такие, что для всех* $x \in E$, $\lim\limits_{t\to+0}(f(0) - f(tx))t^{-\mu} = \beta\rho^{\mu}(x)$. *Тогда* $\exp(-t^{\mu}) \in \Phi(E,\rho)$, *а множество* $E_0 = \{x \in E : \ \rho(x) = 0\}$ *является линейным.* Непрерывность функции ρ в проблеме Итона для псевдо-изотропных симметричных случайных векторов доказана Misiewiez [24, Theorem II.2.1] (не совсем корректное доказательство этого факта приведено в [10]). В проблеме Итона рассматривается случай, когда $\rho(x) > 0$ для всех $x \in E$, $x \neq 0$, а функция $f(\rho(x))$ является характеристической, т.е. положительно определённой и непрерывной на E с условием $f(0) = 1$. В теореме 1 не предполагается непрерывность на E функции $f(\rho(x))$ для $f \in \Phi(E,\rho)$.

Замечание 3. В работе Колдобского [12] доказано следующее необходимое условие нетривиальности $\Phi(\mathbb{R}^n,\rho)$ (при дополнительных условиях см. [10, 25]): *Если класс* $\Phi(\mathbb{R}^n,\rho)$ *нетривиален, где* $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ *и* $\rho(x) > 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, *то существует неотрицательная конечная борелевская мера* μ *на сфере* $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ *и константа* $C \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\mu(S^{n-1}) = 1$ *и для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *выполняется равенство*

$$\ln\rho(x) = \int_{S^{n-1}} \ln|(u,x)|\,d\mu(u) + C, \ \textit{где}\ (u,x) = u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n.$$

Функция f называется вполне монотонной на $(0,+\infty)$ ($f \in M_{(0,+\infty)}$), если $f \in C^{\infty}(0,+\infty)$ и неравенство $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0$ выполняется для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $x > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C[0,+\infty) \cap M_{(0,+\infty)}$, $f \not\equiv const$ *и существует правая производная в нуле* $f'(0)$. *Тогда при* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедливы утверждения:*
1) $f(t^{\lambda}) \in \Phi(E,\rho) \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E,\rho)$.

2) $1/f(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$ *при всех* $\lambda > 0$.
3) *Если* $f(+\infty) = 0$, *то* $1/f(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$ *при всех* $\lambda < 0$.

Замечание 4. В утверждении 3 теоремы 2 условие $f(+\infty) = 0$ по существу. Это видно на примере функции $f(t) = (t+2)/(t+1)$, для которой $g(t) = 1/f(1/t) = (t+1)/(2t+1)$. Очевидно $f, g \in C[0,+\infty) \cap M_{(0,+\infty)}$.

Пример 1. Пусть $g_{\lambda,\beta}(t) := 1/(1+t^\lambda)^\beta$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Очевидно $g_{\lambda,0} \equiv 1 \in \Phi(E,\rho)$, $g_{0,\beta} \equiv 1/2^\beta \in \Phi(E,\rho)$. Применяя теорему 2 к функции $f(t) = 1/(1+t)^\beta$, $\beta > 0$, получаем:
1) Если $\beta > 0$, то $g_{\lambda,\beta} \in \Phi(E,\rho) \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E,\rho)$.
2) Если $\beta < 0$, то $g_{\lambda,\beta} \notin \Phi(E,\rho)$ при $\lambda \neq 0$.

В случае евклидовой нормы этот результат хорошо известен (см. введение). В этом случае $\alpha\left(l_2^n\right) = 2$. Поэтому, если $\beta > 0$, то $g_{\lambda,\beta} \in \Phi(l_2^n) \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant 2$.

Пример 2. Если $\beta > 0$, то $f_\beta(t) := 1 - t/(1+t^\beta)^{1/\beta} \in M_{(0,+\infty)} \iff 0 < \beta \leqslant 1$ (см., например, [26, Theorem 9(ii)]). Очевидно $f'_\beta(0) = -1$ и $f_\beta(+\infty) = 0$. Применяя теорему 2 к функции f_β, получаем:
1) Если $0 < \beta \leqslant 1$, то $f_\beta(t^\lambda) \in \Phi(E,\rho) \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E,\rho)$.
2) Если $0 < \beta \leqslant 1$, то $1/f_\beta(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$ при $\lambda \neq 0$.

Теорема 3. *Если константа Шёнберга* $\alpha(\mathbb{R}^n,\rho) > 0$, *то* $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$. *Если дополнительно* $\rho(x) > 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, *то при любом* $0 < \lambda \leqslant \alpha(\mathbb{R}^n,\rho)$ *преобразование Фурье функции* $f_\lambda(x) := \exp(-\rho^\lambda(x))$ *положительно в* $\mathbb{R}^n$, *т.е.* $\widehat{f_\lambda}(u) > 0$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Как отмечалось выше, в случае эвклидовой нормы этот результат известен.

Вспомогательные утверждения и факты. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(E)$. Пусть f, $f_i \in \Phi(E)$. Тогда:
1) $|f(x)| \leqslant f(0)$, $\overline{f(-x)} = f(x)$, $x \in E$;
2) $|f(x+y) - f(x)|^2 \leqslant 2f(0)(f(0) - \mathrm{Re} f(y))$, $x, h \in E$;
3) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $\bar{f}$, $\mathrm{Re}\, f$, $f_1 f_2 \in \Phi(E)$, где $\lambda_i \geqslant 0$;
4) если для всех $x \in E$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: g(x)$, то $g \in \Phi(E)$.
5) $|f(0)f(x+y) - f(x)f(y)|^2 \leqslant (f^2(0) - |f(x)|^2)(f^2(0) - |f(y)|^2)$, $x, y \in E$.
6) для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых точек $x_k, y_k \in E$, $1 \leqslant k \leqslant n$ выполняется неравенство

$$\left| f\left(\sum_{n}^{n} x_k\right) - f\left(\sum_{n}^{n} y_k\right)\right|^2 \leqslant 2nf(0) \sum_{k=1}^{n} \left(f(0) - \mathrm{Re}\, f(x_k - y_k)\right) .$$

Свойства 1)-4) хорошо известны (см., например, [27, 28, 29, 30, 31]). Доказательство свойства 5) приведено в [30, 32.4(v)], [31, 1.4.12]. Свойство 6) доказал Горин Е.А. [32]. Из этих неравенств сразу получаются следующие две леммы.

Лемма 1.[30, 32.6] *Пусть* $f \in \Phi(E)$ *и* $B_0 := \{x \in E : f(x) = f(0)\}$. *Тогда* $f(x+y) = f(x)$ *для всех* $x \in E$, $y \in B_0$, *а* B_0 *является подгруппой* E *относительно сложения: если* $x, y \in B_0$, *то* $-x \in B_0$ *и* $x + y \in B_0$.

Доказательство этой леммы очевидным образом вытекает из свойств 1) и 2) (или 5), если $f(0) \neq 0$).

Лемма 2.[28, Гл. IV, § 1, Упражнение 5] *Пусть* $f \in \Phi(E)$. *Если для некоторого* $n \in \mathbb{N}$ *и набора точек* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *из* E *функции одной переменной* $f(te_k)$, $t \in \mathbb{R}$, *непрерывны при* $t = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, *то функция* $F(u) := f(u_1e_1 + u_2e_2 + \ldots + u_ne_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^n$, *принадлежит классу* $C(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Приведём два доказательства.

1 метод. Если $f(0)=0$, то $f(x)\equiv 0$ и лемма 2 в этом случае тривиальна. Пусть $f(0)>0$. Докажем утверждение индукцией по $n\in\mathbb{N}$. При $n=1$ утверждение очевидно: функция $f(te_1)$, $t\in\mathbb{R}$, положительно определена на $\mathbb{R}$ и непрерывна при $t=0$ и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$ (см. свойство 1). Предположим, что утверждение верно для некоторого натурального n. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_{n+1}$ - допустимый набор точек из E. По доказанному и предположению индукции функции $f(te_{n+1})$ и $f(u_1e_1+u_2e_2+\ldots+u_ne_n)$ непрерывны соответственно на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$. Функция $F(u):=f(u_1e_1+u_2e_2+\ldots+u_{n+1}e_{n+1})$, $u\in\mathbb{R}^{n+1}$, положительно определена на $\mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывна при $u=0$ (это вытекает из свойства 4 при $x=u_1e_1+u_2e_2+\ldots+u_ne_n$, $y=u_{n+1}e_{n+1}$) и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}^{n+1}$.

2 метод. Для произвольных $u,v\in\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|F(u)-F(v)|^2\leqslant 2nf(0)\sum_{k=1}^{n}\left(f(0)-\operatorname{Re}f((u_k-v_k))e_k\right)\,,$$

которое следует из свойства 5) при $x_k=u_ke_k$, $y_k=v_ke_k$, $1\leqslant k\leqslant n$. Поэтому $F(u)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2 доказана. □

В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин (для $n=1$) доказали следующий критерий положительной определённости в $\mathbb{R}^n$: *Функция $f\in\Phi(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(u,x)}d\mu(u),\quad x\in\mathbb{R}^n,\text{ где }(u,x)=u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [27, 28, 29, 30, 31]. Как прямое следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье: *Если $f\in C(\mathbb{R}^n)\cap L(\mathbb{R}^n)$, то $f\in\Phi(\mathbb{R}^n)\iff\widehat{f}(u)\geqslant 0$, $u\in\mathbb{R}^n$, где*

$$\widehat{f}(u):=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(u,x)}f(x)\,dx,\quad u\in\mathbb{R}^n$$

и в этом случае $\widehat{f}\in L(\mathbb{R}^n)$ (см. [33, Chapter I, §1, Corollary 1.26]).

В наших обозначениях класс $\Phi(\mathbb{R},|x|)=\Phi(l_2^1)$ совпадает по существу с классом чётных положительно определённых и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Из теоремы Бохнера-Хинчина сразу получается критерий для этого класса: *Функция $f\in\Phi(l_2^1)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера ν на $[0,+\infty)$ такая, что*

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\cos(ux)\,d\nu(u),\quad x\geqslant 0. \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть $f\in\Phi(E,\rho)$ и $g\in\Phi(l_2^1)$. Тогда $\psi\in\Phi(E,\rho)$, где*

$$\psi(t):=\int_0^{+\infty}g(ts)d\nu(s),\quad t\geqslant 0,$$

а ν *– конечная неотрицательная борелевская мера на* $[0,+\infty)$ *из представления* (3) *для* f*. Если дополнительно* $f(t)\not\equiv f(0)$ *на* $[0,+\infty)$*, а функция* g *строго убывает на* $[0,+\infty)$ (*например,* $g(t)=\exp(-t^\lambda)$*,* $0<\lambda\leqslant 2$)*, то функция* ψ *также строго убывает на* $[0,+\infty)$*.*

Доказательство. Пусть $g\in\Phi\,(l_2^1)$ и μ – конечная неотрицательная борелевская мера на $[0,+\infty)$ из представления (3) для g. Тогда

$$\psi(t)=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\cos(uts)\;d\nu(s)\right)d\mu(u)=\int_0^{+\infty}f(ut)d\mu(u),\;t\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\psi\in\Phi(E,\rho)$ (см., например, [3, Lemma 1]). Если дополнительно $f(t)\not\equiv f(0)$ на $[0,+\infty)$, а функция g строго убывает на $[0,+\infty)$, то $\nu((0,+\infty))>0$ и для всех $0\leqslant t_1<t_2$, $s>0$ выполняется неравенство $g(t_1s)-g(t_2s)>0$. Поэтому и $\psi(t_1)-\psi(t_2)>0$. Лемма 3 доказана. ☐

Доказательство теоремы 1. 1) Пусть $f\in\Phi(E,\rho)$ и $f(t)\not\equiv f(0)$ на $[0,+\infty)$. Тогда по лемме 3 существует функция $\psi\in\Phi(E,\rho)$, которая строго убывает на $[0,+\infty)$. Из этого свойства вытекает равенство

$$B_0:=\{x\in E:\psi(\rho(x))=\psi(\rho(0))=\psi(0)\}=\{x\in E:\rho(x)=0\}=:E_0\,.$$

Отсюда и леммы 1, применённой к функции $\psi(\rho(x))\in\Phi(E)$, вытекает, что E_0 является линейным подпространством E.

Так как любое подпространство векторного пространства имеет алгебраическое дополнение (см., например, Кутателадзе [34, § 2.1.8]), то существует подпространство E_1 такое, что $E=E_1\oplus E_0$, т.е. $E_1\cap E_0=\{0\}$ и $E=E_1+E_0$. Так как $\rho(x)\not\equiv 0$ на E, то E_1 - нетривиальное подпространство и $\rho(x)>0$ для всех $x\in E_1$, $x\neq 0$. Для любого $x\in E$ представление $x=u+v$, $u\in E_1$, $v\in E_0$, единственное. Поэтому отображение $A:E\to E_1$, $Ax:=u$, является линейным и $\psi(\rho(x))=\psi(\rho(u+v))=\psi(\rho(u))=\psi(\rho(Ax))$, $x\in E$. Здесь мы воспользовались равенством из леммы 1, применённой к функции $\psi(\rho(x))\in\Phi(E)$. Из полученного равенства и строгой монотонности ψ вытекает, что $\rho(x)=\rho(Ax)$, $x\in E$ и, значит, $\Phi(E_1,\rho)\subset\Phi(E,\rho)$. Обратное вложение очевидно. Поэтому $\Phi(E,\rho)=\Phi(E_1,\rho)$. Кроме того, если $x\in E$, $y\in E_0$, то $Ay=0$ и $\rho(x+y)=\rho(A(x+y))=\rho(Ax+Ay)=\rho(Ax)=\rho(x)$.

2) Так как $\psi\in\Phi(E,\rho)$, то для любого $e\in E$ функция одной переменной $\psi(\rho(te))=\psi(|t|\rho(e))$, $t\in\mathbb{R}$, непрерывна при $t=0$. Из леммы 2 следует, что $\psi(\rho(x))\in C(E)$. Так как функция ψ непрерывна и строго убывает на $[0,+\infty)$, то у неё существует обратная функция ψ^{-1}, которая непрерывна и строго убывает на $(\psi(+\infty),\psi(0)]$. Поэтому$\rho(x)=\psi^{-1}(\psi(\rho(x)))\in C(E)$. Теорема 1 доказана. ☐

Доказательство теоремы 2. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(\xi(t))\,,\;0<\xi(t)<t.$$

Отсюда и монотонности f' на $(0,+\infty)$ вытекает, что $f'(0)=\lim\limits_{\xi\to+0}f'(\xi)\leqslant f'(t)\leqslant 0$, $t>0$. Так как $f\not\equiv const$, то $f'(0)<0$.

Докажем утверждение 1). Необходимость. Пусть $f(t^\lambda)\in\Phi(E,\rho)$. Тогда $\lambda\geqslant 0$ (в противном случае функция $f(t^\lambda)$ строго возрастает на $(0,+\infty)$, чего не может быть).

Если $\lambda > 0$, то для функции $F(x) := f(\rho^\lambda(x))$, $x \in E$, выполняются условия теоремы 1 из [3] (при $\mu = \lambda$, $\beta = -f'(0)$): 1) $F \in \Phi(E)$; 2) для всех $x \in E$ выполняется равенство

$$\lim_{t\to+0}(F(0) - F(tx))t^{-\lambda} = -f'(0)\rho^\lambda(x).$$

Поэтому $\exp\left(-t^\lambda\right) \in \Phi(E,\rho)$ и, значит, $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E,\rho)$.
Докажем, что $f(t^\lambda) \in \Phi(E,\rho)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E,\rho)$.
Из теоремы Бернштейна-Хаусдорфа-Уиддера для вполне монотонных функций вытекает, что (см., например, [35, 36, 37])

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\mu(s),\ t \geqslant 0,$$

где μ - неотрицательная, конечная, борелевская мера на $[0,+\infty)$. Из этого представления и условия $\exp\left(-t^\lambda\right) \in \Phi(E,\rho)$ вытекает, что и $f(t^\lambda) \in \Phi(E,\rho)$ (см., например, [3, Лемма 1]).

Докажем утверждения 2) и 3). Если $\lambda > 0$, то функция $1/f(t^\lambda)$ строго возрастает на $[0,+\infty)$ и, значит, $1/f(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$. Если $f(+\infty) = 0$ и $\lambda < 0$, то функция $1/f(t^\lambda)$ не ограничена при $t \to +0$ и, значит, $1/f(t^\lambda) \notin \Phi(E,\rho)$. ☐

Доказательство теоремы 3 Пусть $\alpha(\mathbb{R}^n,\rho) > 0$ и $\lambda \in (0,\alpha(\mathbb{R}^n,\rho)]$. Тогда $\exp(-t^\lambda) \in \Phi(E,\rho)$. Из теоремы 2 вытекает, что $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$. Если дополнительно $\rho(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, то $f(x) := \exp(-\rho^\lambda(x)) \in C(\mathbb{R}^n) \cap L(\mathbb{R}^n)$. Тогда $F(u) := \widehat{f}(u) \geqslant 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, и $F \in L(\mathbb{R}^n)$. Если $\alpha,\beta > 0$ и $\alpha^\lambda + \beta^\lambda = 1$, то $f(\alpha x)f(\beta x) \equiv f(x)$ и, значит,

$$(\sqrt{2\pi}\alpha\beta)^n F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F\left(\frac{y}{\alpha}\right) F\left(\frac{x-y}{\beta}\right)\,dy = \alpha^n \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\, F\left(\frac{x-\alpha y}{\beta}\right)\,dy.$$

Предположим, что $F(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда $F(y)F((x_0-\alpha y)/\beta)) \equiv 0$ по $y \in \mathbb{R}^n$. Так как $F(0) > 0$, то $x_0 \neq 0$ и при некотором $\varepsilon > 0$ неравенство $F(y) > 0$ выполняется при всех $\|y\|_2 \leqslant \varepsilon$. Поэтому $F((x_0-\alpha y)/\beta)) = 0$ при всех $\|y\|_2 \leqslant \varepsilon$, в частности при $y = \xi x_0$, $\xi \in (-\varepsilon/\|x_0\|_2, \varepsilon/\|x_0\|_2)$. Тогда $F(sx_0) = 0$ при всех $s \in (a,b)$, где $a = (\|x_0\|_2 - \varepsilon)/\beta\|x_0\|_2 > 0$ и $b = (\|x_0\|_2 + \varepsilon)/\beta\|x_0\|_2 > a$. С другой стороны $s^nF(sx_0) = G(s^{-\lambda})$ при $s > 0$, где функция

$$G(z) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z\rho^\lambda(y)}e^{-i(x_0,y)}\,dy,\ \mathrm{Re}\,z > 0,$$

является аналитической в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > 0$ и обращается в ноль на некотором интервале положительной оси. По теореме единственности $G(z) \equiv 0$ при $\mathrm{Re}\,z > 0$ и значит $F(sx_0) = 0$ при всех $s > 0$. Поэтому $F(0) = 0$, что противоречит неравенству $F(0) > 0$.

Теорема 3 доказана. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuttner B. On the Riesz means of a Fourier series / B. Kuttner // J. London Math. Soc. – 1944. – Vol. 19, № 2. – P. 77–84.
2. Golubov B.I. On Abel-Poisson type and Riesz means / B.I. Golubov // Analysis Math. – 1981. – Vol. 7. – P. 161–184.

3. Zastavnyi V. P. On positive definiteness of some functions / V. P. Zastavnyi // Journal of Multivariate Analysis. – 2000. – Vol. 73. – C. 55–81.
4. Schoenberg I. J. Metric spaces and positive definite functions / I. J. Schoenberg // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – Vol. 44. – P. 522–536.
5. Колдобский А.Л. Задача Шенберга о положительно определенных функциях / А.Л. Колдобский // Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 3. – С. 78–85.
6. Заставный В.П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы. Решение проблемы Шёнберга / Заставный В.П. – Донецк: Институт прикл. мат. и мех. АН Украины. 1991. – 35 с. – (Препринт / Ин-т прикл. мат. и мех. АН Украины; 09.91).
7. Заставный В.П. Положительно определенные функции, зависящие от нормы / В.П. Заставный // Доклады РАН. – 1992. – Т. 325, № 5. – P. 901–903.
8. Zastavnyi V. P. Positive definite functions depending on the norm / V. P. Zastavnyi // Russian J. Math. Physics. – 1993. – Vol. 1, № 4. – P. 511–522.
9. Misiewicz J. Positive definite functions on l_∞ / J. Misiewicz // Statist. Probab. Lett. – 1989. – Vol. 8. – P. 255–260.
10. Kuritsyn Y. Multidimensional versions and two problems of Schoenberg / Y. Kuritsyn // Problems of Stability of Stochastic Model. – 1989. – VNIISI. – Moscow. – P. 72–79.
11. Herz C.S. A Class of Negative-Definite Functions / C.S. Herz // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1963. – Vol. 14, № 4. – P. 670–676.
12. Koldobsky A. Positive definite functions and stable random vectors / A. Koldobsky // Israel Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 185. – P. 277—292.
13. Bretagnolle J. Lois Stables et espaces L_p / J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, J.L. Krivine // Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist. – 1966. – Vol. 2. – P. 231–259.
14. Koldobsky A. Positive definite functions, stable measures and isometries on Banach spaces / A. Koldobsky // Lect. Notes in Pure and Appl. Math. – 1996. – Vol. 175. – P. 275–290.
15. Koldobsky A. A short proof of Schoenberg's conjecture on positive definite functions / A. Koldobsky, Y. Lonke // Bull. London Math. Soc. – 1999. – Vol. 31. – P. 693–699.
16. Koldobsky A. Fourier Analysis in Convex Geometry / A. Koldobsky // Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society. – 2005. – Vol. 116. – 170 p.
17. Williams L. R. Embeddings and extensions in analysis / L. R. Williams, J.H. Wells. – Heidelberg: Springer, 1975. – 108 p.
18. Линник Ю.В. Линейные формы и статистические критерии: I, II / Ю.В. Линник // Укр. матем. журн. – 1953. – Т. 5, № 2,3. – P. 207—243, P. 247—290.
19. Yu.V. Linnik Linear forms and statistical criteria: I, II / Yu.V. Linnik // Selected Transl. Math. Statist. and Probab. – 1963. – Vol. 3. – P. l-40, 41-90.
20. Anderson D.N. A multivariate Linnik distributions / D.N. Anderson // Statistics and Probability Letters. – 1992. – Vol. 14, № 4. – P. 333-336.
21. Ostrovskii I.V. Analytic and asymptotic properties of multivariate Linnik's distribution / I.V. Ostrovskii // Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 1995. – Vol. 2. – P. 436-455.
22. Devroye L. A note on Linnik's distribution / L. Devroye // Statistics and Probability Letters. – 1990. – Vol. 9, № 4. – P. 305-306.
23. Gneiting T., Schlather M. Stochastic models that separate fractal dimension and the Hurst effect / T. Gneiting, M. Schlather // SIAM Review. – 2004. – Vol. 46, № 2. – P. 269-282.
24. Misiewicz J. Substable and pseudo-isotropic processes connections with the geometry of subspaces of L_α-spaces. Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne, **358**) / Misiewicz J. – 1996. – 91 p.
25. Lisitsky A. The Eaton problem and multiplicative properties of multivariate distributions / A. Lisitsky // Theory of Probability and Its Applications. – 1997. – Vol. 42. – P. 618–632.
26. Berg C. The Dagum family of isotropic correlation functions / C. Berg, J. Mateu, E. Porcu // Bernoulli. – 2008. – Vol. 14, № 4. – P. 1134–1149.
27. Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях / Н.И. Ахиезер. – Харьков: Вища шк.: Изд-во Харьк. ун-та, 1984. – 120 с.
28. Вахания Н.Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н.Н. Вахания, В.И. Тариеладзе, С.А. Чобанян. – Москва: Наука, 1985.
29. Trigub R.M. Fourier Analysis and Approximation of Functions / R.M. Trigub, E.S. Belinsky. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
30. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2.: Структура и анализ компактных

групп. Анализ на локально компактных абелевых группах / Э. Хьюитт, К. Росс. -– Москва : Мир, 1975. — 900 с.
31. Sasvari Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions / Z. Sasvari. – De Gruyter, Berlin, 2013. – 366 p.
32. Горин Е.А. Положительно определённые функции как инструмент математического анализа / Е.А. Горин // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – Т. 17, № 7. – С. 67—95.
33. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – Москва: Мир, 1974.
34. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа / С.С. Кутателадзе. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001. – 354 с.
35. Widder D. V. The Laplace Transform / D. V. Widder. – Princeton: Princeton University Press, 1946. – 425 p.
36. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н.И. Ахиезер. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литератруры, 1961. – 314 с.
37. Schilling R. L. Bernstein functions / R. L. Shilling, R. Song, Z. Vondraček. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2010. – 410 p.

Поступила в редакцию 23.03.2016 г.

ON A CERTAIN CLASS OF POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS AND SHOENBERG'S PROBLEM

V. P. Zastavnyi

Let E be a non-trivial real linear space, ρ is a nonnegative homogeneous function on E and $\rho(x) \not\equiv 0$. For a wide class of functions $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ it is proved that the function $f(\rho^\lambda(x))$ is positive definite on $E \iff 0 \leqslant \lambda \leqslant \alpha(E, \rho)$, where $\alpha(E, \rho)$ is Schoenberg constant.

Keywords: positive-definite functions, completely monotonic functions, Schoenberg problem.

Заставный Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
zastavn@rambler.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-095-5657264

Zastavnyi Viktor Petrovych
Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Docent
Donetsk National University, Donetsk
Professor at the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations

ISSN 2415-7058. Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1

УДК 517.988.28

ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО СИМПЛЕКСА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2016. ***Н. С. Иванисенко***

В работе изучаются вопросы связанные с локальным вариантом проблемы Помпейю. Рассмотрен случай, когда исследуемое множество является правильным симплексом в четырехмерном пространстве. Получен ряд результатов, аналогичных формулам Стокса и позволяющих выразить интеграл от некоторого оператора, действующего на заданную функцию, через значения интеграла по подмножествам границы симплекса меньшей размерности. В частности, рассмотрен случай, когда этими подмножествами являются вершины и ребра симплекса.

***Ключевые слова*:** локальный вариант проблемы Помпейю, симплекс.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ — группа изометрий $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$ — часть группы движений, оставляющая A внутри B, $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ — шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если всякая локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A и была изучена многими авторами (обзор [1] с обширной библиографией). Если $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, возникает вопрос, при каких значениях R компактное множество будет принадлежать классу $\mathrm{Pomp}(B_R)$? В связи с этим в работе [2] поставлена следующая проблема.

Проблема 1. *(4.1.1 из [2], локальный вариант проблемы Помпейю) Для данного A найти $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.*

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем [3–4], а также В.В. Волчковым [2].

В частности, для многогранников в $\mathbb{R}^n$, в работе [2] получен следующий результат. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник, $R(A)$ — наименьший из радиусов замкнутых шаров, содержащих A, $\rho(A)$ — наибольший из радиусов замкнутых шаров, содержащихся в A. Пусть также $d(A) = \min_{x\in\partial A}\max_{y\in\partial A}|x-y|$, $q(A) = (p(A)+d(A))/R(A)$. Нетрудно видеть, что $1 < q(A) < 3$ и для любого $\gamma \in (1,3)$ существует выпуклый многогранник A, у которого $q(A) = \gamma$. Доказано, что для любого выпуклого многогранника A имеет место утверждения:

(1) $\mathcal{R}(A) \geqslant d(A)$;

(2) Если $q(A) \geqslant 2$, то $\mathcal{R}(A) = d(A)$;

(3) Для любых $\gamma \in (1,2)$ существует выпуклые многогранники A_1, A_2, у которых $q(A_1) = q(A_2) = \gamma$ и $\mathcal{R}(A_1) > d(A), \mathcal{R}(A_2) = d(A)$.

Отметим, что условие $q(A) \geqslant 2$ выполнено для многих правильных и полуправильных многогранников $A \subset \mathbb{R}^2$. Метод доказательства, предложенный в работе [2], позволяет вычислить значения $\mathcal{R}(A)$ и в некоторых случаях, когда $q(A) < 2$. В частности, если A — правильный многогранник в $\mathbb{R}^n$ и если $n = 2, 3$ или $n \geqslant 4$ и A

не является симплексом или октаэдром, то $\mathcal{R}(A) = d(A)$. Точное значение $\mathcal{R}(A)$ для симплекса и октаэдра при $n \geqslant 4$ остается неизвестным. Вполне возможно, что в этих случаях $\mathcal{R}(A) > d(A)$ при достаточно большом n. В случае, когда $A = \bigcup_{j=1}^{l} S^{(i)}$, где $S^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ — симплекс с вершинами $v_{0,j}, ..., v_{n,j}, j = 1, ...l$, получена оценка величины $\mathcal{R}(A)$:

$$\mathcal{R}(A) \leqslant inf \left\{ r > r^*(A) : cl \left(\bigcup_{\lambda \in Mot(A, \mathbb{B}_r)} \lambda(essV) \right) = \overline{\mathbb{B}}_r \right\},$$

где $V = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{n} v_{i,j}$, $essV-$ множество всех особых точек $v \in V$.

Верхняя оценка $\mathcal{R}(A)$ для правильных четырехмерных симплексов может быть уточнена с помощью формул, полученных в данной работе, аналогичных формуле Стокса.

Основные результаты. Рассмотрим правильный симплекс $\widetilde{S}_4$ в $\mathbb{R}^4$ с вершинами $z_1(1,0,0,0)$, $z_2(0,1,0,0)$, $z_3(0,0,1,0), z_4(0,0,0,1)$, $z_5((1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4$, $(1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4)$. Теоремы, приведенные ниже, содержат информацию о том, какими допустимыми дифференциальными операторами необходимо подействовать на достаточно гладкую функцию f, чтобы интеграл по множеству $\widetilde{S}_4$ от данных конструкций выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f в вершинах z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 и стороне $z_1 z_2$. Для симплекса $\mathbf{S}_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1, \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3,4\}$ похожие теоремы были получены ранее, воспользовавшись данными результатами и вводя соответствующие замены, получим необходимые формулы для симплекса $\widetilde{S}_4$.

Введем следующие дифференциальные операторы:
$q_1^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_2,\qquad q_2^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_3,\qquad q_3^* = \partial/\partial y_1 - \partial/\partial y_4,$
$q_4^* = \partial/\partial y_2 - \partial/\partial y_3,\qquad q_5^* = \partial/\partial y_2 - \partial/\partial y_4,\qquad q_6^* = \partial/\partial y_3 - \partial/\partial y_4,$
$q_7^* = ((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_1)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3)+((\sqrt{5}-1)/4)* *(\partial/\partial y_4)$, $q_8^* = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1)+((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3)+ +((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_4)$, $q_9^* = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_2)+((\sqrt{5}+ +3)/4)*(\partial/\partial y_3)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_4)$, $q_{10}^* = ((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_1)+((\sqrt{5}-1)/4)* *(\partial/\partial y_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial y_3)+((\sqrt{5}+3)/4)*(\partial/\partial y_4)$,
$D^* = (-q_1^*)q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*,\qquad D_1^* = q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*.$

Перед формулировкой основного результата рассмотрим необходимые дифференциальные операторы:
$L_1 = (-q_1^*)q_5^*q_8^*(-q_2^*q_9^*(q_{10}^* + q_3^*) - q_6^*q_9^*q_{10}^* - q_6^*q_2^*q_3^*),\quad L_2 = -(-q_1^*)q_4^*q_8^*(-q_2^*)q_9^*(q_{10}^* + q_3^*),$
$L_3 = q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*q_9^*q_{10}^*,\quad L_4 = (-q_1^*)q_4^*q_5^*q_6^*q_2^*q_3^*,\quad G_1 = -L_3,\quad G_2 = \sum_{i=1}^{4} L_i,\quad G_3 = -G_1,$
$G_4 = -L_2,\quad G_5 = -L_4.$

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in \mathbb{C}^{10}(\widetilde{S}_4)$, *тогда выполняется следующее равенство:*

$$\int_{\widetilde{S}_4} (D^* f)(y) dy = \sqrt{5} \sum_{i=0}^{4} (G_i f)(z_i).$$

Перед формулировкой второй теоремы введем следующие дифференциальные операторы:
$\widetilde{G}_2 = (L_1 + L_2 + L_4)/q_1,\quad \widetilde{G}_3 = G_3/q_1,\quad \widetilde{G}_4 = G_4/q_1,\quad \widetilde{G}_5 = G_5/q_1,$
$G_{1,2} = \int_0^1 (L_3 f)(1-t, t, 0, 0) dt.$

Теорема 2. *Для произвольной функции* $f \in \mathbb{C}^9(\widetilde{S}_4)$ *верно равенство:*

$$\int_{\widetilde{S}_4} (D_1^* f)(y)dy = \sqrt{5}G_{1,2} + \sqrt{5}\sum_{i=2}^{5} (\widetilde{G}_i f)(z_i).$$

Обозначим через $vertK$ - множество всех вершин правильного симплекса K в $\mathbb{R}^4$ с длиной ребра равной 1, через $R(K) = \sqrt{2/5}$ —наименьший из радиусов замкнутых шаров, содержащих симплекс K, через $A_{1,R} = \{ax + by \in \mathbb{B}_R : \quad x, y \in vert(\lambda K),$ $a + b = 1, \quad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad \lambda K \subset \mathbb{B}_R\}$, при $\lambda \in Mot(K, \mathbb{B}_R)$.

Предложение. *Следующее неравенство справедливо:*

$$\mathcal{R}(K) \leqslant inf_{R>R(K)}\{R > 0 : A_{1,R} = \overline{\mathbb{B}}_R\}.$$

Следствие. *Пусть функция* $f \in \mathbb{C}^{10}(\mathbb{B}_R), R > R(\widetilde{S}_4)$, *с нулевыми интегралами по множеству* $\lambda\widetilde{S}_4 \in \mathbb{B}_R, \lambda \in Mot(\widetilde{S}_4, \mathbb{B}_R)$. *Тогда выполняется следующее функциональное уравнение:*

$$\sum_{i=1}^{5} (\widetilde{G}_i f)(\lambda z_i) = 0.$$

Исследование последнего уравнения позволяет уточнить некоторые оценки приведенные в [2].

Построение решения задачи.

Доказательство теоремы 1. Вводя следующие замены в интеграле по множеству $\widetilde{S}_4$:
$y_1 = ((\sqrt{5} + 3)\ 4)x_1 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_2 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_3 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4;$
$y_2 = ((\sqrt{5} - 1)/4)x_1 + ((\sqrt{5} + 3)/4)x_2 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_3 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4;$
$y_3 = ((\sqrt{5} - 1)/4)x_1 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_2 + ((\sqrt{5} + 3)/4)x_3 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4;$
$y_4 = ((\sqrt{5} - 1)/4)x_1 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_2 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_3 + ((\sqrt{5} + 3)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4,$
переходим к интегралу по множеству $\mathbf{S}_4$:

$\int_{\widetilde{S}_4} f(y_1, y_2, y_3, y_4)dy_1dy_2dy_3dy_4 = \sqrt{5}\int_{\mathbf{S}_4} f(((\sqrt{5} + 3)/4)x_1 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5} - 1)/4)x_3 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4, ((\sqrt{5} - 1)/4)x_1 + ((\sqrt{5} + 3)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5} - 1)/4)x_3 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4, ((\sqrt{5} - 1)/4)x_1 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5} + 3)/4)x_3 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4, ((\sqrt{5} - 1)/4)x_1 + ((\sqrt{5} - 1)/4)x_2 +$
$+ ((\sqrt{5} - 1)/4)x_3 + ((\sqrt{5} + 3)/4)x_4 + (1 - \sqrt{5})/4)dx_1dx_2dx_3dx_4.$

Для произвольной функции переход к повторному интегралу по множеству $\mathbf{S}_4$ осуществляется исходя из приведенных ниже равенств:

$\int_{\mathbf{S}_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 =$
$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_4 =$
$= \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_3-x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_1 =$
$= \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_3-x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_2 =$
$= \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_4} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2-x_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_3.$

Выбирая порядок интегрирования, который позволяет вычислить внутренний интеграл и действуя на функцию f оператором q_7^*, получим:
$\int_{\widetilde{S}_4}(q_7^* f)(y)dy = \sqrt{5}\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_3-x_4}((((\sqrt{5} + 3)/4) * (\partial/\partial x_1) +$

$+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial x_2)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial x_3)+((\sqrt{5}-1)/4)*(\partial/\partial x_4))f)(((\sqrt{5}+3)/4)x_1+$
$+((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_1+$
$+((\sqrt{5}+3)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_1+$
$+((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}+3)/4)x_3+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_1+$
$+((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+((\sqrt{5}+3)/4)x_4+((1-\sqrt{5})/4))dx_1=$
$=\sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2} dx_3\int_0^{1-x_2-x_3}[f(1-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)-f(((\sqrt{5}-1)\ 4)x_2+$
$+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+$
$+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}+3)/4)x_3+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+$
$+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+((\sqrt{5}+3)/4)x_4+((1-\sqrt{5})/4))]dx_4.$

Вычисляя интеграл по множеству $\widetilde{S}$ от функции $(q_3^*q_{10}^*q_7^*f)(y)$, получим:

$\int_{\widetilde{S}_4}(q_3^*q_{10}^*q_7^*f)(y)dy=$
$=\sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[(q_{10}^*f)(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3)-(q_{10}^*f)(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)]dx_3+$
$+\sqrt{5}\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[(q_3^*f)(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3)-(q_3^*f)((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_4+$
$+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}+3)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+(1-\sqrt{5})/4, \quad ((\sqrt{5}-1)/4)x_2+$
$+((\sqrt{5}+3)/4)x_3+(1-\sqrt{5})/4,((\sqrt{5}-1)/4)x_2+((\sqrt{5}-1)/4)x_3+(1-\sqrt{5})/4)]dx_3.$

После того, как подействуем на полученную функцию оператором $q_6^*(-q_2^*)q_9^*$, и приведем подобные слагаемые, получим:

$\int_{\widetilde{S}_4}(q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*f)(y)dy=$
$=\sqrt{5}\int_0^1(-q_2^*q_9^*(q_{10}^*+q_3^*))[f(0,x_2,1-x_2,0)-f(0,x_2,0,1-x_2)]dx_2-$
$-\sqrt{5}\int_0^1[(q_6^*q_9^*q_{10}^*)[f(0,x_2,1-x_2,0)-f(1-x_2,x_2,0,0)]dx_2-$
$-\sqrt{5}\int_0^1(q_6^*q_2^*q_3^*)[f(0,x_2,1-x_2,0)-f((\sqrt{5}-1)/4)x_2+(1-\sqrt{5})/4,((\sqrt{5}+3)/4)x_2+$
$+(1-\sqrt{5})/4,((\sqrt{5}-1)/4)x_2+(1-\sqrt{5})/4,((\sqrt{5}-1)/4)x_2+(1-\sqrt{5})/4]dx_2.$

Подействовав на функцию $q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*f$ оператором $(-q_1^*)q_4^*q_5^*q_8^*$, видим:

$\int_{\widetilde{S}_4}((-q_1^*)q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*f)(y)dy=$
$=\sqrt{5}((-q_1^*)q_5^*q_8^*(-q_2^*q_9^*(q_{10}^*+q_3^*)-q_6^*q_9^*q_{10}^*-q_6^*q_2^*q_3^*))[f(0,1,0,0)-f(0,0,1,0)]-$
$-\sqrt{5}((-q_1^*)q_4^*q_8^*(-q_2^*)q_9^*(q_{10}^*+q_3^*))[f(0,1,0,0)-f(0,0,0,1)]+$
$+\sqrt{5}(q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*q_9^*q_{10}^*)[f(0,1,0,0)-f(1,0,0,0)]+$
$+\sqrt{5}(-q_1^*q_4^*q_5^*q_6^*q_2^*q_3^*)[f(0,1,0,0)-f((1-\sqrt{5})/4,(1-\sqrt{5})/4,(1-\sqrt{5})/4,(1-\sqrt{5})/4)].$

Приводя подобные слагаемые, получим:

$\int_{\widetilde{S}_4}((-q_1^*)q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*f)(y)dy=\sqrt{5}[-q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*q_9^*q_{10}^*f](1,0,0,0)+$
$+\sqrt{5}[((-q_1^*)q_5^*q_8^*(-q_2^*q_9^*(q_{10}^*+q_3^*)-q_6^*q_9^*q_{10}^*-q_6^*q_2^*q_3^*)-(-q_1^*)q_4^*q_8^*(-q_2^*)q_9^*(q_{10}^*+q_3)+q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*q_9^*q_{10}^*-$
$-q_1^*q_4^*q_5^*q_6^*q_2^*q_3^*)f](0,1,0,0)+\sqrt{5}[-(-q_1^*)q_5^*q_8^*(-q_2^*q_9^*(q_{10}^*+q_3^*)-q_6^*q_9^*q_{10}^*-q_6^*q_2^*q_3^*)f](0,0,1,0)+$
$+\sqrt{5}[-(-q_1^*)q_4^*q_8^*(-q_2^*)q_9^*(q_{10}^*+q_3^*)f](0,0,0,1)+\sqrt{5}[-(-q_1^*)q_4^*q_5^*q_6^*q_2^*q_3^*f]((1-\sqrt{5})/4,$
$(1-\sqrt{5})/4,(1-\sqrt{5})/4,(1-\sqrt{5})/4).$

Воспользовавшись обозначениями, введенными перед теоремами, получаем формулу, с помощью которой выражается интеграл по правильному симплексу $\widetilde{S}_4$ через значения приведенных операторов в вершинах данного симплекса:

$$\int_{\widetilde{S}_4}(D^*q^*f)(y)dy=\sqrt{5}\sum_{i=1}^{5}(G_if)(z_i),$$

что завершает доказательство теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. Подействовав на функцию $q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*f$ дифференциальным оператором $q_6^*q_9^*$, имеем:

$\int_{\widetilde{S}_4}(q_4^*q_5^*q_8^*q_6^*(-q_2^*)q_9^*q_3^*q_{10}^*q_7^*f)(y)dy=$

$= \sqrt{5}(q_5^* q_8^*(-q_2^* q_9^*(q_{10}^* + q_3^*) - q_6^* q_9^* q_{10}^* - q_6^* q_2^* q_3^*))[f(0,1,0,0) - f(0,0,1,0)]-$
$- \sqrt{5}(q_4^* q_8^*(-q_2^*) q_9^*(q_{10}^* + q_3^*))[f(0,1,0,0) - f(0,0,0,1)]+$
$+ \sqrt{5} \int_0^1 (q_4^* q_5^* q_8^* q_6^* q_9^* q_{10}^* f)(1 - x_2, x_2, 0, 0) dx_2+$
$+ \sqrt{5}(q_4^* q_5^* q_6^* q_2^* q_3^*)[f(0,1,0,0) - f((1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4)].$

Заменяя $x_2 = t$ и приводя подобные слагаемые, получаем равенство:

$\int_{\widetilde{S}_4} (q_4^* q_5^* q_8^* q_6^* (-q_2^*) q_9^* q_3^* q_{10}^* q_7^* f)(y) dy = \sqrt{5} \int_0^1 (q_4^* q_5^* q_8^* q_6^* q_9^* q_{10}^* f)(1 - t, t, 0, 0) dx_2+$
$+ \sqrt{5}[(q_5^* q_8^*(-q_2^* q_9^*(q_{10}^* + q_3^*) - q_6^* q_9^* q_{10}^* - q_6^* q_2^* q_3^*) - q_4^* q_8^*(-q_2^*) q_9^*(q_{10}^* + q_3) -$
$- q_1^* q_4^* q_5^* q_6^* q_2^* q_3^*) f](0,1,0,0) + \sqrt{5}[-q_5^* q_8^*(-q_2^* q_9^*(q_{10}^* + q_3^*) - q_6^* q_9^* q_{10}^* - q_6^* q_2^* q_3^*) f](0,0,1,0)+$
$+ [q_4^* q_8^*(-q_2^*) q_9^*(q_{10}^* + q_3) f](0,0,0,1) +$
$+ \sqrt{5}[-q_4^* q_5^* q_6^* q_2^* q_3^* f]((1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4).$

Учитывая введенные перед теоремой 2 обозначения, получаем формулу с помощью которой выражается интеграл по правильному симплексу $\widetilde{S}_4$ через значения введенных операторов через ребро $z_1 z_2$ и вершины z_2, z_3, z_4, z_5 симплекса $\widetilde{S}_4$:

$$\int_{\widetilde{S}_4} (D_1^* f)(y) dy = \sqrt{5} G_{1,2} + \sqrt{5} \sum_{i=2}^{5} (\widetilde{G}_i f)(z_i).$$

☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation dy solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185-194.
2. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
3. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – Vol. 52. – P. 133–166.
4. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 55. – P. 267–288.

Поступила в редакцию 14.03.2016 г.

A LOCAL VERSION OF THE POMPEIU PROBLEM FOR REGULAR SIMPLEX IN THE FOUR-DIMENSIONAL SPACE

N. S. Ivanisenko

The questions concerning the local version Pompeiu's problem are investigated in this paper. The case, under considerations is investigation of a regular simplex in the fourth dimension space. A number of results similar to Stokes's formula are obtained, which allow to calculate integral from some differential operator, which working on set functions though values, similar to integral to a subset or border of a simplex of smaller dimension. In particular, the case when these subset are vertexes and edges of a simplex is considered.

Keywords: the local version Pompeiu problem, simplex.

Иванисенко Наталья Сергеевна
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
ivanisenko.n.s@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-095-4173100

Ivanisenko Natalia Sergeevna
Donetsk National University, Donetsk
Department of Mathematical Analysis and Differential Equations

УДК 517.5

КЛАСС МНОЖЕСТВ БОРСУКА В РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2016. *А. Ю. Иванов*

Статья посвящена обзору результатов описывающих класс множеств Борсука. Также приводится краткая ретроспектива подходов применяемых к исследованию данного класса множеств.

***Ключевые слова*:** Класс множеств Борсука, выпуклое множество, множество постоянной ширины, сферические отображения типа Гаусса, разбиение множества на части меньшего диаметра.

Введение. В 1933 г. польский математик К.Борсук выдвинул гипотезу, которая впоследствии стала одной из центральных проблем комбинаторной геометрии.

Гипотеза К.Борсука. *Для заданного множества $G \subset \mathbb{R}^n$ диаметра d существуют подмножества $K_0, K_1, \ldots, K_n$,каждое из которых имеет диаметр меньший d и которые образуют покрытие G.*

В $\mathbb{R}^2$ данная гипотеза была доказана самим К. Борсуком в 1933 г. [1,2], а в $\mathbb{R}^3$ Г. Эгглстоном [3] в 1955 г. и позднее передоказана Б. Грюнбаумом [4], А.Хеппешом [5] в 1957 г. Тем не менее, в пространствах размерности выше третьей данная гипотеза не подтверждена до сих пор.

Гипотезе Борсука можно придать следующую формулировку. Пусть M — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Через $\alpha(M)$ обозначим наименьшее из таких натуральных чисел k, что M может быть представлено в виде объединения k множеств, каждое из которых имеет диаметр меньший диаметра самого множества M. Будем называть $\alpha(M)$ числом Борсука множества M. Проблема Борсука заключается в том, чтобы доказать равенство: $\max\limits_{M \subset \mathbb{R}^n} \alpha(M) = n+1$, где максимум берется по всем ограниченным множествам отличным от точки.

Дж. Кан и Г. Калаи построили первый контрпример к гипотезе [6] в 1993 г. Они показали, что во всех размерностях больше 2014 существует тело для которого предположение Борсука не верно. Затем последовала серия работ по строительству контрпримеров в пространствах более низких размерностей. Последний результат в этом направлении был получен в работах А. Бондаренко при помощи линейно-алгебраического метода показано, что гипотеза не верна в уже при $n \geqslant 64$. Кроме того, Райгородским [7] была улучшена оценка снизу Канна-Калаи. Таким образом, на сегодняшний день известно, что наименьшее число частей меньшего диаметра, на которое можно разбить ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет следующему соотношению:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + o(1)\right)^{\sqrt{2n}} \leqslant \max_{M \subset \mathbb{R}^n} \alpha(M) \leqslant \left(\sqrt{3/2} + o(1)\right)^n. \tag{1}$$

Таким образом, вести речь о доказательстве гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^n$ для произвольных множеств не имеет смысла. Из неравенства (1) видно, что, хоть предположение Борсука для больших размерностей заведомо не верное, однако в случае малых n

по-прежнему ничего сказать нельзя. Следует также заметить, что остается открытым вопрос о том, насколько обширен класс множеств, для которых гипотеза Боруска не верна. В свете этого на первый план выходит вопрос описания множеств, для которых данное разбиение все-таки имеет место.

Класс множеств Борсука. Пусть $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Для непустого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ величина $\operatorname{diam} M = \sup\limits_{x,y \in M} |x-y|$ называется диаметром M.

В 1946 г. Г. Хадвигер обратил внимание на возможность применения сферического отображения Гаусса для изучения гипотезы Борсука на множествах с гладкой границей. К.Ф. Гаусс построил это отбражение в 1816 г. (см., например, [8]). Оно было необходимо для изучения кривизны гладкой поверхности, так как обладает замечательным свойством — для гладких поверхностей его якобиан равен гауссовой кривизне поверхности в данной точке. При помощи данного отображения Г. Хадвигер доказал следующую теорему [9]:

Теорема 1. *Всякое выпуклое тело из $\mathbb{R}^n$, имеющее гладкую границу, можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Из этого утверждения видно, что наибольшую трудность в плане разбиения на части меньшего диаметра создают именно нерегулярные точки на границе множества.

В 1952 г. Андерсон и Кли получили ограничения на множества с негладкой границей. Они показали, что если каждая точка нерегулярности удовлетворяет определенным, достаточно сильным условиям, то такое множество действительно можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра [10]. В 1960 г. В.Г.Болтянский выявил еще одну зависимость положительного решения проблемы Борсука от количества особых точек границы данного множества [11]. Он доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Всякое выпуклое тело из $\mathbb{R}^n$, имеющее в границе не более чем n точек нерегулярности, может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Также отметим два результата Рисслинга А.С. [12].

Теорема 3. *Для всякого выпуклого центрально-симметричного тела из $\mathbb{R}^n$ гипотеза К.Борсука справедлива.*

Теорема 4. *Для любого центрально-симметричного $n-$мерного выпуклого многогранника M справедливо равенство $\alpha(M)=2$.*

Еще один подобный результат получен Декстером в 1995 году [13].

Теорема 5. *Всякое $n-$мерное тело вращение можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Определение 1. *Пусть множество $F \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое ограниченное множество. Будем говорить, что оно принадлежит классу множеств Борсука, если существуют подмножества $M_0, M_1, \ldots, M_n \subseteq F$ такие, что для всякого $i=\overline{0,n}$ выполняется неравенство* $\operatorname{diam} F > \operatorname{diam} M_i$.

Интуитивно ясно, что класс множеств Борсука весьма широк (например, в него входят все возможные ограниченные подмножества из $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$), и при этом сделаны значительные успехи в направлении описания его структуры, что отраженно в приведенных выше утверждения. Но тем не менее, на данный момент класс множеств Борсука далек от полного описания.

Задачу о вычислении числа Борсука $\alpha(M)$ можно также рассматривать для ограниченного подмножества M любого метрического (и, в частности, линейного нормированного) пространства. Для подмножеств двумерного нормированного пространства, единичным шаром которого является параллелограмм, эта задача была решена Грюнбаумом [14], а для произвольного двумерного нормированного пространства — В.Г. Болтянским и В.П. Солтаном [15]. Им удалось выявить при каких ограничениях на нормообразующее множество W гипотеза Борсука будет справедлива в пространстве $\mathbb{R}^2_W$.

В работах [16–19] автора данной статьи существенно дополняется класс множеств Борсука в линейных пространствах с специальными нормами.

Прежде всего введем вспомогательные функции. Для $a, b \in \mathbb{R}^n$ положим $(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$. Для контроля за количеством диаметров множества G определим функцию $\chi\colon G \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, G — множество постоянной ширины, следующим образом. Для $x \in G$ положим $\chi(x)$ равной количеству диаметров множества G, проходящих через точку x. Если множество таких диаметров бесконечно, будем обозначать $\chi(x) = \infty$.

Ограничим класс пространств, с которыми будем в дальнейшем работать, следующем образом. Пусть W — замкнутое строго выпуклое центрально симметрическое множество из $\mathbb{R}^n$. Построим линейное пространство $\mathbb{R}^n_W$ с нормой порожденной множеством W. Для этого определим функционал Минковского, следующим образом:

$$\mathcal{F}_W(x) = \inf\Big\{r > 0 | \frac{x}{r} \in W\Big\}, x \in \mathbb{R}^n,$$

если же при некотором значении $x \in \mathbb{R}^n$ такой инфимум не существует, то $\mathcal{F}_W$ считается равным бесконечности. Пусть также функционал Минковского $\mathcal{F}_W$ принимает конечные положительные значения при всех $x \in \mathbb{R}^n$ не равных нулю, тогда $\mathcal{F}_W$ задает норму $|\cdot|_W$ в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n_W$, причем W является единичным шаром в этом пространстве [20].

Построим также сферическое отображение типа Гаусса, сопоставляющее сферу направлений соответствующего пространства с границей зафиксированного множества постоянной ширины, для этого будем использовать $\varsigma_W\colon \partial W \to \partial G$,где ∂W — сфера в $\mathbb{R}^n_W$ радиуса 1, G - множество постоянной ширины, в смысле данного пространства, следующим образом. Для $\theta \in \partial W$ положим

$$\varsigma_W(\theta) = x, \text{ где } x, y \in \partial G, |x - y|_W = \operatorname{diam} G \text{ и } x - y = \theta \operatorname{diam} G, \qquad (2)$$

т.е. x, y – диаметральные точки G в направлении θ.

Введем множества $EP(G) \overset{\text{def}}{=} \{x | x \in \partial G\colon \chi(x) = \infty\}$, $\Theta = \{\theta | \varsigma_W(\theta) \in EP(G)\}$, L — множество всех компонент связности множества Θ.

Сформулируем основную теорему работы [18].

Теорема 6. *Пусть W — замкнутое строго выпуклое центрально симметричное множество из $\mathbb{R}^n$, функционал Минковского $\mathcal{F}_W$ принимает конечные положительные значения при всех $x \in \mathbb{R}^n$ не равных нулю, $\mathbb{R}^n_W$ — пространство с нормой, образованной данным функционалом $\mathcal{F}_W$.*

Пусть также $G \subset \mathbb{R}^n_W$ — множество постоянной ширины для которого выполняются следующие условия:

(i) для любого $U \in L$

$$\sup_{\alpha,\beta\in U} |\alpha-\beta|_W < \inf_{x,y\in\partial W,(x,y)=0} |x-y|_W - \sigma$$

при некотором $\sigma > 0$, *не зависящем от* U;

(ii) если $U, V \in L$ *и* $U\backslash\widetilde{V} \neq \varnothing$, *и* $\widetilde{V}\backslash U \neq \varnothing$, *где* $\widetilde{V} = \{-\beta|\beta \in V\}$, *то* $int(\widetilde{V}) \cap U = \varnothing$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n \subset G$ *такие, что* $\operatorname{diam} Y_i < \operatorname{diam} G, i = \overline{0,n}$ *и* $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

Следует указать также два важных частных случая теоремы 6. Прежде всего отметим, что результат теоремы 6 распространяется на евклидовый случай для которого очевидно $\inf\limits_{x,y\in\partial W,(x,y)=0} |x-y|_W = \sqrt{2}$ [16].

Теорема 7. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^n$ *— множество постоянной ширины,* $EP(G)$ *— множество особых точек* G, L *— множество всех компонент связности множества* $\Theta = \{\theta|\varsigma(\theta) \in EP(G)\}$. *Пусть также выполняются следующие условия:*

(i) для любого $U \in L$:

$$\sup_{\alpha,\beta\in U} |\alpha-\beta| < \sqrt{2} - \sigma$$

при некотором $\sigma > 0$, *не зависящем от* U;

(ii) если $U, V \in L$ *и* $U\backslash\widetilde{V} \neq \varnothing$, *и* $\widetilde{V}\backslash U \neq \varnothing$, *где* $\widetilde{V} = \{-\beta|\beta \in V\}$, *то* $int(\widetilde{V}) \cap U = \varnothing$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n \subset G$ *такие, что* $\operatorname{diam} Y_i < \operatorname{diam} G, i = \overline{0,n}$ *и* $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

Другим важным частным случаем теоремы 6, является распространение данного результата на случай многомерных пространств с гёльдоровой нормой $|x|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$. Пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\mathbb{L}_p$ будем обозначать $\mathbb{R}_p^n$ [17].

Теорема 8. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}_p^n$ *— фигура постоянной ширины, где* $1 < p \neq \infty$, $EP = \{x|x \in \partial G\colon \chi(x) = \infty\}$, L *— множество всех компонент связности множества* $\Theta = \{\theta|\varsigma(\theta) \in EP\}$. *Пусть также выполняются следующие условия:*

(i) для любого $U \in L$

$$\sup_{\alpha,\beta\in U} |\alpha-\beta|_p < \min\{2^{1/p}, 2^{(p-1)/p}\} - \sigma$$

при некотором $\sigma > 0$, *не зависящем от* U;

(ii) если $U, V \in L$ *и* $U\backslash\widetilde{V} \neq \varnothing$, *и* $\widetilde{V}\backslash U \neq \varnothing$, *где* $\widetilde{V} = \{-\beta|\beta \in V\}$, *то* $int(\widetilde{V}) \cap U = \varnothing$.

Тогда существуют $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n \subset G$ *такие, что* $\operatorname{diam} Y_i < \operatorname{diam} G, i = \overline{0,n}$ *и* $\cup_{i=0}^n Y_i = G$.

Следует обратить внимание на то, что мажорирующая величина $\min\{2^{1/p}, 2^{(p-1)/p}\}$ является максимально допустимым диаметром компонент связности множества Θ в условии *(i)* и зависит только от индекса метрики. Так при $1 < p \leqslant 2$ она равняется $2^{(p-1)/p}$, а при $2 \leqslant p \neq \infty$ равна $2^{1/p}$ (при $p = 2$ эти значения совпадают).

В теоремах 6-8 рассматриваются только фигуры постоянной ширины. Если в классическом евклидовом пространстве аналогичное ограничение не существенно ввиду того, что любое ограниченное множество может быть вложено в фигуру постоянной ширины того же диаметра, то в нормированном пространстве данное ограничение, вообще говоря, существенно. Это связано с тем, что при некоторых метриках линейных пространств в них существуют множества, которые невозможно достроить до фигуры постоянной ширины не изменяя при этом диаметр. Данный вопрос подробно рассмотрен в работах Эгглстона [21, 22]. Тем не менее класс фигур постоянной ширины, а также множеств, которые дополняются до них остается весьма широким.

Обощение теоремы 5 получено автором в работе [19].

Теорема 9. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — множество постоянной ширины, $EP(G)$ — множество особых точек G, $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP(G)\}$. Тогда, если существует подпространство U размерности $n-1$ такое, что $\Theta \bigcap U = \varnothing$, то множество G можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Ретроспектива методов исследования. В этом пункте построена ретроспектива эволюции метода исследования гипотезы Карола Борсука.

В эволюции подходов к проблеме Борсука можно проследить постепенный переход от сугубо геометрических методов к методам, в которых все большее значение занимает выпуклый анализ. Так, в доказательствах Борсука, Грюнбаума и Хеппеша, на основе исключительно геометрических соображений строятся универсальные множества V_h, создавая тем самым аналог леммы Пала.

Лемма 1. *Всякая плоская фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно d.*

Для построения тела $V_h \subset \mathbb{R}^3$, обладающего указанными свойствами, Грюнбаум использовал результат Гейла о том, что всякое множество $M \subset \mathbb{R}^3$, имеющее диаметр h, может быть помещено (с помощью некоторого движения) в правильный октаэдр, у которого расстояние между противоположными гранями равно h. Грюнбаум показывает, что если от правильного октаэдра отсечь части, примыкающие к трем его вершинам, то получится тело V_h принадлежащее классу множеств Борсука. Это и дает сравнительно простое решение проблемы Борсука для случая $n = 3$.

Такой подход исчерпал себя уже в размерности $\mathbb{R}^3$, столкнувшись с непреодолимыми трудностями геометрического представления четырехмерных пространств.

Как было указано ранее для получения результата, указанного в теореме 1 Г.Хадвигер использует так называемое гауссово сферическое отображение. Отображение Гаусса ставит в соответствие каждой точке гладкой поверхности вектор единичной нормали в этой точке, который откладывается на единичной сфере. Данное отображение обладает множеством замечательных свойств среди которых антиподальное свойство. Если на двух точках множества достигается диаметр этого множества, то на их образах также достигается диаметр сферы. Антиподальное свойство отображения Гаусса и то, что $\mathbb{S}^{n-1}$ (где $\mathbb{S}^{n-1}$ есть $(n-1)-$мерная еденичная сфера) можно покрыть $n+1$ замкнутым множеством, ни одно из которых не содержит пары диаметрально противоположенных точек, позволило Г.Хадвигеру получить положительное решение проблемы Борсука для гладких выпуклых тел.

Ущербность данного подхода состоит в том, что его нельзя обобщить на множества с негладкой границей ввиду того, что гауссово отображение перестает быть функцией в точках нерегулярности границы. Сферическое отображение Гаусса f можно было бы обобщить на случай произвольного выпуклого множества F из $\mathbb{R}^n$, следующим образом. f сопоставляет каждую точку $x \in \partial F$ с множеством $f(x) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ по следующему правилу: если $y \in \mathbb{S}^{n-1}$, то $y \in f(x)$ в том и только в том случае, когда опорная к $\mathbb{S}^{n-1}$ гиперплоскость в точке x и внешние (относительно $\mathbb{S}^{n-1}$ и F) нормали этих гиперплоскостей одинаково направлены. В точках гладкости границы множества F множество $f(x)$ является одноточечным, тогда как в точках нерегулярности $f(x)$ перестает быть однозначным.

Данный метод получил свое развитие в работе Эгглстона [3] при подтверждении справедливости гипотезы Борсука в $\mathbb{R}^3$ без каких-либо ограничений на исходное множество. В $\mathbb{R}^3$ ему удалось обойти сложности, которые возникают при использовании сферического отображения Гаусса для множеств с негладкой границей. Обобщение этого метода на случай $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, упирается в непреодолимые трудности топологического характера.

В.Г. Болтянский получил теорему 2 в качестве следствия результатов изучения проблемы Хадвигера о внешнем освещении выпуклых ограниченных тел при помощи параллельных пучков света. Он установил соотношение между числом Борсука $\alpha(M)$ и числом направлений освещения $\gamma(M)$, достаточным для освещения всей границы ∂M:

$$\gamma(M) \geqslant \alpha(M). \tag{3}$$

Если же M удовлетворяет условиям теоремы 2, то, рассматривая направления освещения параллельные векторам, образованным в результате соединения вершин $n-$мерного симплекса с его произвольной внутренней точкой, можно показать, что $\gamma(M) = n + 1$, что в совокупности с неравенством (3) дает искомое подтверждение гипотезы Борсука для данного класса множеств.

Результат Р.Д. Андерсона и В.Л. Кли получен сугубо методами выпуклого анализа при изучении структуры множества точек, в которых выпуклая функция не дифференцируема.

При построении своих классов множеств, Рисслингом и Декстором, на которых гипотеза Борсука имеет место, новых методов исследования данной проблематики построено не было.

Автором данной статьи разработан метод основанный на использовании аналога сферического отображения типа Гаусса, который позволил распространить результат Г. Хадвигера на некоторые множества с нерегулярной границей. Полученные результаты отражены в работах [16–19]. Это позволило существенно уточнить класс множеств Борсука.

В результате изучения гауссово сферического отображения, применяемого Хадвигером и Эгглстоном в своих работах, установлена причина, не позволяющая обобщить результат теоремы 1 на множества с точками нерегулярности на границе. Действуя на множества с негладкой границей, данное отображение является неоднозначным, что мешает исследовать его свойства. Теоремы 6-9 полученны автором в результате рассмотрения обратного отображения к гауссовому, то есть отображения ς, введенного по аналогии с (2), сопоставляющего $(n-1)$-мерную сферу с границей множества из пространства $\mathbb{R}^n$. Вследствие изучения свойств отображения ς, при помощи методов теории отображений, разработана конструкция разбиения $\mathbb{S}^{n-1}$ на $n+1$ часть таким образом, что образы каждой из этих частей имеют диаметры, строго меньшие диаметра исходного множества.

Построенная конструкция позволяет распространение на пространства с неевклидовыми нормами.

В отличие от Гауссова отображения, данное отображение ς обладает антиподальным свойством независимо от того, на какое множество действует. Именно этот факт, а также набор других свойств, позволяют при помощи ς существенно расширить класс множеств, для которых однозначно верна гипотеза Борсука.

Выводы. На основании сведений, приведенных в статье, можно сделать вывод, что, невзирая на значительное продвижение мировой математической мысли в рамках исследования проблемы Борсука и связанных с ней вопросов, говорить о завершении исследований в этом направлении однозначно преждевременно. Описание класса множеств Борсука узко, а построение контрпримеров в пространствах больших размерностей ни в коей мере не позволяет сделать каких-либо выводов по поводу особенностей строения множеств, для которых гипотеза Борсука верна.

Последовательный переход в методологии, используемой при рассмотрении задач, связанных с проблематикой Борсука, от сугубо геометрического подхода к аппарату выпуклого анализа и теории отображений позволяет рассчитывать на то, что развитие применения аналитических методов в этом направлении способно принести существенные результаты в рамках данных исследований.

Выше приведенные соображения указывают на актуальность изучения класса множеств Борсука при помощи методов теории отображений и выпуклого анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел / Б. Грюнбаум. – М.: Наука, 1971. – 96 с.
2. Болтянский В.Г. Разбиение фигур на меньшие части / В.Г. Болтянский, И.Ц. Гохберг. – London: Math.Soc., 1955 – 88 с.
3. Eggleston H.G. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter/ H.G. Eggleston. – M.: Наука, 1971 – Vol. 30, № 1– P. 11–24.
4. Grünbaum B. A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions / B. Grünbaum // Cambridge: Philos.Soc. – 1957 – Vol. 53. – P. 776–778.
5. Heppes A. Terbeli ponthalmazok felosztasa kisebb atrneröjü részhalmazok összegére / A. Heppes // Magyar tud. aka. Mat. és fiz tud. oszt. közl. – 1957 – Vol. 7, № 3-4 – P. 413–416.
6. Kahn J. A counterexample to Borsuk's conjecture / J. Kahn, G. Kalai // Bull. Amer. Math. Soc.(New Ser.). – 1993. – T. 29, № 1 – C. 60–62.
7. Райгородский А.М. Вокруг гипотезы Борсука / А. М. Райгородский // Геометрия и механика, СМФН. – М.: РУДН, 2007. – Т. 23 – С. 147–164.
8. Гаусс К.Ф. Общие исследования о кривых поверхностях / К.Ф. Гаусс // Об основаниях геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956. – С. 103-112.
9. Hadwiger H. Uberdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers / H. Hadwiger // Comm. Math. Helv. – 1945/46. – T. 18. – P. 73–75.
10. Anderson R.D. Convex functions and upper semi-continuous collections / R.D. Anderson, V.L. Klee // Duke Math.J. – 1952. – Vol. 190, № 2. – P. 349–357.
11. Болтянский В.Г. Задача об освещении границы выпуклого тела / В.Г. Болтянский // Изв. МФАН СССР – 1960. – Т. 10, № 76. – 77–84 С.
12. Рисслинг А.С. Проблема Борсука в трехмерных пространствах постоян ной кривизны / А. С. Рисслинг // Укр. геометр. сб. – 1971. – Т. 11. – С. 78–83.
13. Boltyanski V.G. Excursions into combinatorial geometry / V. G. Boltyanski,H. Martini, P. S. Soltan. – Berlin Heidelberg: Universitext, Springer Verlag. – 1997. – 427 p.

14. Grünbaum B.A. Borsuk's partition conjecture in Minkowski planes / B. A. Grünbaum // Bull. Res. Council Israel – 1957. – Vol. P7, № 1. – P. 25–30.
15. Болтянский В.Г. Несколько теорем комбинаторной геометрии / В. Г. Болтянский, В. П. Солтан // Матем. заметки. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 117–124.
16. Иванов А. Ю. Решение проблемы Борсука для некоторых множеств с нерегулярной границей / А. Ю. Иванов // Труды ИПММ. – 2011. – Т. 23. – С. 110-119.
17. Иванов А. Ю. Об $\mathbb{R}^n_p$-аналоге проблемы Борсука / А. Ю. Иванов // Український математичний вісник. – 2012.– Т. 9, №3. – С. 341–355.
18. Иванов А. Ю. Аналог проблемы Борсука на банаховых пространствах / А. Ю. Иванов // Український математичний вісник. – 2013.– Т. 10 № 1. – С. 54–66.
19. Иванов А. Ю. Новые достаточные условия принадлежности множества классу Борсука / А. Ю. Иванов // Труды ИПММ. – 2012. – Т. 25. – С. 100-106.
20. Половинкин Е.С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов . – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.
21. Eggleston H. G. Convexity / H. G. Eggleston. – London: Cambridge University Press, 1958. – 143 p.
22. Eggleston H. G. Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces / H. G. Eggleston // Israel J. Math. – 1965. – Vol. 3, № 3. – P. 163—172.

Поступила в редакцию 14.03.2016 г.

CLASS OF THE BORSUK'S SETS IN THE DIFFERENT SPACES

A. J. Ivanov

The article provides an overview of the results describing the class of Borsuk's sets. It also provides a brief retrospective of the approaches applied to the study of this class of sets.

Keywords: Class of Borsuk's sets, convex set, a constant width's set, spherical Gauss type mappings, splitting sets into parts of smaller diameter.

Иванов Александр Юрьевич
кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
Ivanov.Alexander.Iurievich@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-095-5312025

Ivanov Alexandr Jurievich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Donetsk National University, Donetsk

ISSN 2415-7058. Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1

УДК 517.9

МНОГОУГОЛЬНИК НЬЮТОНА И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ НА ПЛОСКОСТИ

© **2016.** ***Д. В. Лиманский***

В статье получено описание линейного пространства $\mathscr{L}(P)$ минимальных дифференциальных полиномов, подчиненных тензорному произведению $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$ двух обыкновенных дифференциальных операторов в норме $C(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрены случаи, когда символы сомножителей $p_1(\xi_1)$ и $p_2(\xi_2)$ содержат вещественные и комплексные нули различной кратности. При этом для описания пространства $\mathscr{L}(P)$, наряду с элементами гармонического анализа, использована техника и метод многоугольника Ньютона.

***Ключевые слова*:** многоугольник Ньютона, выпуклая оболочка, дифференциальный полином, априорная оценка, мультипликатор.

Введение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов порядка l:

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

с измеримыми коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot)$. Рассматривается задача об описании линейного пространства $\mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ минимальных дифференциальных операторов $Q(x, D)$, удовлетворяющих априорной оценке

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2}$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от выбора f. При выполнении неравенства (2) говорят, что оператор $Q(x, D)$ *подчинен* системе операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в пространстве $L^p(\Omega)$ и пишут $Q \in \mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$.

Эта задача была исчерпывающе решена Л. Хёрмандером [1] в случае одного оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами, $p = 2$ и ограниченной области Ω. Применяя этот критерий, Хёрмандер доказал [1], что для *тензорного произведения* $P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D)$ двух дифференциальных операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, действующих по различным группам переменных, т. е. для оператора вида

$$P(D) = P_1(D_1, \ldots, D_{p_1}, 0, \ldots, 0)\, P_2(0, \ldots, 0, D_{p_1+1}, \ldots, D_n), \tag{3}$$

пространство $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений операторов из $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_k)$, $k = 1, 2$, т. е. равно тензорному произведению этих пространств, $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P) = \mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_1) \otimes \mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_2)$.

При $N > 1$ пространства $\mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ описаны в ряде случаев. Хорошо известно [2], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω (в частности, когда коэффициенты постоянны и область ограничена) система (1) эллиптична тогда и только тогда, когда она коэрцитивна в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ при $p \in (1,\infty)$ (т. е. когда оценка (2) справедлива для всех дифференциальных мономов $Q(D) = D^\alpha$ порядка $|\alpha| \leqslant l$). При $p = 1; \infty$ этот критерий коэрцитивности утрачивает силу. Так, при $p = 1$ (и $N = 1$) Орнстейном [3] доказана невозможность оценки (2) для дифференциальных полиномов $Q(D) = D_1D_2$ и $P_1(D) = D_1^2 + D_2^2$. Кроме этого, М. М. Маламудом в [4] показано, что из оценки (2) при $p = \infty$ вытекает тождество

$$Q^l(x,\xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) P_j^l(x,\xi), \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для l-главных символов операторов $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами это утверждение доказано ранее де Лю и Миркилом [5]). Из этого результата вытекает, что включение $Q \in \mathscr{L}^0_{\infty,\Omega}(P_1,\ldots,P_N)$ для оператора $Q(x,D)$ порядка l возможно лишь в исключительных случаях.

Вместе с тем [4], оценка (2) при $p = \infty$ выполняется для эллиптической системы (1) и произвольного дифференциального монома $Q(D) = D^\alpha$ порядка $|\alpha| < l$. Системы с таким свойством названы в [6] слабо коэрцитивными в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\Omega)$. Для оператора $P(D)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ порядка $l \geqslant 2$ с постоянными коэффициентами от $n \geqslant 3$ переменных справедливо и обратное утверждение — теорема де Лю и Миркила [5]: слабая коэрцитивность $P(D)$ в $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна эллиптичности $P(D)$. Этот результат был обобщен автором и М. М. Маламудом в [6] на случай оператора $P(x,D)$ с переменными коэффициентами. Там же получены критерии слабой коэрцитивности в $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ систем $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами.

В дальнейшем будет рассматриваться случай $p = \infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $N = 1$ и оператор $P(D) := P_1(D)$ с постоянными коэффициентами. Пространство $\mathscr{L}^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ будем далее обозначать $\mathscr{L}(P)$, а вместо $L^\infty(\Omega)$ будем писать $C(\Omega)$, так как нормы этих пространств одинаковые и в оценках рассматриваются лишь гладкие функции. Из вышеуказанных результатов М. М. Маламуда вытекает, что для эллиптического оператора $P(D)$ порядка l базис пространства $\mathscr{L}(P)$ образуют $P(D)$ и дифференциальные мономы $\{D^\alpha\}_{|\alpha|<l}$, т. е. размерность пространства $\mathscr{L}(P)$ в этом случае максимально возможная.

Будем называть полином $P(\xi)$ *невырожденным*, если он не имеет вещественных нулей, т. е. $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. В связи с вышеприведенным результатом Хёрмандера возникает задача об описании пространств $\mathscr{L}(P)$ для операторов $P(D)$ вида (3). В этом направлении в [6] получено аналогичное утверждение для эллиптических операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, символы которых невырождены. Здесь условие невырожденности символов существенно: уже в случае тензорного произведения $P_1(D) \otimes P_2(D)$ двух однородных эллиптических операторов размерность пространства $\mathscr{L}(P)$ будет минимальной, т. е. $\mathscr{L}(P) = \{Q(D):\ Q(D) = c_1P(D) + c_2;\ c_k \in \mathbb{C}\}$, хотя размерность каждого из пространств $\mathscr{L}(P_1)$ и $\mathscr{L}(P_2)$ максимально возможная [7].

Далее рассматривается случай оператора $P(D_1,D_2)$ от двух переменных, равного тензорному произведению двух обыкновенных дифференциальных полиномов:

$$P(D_1,D_2) := p_1(D_1)p_2(D_2). \tag{4}$$

В работе автора [8] было получено полное описание пространства $\mathscr{L}(P)$ для случая, когда символ первого сомножителя $p_1(\xi_1)$ имеет специальный вид (все его нули вещественные и простые). Оказалось, что в этом случае размерность пространства $\mathscr{L}(P)$ тем меньше, чем больше вещественных нулей (с учетом их кратности) имеет символ второго сомножителя $p_2(\xi_2)$. В частности, $\dim \mathscr{L}(P)$ максимальна, когда полином $p_2(\xi_2)$ невырожден, и минимальна, если все нули полинома $p_2(\xi_2)$ вещественны. Доказательства этих утверждений используют технику и некоторые результаты из гармонического анализа, в частности, свойства мультипликаторов в $C(\mathbb{R}^n)$.

В настоящей работе получено описание пространства $\mathscr{L}(P)$ для некоторых классов дифференциальных полиномов $P(D)$ вида (4), символы которых могут иметь как кратные вещественные, так и невещественные нули (теоремы 5–8). При этом, по сравнению с результатами работы [8], получен ряд новых эффектов. В частности, оказалось, что структуру пространства $\mathscr{L}(P)$ удобно описывать, используя, кроме методов гармонического анализа, технику многоугольника Ньютона, развитую в работах Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [9, 10]. Ряд вспомогательных утверждений, связанных с многоугольником Ньютона и являющихся обобщениями результатов Бомана [11], приведен в пункте "Многоугольник Ньютона и априорные оценки".

Эта работа посвящена светлой памяти замечательного московского математика Леонида Романовича Волевича (1934–2007). Личное общение с ним и его работы оказали значительное влияние на математическое мировоззрение и культуру автора.

Вспомогательные понятия и утверждения. В этом пункте мы введем ряд обозначений, понятий и утверждений, необходимых в дальнейшем.

Обозначения. Пусть $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — поля соответственно вещественных и комплексных чисел; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Пусть также $(x, y) := \sum_1^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через I тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, через $\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ — алгебру мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, а через $\widehat{f}$ ($\widehat{\mu}$) — преобразование Фурье (Фурье – Стилтьеса) функции f (меры μ). Далее, для дифференциального полинома $P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha D^\alpha$ порядка l обозначим через $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ. Через $\deg P$ будет обозначаться степень полинома $P(\xi)$, через $\deg_{\xi_k} P$ — его степень по переменной ξ_k.

Обозначим через $\mathrm{ch}\, K$ *выпуклую оболочку* плоского множества $K \subset \mathbb{R}^2$, т. е. наименьшее выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$, содержащее K в качестве своего подмножества. Также через $\mathrm{int}\, K$ будет обозначаться множество внутренних точек (внутренность) множества K, а через ∂K — множество его граничных точек (граница). Наконец, через $\mathrm{span}\{P_1, \dots, P_N\}$ будет обозначаться линейная оболочка полиномов или операторов $P_1, \dots, P_N$.

Определение 1. [12] *Пусть $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f} := \mathscr{F} f$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют* ***мультипликатором*** *в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки $f \mapsto T_\Phi f =: \mathscr{F}^{-1} \Phi \mathscr{F} f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Известно полное описание этой алгебры при $p = 1, 2, \infty$. Нас интересует описание алгебры $\mathscr{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathscr{M}$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. [12] *Алгебра $\mathscr{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье — Стилтьеса:*

$$\Phi \in \mathscr{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\, d\mu(x), \qquad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Из предложения 1 следует, что все функции $\Phi \in \mathscr{M}$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов $\mathscr{M}$ инвариантна относительно отражений $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$, сдвигов $\Phi(x) \mapsto \Phi(x-h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и растяжений $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$, $r > 0$. Наконец, отметим, что $\mathscr{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$ [12].

Приведем ряд свойств, характерных для априорных оценок дифференциальных полиномов в $C(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 2. [5, 11] *Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные полиномы. Тогда включение $Q \in \mathscr{L}(P_1,\ldots,P_N)$ эквивалентно тождеству для символов*

$$Q(\xi) = \sum_{k=1}^{N} M_k(\xi)P_k(\xi) + M_{N+1}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $M_k(\xi) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $k = \overline{1, N+1}$.

Из предложения 2 вытекает, что если $Q \in \mathscr{L}(P_1,\ldots,P_N)$, то справедливо следующее неравенство для символов $Q(\xi)$ и $\{P_j(\xi)\}_1^N$ (см. также [6, 11]):

$$|Q(\xi)| \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} |P_j(\xi)| + C_2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В свою очередь, из этого неравенства следует, что $\deg Q \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant N} \deg P_j$ и, значит, линейное пространство $\mathscr{L}(P_1,\ldots,P_N)$ конечномерно.

Докажем свойство "транзитивности" включения $Q \in \mathscr{L}(P)$.

Лемма 1. *Если $P_k \in \mathscr{L}(P)$, $k = \overline{1,N}$, то $\mathscr{L}(P_1,\ldots,P_N) \subset \mathscr{L}(P)$.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathscr{L}(P_1,\ldots,P_N)$. В силу предложения 2 это означает справедливость тождества (5). Далее, так как $P_k \in \mathscr{L}(P)$, $k = \overline{1,N}$, то в силу того же предложения имеют место тождества

$$P_k(\xi) = m_k(\xi)P(\xi) + n_k(\xi), \qquad \text{где} \quad m_k, n_k \in \mathscr{M}, \;\; k = \overline{1,N}. \tag{6}$$

Объединяя (5) и (6), получим:

$$Q(\xi) = \sum_{k=1}^{N} M_k(\xi)P_k(\xi) + M_{N+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} M_k(\xi)\left[m_k(\xi)P(\xi) + n_k(\xi)\right] + M_{N+1}(\xi) =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{N} M_k(\xi)m_k(\xi)\right] P(\xi) + \left[\sum_{k=1}^{N} M_k(\xi)n_k(\xi) + M_{N+1}(\xi)\right] =: \widetilde{M}(\xi)P(\xi) + \widetilde{N}(\xi).$$

Так как $\mathscr{M}$ — алгебра, то $\widetilde{M}, \widetilde{N} \in \mathscr{M}$, откуда $Q \in \mathscr{L}(P_1,\ldots,P_N)$. ☐

Ниже сформулируем результаты из [11] для частного случая, когда все функции и множества рассматриваются на плоскости ($n = 2$).

Теорема 1. [11] *Пусть* $Q(D) := D^{\beta}$ *и* $P_k(D) := D^{\alpha^k}$, $k = \overline{1, N}$ *— дифференциальные мономы на плоскости,* $A := \{\alpha^k\}_1^N \subset \mathbb{Z}_+^2$ *— множество соответствующих мультииндексов. Тогда включение* $Q \in \mathscr{L}(P_1, \ldots, P_N)$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех условий:*

1) $\beta \in A$*;*

2) $\beta \in \operatorname{int}(\operatorname{ch} A)$*;*

3) β *лежит на грани многоугольника* $\operatorname{ch} A$*, параллельной одной из осей координат.*

Лемма 2. [11] *Если* $M(\xi)$ *— мультипликатор в* $C(\mathbb{R}^2)$*, то для любого ненулевого вектора* $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ *существует предел*

$$\lim_{t \to +\infty} M\left(\xi t^{\nu}\right) := \lim_{t \to +\infty} M\left(\xi_1 t^{\nu_1}, \xi_2 t^{\nu_2}\right)$$

причем:

1) этот предел — константа, если $\nu_1 \neq 0$ *и* $\nu_2 \neq 0$*;*

2) этот предел — некоторая функция $\lambda(\xi_k) \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$*, если* $\nu_k = 0$ *для некоторого* $k \in \{1, 2\}$*.*

Многоугольник Ньютона и априорные оценки. Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2)$ — полином от двух переменных с комплексными коэффициентами. Его можно записать в следующем виде:

$$P(\xi) = \sum_{\alpha \in I_P} a_{\alpha} \xi^{\alpha},$$

где I_P — конечное множество индексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$.

Определение 2. [9, 10] ***Многоугольником Ньютона*** $\mathscr{N}(P)$ *полинома* $P(\xi)$ *будем называть выпуклую оболочку множества индексов* I_P*, соответствующих входящим в него мономам, и индекса* $0 = (0, 0)$*, т.е.*

$$\mathscr{N}(P) := \operatorname{ch}\left(I_P \cup 0\right).$$

Обозначим через $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots, \Gamma^m$ *стороны (грани)* многоугольника $\mathscr{N}(P)$, а через $\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^m$ — соответствующие этим граням векторы внешних нормалей к $\mathscr{N}(P)$. Стороны образуют границу многоугольника, $\partial\mathscr{N}(P) = \cup_{k=1}^m \Gamma^k$.

По отношению к многоугольнику Ньютона $\mathscr{N}(P)$ все индексы $\beta \in \mathbb{Z}_+^2$ разделяются на внешние, граничные и внутренние. Можно дать следующую характеризацию индексов β в терминах граней $\mathscr{N}(P)$ и их внешних нормалей.

1. *Внешний индекс* $\beta \notin \mathscr{N}(P)$ характеризуется тем, что существует грань $\Gamma^k \subset \partial\mathscr{N}(P)$, для которой выполнено неравенство

$$\left(\alpha, \nu^k\right) < \left(\beta, \nu^k\right) \qquad \text{для всех} \quad \alpha \in I_P.$$

2. *Граничный индекс* $\beta \in \partial\mathscr{N}(P)$ характеризуется тем, что существует грань $\Gamma^k \subset \partial\mathscr{N}(P)$, для которой

$$\left(\alpha, \nu^k\right) \leqslant \left(\beta, \nu^k\right) \quad \text{для всех} \;\; \alpha \in I_P \quad \text{и} \quad \left(\alpha', \nu^k\right) = \left(\beta, \nu^k\right) \quad \text{для некоторого} \;\; \alpha' \in I_P.$$

3. *Внутренний индекс* $\beta \in \operatorname{int}\mathscr{N}(P)$ характеризуется тем, что для каждой из граней $\Gamma^k \subset \partial\mathscr{N}(P)$, $k = \overline{1, m}$, существует индекс $\alpha^k \in I_P$ такой, что

$$\left(\alpha^k, \nu^k\right) > \left(\beta, \nu^k\right) \qquad \text{для всех} \quad k = \overline{1, m}.$$

Следующие теоремы являются следствиями или обобщениями приведенных выше результатов Бомана [11]. Они представляют собой *необходимые* условия включения $Q \in \mathscr{L}(P)$, где $Q(\xi)$ — некоторый полином на плоскости.

Теорема 2. *Пусть* $Q \in \mathscr{L}(P)$ *и* $Q(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in I_Q} b_\alpha \xi^\alpha$. *Тогда* $I_Q \subset \mathscr{N}(P)$.

Другими словами, мономы, индексы которых являются внешними по отношению к $\mathscr{N}(P)$, не могут входить в запись $Q(\xi)$, если $Q \in \mathscr{L}(P)$.

Доказательство теоремы 2. Предположим противное, т. е. что существует индекс $\beta \in I_Q$, внешний для $\mathscr{N}(P)$. Тогда существует грань $\Gamma \subset \partial\mathscr{N}(P)$ с вектором внешней нормали ν такая, что $(\beta - \alpha, \nu) > 0$ для всех $\alpha \in I_P$.

В тождество

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \qquad M, N \in \mathscr{M}, \tag{7}$$

эквивалентное включению $Q \in \mathscr{L}(P)$ (предложение 2), подставим $\xi_k t^{\nu_k}$ вместо ξ_k, где $t > 0$ — параметр, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $k = \overline{1,2}$. Имеем:

$$\sum_{\alpha \in I_Q} b_\alpha \xi^\alpha t^{(\alpha,\nu)} = M(\xi t^\nu) \sum_{\alpha \in I_P} a_\alpha \xi^\alpha t^{(\alpha,\nu)} + N(\xi t^\nu).$$

Деля обе части последнего тождества на $t^{(\beta,\nu)}$, получим:

$$\sum_{\alpha:(\alpha,\nu)<(\beta,\nu)} \frac{b_\alpha \xi^\alpha}{t^{(\beta-\alpha,\nu)}} + \sum_{\alpha:(\alpha,\nu)\geqslant(\beta,\nu)} b_\alpha \xi^\alpha t^{(\alpha-\beta,\nu)} = M(\xi t^\nu) \sum_{\alpha \in I_P} \frac{a_\alpha \xi^\alpha}{t^{(\beta-\alpha,\nu)}} + \frac{N(\xi t^\nu)}{t^{(\beta,\nu)}}. \tag{8}$$

В равенстве (8) устремим $t \to \infty$. В силу того, что $(\beta - \alpha, \nu) > 0$ для всех $\alpha \in I_P$ и в силу ограниченности функций $M(\xi)$ и $N(\xi)$, правая часть в (8) стремится к нулю. В левой же части (8) первая сумма стремится к нулю, а вторая — нет, если хотя бы один из коэффициентов при $t^{(\alpha-\beta,\nu)}$ с неотрицательной степенью $(\alpha - \beta, \nu)$ отличен от нуля. Поэтому левая часть (8) стремится к нулю тогда и только тогда, когда

$$\sum b_\alpha \xi^\alpha \equiv 0 \qquad \text{для всех} \quad \alpha \in I_Q : \quad (\alpha - \beta, \nu) = \mathrm{const} \geqslant 0.$$

Но тогда из линейной независимости мономов ξ^α над полем $\mathbb{C}$ вытекает, что

$$b_\alpha = 0 \qquad \text{для всех} \quad \alpha \in I_Q : \quad (\alpha, \nu) \geqslant (\beta, \nu).$$

В частности, $b_\beta = 0$, что противоречит предположению $\beta \in I_Q$. Теорема доказана. □

Сформулируем простые, но важные следствия теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $Q \in \mathscr{L}(P)$. *Тогда* $\mathscr{N}(Q) \subset \mathscr{N}(P)$.

Доказательство. По теореме 2, $I_Q \subset \mathscr{N}(P)$ и $(0,0) \in \mathscr{N}(P)$ по определению 2. Так как множество $\mathscr{N}(P)$ выпукло и $\mathscr{N}(Q)$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее I_Q и $(0,0)$, имеем $I_Q \subset \mathscr{N}(Q) \subset \mathscr{N}(P)$. □

Следствие 2. *Если* $Q \in \mathscr{L}(P)$, *то* $\deg_{\xi_k} Q \leqslant \deg_{\xi_k} P := l_k$, $k = 1, 2$.

Доказательство. По условию, I_P содержится в прямоугольнике $\Pi := \{(\alpha_1, \alpha_2) : \ 0 \leqslant \alpha_k \leqslant l_k, \ k = 1, 2\}$. Так как $(0,0) \in \Pi$ и $\mathscr{N}(P)$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее I_P и $(0,0)$, то $\mathscr{N}(P) \subset \Pi$. Тогда по теореме 2 $I_Q \subset \mathscr{N}(P) \subset \Pi$, откуда и вытекает утверждение следствия. □

Пусть Γ — грань $\mathscr{N}(P)$, ν — соответствующий ей вектор внешней нормали. Обозначим через $P^\nu(\xi)$ сумму мономов ξ^α, входящих в полином $P(\xi)$, для которых $\alpha \in \Gamma$, т. е.

$$P^\nu(\xi) := \sum_{\alpha\in\Gamma\cap I_P} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Следующие теоремы устанавливают необходимые условия для мономов, входящих в $Q(\xi)$, индексы которых являются граничными для $\mathscr{N}(P)$, если $Q \in \mathscr{L}(P)$.

Теорема 3. *Пусть $Q \in \mathscr{L}(P)$. Тогда для любой грани $\Gamma \subset \partial\mathscr{N}(P)$, не параллельной осям координат ξ_1, ξ_2, справедливо тождество*

$$Q^\nu(\xi) \equiv c_1 P^\nu(\xi) + c_2, \tag{9}$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ — некоторые константы, ν — вектор внешней нормали к Γ.

Доказательство. Пусть $\beta \in \Gamma$. Тогда $(\beta,\nu) \geqslant 0$; $(\beta-\alpha,\nu) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in I_P$; $(\beta-\alpha,\nu) = 0$ для всех $\alpha \in \Gamma$. Как и в доказательстве теоремы 2, подставляя $\xi_k t^{\nu_k}$ вместо ξ_k, $k = \overline{1,2}$, в тождество (7) и деля получившееся равенство на $t^{(\beta,\nu)}$, имеем:

$$\sum_{(\alpha,\nu)<(\beta,\nu)} \frac{b_\alpha\xi^\alpha}{t^{(\beta-\alpha,\nu)}} + \sum_{(\alpha,\nu)=(\beta,\nu)} b_\alpha\xi^\alpha = M(\xi t^\nu)\left[\sum_{(\alpha,\nu)<(\beta,\nu)} \frac{a_\alpha\xi^\alpha}{t^{(\beta-\alpha,\nu)}} + \sum_{(\alpha,\nu)=(\beta,\nu)} a_\alpha\xi^\alpha\right] + \frac{N(\xi t^\nu)}{t^{(\beta,\nu)}}. \tag{10}$$

Отметим, что слагаемые, соответствующие неравенству $(\alpha,\nu) > (\beta,\nu)$, в левой части (10) отсутствуют в силу теоремы 2. В силу тех же рассуждений, что и в доказательстве упомянутой теоремы, слагаемые в (10), содержащие знаменатель $t^{(\beta-\alpha,\nu)}$, стремятся к нулю при $t \to \infty$. Далее, так как грань Γ не параллельна осям координат, то $\nu_1 \neq 0$ и $\nu_2 \neq 0$. По лемме 2 Бомана, существуют пределы

$$\lim_{t\to+\infty} M\left(\xi_1 t^{\nu_1}, \xi_2 t^{\nu_2}\right) =: c_1, \qquad \lim_{t\to+\infty} N\left(\xi_1 t^{\nu_1}, \xi_2 t^{\nu_2}\right) =: c_2.$$

Тогда, переходя в (10) к пределу при $t \to \infty$ и обозначая $c := \lim_{t\to\infty} t^{-(\beta,\nu)}$, получим тождество

$$\sum_{\alpha:(\alpha,\nu)=(\beta,\nu)} b_\alpha\xi^\alpha = c_1 \sum_{\alpha:(\alpha,\nu)=(\beta,\nu)} a_\alpha\xi^\alpha + c_2 c,$$

то есть тождество вида (9), причем $c = 0$, если $(\beta,\nu) > 0$ и $c = 1$, если $(\beta,\nu) = 0$. Теорема доказана. ☐

Теорема 4. *Пусть $Q \in \mathscr{L}(P)$. Тогда для любой грани $\Gamma \subset \partial\mathscr{N}(P)$, параллельной оси координат ξ_k ($k = 1, 2$), но не лежащей на ней, справедливо тождество*

$$Q^\nu(\xi) \equiv \lambda(\xi_k) P^\nu(\xi), \qquad \textit{где} \quad \lambda \in \mathscr{M}(\mathbb{R}). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $k = 1$, т. е. Γ — верхняя горизонтальная грань многоугольника $\mathscr{N}(P)$, параллельная оси ξ_1. Тогда $\nu = (0,1)$ и

$$P^\nu(\xi) = a_0(\xi_1)\cdot\xi_2^m, \qquad \text{где} \quad m := \deg_{\xi_2} P.$$

Так как в силу следствия 2 $\deg_{\xi_2} Q \leqslant m$, то $Q^\nu(\xi)$ также представляется в виде

$$Q^\nu(\xi) = b_0(\xi_1)\cdot\xi_2^m.$$

Проводя далее для вектора $\nu = (0, 1)$ те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 3, и учитывая, что по лемме 2 Бомана существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} M(\xi_1, t\xi_2) =: \lambda(\xi_1) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}),$$

придем к тождеству (11). Случай вертикальной грани рассматривается аналогично. Теорема доказана. ☐

Следствие 3. *Пусть* $Q \in \mathscr{L}(P)$ *и* $\deg Q = \deg P$. *Тогда если старший коэффициент* $a_0(\xi_1)$ *полинома* $P(\xi)$ *по переменной* ξ_2 *имеет вещественный нуль* $\xi_1 = \gamma$ *кратности* s, *то старший коэффициент* $b_0(\xi_1)$ *полинома* $Q(\xi)$ *по переменной* ξ_2 *также имеет вещественный нуль* $\xi_1 = \gamma$ *кратности не меньше* s.

Доказательство. По условию, $a_0(\xi_1) = (\xi_1 - \gamma)^s \widetilde{a}_0(\xi_1)$, где $\widetilde{a}_0(\gamma) \neq 0$. В силу теоремы 4, имеет место тождество

$$b_0(\xi_1) \equiv \lambda(\xi_1) a_0(\xi_1), \qquad \text{где} \quad \lambda(\xi_1) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}).$$

Предположим противное, т. е. что

$$b_0(\xi_1) = (\xi_1 - \gamma)^k \widetilde{b}_0(\xi_1), \qquad \text{где} \quad k < s \quad \text{и} \quad \widetilde{b}_0(\gamma) \neq 0.$$

Тогда, сокращая обе части тождества $(\xi_1 - \gamma)^k \widetilde{b}_0(\xi_1) \equiv \lambda(\xi_1)(\xi_1 - \gamma)^s \widetilde{a}_0(\xi_1)$ на $(\xi_1 - \gamma)^k$ и затем подставляя $\xi_1 = \gamma$, получим:

$$\widetilde{b}_0(\gamma) = \left[\lambda(\xi_1)(\xi_1 - \gamma)^{s-k} \widetilde{a}_0(\xi_1)\right]\Big|_{\xi_1 = \gamma} = 0,$$

что противоречит предположению $\widetilde{b}_0(\gamma) \neq 0$. ☐

Следствие 4. *Пусть* $Q \in \mathscr{L}(P)$. *Если* $\deg_{\xi_1} P = l$, $\deg_{\xi_2} P = m$ *и старшие коэффициенты* $a_0(\xi_1)$ *и* $\widetilde{a}_0(\xi_2)$ *полинома* $P(\xi)$ *по переменным* ξ_2 *и* ξ_1 *соответственно имеют лишь вещественные нули, то*

$$Q(\xi) = c_0 P(\xi) + \widetilde{Q}(\xi), \tag{12}$$

где $c_0 \in \mathbb{C}$ *— некоторое число, а* $\deg_{\xi_1} \widetilde{Q} < l$, $\deg_{\xi_2} \widetilde{Q} < m$.

Доказательство. Запишем разложения полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ по степеням ξ_2:

$$P(\xi) = a_0(\xi_1) \cdot \xi_2^m + \ldots, \qquad Q(\xi) = b_0(\xi_1) \cdot \xi_2^m + \ldots,$$

где многоточие обозначает сумму мономов степени $< m$ по ξ_2. По условию,

$$a_0(\xi_1) = c_0 \prod_{j=1}^{k} (\xi_1 - \gamma_k)^{s_k}, \quad \text{где} \quad \gamma_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,k},\ \gamma_i \neq \gamma_j \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad \sum_{j=1}^{k} s_j = l.$$

Согласно следствию 3, старший коэффициент $b_0(\xi_1)$ полинома $Q(\xi)$ по переменной ξ_2 делится на $(\xi_1 - \gamma_j)^{s_j}$ для любого $j = \overline{1,k}$ и, следовательно, $b_0(\xi_1)$ делится на $a_0(\xi_1)$. Так как $\deg_{\xi_1} Q = \deg b_0 \leqslant \deg_{\xi_1} P = \deg a_0 = l$ (следствие 2), отсюда получаем, что

$$b_0(\xi_1) \equiv c_0 a_0(\xi_1).$$

Рассуждая так же, получим аналогичное соотношение для старших коэффициентов $\widetilde{a}_0(\xi_2)$ и $\widetilde{b}_0(\xi_2)$ по переменной ξ_1 полиномов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ соответственно:

$$\widetilde{b}_0(\xi_2) \equiv \widetilde{c}_0\widetilde{a}_0(\xi_2).$$

По условию, в запись полинома $P(\xi)$ входит моном $\xi_1^l\xi_2^m$, т. е.

$$P(\xi) = a_{lm}\xi_1^l\xi_2^m + \ldots, \qquad a_{lm} \neq 0.$$

Тогда $a_0(\xi_1) = a_{lm}\xi_1^l + \ldots$, $\widetilde{a}_0(\xi_2) = a_{lm}\xi_2^m + \ldots$ и, следовательно,

$$Q(\xi) = b_0(\xi_1)\xi_2^m + \cdots = c_0a_0(\xi_1)\xi_2^m + \cdots = c_0a_{lm}\xi_1^l\xi_2^m + \ldots;$$
$$Q(\xi) = \widetilde{b}_0(\xi_2)\xi_1^l + \cdots = \widetilde{c}_0\widetilde{a}_0(\xi_2)\xi_1^l + \cdots = \widetilde{c}_0a_{lm}\xi_1^l\xi_2^m + \ldots.$$

Отсюда ясно, что $\widetilde{c}_0 = c_0$; при этом $Q(\xi) = c_0a_{lm}\xi_1^l\xi_2^m + \ldots$.

Рассмотрим теперь разность $\widetilde{Q}(\xi) := Q(\xi) - c_0P(\xi)$. Очевидно, $\widetilde{Q} \in \mathscr{L}(P)$ и $\deg_{\xi_1}\widetilde{Q} \leqslant l$, $\deg_{\xi_2}\widetilde{Q} \leqslant m$. При разложении $\widetilde{Q}(\xi)$ по степеням ξ_2 коэффициент при ξ_2^m будет равен $b_0(\xi_1) - c_0a_0(\xi_1) \equiv 0$. Аналогично коэффициент при ξ_1^l при разложении $\widetilde{Q}(\xi)$ по степеням ξ_1 будет равен $\widetilde{b}_0(\xi_2) - c_0\widetilde{a}_0(\xi_2) \equiv 0$. Следовательно, $\deg_{\xi_1}\widetilde{Q} < l$ и $\deg_{\xi_2}\widetilde{Q} < m$, то есть получаем представление (12) с требуемыми свойствами. ☐

Тензорное произведение дифференциальных полиномов. В этом пункте будет рассматриваться задача описания пространства $\mathscr{L}(P)$ дифференциальных операторов, подчиненных тензорному произведению $P(D) = p_1(D) \otimes p_2(D)$ двух обыкновенных дифференциальных полиномов $p_1(D_1)$ и $p_2(D_2)$. Как мы увидим ниже, результат существенно зависит от структуры нулей каждого из символов сомножителей $p_1(\xi_1)$ и $p_2(\xi_2)$.

Следующая теорема является частным случаем результата из [6]. Приведем ее для полноты изложения.

Теорема 5. *Пусть $p_1(\xi_1)$ и $p_2(\xi_2)$ — невырожденные полиномы степеней l и m соответственно, $p_k(\xi_k) \neq 0 \ \ \forall\ \xi_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$. Тогда*

$$\mathscr{L}(P) = \mathscr{L}\left(p_1 \otimes p_2\right) = \mathrm{span}\{D^\alpha\}_{\alpha_1\leqslant l,\ \alpha_2\leqslant m} = \left\{ \sum_{\alpha_1\leqslant l,\ \alpha_2\leqslant m} c_\alpha D^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Доказательство. В этом случае многоугольник Ньютона $\mathscr{N}(P)$ — это прямоугольник $\{(\alpha_1, \alpha_2)\ :\ \ 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant l,\ \ 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant m\}$. Пусть $Q \in \mathscr{L}(P)$. Тогда $\deg_{\xi_k} Q \leqslant \deg_{\xi_k} P,\ \ k = 1, 2$ (следствие 2), и полином $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi) = \sum_{\beta_1\leqslant l,\ \beta_2\leqslant m} b_\beta\xi^\beta \in \mathrm{span}\{\xi^\alpha\}_{\alpha_1\leqslant l,\ \alpha_2\leqslant m}.$$

Обратно, пусть $\widetilde{Q}(D) := D_1^{\beta_1}D_2^{\beta_2}$ — произвольный дифференциальный моном, для которого $\beta_1 \leqslant l,\ \beta_2 \leqslant m$. Составим отношение

$$\frac{\widetilde{Q}(\xi)}{P(\xi)} = \frac{\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}}{p_1(\xi_1)p_2(\xi_2)} = \frac{\xi_1^{\beta_1}}{p_1(\xi_1)} \cdot \frac{\xi_2^{\beta_2}}{p_2(\xi_2)}\ .$$

Так как $p_1(\xi_1) \neq 0 \ \ \forall\, \xi_1 \in \mathbb{R}$, $\deg p_1 = l$ и $\beta_1 \leqslant l$, то дробь $\dfrac{\xi_1^{\beta_1}}{p_1(\xi_1)}$ представляет собой произведение функций вида $\dfrac{b\xi_1}{\xi_1+\omega}$ или $\dfrac{b}{\xi_1+\omega}$, где $b, \omega \in \mathbb{C}$, причем $\operatorname{Im}\omega \neq 0$. Каждая из таких функций — мультипликатор в $C(\mathbb{R})$. Действительно, в силу предложения 1 $\dfrac{1}{\xi_1+i} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, так как является преобразованием Фурье – Стилтьеса конечной меры $\mu(t)$ на прямой с плотностью $d\mu(t) = -i\chi(t)e^{-t}\,dt$ ($\chi(t)$ — функция Хевисайда):

$$\hat{\mu}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 t}\,d\mu(t) = -i\int_0^{+\infty} e^{it\xi_1}e^{-t}\,dt = -\frac{-i}{i\xi_1-1} = \frac{1}{\xi_1+i}.$$

Функция $\dfrac{b}{\xi_1+\omega} = \dfrac{b}{\xi_1+\omega_1+i\omega_2}$ получается из $\dfrac{1}{\xi_1+i}$ суперпозицией сдвига, растяжения и отражения и, следовательно, $\dfrac{b}{\xi_1+\omega} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ в силу свойств алгебры $\mathscr{M}$. Наконец, функция $\dfrac{\xi_1}{\xi_1+\omega} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ как разность мультипликаторов $1 = \hat{\delta}$ и $\dfrac{\omega}{\xi_1+\omega}$. Здесь δ — дельта-мера Дирака.

Таким образом, $\dfrac{\xi_1^{\beta_1}}{p_1(\xi_1)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, если $\beta_1 \leqslant l$. Аналогично $\dfrac{\xi_2^{\beta_2}}{p_2(\xi_2)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, если $\beta_2 \leqslant m$. Так как $\mathscr{M}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}^2)$, то $\dfrac{\widetilde{Q}(\xi)}{P(\xi)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^2)$ и, значит, $\widetilde{Q} \in \mathscr{L}(P)$ согласно предложению 2. Отсюда в силу линейности пространства $\mathscr{L}(P)$ включение $Q \in \mathscr{L}(P)$ справедливо для любого полинома $Q(\xi) \in \operatorname{span}\{\xi^\alpha\}_{\alpha_1\leqslant l,\ \alpha_2\leqslant m}$. Теорема доказана. ☐

Следующий результат был доказан в [7] в более общем случае. Здесь мы приведем более короткое его доказательство, используя технику многоугольника Ньютона и результаты, полученные предыдущем пункте.

Теорема 6. *Пусть* $p_1(\xi_1) = \xi_1^l,\ \ p_2(\xi_2) = \xi_2^m$. *Тогда*

$$\mathscr{L}(P) = \mathscr{L}(p_1 \otimes p_2) = \operatorname{span}\{P(D),\ I\} = \left\{c_1P(D) + c_2, \quad c_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1,2}\right\}.$$

Доказательство. В нашем случае $\mathscr{N}(P)$ — отрезок с концами в точках $(0,0)$ и (l,m). Пусть $Q \in \mathscr{L}(P)$. Тогда в силу теоремы 2 полином $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi) = \sum_{\beta_1\leqslant l,\ l\beta_2 = m\beta_1} b_\beta \xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}.$$

Далее, по теореме 3, $Q^\nu(\xi) \equiv c_1P^\nu(\xi) + c_2$, где ν — нормаль к отрезку с концами $(0,0)$ и (l,m). Так как $Q^\nu(\xi) = Q(\xi)$ и $P^\nu(\xi) = P(\xi) = \xi_1^l\xi_2^m$, имеем тождество:

$$\sum_{\beta_1\leqslant l,\ l\beta_2 = m\beta_1} b_\beta \xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2} \equiv c_1\xi_1^l\xi_2^m + c_2.$$

Отсюда $b_\beta = 0$ для всех β, удовлетворяющих условиям $0 < \beta_1 < l$ и $l\beta_2 = m\beta_1$. Значит, $Q(\xi)$ имеет вид $b_{00} + b_{lm}\xi_1^l\xi_2^m$, что и требовалось доказать. ☐

Теорема 7. *Пусть* $p_1(\xi_1) = \xi_1^l$, *а* $p_2(\xi_2)$ *— невырожденный полином степени* m, $p_2(\xi_2) \neq 0 \ \ \forall\, \xi_2 \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\mathscr{L}(P) = \mathscr{L}(p_1 \otimes p_2) = \operatorname{span}\left\{\{D^\alpha\}_{\alpha_1\leqslant l,\ \alpha_2 l < \alpha_1 m}, P(D), I\right\}.$$

Доказательство. В этом случае многоугольник Ньютона $\mathscr{N}(P)$ — прямоугольный треугольник с вершинами $(0,0)$, $(l,0)$ и (l,m) (моном ξ_1^l входит в запись $P(\xi)$, так как $P(1,0)=p_2(0)\neq 0$). Пусть $Q\in\mathscr{L}(P)$. Тогда по теореме 2 $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi)=\sum_{\beta_1\leqslant l,\ l\beta_2\leqslant m\beta_1} b_\beta\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}. \tag{13}$$

Точно так же, как в доказательстве теоремы 6, показывается, что мономы, соответствующие гипотенузе прямоугольного треугольника $\mathscr{N}(P)$, не входят в запись $Q(\xi)$, за исключением концов этой гипотенузы — точек $(0,0)$ и (l,m), т. е.

$$b_\beta=0 \qquad \text{при} \quad 0<\beta_1<l, \quad l\beta_2=m\beta_1.$$

Покажем, что оставшиеся мономы из (13) входят в запись $Q(\xi)$. Пусть $\beta=(\beta_1,\beta_2)\in\mathscr{N}(P)$ — такой индекс. Положим $q(\xi):=\xi^\beta$, $P_1(\xi):=\xi_1^l$, $P_2(\xi):=\xi_1^l\xi_2^m$. Отношения

$$\frac{P_1(\xi)}{P(\xi)}=\frac{\xi_1^l}{\xi_1^l p_2(\xi_2)}=\frac{1}{p_2(\xi_2)} \qquad \text{и} \qquad \frac{P_2(\xi)}{P(\xi)}=\frac{\xi_1^l\xi_2^m}{\xi_1^l p_2(\xi_2)}=\frac{\xi_2^m}{p_2(\xi_2)}$$

— мультипликаторы в $C(\mathbb{R}^2)$. Это показывается точно так же, как и в доказательстве теоремы 5. Поэтому $P_k\in\mathscr{L}(P)$, $k=\overline{1,2}$. Далее, так как $\beta\in\mathscr{N}(P)$ и β не лежит на гипотенузе этого треугольника (за исключением, возможно, ее концов), то по теореме 1 Бомана имеем $q(D)=D^\beta\in\mathscr{L}(P_1,P_2)$. Применяя теперь лемму 1, получим, что $\mathscr{L}(P_1,P_2)\subset\mathscr{L}(P)$ и, значит, $q\in\mathscr{L}(P)$. Теорема доказана. □

В следующей теореме рассматривается тензорное произведение двух конкретных операторов четвертого порядка, символы которых имеют лишь вещественные нули. Автор предполагает, что аналогичный результат справедлив и в общем случае, но доказать это пока не удалось.

Теорема 8. *Пусть* $p_1(\xi_1):=\xi_1^2(\xi_1-1)^2$, $p_2(\xi_2):=\xi_2^2(\xi_2-1)^2$. *Тогда*

$$\mathscr{L}(P)=\mathscr{L}(p_1\otimes p_2)=\operatorname{span}\{P(D),\ I\}=\left\{c_1P(D)+c_2, \quad c_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{1,2}\right\}.$$

Доказательство. В этом случае многоугольник Ньютона $\mathscr{N}(P)$ — выпуклый четырехугольник с вершинами $(0,0)$, $(4,2)$, $(4,4)$ и $(2,4)$. Пусть $Q\in\mathscr{L}(P)$. Тогда, согласно следствию 4, получаем представление:

$$Q(\xi)=c_0P(\xi)+\widetilde{Q}(\xi), \qquad \text{где} \quad \deg_{\xi_1}\widetilde{Q}\leqslant 3, \quad \deg_{\xi_2}\widetilde{Q}\leqslant 3.$$

Так как $P\in\mathscr{L}(P)$, можно далее рассматривать только полином $\widetilde{Q}\in\mathscr{L}(P)$ вместо $Q(\xi)$. Согласно теореме 2, оставим в записи $\widetilde{Q}(\xi)$ лишь мономы ξ^β, показатели β которых входят в $\mathscr{N}(P)$. Другими словами, $\widetilde{Q}(\xi)$ имеет вид:

$$\widetilde{Q}(\xi)=b_{00}+b_{11}\xi_1\xi_2+b_{21}\xi_1^2\xi_2+b_{12}\xi_1\xi_2^2+b_{22}\xi_1^2\xi_2^2+b_{32}\xi_1^3\xi_2^2+b_{23}\xi_1^2\xi_2^3+b_{33}\xi_1^3\xi_2^3.$$

Точно так же, как и в доказательстве теоремы 6, показывается, что мономы $\xi_1^2\xi_2$ и $\xi_1\xi_2^2$, соответствующие граням $\mathscr{N}(P)$, не параллельным осям координат, не входят в запись $\widetilde{Q}(\xi)$, т. е. $b_{21}=b_{12}=0$. Таким образом,

$$\widetilde{Q}(\xi)=b_{00}+b_{11}\xi_1\xi_2+b_{22}\xi_1^2\xi_2^2+b_{32}\xi_1^3\xi_2^2+b_{23}\xi_1^2\xi_2^3+b_{33}\xi_1^3\xi_2^3. \tag{14}$$

Далее, в тождестве $\widetilde{Q}(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi)$, эквивалентном включению $\widetilde{Q} \in \mathscr{L}(P)$, где M, N — мультипликаторы в $C(\mathbb{R}^2)$ (предложение 2), а $\widetilde{Q}(\xi)$ имеет вид (14), положим сначала $\xi_2 := 1$, а затем $\xi_1 := 1$. Имеем:

$$\widetilde{Q}(\xi_1, 1) = b_{00} + b_{11}\xi_1 + (b_{22} + b_{23})\,\xi_1^2 + (b_{32} + b_{33})\,\xi_1^3 \equiv N(\xi_1, 1);$$
$$\widetilde{Q}(1, \xi_2) = b_{00} + b_{11}\xi_2 + (b_{22} + b_{32})\,\xi_2^2 + (b_{23} + b_{33})\,\xi_2^3 \equiv N(1, \xi_2).$$

Из ограниченности мультипликатора $N(\xi)$ выводим, что

$$b_{11} = 0, \quad b_{22} + b_{23} = 0, \quad b_{23} + b_{33} = 0, \quad b_{22} + b_{32} = 0, \quad b_{32} + b_{33} = 0. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14) и группируя, получим:

$$\widetilde{Q}(\xi) = b_{00} + b_{22}\xi_1^2\xi_2^2(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1).$$

Для завершения доказательства остается показать, что полином

$$q(\xi) := \xi_1^2\xi_2^2(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1) \notin \mathscr{L}(P).$$

С этой целью рассмотрим следующую последовательность $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n)$:

$$\xi_1^n := 1 + \frac{1}{n^{12}}, \qquad \xi_2^n := n^5, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, подставляя $\xi := \xi^n$ в $q(\xi)$ и $P(\xi)$, получим:

$$q(\xi^n) = \left(1 + \frac{1}{n^{12}}\right)^2 \cdot n^{10} \cdot \frac{1}{n^{12}} \cdot \left(n^5 - 1\right) \sim n^3, \qquad n \to \infty,$$
$$P(\xi^n) = \left(1 + \frac{1}{n^{12}}\right)^2 \cdot n^{10} \cdot \frac{1}{n^{24}} \cdot \left(n^5 - 1\right)^2 \sim \frac{1}{n^4}, \qquad n \to \infty.$$

Подставляя теперь $\xi := \xi^n$ в тождество $\widetilde{Q}(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi)$, получим:

$$b_{00} + b_{22}q(\xi^n) \equiv M(\xi^n)P(\xi^n) + N(\xi^n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

Так как $P(\xi^n) \sim \dfrac{1}{n^4}$ при $n \to \infty$, то правая часть (16) ограничена. Но поскольку $q(\xi^n) \sim n^3$ при $n \to \infty$, левая часть (16) неограничена, если $b_{22} \neq 0$. Поэтому $b_{22} = 0$. Значит, $\widetilde{Q}(\xi) = b_{00}$ и $Q(\xi)$ имеет вид $b_{00} + c_0P(\xi)$, что и требовалось доказать. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
2. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
3. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm / D. Ornstein // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – Vol. 11, № 1. – P. 40–49.
4. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М. М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т. 56. – С. 206–261.
5. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. – 1964. – Vol. 8, № 1. – P. 112–124.

6. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Матем. сборник. – 2008. – Т. 199, № 11. – С. 75–112.
7. Лиманский Д. В. Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов / Д.В. Лиманский // Укр. матем. вiсник. – 2011. – Т. 8, № 1. – С. 101–111.
8. Лиманський Д. В. Умови пiдпорядкованостi для тензорного добутку двох звичайних диференцiальних операторiв / Д. В. Лиманський // Доповiдi НАН України. – 2012. – № 4. – С. 25–29.
9. Волевич Л. Р. Многогранник Ньютона и локальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин // Труды ММО.– 1985. – Т. 48. – С. 211–262.
10. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
11. Boman J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables / J. Boman // Illinois J. Math. – 1972. – Vol. 16, № 2. – P. 203–216.
12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

Поступила в редакцию 29.03.2016 г.

NEWTON POLYGON AND A PRIORI ESTIMATES FOR DIFFERENTIAL POLYNOMIALS ON THE PLANE

D. V. Limanskii

In the paper we describe the linear space $\mathscr{L}(P)$ of minimal differential polynomials subordinated to the tensor product $P(D) = p_1(D_1)\otimes p_2(D_2)$ of two ordinary differential operators in the $C(\mathbb{R}^2)$ norm. The cases if the cofactors' symbols $p_1(\xi_1)$ and $p_2(\xi_2)$ contain real and complex zeros of different multiplicity are considered. Moreover, for description of the space $\mathscr{L}(P)$, along with elements of harmonic analysis, the technique and method of the Newton polygon are used.

Keywords: Newton polygon, convex hull, differential polynomial, a priori estimate, multiplier.

Лиманский Дмитрий Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
4125aa@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-099-1504465

Limanskii Dmitrii Vladimirovich
Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent
Donetsk National University, Donetsk
Associate Professor at the Department Mathematical Analysis and Differential Equations

УДК 517.988.28

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О СТРУКТУРЕ ПАРАМЕТРОВ В ПРОБЛЕМЕ КУТТНЕРА–ГОЛУБОВА

© **2016.** ***А. Д. Манов***

В статье дается новое доказательство теоремы о структуре параметров в проблеме Куттнера–Голубова в $\mathbb{R}^n$.

***Ключевые слова*:** положительно определенные функции, вполне монотонные функции, функции Пика–Неванлинны, проблема Куттнера–Голубова.

Введение. Пусть E вещественное линейное пространство, а ρ неотрицательная однородная функция на E и $\rho(x) \not\equiv 0$. Проблема Куттнера–Голубова заключается в определении таких положительных λ и δ, при которых функция $(1-\rho(x)^\lambda)_+^\delta$ является положительно определенной на E. Целью данной работы является новое доказательство теоремы о структуре параметров в проблеме Куттнера–Голубова в $\mathbb{R}^n$.

Формулировка результата.

Определение 1. *Пусть E нетривиальное вещественное линейное пространство. Комплекснозначная функция $f : E \to \mathbb{C}$ называется положительно определенной на $E(f \in \Phi(E))$, если при любом $n \in \mathbb{N}$, и для любых точек $\{x_i\}_{i=1}^n \subset E$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}f(x_i - x_j) \geqslant 0.$$

Определение 2. *Линейное пространство E и функцию $\rho : E \to \mathbb{R}$ с условием $\rho(x) \geqslant 0,\ \rho(tx) = |t|\rho(x),\ x \in E, t\ \in \mathbb{R}$, и $\rho \not\equiv 0$ на E, мы обозначим (E, ρ). Символом $\Phi(E, \rho)$ обозначим класс всех непрерывных функций $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ таких, что функция $f \circ \rho \in \Phi(E)$. Обозначим символом l_p^n пару $(\mathbb{R}^n, \rho)$, $n \in \mathbb{N}$, с функцией*

$$\rho(x) := \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 0 < p < \infty.$$

Проблема 1.(Куттнер–Голубов) *Пусть $f_{\lambda,\delta}(t) := (1 - t^\lambda)_+^\delta$, где $t_+ := \max\{t, 0\}$, $t \in \mathbb{R}$. Для данного (E, ρ) найти такие $\lambda > 0$, $\delta > 0$, для которых $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(E, \rho)$. Если для некоторых положительных λ и δ эта проблема имеет решение, мы полагаем*

$$\lambda(E, \rho) := \sup\{\lambda > 0 : f_{\lambda,\delta} \in \Phi(E, \rho) \text{ для некоторого } \delta > 0\}; \tag{1}$$

в противном случае считаем, что $\lambda(E, \rho) := 0$.

Для l_2^n качественное решение проблемы получено в одномерном случае Куттнером [1], а в многомерном — Голубовым [2]. В этих работах доказано, что $\lambda(l_2^n) = 2$. В случае $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ качественное решение получено Заставным [3]. В доказательстве

Заставного (как и Голубова) существенно используются результаты Куттнера [12] о неотрицательности интегралов специального вида, доказательство которых не совсем прозрачно и занимает большой объём.

В данной работе теорема Заставного доказана без предположения непрерывности ρ и самое главное без использования результатов Куттнера. Новое доказательство ключевой леммы 1 основано на недавнем результате Bhatia, Jain [8]. Доказательство леммы 2 и теоремы 1 такое же как у Заставного и проводится по схеме Куттнера-Голубова. Для полноты изложения мы воспроизводим эти доказательства.

Теорема 1.(Теорема о структуре параметров в проблеме Куттнера–Голубова) *Пусть* $\lambda_0 := \lambda(\mathbb{R}^n, \rho) > 0$. *Тогда существует возрастающая и непрерывная слева функция* $\delta(\lambda) = \delta(\lambda, \rho) > 0$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$, *такая, что:*

1. *Если* $\lambda \in (0, \lambda_0)$, *то* $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \Leftrightarrow \delta \geqslant \delta(\lambda)$;
2. *Если* $\lambda > \lambda_0$, *то* $f_{\lambda,\delta} \notin \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ *для всех* δ;
3. $\delta(+0) > 0$;
4. *Если* $f_{\lambda_0,\delta} \notin \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ *для всех* δ, *то* $\delta(\lambda_0 - 0) = +\infty$. *Если* $f_{\lambda_0,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ *для некоторого* $\delta > 0$, *то* $\delta(\lambda_0 - 0) < +\infty$, *а функция* $\delta(\lambda)$ *определена на* $(0, \lambda_0]$ *и* $\delta(\lambda_0) = \delta(\lambda_0 - 0)$.

В работе [3] доказано, что: 1) $\lambda(l_p^n) = p$ при $n \geqslant 2$, $0 < p \leqslant 2$; 2) если $2 < p \leqslant \infty$, то $\lambda(l_p^n) = 1$ при $n = 2$ и $\lambda(l_p^n) = 0$ при $n \geqslant 3$.

Вполне монотонные функции. Функции Бернштейна и Пика.

Определение 3. *Функция* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *называется вполне монотонной на* $(0, +\infty)$ $(f \in \mathcal{M}(0, +\infty))$, *если* $f \in C^\infty(0, +\infty)$ *и выполнено неравенство*

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Например, $\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ и e^{-x} являются вполне монотонными на $(0, +\infty)$.

Теорема 2.(Хаусдорф–Бернштейн–Уиддер) *Функция* $f \in \mathcal{M}(0, +\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(x) = \int\limits_0^\infty e^{-tx} d\mu(t), \ x > 0, \tag{2}$$

где μ *неотрицательная борелевская мера на* $[0, +\infty)$ *такая, что интеграл* (2) *сходится при всех* $x > 0$. *При этом мера* μ *является конечной тогда и только тогда, когда* $f(+0) < +\infty$.

Доказательство теоремы 2 можно найти в [4, 5].

Определение 4. *Функция* $f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *называется функцией Бернштейна* $(f \in \mathcal{B})$, *если* $f \in C^\infty(0, +\infty)$ *и* $f' \in \mathcal{M}(0, +\infty)$.

Из определения и теоремы 2 вытекает следующее интегральное представление для функций Бернштейна.

Теорема 3. *Функция* $f \in \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(x) = a + bx + \int\limits_0^\infty (1 - e^{-xt}) d\mu(t), \ x > 0, \tag{3}$$

где $a, b \geqslant 0$ *и* μ *неотрицательная на* $(0, +\infty)$ *мера, удовлетворяющая условию* $\int\limits_0^\infty t/(1+t)d\mu(t) < \infty$.

Подробное доказательство можно найти в [4, Theorem 3.2] и [6, Theorem 9.8].

Теорема 4. *Пусть* $f \in \mathcal{M}(0, +\infty)$ *и* $g \in \mathcal{B}$, $g(+0) \neq 0$. *Тогда* $f \circ g \in \mathcal{M}(0, +\infty)$.

Доказательство можно найти в [4, Theorem 3.7].

Определение 5. *Обозначим* $\mathcal{CB}$ *множество функций Бернштейна* $f \in \mathcal{B}$ *у которых в интегральном представлении* (3) *мера* μ *абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и её производная по мере Лебега является вполне монотонной функцией, то есть*

$$f(x) = a + bx + \int\limits_0^\infty (1 - e^{-xt})m(t)dt, \ x > 0,$$

где $m := d\mu/dx \in \mathcal{M}(0, +\infty)$.

Определение 6. *Пусть* f *— аналитическая в верхней полуплоскости* $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ *функция. Тогда* f *называется функцией Пика* ($f \in \mathcal{P}$), *если выполнено неравенство*

$$\mathrm{Im} f(z) \geqslant 0, \ \forall z \in \mathbb{H}. \tag{4}$$

Обозначим $\mathcal{P}(0, +\infty)$ *множество всех функций Пика* $f \in \mathcal{P}$, *которые допускают непрерывное продолжение на интервал* $(0, +\infty)$ *и принимают действительные значения на данном интервале, то есть* $f(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Замечание 1. *Также можно встретить название функции Неванлинны.*

Теорема 5. *Пусть* $f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$. *Тогда* $f \in \mathcal{CB}$ *тогда и только тогда, когда* f *есть сужение на* $(0, +\infty)$ *функции класса* $\mathcal{P}(0, +\infty)$.

Доказательство теоремы можно найти в [4, Theorem 6.9] и в неявном виде в [7, Theorem 4.10].

Пример 1. *В* [8] *Bhatia, Jain доказали, что*

$$\frac{1 - x^q}{1 - x^p} \in \mathcal{P}(0, +\infty), \ p, q > 0, \ 0 < p \leqslant 1, \ p \leqslant q \leqslant p + 1.$$

Вспомогательные утверждения.

Теорема 6.(Бохнер–Хинчин) *Функция* $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера* μ *на* $\mathbb{R}^n$ *такая, что*

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} d\mu(t), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [9, 6.2.3].

Как прямое следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье, которое определяется по формуле:

$$\widehat{f}(u) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(u,x)} dx, u \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие 1. *Если* $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, *то* $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff \widehat{f}(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}^n$. *Кроме того, в этом случае* $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 1. *Пусть* $f, g \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$ *на* $\mathbb{R}^n$ *и* f *финитна. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx > 0.$$

Доказательство. Так как $f, g \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, то по следствию 1 $\widehat{f}, \widehat{g} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и справедливы следующие неравенства

$$\widehat{f}(t) \geqslant 0\ ,\ \widehat{g}(t) \geqslant 0\ , t \in \mathbb{R}^n.$$

Из формулы умножения [9, 3.1.8] следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\widehat{g}(-x)dx \geqslant 0.$$

Предположим, что $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\widehat{g}(-x)dx = 0$. Тогда $\widehat{f}(x)\widehat{g}(-x) = 0$ почти всюду. Но, учитывая непрерывность каждого множителя, получаем тождество $\widehat{f}(x)\widehat{g}(-x) \equiv 0$. Так как $g \not\equiv 0$, то $\widehat{g} \not\equiv 0$. Следовательно найдется точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, такая что

$$\widehat{g}(-x) > 0,\ \forall x \in B_\varepsilon(x_0),$$

где $B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_2 < \varepsilon\}$ шар радиуса $\varepsilon > 0$ в точке x_0. Таким образом $\widehat{f}(x) = 0$ для всех $x \in B_\varepsilon(x_0)$. Так как носитель f компактное множество, то функция $\widehat{f}$ является голоморфной в области $\mathbb{C}^n$. Коэффициенты разложения $\widehat{f}$ в степенной ряд в точке x_0 с точностью до множителей совпадают с обычными частными производными по вещественным переменным, которые равны нулю и, значит, $\widehat{f} \equiv 0$ в $\mathbb{C}^n$ ([10, Теорема 3.13] или [11, Теорема 1.1.2]). Но это противоречит условию $f \not\equiv 0$ на $\mathbb{R}^n$. ☐

Следствие 2. *Пусть* $f, g \in \Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$ *на* $\mathbb{R}^n$ *и* f *финитна. Пусть*

$$G(x) := \int\limits_0^\infty g(\varphi(s)x)d\nu(s),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где ν *неотрицательная, конечная, борелевская мера на* $[0, +\infty)$, *а* φ *неотрицательная, борелевская функция на* $[0, +\infty)$, *такая что* $\nu(\{s \geqslant 0 : \varphi(s) > 0\}) > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(u,x)} f(x)G(x)dx > 0,\ \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть $A := \{s \geqslant 0 : \varphi(x) = 0\}$, $B := \{s \geqslant 0 : \varphi(s) > 0\}$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(u,x)} f(x)G(x)dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(u,x)} f(x)g(\varphi(s)x)dx \right) d\nu(s) =$$

$$g(0)\nu(A)\widehat{f}(u) + \int\limits_B \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(u,x)} f(x)g(\varphi(s)x)dx \right) d\nu(s).$$

Первое слагаемое неотрицательно, так как каждый множитель неотрицателен. Для любых фиксированных $u \in \mathbb{R}^n$ и $s \in B$ функции $e^{-i(u,x)}f(x)$ и $g(\varphi(s)x)$ принадлежат классу $\Phi(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, обе не равны тождественно нулю на $\mathbb{R}^n$, а первая функция финитна. Тогда в силу утверждения 1 внутренний интеграл во втором слагаемом положителен при любом $s \in B$. Так как по условию $\nu(B) > 0$, то интеграл от положительной функции по множеству положительной меры положителен. ☐

Лемма 1. *Если* $f_{\mu,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ *для некоторых* $\mu > 0$, $\delta > 0$, *то* $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ *для всех* $\lambda \in (0, \mu)$. *Если дополнительно* $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ *и* $\rho(x) > 0$ *при* $x \neq 0$, *то* $\widehat{f_{\lambda,\delta} \circ \rho}(u) > 0$ *для всех* $\lambda \in (0, \mu)$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Эта лемма доказана Заставным в [3] с использованием результатов Куттнера. Ниже приведено её доказательство без использования результатов Куттнера.

Доказательство. Пусть для некоторых $\mu, \delta > 0$ функция $f_{\mu,\delta}(t) = (1 - t^\mu)_+^\delta \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$. Тогда [3] $e^{-t^\mu} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ и, значит,

$$e^{-st^\mu} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho), \ \forall s \geq 0. \tag{5}$$

Из примера 1 при $q = 1$ следует, что $(1-x)/(1-x^p) \in \mathcal{P}(0, +\infty)$ при $p \in (0, 1)$. Из теоремы 5 следует, что $(1-x)/(1-x^p) \in \mathcal{CB} \subset \mathcal{B}$ при $p \in (0, 1)$. Используя теорему 4 и тот факт, что $1/x^\alpha \in \mathcal{M}(0, \infty)$, $\forall \alpha > 0$, получаем, что функция

$$g_{\alpha,p}(x) := \left(\frac{1-x^p}{1-x}\right)^\alpha \in \mathcal{M}(0, +\infty), \ 0 < p < 1, \ \alpha > 0.$$

Возьмем $\alpha = \delta$ и воспользуемся теоремой 2. Получим следующее представление:

$$g_{\delta,p}(x) = \left(\frac{1-x^p}{1-x}\right)^\delta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} d\tau_p(s), \ 0 < p < 1, \ x \geqslant 0,$$

где τ_p — неотрицательная, конечная борелевская мера. Тогда

$$g_{\delta,p}(t^\mu) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st^\mu} d\tau_p(s), \ 0 < p < 1, \ t \geqslant 0.$$

Т.к. мера τ_p неотрицательна и конечна, то из последнего равенства и (5) следует, что

$$g_{\delta,p}(t^\mu) = \left(\frac{1-t^{\mu p}}{1-t^\mu}\right)^\delta \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho), \ 0 < p < 1.$$

Из этого равенства при $p = \lambda/\mu$, $\lambda \in (0, \mu)$ вытекает, что

$$f_{\lambda,\delta}(t) = f_{\mu,\delta}(t) g_{\delta,p}(t^\mu) \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho), \ \lambda \in (0, \mu), \, p = \lambda/\mu.$$

Если дополнительно $\rho \in C(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(x) > 0$ при $x \neq 0$, то можно применить следствие 2 для $f(x) = (1 - \rho^\mu(x))_+^\delta$, $g(x) = e^{-\rho^\mu(x)}$, $\varphi(s) = s^{1/\mu}$, $\nu = \tau_p$. Так как $0 < p < 1$, то очевидно $\tau_p(\{s \geqslant 0 : \varphi(s) > 0\}) = \tau_p((0, +\infty)) > 0$. Тогда

$$(\sqrt{2\pi})^n \widehat{f_{\lambda,\delta} \circ \rho}(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(u,x)} (1 - \rho^\mu(x))_+^\delta \int\limits_0^\infty \exp(-\rho^\mu(s^{1/\mu}x)) d\tau_p(s) dx > 0, \ u \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если для некоторых* $\lambda, \delta > 0$ *функция* $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$, *то* $f_{\lambda,\delta+\mu} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ *для каждого* $\mu > 0$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся следующим равенством

$$f_{\lambda,\delta+\mu}(t) = \frac{1}{B(\delta+1,\mu)} \int\limits_0^{+\infty} f_{\lambda,\delta}(ts^{1/\lambda})(s-1)_+^{\mu-1} s^{-\delta-\mu-1} ds, \tag{6}$$

которое справедливо для всех $\delta, \mu, \lambda > 0$, и $t \geqslant 0$. Равенство (6) очевидно при $t \geqslant 1$, а для $t \in [0, 1)$ вытекает из следующего представления для B-функции.

$$(a-b)^{k+\mu-1} B(k,\mu) = \int\limits_a^b (x-b)^{k-1}(a-x)^{\mu-1} dx, \ b < a, \ k > 0, \ \mu > 0,$$

при $a = 1$, $b = t^\lambda$, $k = \delta+1$, и $x = s^{-1}$. Осталось воспользоваться следующим фактом [3]: если $f \in \Phi(E, \rho)$, μ — неотрицательная, конечная борелевская мера на $[0, +\infty)$, а $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ является неотрицательной борелевской функцией. Тогда $g \in \Phi(E, \rho)$, где

$$g(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(t\varphi(s)) d\mu(s), t \geqslant 0.$$

□

Доказательство теоремы 1. Пусть $\lambda_0 = \lambda(\mathbb{R}^n, \rho) > 0$. Из определения λ_0 и леммы 1 вытекает, что для любого $\lambda \in (0, \lambda_0)$ существует $\delta > 0$ такое, что $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$. Функцию $\delta(\lambda)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$, определим по формуле

$$\delta(\lambda) := \inf\{\delta > 0 : f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)\}. \tag{7}$$

Очевидно, $\delta(\lambda) \geqslant 0$. Кроме того, $\delta(\lambda) \neq 0$ (в противном случае, предельная функция $\chi_{[0,1)}$, индикатор множества $[0, 1)$, будет непрерывный на $[0, +\infty)$). Итак $\delta(\lambda) > 0$ для всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Из леммы 2 и определения (7) вытекает, что при $\lambda \in (0, \lambda_0)$ функция $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ тогда и только тогда, когда $\delta \geqslant \delta(\lambda) > 0$. С помощью леммы 1 мы заключаем, что $\delta(\lambda) \leqslant \delta(\mu)$ для $0 < \lambda < \mu < \lambda_0$ и поэтому, $\delta(\lambda - 0) \leqslant \delta(\lambda)$ для всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Как предельный случай мы получаем, что $f_{\lambda,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ для $\delta = \delta(\lambda - 0)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$ и, поэтому, $\delta(\lambda) \leqslant \delta(\lambda - 0)$. Таким образом $\delta(\lambda - 0) = \delta(\lambda)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Пусть $\delta_1(\lambda) := \delta(\lambda, l_2^1)$, $\lambda \in (0, 2)$. Из результатов Куттнера [1] следует, что $\delta_1(+0) > 0$. Так как $\Phi(\mathbb{R}^n, \rho) \subset \Phi(l_2^1)$. То мы имеем $\delta(\lambda) \geqslant \delta_1(\lambda)$ для всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Следовательно $\delta(+0) > 0$.

Если $\delta_0 := \delta(\lambda_0 - 0) < +\infty$, то $\delta_0 > 0$ и $f_{\lambda_0,\delta_0} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$.

Если $f_{\lambda_0,\delta} \in \Phi(\mathbb{R}^n, \rho)$ для некоторого $\delta > 0$, то функция $\delta(\lambda)$, определенная по формуле (7), обладает аналогичными свойствами при $\lambda \in (0, \lambda_0]$. Поэтому $\delta(\lambda_0 - 0) = \delta(\lambda_0) < +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kuttner B. On the Riesz means of a Fourier series / B. Kuttner // J. London Math. Soc. – 1944. – Vol. 19, № 2. – P. 77–84.
2. Golubov B. I. On Abel-Poisson type and Riesz means / B. I. Golubov // Analysis Math. – 1981. – Vol. 7. – P. 161–184.
3. Zastavnyi V. P. On positive definiteness of some functions / V. P. Zastavnyi // Journal of Multivariate Analysis. – 2000. – Vol. 73. – P. 55–81.
4. Schilling R. L. Bernstein functions / R. L. Shilling, R. Song, Z. Vondraček. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2010. – 410 p.
5. Widder D. V. The Laplace Transform / D. V. Widder. – Princeton: Princeton University Press, 1946. – 425 p.
6. Berg C. Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups / C. Berg, G. Forst. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1975. – 198 p.
7. Berg C. Stieltjes–Pick–Bernstein–Schoenberg and their connection to complete monotonicity: in Positive Definite Functions. From Schoenberg to Space-Time Challenges, S. Mateu and E. Porcu// Dept. of Mathematics, University Jaume I, Castellon de la Plana, Spain. – 2008. – P. 15-45.
8. Bhatia R. On some positive definite function / R. Bhatia, T. Jain // Positivity. – 2015. – Vol. 19, № 4. – P. 903–910.
9. Trigub R. M. Fourier Analysis and Approximation of Functions / R. M. Trigub, E. S. Belinsky. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
10. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных / Б. А. Фукс. – Москва: ФМЛ, 1962. – 420 с.
11. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях / Р. Нарасимхан. – Москва: Мир, 1971. – 232 с.
12. Kuttner B. On positive Riesz and Abel typical means / B. Kuttner // Proc. London Math. Soc. – 1947. – Vol. 49. – P. 328–352.

Поступила в редакцию 21.02.2016 г.

A NEW PROOF OF THE THEOREM ON PARAMETERS IN THE KUTTNER–GOLUBOV PROBLEM

A. D. Manov

The aim of this paper is to give a new proof of the theorem on parameters in the Kuttner–Golubov problem in $\mathbb{R}^n$.

Keywords: positive-definite functions, completely monotonic functions, Pick–Nevanlinna functions, Kuttner–Golubov problem

Манов Анатолий Дмитриевич
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
студент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
manov.ad@ro.ru
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-066-2376421

Manov Anatoliy Dmitrievych
Donetsk National University, Donetsk
student at the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations

УДК 517.988.28

РАДИУС ПОМПЕЙЮ ДЛЯ НЕОДНОСВЯЗНОГО МНОЖЕСТВА

© 2016. *П. А. Машаров*

Рассматривается задача о нахождении наименьшего радиуса круга, в котором данное множество является множеством Помпейю. Получен радиус Помпейю для каждого неодносвязного множества, представляющего из себя замыкание разности двух квадратов со взаимно параллельными сторонами и общим центром: со стороной 2 и стороной $2a$ для каждого $a \in (1/2; 1)$.

Ключевые слова: проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами, локальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю для неодносвязного множества.

Введение. В работе исследуются аналоги проблемы Помпейю и их приложения в различных областях анализа. Проблема Помпейю в евклидовом случае может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ — группа движений $\mathbb{R}^n$. Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A. В этой постановке указанная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получили румынский математик Помпейю в 1929 году [1, 2] и другие [3–5].

Легко видеть, что даже на плоскости $\mathbb{R}^2$ не каждое множество имеет свойство Помпейю. В самом деле, пусть $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\| < R\}$, $R > 0$ — фиксировано и $f(x_1, x_2) = e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}$. Тогда, поскольку $\lambda\mathbb{B}_R$ является кругом радиуса R с центром в точке $y \in \mathbb{R}^2$, координаты которой зависят только от $\lambda \in \mathbf{M}(2)$, интеграл (1) сводится к

$$\int_{|x-y|\leqslant R} e^{i(\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2)}\,dx = \frac{2\pi R}{|\alpha|} J_1(R|\alpha|) e^{i(\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2)},$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, $|\alpha|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Отсюда делаем вывод, что круг не является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^2$, поскольку всякий раз, когда $R|\alpha|$ — нуль функции Бесселя J_1, получаем, что существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая (1) $\forall\lambda \in \mathbf{M}(n)$.

Для многих конкретных случаев известен ряд результатов, с помощью которых можно определить, имеет ли множество A свойство Помпейю или нет [6–9]. Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [10]:

Пусть A — открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если $\overline{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно–аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Этот результат, в частности, показывает, что многие множества A с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. В случае множества A с вещественно–аналитической границей ситуация сложнее. Примерами множеств $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ для любого $n \geqslant 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [11].

Относительно недавно были получены примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева [12]. Одним из таких множеств является «снежинка Кох».

В случае, когда некоторое множество не обладает свойством Помпейю, наличие ненулевой функции с условием (1) дает возможность получить нетривальные оценки плотности укладки произвольного компакта в $\mathbb{R}^n$ множествами вида λA, $\lambda \in \mathbf{M}(n)$. Такие оценки получил Б. Д. Котляр [13]. Если же A имеет свойство Помпейю, то в силу теоремы Винера возможна аппроксимация в $L_1(\mathbb{R}^n)$ линейными комбинациями индикаторов множеств вида λA, $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ [14].

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, \mathbf{M}(n), dx)$ тройкой $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$, где X — многообразие, $\mathcal{Z}$ — группа Ли, действующая транзитивно на X, $d\mu$ — инвариантная относительно $\mathcal{Z}$ мера на X. Одним из наиболее интересных примеров является случай, когда X — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathcal{Z}$ — группа конформных автоморфизмов X [15, 16].

Другие обобщения проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Упоминая о методике решения указанных задач, следует отметить, что наиболее сильные результаты из цитированных выше работ получены с помощью аппарата преобразования Фурье и других элементов гармонического анализа. Несмотря на достигнутые успехи, в ряде случаев такой подход является либо неприменимым, либо недостаточно тонким (например, при изучении локальных вариантов проблемы Помпейю). Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R$ и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ таких, что $\lambda A \subset \mathbb{B}_R$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ п.в. в $\mathbb{B}_R$, будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре $\mathbb{B}_R$ и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого по сравнению с размерами R выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$ [17–19].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf\bigl\{R > 0\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)\bigr\},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

В [19] поставлена следующая

Проблема 1. *Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.*

Если точное значение $\mathcal{R}(A)$ найти не удаётся, то возникает

Проблема 2. *Для данного компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ получить оценки величины $\mathcal{R}(A)$, уточняющие известные ранее.*

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренстейном и Р. Гэем [17, 18], а также В. В. Волчковым ([19], Глава 4, §1–2). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [19–24].

Рассмотрим некоторые примеры множеств A, для которых известно точное значение $\mathcal{R}(A)$.

1. Пусть A — правильный треугольник со стороной a. Тогда $\mathcal{R}(A) = a\sqrt{3}/2$ ([25], В. В. Волчков, 1996).

2. Пусть A — правильный m-угольник со стороной длины l. Тогда

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} l\,\mathrm{ctg}(\pi/2m)/2, & \text{если } m \text{ — нечетно;} \\ l\sqrt{1+4\mathrm{ctg}^2(\pi/m)}/2 & \text{если } m \text{ — четно} \end{cases}$$

([19], В. В. Волчков, 2000–2003).

3. Пусть A — треугольник Рело ширины 1 в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathcal{R}(A) = 1$ ([26], П. А. Машаров, 2001).

4. Пусть A — куб в $\mathbb{R}^n$ с ребром длины 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{n+3}/2$ ([27], В. В. Волчков, 1996).

5. Пусть A — полушар в $\mathbb{R}^n$ радиуса 1. Тогда $\mathcal{R}(A) = \sqrt{5}/2$ ([19], В. В. Волчков, 1996).

6. Пусть $A(h)$ — сегмент шара единичного радиуса высоты h в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{R}(A(h)) = \begin{cases} \sqrt{8h-3h^2}\,/2, & 1 < h \leqslant 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2 \end{cases}$$

([28], П. А. Машаров, 2011).

7. Пусть $A(h)$ — невыпуклый четырёхугольник с вершинами в точках $(0;0)$, $(\sqrt{3}/2;-1/2)$, $(\sqrt{3}/2-h;0)$, $(\sqrt{3}/2;1/2)$. Тогда для каждого $h \in (0;\sqrt{3}/2)$ имеет место равенство $\mathcal{R}(A(h)) = R(h) \overset{\text{опр}}{=} \begin{cases} \sqrt{3}/2-h, & \text{если } h \in (0;\sqrt{3}/6); \\ \sqrt{h^2+1/4}, & \text{если } h \in [\sqrt{3}/6,\sqrt{3}/2) \end{cases}$

([29], Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров, 2014).

Известны также значения величины $\mathcal{R}(A)$ для случаев, когда A — круговой сектор ([30], П. А. Машаров, 2000), параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ ([27], В. В. Волчков, 1998–2000), эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ ([19], В. В. Волчков, 2001), половина кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ ([31], Л. В. Елец, П. А. Машаров, 2009), другие множества.

Рассмотрим $K_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| < a, |y| < a\}$, $K_{a,b} = \overline{K_b \setminus K_a}$. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого* $a \in (1/2;1)$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{R}\big(K_{a,1}\big) = \sqrt{a^2+2a+2}. \tag{2}$$

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее будем рассматривать действительное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$ будем обозначать маленькими латинскими буквами (x, y, z, t), а их координаты — соответствующими буквами с нижними индексами ($x_1, \ldots, x_n$). Если будет рассматриваться пространство $\mathbb{R}^2$, то его элементы будем обозначать прописными латинскими или строчными греческими буквами (A_1, B_2, ζ) или парами вида (x,y), где x, y — координаты точки. В некоторых случаях точки $(x;y)$ пространства $\mathbb{R}^2$ отождествляются с комплексными числами $\zeta = x+iy = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = |\zeta|$, $\varphi = \arg\zeta$.

Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$.

Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B функций, то есть таких функций $f\colon B \to \mathbb{C}$, для которых интеграл по любому компактному подмножеству из B конечен. Здесь и далее под dx понимается мера Лебега. Если $p \in [1,+\infty)$, обозначение $L_p(B)$ будем использовать для функций, для которых $\|f\|_{L_p(B)} = \left(\int_B |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < +\infty$. Для $m \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^m(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка m которых (включая смешанные) непрерывны, $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{m=1}^{\infty} C^m(B)$.

Далее, под $\mathfrak{P}(A,B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A},B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^m(A,B) = \mathfrak{P}(A,B) \cap C^m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A,B) = \mathfrak{P}(A,B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{P}^\infty_0(A,B)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{P}^\infty(A,B)$. Частные производные по переменным x, y будем обозначать $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$. Символ Δ обозначает оператор Лапласа, для функций двух переменных: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Заметим, что из линейности пространств гладких и интегрируемых функций следует линейность пространств $\mathfrak{P}^m(A,B)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Для произвольного непустого $B \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^n$ положим $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x-y\| < \varepsilon, y \in B\}$, $B + t = \{x + t \in \mathbb{R}^n\colon x \in B\}$.

Лемма 1. *Пусть A — компакт, B — область в $\mathbb{R}^n$, числа $m \in \{0,1,2,\dots\}$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы, функция $\varphi_\varepsilon \in C^m(B_\varepsilon)$ имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon$, а функция $f \in \mathfrak{P}(A,B_\varepsilon)$. Тогда свёртка $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^m(A,B)$.*

Доказательство. По определению свертки, имеем $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$. При этом функция $\psi(x)$ определена корректно в области B. Так как $\varphi_\varepsilon \in C^m(B)$, то для любого набора $\{j_1,\dots j_n\}$, $j_k \in \{0,1,\dots,m\}$, $j_1 + \dots + j_n \leqslant m$ существует

$$\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}\psi(x)}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n}\varphi(x-y)}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}\,dy.$$

Таким образом, $\psi \in C^m(B)$. Осталось доказать, что эта функция имеет нулевые интегралы по всем множествам $\lambda A \subset B$.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$ и рассмотрим

$$I = \int_{\lambda A} \psi(x)\,dx = \int_{\lambda A} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy.$$

Сделав замену $t = x - y$, имеем $I = \int_{\lambda A} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt\int_{\lambda A} f(x-t)\,dx$. После замены $z = x - t$, $I = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt\int_{\lambda A - t} f(z)\,dz$. Так как $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon$, то во внешнем интеграле интегрирование на самом деле ведется по $\mathbb{B}_\varepsilon$, то есть $t \in \mathbb{B}_\varepsilon$. Отсюда следует, что $\lambda A - t \subset B$, и, значит, внутренний интеграл по условию леммы равен нулю. Следовательно, и весь интеграл равен нулю, что завершает доказательство леммы. □

Лемма 2. *Пусть A — компакт в $\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{d}$ — один из следующих дифференциальных операторов: $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, для некоторого открытого множества B, для которого* $\mathrm{Mot}(A,B)\neq\varnothing$, *выполнено $f\in\mathfrak{P}^\infty(A,B)$. Тогда $\mathfrak{d}f\in\mathfrak{P}^\infty(A,B)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что если $m\in\mathbb{N}$, то в условиях леммы из $f\in\mathfrak{P}^m(A,B)$ следует $\mathfrak{d}f\in\mathfrak{P}^{m-1}(A,B)$.

Уменьшение гладкости функции $\mathfrak{d}f$ по сравнению с f на единицу связано с тем, что $\mathfrak{d}$ является дифференциальным оператором первого порядка. Докажем теперь, что если функция f имеет нулевые интегралы, то и $\mathfrak{d}f$ также имеет нулевые интегралы по соответствующим множествам.

Так как $\mathrm{Mot}(A,B)\neq\varnothing$ и $f\in\mathfrak{P}^m(A,B)$, то найдется $\lambda\in\mathrm{Mot}(A,B)$, для которого верно (1). Тогда для $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ с достаточно малой нормой множество $\lambda A+\zeta\subset B$. Поэтому имеет место равенство

$$0=\int_{\lambda A+\zeta}f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\lambda A}f(x+\xi,y+\eta)\,dx\,dy.$$

Дифференцируя его по ξ, η, получаем $\int_{\lambda A}f_1'(x+\xi,y+\eta)\,dx\,dy=0$, $\int_{\lambda A}f_2'(x+\xi,y+\eta)\,dx\,dy=0$, где f_1',f_2' обозначают производные по первой и второй переменным соответственно, то есть $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$. Полагая в этих равенствах $\xi=\eta=0$, получаем $\partial f/\partial x,\partial f/\partial y\in\mathfrak{P}^{m-1}(A,B)$.

Учитывая определение класса $\mathfrak{P}^\infty(A,B)$, получаем утверждение леммы. □

Для произвольного непустого компакта или ограниченной области A из $\mathbb{R}^n$ через $r^*(A)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого круга, содержащего $\overline{A}$. То есть $r^*(A)=\inf\{R>0\colon\exists\lambda\in\mathrm{Mot}(\overline{A},\mathbb{B}_R)\}$. Отметим, что из определений $r^*(A)$ и $\mathrm{Mot}(A,B)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\mathrm{Mot}(A,\mathbb{B}_R)\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда $R>r^*(A)$, а для открытого ограниченного множества — когда $R\geqslant r^*(A)$.

Отметим, что значения $r^*(K_{a,1})$ для рассматриваемого множества равно радиусу описанной окружности, $r^*(K_{a,1})=\sqrt{2}$. Отсюда следует тривиальная оценка снизу радиуса Помпейю: $\mathcal{R}(K_{a,1})\geqslant\sqrt{2}$.

Будем говорить, что некоторое множество $B\subset\mathbb{R}^2$ обладает круговой симметрией, если для любой точки $\zeta\in B$ и для любого вращения τ точка $\tau\zeta\in B$.

Лемма 3. *Пусть A — компакт в $\mathbb{R}^2$, область $B\subset\mathbb{R}^2$ обладает круговой симметрией, число $m\in\mathbb{N}\cup\{0,+\infty\}$ фиксировано, функция $f\in\mathfrak{P}^m(A,B)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Комплексное сопряжение от функции $\overline{f}\in\mathfrak{P}^m(A,B)$.*
2. *Каждое слагаемое ряда Фурье $f(\rho e^{i\varphi})\sim\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}f_k(\rho)e^{ik\varphi}$ (а в случае когда $0\in B$, то и доопределенное в точке $\zeta=0$ по непрерывности), принадлежит $\mathfrak{P}^m(A,B)$.*
3. *Для любого $k\in\mathbb{Z}$, $m>1$ функции $\left(f_k'(\rho)\pm(k/\rho)f_k(\rho)\right)e^{i(k\mp1)\varphi}$ (а в случае когда $0\in B$, то и доопределенные в точке $\zeta=0$ по непрерывности), принадлежат $\mathfrak{P}^{m-1}(A,B)$.*

Доказательство. Пусть $u=\mathrm{Re}\,f$, $v=\mathrm{Im}\,f$. Тогда, записывая равенство (1) для функции $f=u+iv$ и выделяя отдельно действительную и мнимую части, получаем аналогичные равенства для функций u и v. Отсюда $u,v\in\mathfrak{P}^m(A,B)$, а тогда и $\overline{f}=u-iv\in\mathfrak{P}^m(A,B)$.

Гладкость функции $f_k(\rho)e^{ik\varphi}$, доопределенной в точке $\zeta=0$ по непрерывности, следует из формулы для слагаемого ряда Фурье, то есть из равенства

$f_k(\rho)e^{ik\varphi} = (e^{ik\varphi}/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it})e^{-ikt}dt$ и соответствующей гладкости f в B. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$ и докажем, что равенство (1) верно для произвольного слагаемого ряда Фурье функции f. Учитывая $f \in \mathfrak{P}^m(A,B)$, имеем $\int_{\lambda A} f(\zeta)dxdy = 0$. Возьмем произвольное $t \in (-\pi,\pi]$. Тогда из $\lambda A \subset B$ по определению круговой симметрии следует, что и $\lambda A \cdot e^{it} \subset B$. Отсюда $0 = \int_{\lambda A \cdot e^{it}} f(\zeta)dxdy = \int_{\lambda A} f(\zeta e^{it})dxdy$. Учитывая, что $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, получаем $0 = \int_{\lambda A} f(\rho e^{i(t+\varphi)})dxdy$. Умножим полученное равенство на $e^{-ikt} \neq 0$ и проинтегрируем по t от $-\pi$ до π. Выполняя далее замену $s = t+\varphi$, получаем $0 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\lambda A} f(\rho e^{i(t+\varphi)})e^{-ikt}dxdy\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\lambda A} f(\rho e^{is})e^{-iks}e^{ik\varphi}dxdy\right)ds$. Изменив порядок интегрирования и сворачивая внутренний интеграл в коэффициент Фурье, приходим к $0 = \int_{\lambda A}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{is})e^{-iks}ds\right)e^{ik\varphi}dxdy = 2\pi\int_{\lambda A} f_k(\rho)e^{ik\varphi}dxdy$, что и требовалось доказать.

Докажем третье утверждение леммы. По лемме 1 и утверждению 2 настоящей леммы, частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right)$ принадлежат $\mathfrak{P}^{m-1}(A,B)$. Вычислим эти производные. Учитывая $\partial\rho/\partial x = x/\rho$, $\partial\rho/\partial y = y/\rho$, $\partial\varphi/\partial x = -y/\rho^2$, $\partial\varphi/\partial y = x/\rho^2$, получаем $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right) = f_k'(\rho)e^{ik\varphi}x/\rho - f_k(\rho)e^{ik\varphi}yik/\rho^2$,
$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right) = f_k'(\rho)e^{ik\varphi}y/\rho + f_k(\rho)e^{ik\varphi}xik/\rho^2$.

Обозначим $g_1 = (f_k'(\rho) + (k/\rho)f_k(\rho))\cdot e^{i(k-1)\varphi}/2$, $g_2 = (f_k'(\rho) - (k/\rho)f_k(\rho))\cdot e^{i(k+1)\varphi}/2$ и вычислим сумму и разность этих функций. Сумма $g_1+g_2 = f_k'(\rho)e^{ik\varphi}(e^{-i\varphi}+e^{i\varphi})/2+$ $+(k/\rho)f_k(\rho)e^{ik\varphi}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})/2$. Учитывая, что $(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})/2 = (\overline{\zeta} + \zeta)/(2\rho) = x/\rho$, $(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})/2 = (\overline{\zeta} - \zeta)/(2\rho) = -yi/\rho$, получаем $g_1 + g_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right)$. Разность $g_1 - g_2 = f_k'(\rho)e^{ik\varphi}(e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})/2 + kf_k(\rho)e^{ik\varphi}(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})/(2\rho) = -yif_k'(\rho)e^{ik\varphi}/\rho+$ $+kxf_k(\rho)e^{ik\varphi}/\rho^2 = -i\dfrac{\partial}{\partial y}\left(f_k(\rho)e^{ik\varphi}\right)$. Было получено, что $g_1+g_2, g_1-g_2 \in \mathfrak{P}^{m-1}(A,B)$. Складывая и вычитая эти выражения, получаем соответственно $g_1, g_2 \in \mathfrak{P}^{m-1}(A,B)$, что и требовалось доказать. ☐

Обозначим вершины квадратов K_a и K_1 соответственно буквами: $\zeta_1(a;a)$, $\zeta_2(-a;a)$, $\zeta_3(-a;-a)$, $\zeta_4(a;-a)$, $\zeta_5(1;1)$, $\zeta_6(-1;1)$, $\zeta_7(-1;-1)$, $\zeta_8(1;-1)$.

Лемма 4. *Пусть для некоторых* $\varepsilon > 0$, $a < 1$ *функция* $f \in C^2(K_{1+\varepsilon})$. *Тогда имеют место равенства*

$$\int_{K_{a,1}} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\big(f(x;1) - f(x;-1)\big)\,dx - \int_{-a}^{a}\big(f(x;a) - f(x;-a)\big)\,dx, \qquad (3)$$

$$\int_{K_{a,1}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = f(\zeta_5) - f(\zeta_6) - f(\zeta_8) + f(\zeta_7) - f(\zeta_1) + f(\zeta_2) + f(\zeta_4) - f(\zeta_3). \qquad (4)$$

Доказательство. Для произвольного $a > 0$ рассмотрим $g = \partial f/\partial x \in C^1(K_{a+\varepsilon})$. Переходя к повторному интегралу, имеем $\int_{K_a}(\partial g/\partial y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a}(\partial g/\partial y)\,dy =$ $= \int_{-a}^{a}\big(g(x;a) - g(x;-a)\big)\,dx$. Учитывая определение множества $K_{a,1}$ и используя последнее равенство для $a = 1$, получаем (3).

Теперь из равенства $\int_{K_a} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left(\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(x,-a)}{\partial x}\right)dx = f(\zeta_1) -$ $-f(\zeta_2) - f(\zeta_4) + f(\zeta_3)$ получаем (4). ☐

Далее считаем фиксированными $a \in (1/2; 1)$ и достаточно маленькое $\varepsilon > 0$. Если не будет оговорено противное, то рассматриваем $R \in \left(\sqrt{a^2+2a+2}; \sqrt{a^2+2a+2}+\varepsilon\right)$. Положим $\mathcal{U}_*(a,R) = \{\lambda\zeta_1 \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)\}$, $\mathcal{U}^*(a,R) = \{\lambda\zeta_5 \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)\}$, $\mathcal{U}(a,R) = \{\zeta = \lambda\zeta_j \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R),\ j = \overline{1,8}\} = \mathcal{U}_*(a,R) \cup \mathcal{U}^*(a,R)$; отрезки, соединяющие точки ζ_j и ζ_k обозначим $l_{jk} = \{(1-t)\zeta_j + t\zeta_k \in \mathbb{R}^2 \colon t \in [0,1]\}$; $\mathbb{B}_{a,b} = \{\zeta \in \mathbb{R}^2 \colon a < |x| < b\}$ — кольцо с радиусами a и b.

Отметим, что из геометрических соображений следуют $\mathbb{B}_{a,a\sqrt{5}} \subset \mathcal{U}_*(a,R)$, $\mathbb{B}_{\sqrt{a^2-2a+2},R} \subset \mathcal{U}^*(a,R)$. А так как $(1/2; +\infty)$ входит в множество решений неравенства $a\sqrt{5} > \sqrt{a^2-2a+2}$, то кольцо $\mathbb{B}_{a,R} \subset \mathcal{U}(a,R)$.

Используя теорему 4.3.2 из [19] и равенство (2) леммы 1, получаем

Лемма 5. *Пусть* $R > \sqrt{2}$ *и* $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. *Тогда существует ненулевой многочлен* $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такой, что* $q(\Delta)f = 0$ *в* $\mathcal{U}(a,R)$.

Лемма 6. *Пусть* $R > \sqrt{a^2+2a+2}$ *и* $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. *Тогда существует ненулевой многочлен* $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *такой, что* $q(\Delta)f = 0$ *в* $\mathbb{B}_R$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен q из леммы 6, для которого выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathcal{U}(a,R)$ и функцию $F = q(\Delta)f$. По лемме 2, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. Из описанного выше частичного описания множества $\mathcal{U}(a,R)$ имеем $F = 0$ в $\mathbb{B}_{a,R}$. Применив лемму 4 для F и всевозможных $K_{a,1} + (0,h) \subset \mathbb{B}_R$, получаем

$$\int_{l_{65}+(0;h)} F\,ds - \int_{l_{78}+(0;h)} F\,ds - \int_{l_{21}+(0;h)} F\,ds + \int_{l_{34}+(0;h)} F\,ds = 0, \tag{5}$$

где ds — мера на отрезке.

Из геометрических соображений видно, что $h \in [0; a]$ удовлетворяют необходимому включению. Рассмотрев $h \in [0; 1-a]$ и учитывая, что во всех интегралах из (5) кроме последнего аргументы подинтегральных функций находятся в области их нулей, приходим к $\int_{l_{34}+(0;h)} F\,ds = 0$. Доопределив функцию F нулём вне $\mathbb{B}_R$ получаем, что преобразование Радона от этой функции по всем прямым, расстояние от которых до начала координат не менее $2a-1$ равно нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [19]) следует $F = 0$ в $\mathbb{B}_{2a-1,R}$. Рассмотрев следующий, и так далее, диапазоны h ширины не больше $1-a$, и делая соответствующие выводы, приходим к доказательству леммы. □

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{P}_0^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R) = \{0\}$ *для некоторого* $R > \sqrt{2}$. *Тогда имеет место неравенство* $\mathcal{R}(K_{a,1}) \leqslant R$.

Доказательство. Предположим, что $R < \mathcal{R}(K_{a,1})$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0; \mathcal{R}(K_{a,1}) - R)$ существует ненулевая функция $f_1 \in \mathfrak{P}(K_{a,1}, \mathbb{B}_{R+\varepsilon})$. Тогда существует ненулевая функция $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{B}_{R+\varepsilon})$ с носителем $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon$, для которой $g = f_1 * \varphi_\varepsilon$ не равна тождественно нулю, и по лемме 1 $g \in \mathfrak{P}^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. Рассмотрим ненулевое слагаемое $g_k(\rho)e^{ik\varphi}$ ряда Фурье функции g с наименьшим положительным k, которое по лемме 3 существует исходя из п. 1, а из п. 2 тоже принадлежит этому классу. Применяя п. 3 леммы 3 последовательно k раз, приходим к $g_1'(\rho) + g_1(\rho)/\rho = g_0(\rho)$, которое по условию равно нулю. Решая дифференциальное уравнение, получаем $g_1(\rho) = C/\rho$. Из $g_1 \in C^\infty(\mathbb{B}_R)$ находим $C = 0$ и $g_1 = 0$. Решая далее $g_2'(\rho) + 2g_2(\rho)/\rho = 0$, приходим к $g_2(\rho) = C/\rho^2$ и, аналогично, $g_2 = 0$. Продолжая процесс, получим $g_k(\rho) = 0$, что противоречит предположению. □

Лемма 8. *Пусть $R > \sqrt{2}$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.*

Доказательство. Пусть разложение на линейные множители многочлена $q(b)$ имеет вид $q(b) = b_0(b - b_1) \cdot \ldots \cdot (b - b_m)$. Рассмотрим $g = (\Delta - b_2) \cdot \ldots \cdot (\Delta - b_m)f$, $g \in \mathfrak{P}^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. Для неё имеем дифференциальное уравнение $(\Delta - b_1)g = 0$ в $\mathbb{B}_R$, общим решением которого при $b_1 \neq 0$ является $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho) + C_2 N_0(\sqrt{b_1}\rho)$, при $b_1 = 0$ $g(\rho) = C_3 + C_4 \ln \rho$, где J_0, N_0 — функции Бесселя и Неймана соответственно. Учитывая, что $N_0(\sqrt{b_1}\rho)$ и $\ln|\rho|$ имеют особенности в нуле, а $g(\rho)$ непрерывна, то $C_2 = C_4 = 0$. Значит $g(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{b_1}\rho)$ или $g(\rho) = C_3$ в $\mathbb{B}_R$. Продолжая её в $\mathbb{R}^2$ этими же функциями, получаем, что вещественно-аналитическая $g \in \mathfrak{P}_0^\infty(K_{a,1}, \mathbb{R}^2)$. А так как $K_{a,1}$ является множеством Помпейю в $\mathbb{R}^2$, то $g = 0$. Рассуждая аналогично для $(\Delta - b_3) \cdot \ldots \cdot (\Delta - b_m)f, \ldots, f$, приходим к утверждению леммы. □

Построение решения задачи.

Доказательство теоремы 1. Считаем $a \in (1/2; 1)$ фиксированным. Рассмотрим сначала $R < \sqrt{a^2 + 2a + 2}$. Тогда $\varepsilon = a + 1 - \sqrt{R^2 - 1} > 0$. В этом случае $\mathbb{B}_\varepsilon \cap \{\lambda\zeta \colon \zeta \in K_{a,1},\ \lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)\} = \varnothing$, поэтому произвольная ненулевая функция φ_ε с носителем $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \mathbb{B}_\varepsilon$ и нулевым интегралом по $\mathbb{B}_\varepsilon$ принадлежит $\mathfrak{P}\big(K_{a,1}, \mathbb{B}_R\big)$, что доказывает оценку снизу $\mathcal{R}(K_{a,1}) \geqslant \sqrt{a^2 + 2a + 2}$.

Рассмотрим теперь произвольное $R > \sqrt{a^2 + 2a + 2}$. Учитывая лемму 7, видим, что осталось доказать равенство $\mathfrak{P}_0^\infty\big(K_{a,1}, \mathbb{B}_R\big) = \{0\}$.

Рассмотрим произвольную $f \in \mathfrak{P}_0^\infty\big(K_{a,1}, \mathbb{B}_R\big)$. По лемме 6 существует ненулевой многочлен $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Отсюда по лемме 8 $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$, что завершает доказательство теоремы 1. □

Применения Решение локального варианта проблемы Помпейю имеет применения в различных областях математики. Рассмотрим некоторые из них.

I. Теория приближений.

Теорема 2. *Для фиксированных $a \in (1/2; 1)$, $p\colon 1 \leqslant p < \infty$, $R > \sqrt{a^2 + 2a + 2}$ любую функцию $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$ можно аппроксимировать с любой точностью в $L_p(\mathbb{B}_R)$ линейными комбинациями индикаторов множеств $\lambda K_{a,1}$, $\lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$.*

Доказательство. Пусть существует функция $f \in L_p(\mathbb{B}_R)$, которую нельзя аппроксимировать с произвольной точностью линейными комбинациями индикаторов множеств $\lambda K_{a,1}$, $\lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. Тогда эта функция ортогональна всем таким индикаторам. То есть для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$ верно равенство

$$\int_{\mathbb{B}_R} f(x, y) \cdot \chi_{\lambda K_{a,1}}(x, y)\, dx\, dy = \int_{\lambda K_{a,1}} f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Отсюда, применяя теорему 1, получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$, а такую функцию можно приблизить линейными комбинациями каких угодно функций, то есть предположение не верно, что доказывает теорему. □

II. Комплексный анализ.

Следующий результат является теоремой типа Мореры.

Теорема 3. *Пусть $f \in C(\mathbb{B}_R)$ и выполнено условие*

$$\int_{\partial(\lambda K_{a,1})} f(z)\, dz = 0 \ \text{при всех}\ \lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R). \tag{6}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) если $R > \sqrt{a^2+2a+2}$, то f голоморфна в $\mathbb{B}_R$;

2) если $\sqrt{2} < R < \sqrt{a^2+2a+2}$, то существуют неголоморфные, бесконечно дифференцируемые функции в $\mathbb{B}_R$ с условием (6).

Доказательство. Используя стандартный метод сглаживания, достаточно доказать аналитичность функции $f \in \mathfrak{P}^\infty(\partial K_{a,1}, \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$ для каждого $\varepsilon \in (0; R - \sqrt{a^2+2a+2})$. Применяя формулу Грина, получаем

$$\int_{\partial(\lambda K_{a,1})} f(z)\,dz = 2i \int_{\lambda K_{a,1}} \frac{df}{d\overline{z}}\,dx\,dy = 0 \qquad \forall \lambda \in \operatorname{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_{R-\varepsilon}).$$

Это означает, что $df/d\overline{z} \in \mathfrak{P}^\infty(K_{a,1}, \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, что по теореме 1 означает $\partial f/\partial\overline{z} = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, а значит и в $\mathbb{B}_R$. Тогда из условий Коши–Римана получаем первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения, в качестве примера неголоморфной функции из класса $\mathfrak{P}^\infty(\partial K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$ можно взять любую ненулевую бесконечно дифференцируемую функцию с носителем в $\mathbb{B}_\varepsilon$, где $\varepsilon \in (0; \sqrt{a^2+2a+2} - R)$. ☐

Получим теперь одно из уточнений теоремы Дзядыка.

Теорема 4. *Пусть $a \in (1/2; 1)$ фиксировано, $R > \sqrt{a^2+2a+2}$, действительнозначные функции $u, v \in C(\mathbb{B}_R)$. Тогда для того, чтобы одна из функций $u+iv$ или $u-iv$ была голоморфной в $\mathbb{B}_R$ необходимо и достаточно чтобы части поверхностей графиков функций u, v и $\sqrt{u^2+v^2}$, расположенные над каждым множеством $\lambda K_{a,1}$, где $\lambda \in \operatorname{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$, имели одинаковую площадь.*

Доказательство. Необходимость сразу следует из классической теоремы Дзядыка. Действительно, если площади равны над произвольным множеством K, то и над множествами вида $\lambda K_{a,1}$ при $\lambda \in \operatorname{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим функции

$$f_1(x,y) = \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$f_2(x,y) = \left(1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$f_3(x,y) = \left(1 + \left(\frac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\sqrt{u^2+v^2})}{\partial y}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Тогда для любого $\lambda \in \operatorname{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$ из условия теоремы следует

$$\int_{\lambda K_{a,1}} f_1(x,y)\,dx,\,dy = \int_{\lambda K_{a,1}} f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_{\lambda K_{a,1}} f_3(x,y)\,dx\,dy$$

или $\int_{\lambda K_{a,1}} (f_j(x,y) - f_k(x,y))\,dx\,dy = 0$. Отсюда по теореме 1 получаем $f_j - f_k = 0$ в $\mathbb{B}_R$. Значит, для любого подмножества $K \subset \mathbb{B}_R$ верно равенство $\int_K f_1(x,y)\,dx\,dy = \int_K f_2(x,y)\,dx\,dy = \int_K f_3(x,y)\,dx\,dy$. Следовательно, выполняется условие классической теоремы Дзядыка, что влечет за собой утверждение теоремы. ☐

III. Теория отображений, сохраняющих меру.

Здесь под $\operatorname{meas} E$ понимается мера Лебега множества E.

Теорема 5. *Пусть* $a \in (1/2;1)$ *фиксировано,* $R > \sqrt{a^2+2a+2}$ *и* f *—* C^1*-диффеоморфизм* $\mathbb{B}_R$ *на область* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*. Тогда если* $\forall\lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$ *верно равенство* $\operatorname{meas} f\big(\lambda K_{a,1}\big) = \operatorname{meas} \lambda K_{a,1}$*, то* $\operatorname{meas} f(E) = \operatorname{meas} E$ *для любого измеримого множества* $E \subset \mathbb{B}_R$*.*

Доказательство. Пусть J_f — якобиан отображения f. По условию имеем $\int_{\lambda K_{a,1}} dx\,dy = \int_{f(\lambda K_{a,1})} dx\,dy = \int_{\lambda K_{a,1}} |J_f|\,dx\,dy$ для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. Отсюда получаем, что $\int_{\lambda K_{a,1}} \big(|J_f| - 1\big)\,dx = 0$ $\forall\lambda \in \mathrm{Mot}(K_{a,1}, \mathbb{B}_R)$. По теореме 1, $|J_f| = 1$ в $\mathbb{B}_R$, откуда $\int_E dx\,dy = \int_E |J_f|\,dx\,dy = \int_{f(E)} dx\,dy$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$, что и требовалось. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pompeiu D. Sur certains systems d'equation lineaires et sur une propriete integrale de fonctions de plusieurs variables / D. Pompeiu // C. R. Accd. Sci. Paris. – 1929. – Vol. 188. – P. 1138–1139.
2. Pompeiu D. Sur une propriete de fonctions continues depended de deux variables realles / D. Pompeiu // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1929. – Vol. 15, № 5. – P. 265–269.
3. Nicolesco M. Sur un theoreme de Pompeiu / M. Nicolesco // Bull. Sci. Accd. Royale Belgique. – 1930. – V. 16, № 5. – P. 817–822.
4. Ilieff L. Sur un probleme de Pompeiu / L. Ilieff // Ann. Univ. Sofia Fac. Phys., Livre 1. – 1949. – Vol. 45. – P. 111–114.
5. Christov C. Sur laquation integrale generalisee de Pompeiu / C. Christov // Ann. Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1. – 1949. – Vol. 45. – P. 167–178.
6. Произволов В. В. Об интегралах, постоянных на конгруентных областях / В. В. Произволов // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21, №2. – С. 183–186.
7. Заставный В. П. Теорема о нулях преобразования Фурье индикатора и ее применение / В. П. Заставный // Новосибирск: Ред. «Сиб. мат. журн.». – 1986. – 18 с. Деп. в ВИНИТИ 29.10.87: № 701-в. 87.
8. Ebenfalt P. Some results on the Pompeiu problem / P. Ebenfalt // Ann. Acad. Sci. Ser. A. J. Math. – 1993. – Vol. 24. – P. 16–31.
9. Garofalo N. Asymptotic expansions for a class of Fourier integrals and applications to the Pompeiu problem / N. Garofalo, F. Segala // J. Anal. Math. – 1991. – Vol. 56. – P. 1–28.
10. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – Vol. 223. – P. 183-190.
11. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 352. – P. 2723-–2736.
12. Volchkov V. V. New result in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Israel Mathematical Conference Proceedings "Complex Analysis and Dynamical Systems II". – 2003. – Vol. 16. – P. 417–426.
13. Котляр Б. Д. Плотности укладок ограниченных множеств / Б. Д. Котляр // Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР. – 1987. – Т. 126, №3. – С. 469–472.
14. Sitaram A. On an analogue of the Wiener Tauberian theorem for symmetric spaces of the non-compact type / A. Sitaram // Pacific J. Math. – 1988. – Vol. 133. – P. 197–208.
15. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1,1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourirer (Grenoble). – 1992. – Vol. 42. – P. 671–694.
16. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – Vol. 19. – P. 1522–1525.
17. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – Vol. 52. – P. 133–166.
18. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – Vol. 55. – P. 267–288.
19. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
20. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185-194.

21. Zalcman L. Supplementary bibliography to 'A bibliographic survey of the Pompeiu problem'. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
22. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
23. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
24. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12, № 1. – С. 51–79.
25. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры / В. В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 6. – С. 804–809.
26. Машаров П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело / П. А. Машаров // Вісник дніпропетровського університету. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 72–81.
27. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю / В. В. Волчков // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 7. – С. 3–22.
28. Машаров П. А. Об экстремальном радиусе Помпейю для шаровых сегментов, содержащих полушар / П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 163–171.
29. Иванисенко Н. С. Локальный вариант проблемы Помпейю для невыпуклого четырехугольника / Н. С. Иванисенко, П. А. Машаров // Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2014. – Т. 28. – С. 76–83.
30. Машаров П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю / П. А. Машаров // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25–29.
31. Елец Л. В. Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю / Л. В. Елец, П. А. Машаров // Украинский математический журнал. – 2009. – Т. 61. – С. 61–72.

Поступила в редакцию 21.02.2016 г.

THE POMPEIU RADIUS FOR THE NOT ONECOHERENT SET

P. A. Masharov

The problem of finding the smallest radius of the circle in which the set is a Pompeiu set is considered. The Pompeiu radius for the not onecoherent set is a difference of two squares mutually parallel sides and a common center: with a side 2 and a side $2a$ for every $a \in (1/2; 1)$ is obtained.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals, the local Pompeiu problem, Pompeiu radius for the not onecoherent set.

Машаров Павел Анатольевич
кандидат физико-математических наук
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет", г. Донецк
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
pavelmasharov@gmail.com
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ
+38-050-5653907

Masharov Pavlo Anatoliyovych
Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Donetsk National University, Donetsk
Associate Professor at the Department of Mathematical analysis and differential equation

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Для публикации в журнале «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» принимаются не опубликованные ранее научные работы, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований по математике, механике, информатике, физике, химии и биологии. Статьи, представленные для публикации в других журналах, к рассмотрению не принимаются. Решение о публикации принимается редакционной коллегией журнала после рецензирования, учитывая научную значимость и актуальность представленных материалов. Если рецензия положительна, но содержит замечания и пожелания, редакция направляет статьи авторам на доработку вместе с замечаниями рецензента. Автор должен ответить рецензенту по всем пунктам рецензии. После такой доработки редколлегия принимает решение о публикации статьи. В случае отклонения статьи редакция направляет авторам рецензии или выдержки из них, либо аргументированное письмо редактора. Редколлегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных статей, за исключением случаев явного недоразумения. Рукописи авторам не возвращаются. Статья, задержанная на срок более трех месяцев или требующая повторной переработки, рассматривается как вновь поступившая. Обзорные статьи готовятся по заказу редколлегии или по инициативе авторов. В случае инициативы авторов они направляют в редакцию письмо-предложение вместе с аннотацией обзора и указанием ориентировочного объема и предполагаемого числа ссылок на литературу. Если заявка одобрена редколлегией, авторы готовят и присылают текст обзорной статьи.

2. Рукопись подается в одном экземпляре (на русском или английском языках), напечатанном с одной стороны листа бумаги формата А4 (экземпляр подписывается авторами). Объем рукописи, как правило, не должен превышать 10 страниц (для обзорной статьи — 25), включая рисунки, таблицы, список литературы. Вместе с рукописью подается CD-диск с полным текстом статьи и отдельными дополнительными электронными файлами указанными ниже (в формате WORD, Office 97-2010) или файлы представляются по электронной почте. Основной текст статьи — шрифт Times New Roman, размер 12 пт., с выравниванием по ширине; резюме, список литературы, таблицы, подрисуночные подписи — шрифт Times New Roman, размер 10 пт. Без автоматической расстановки переносов. Формулы, их компоненты и все переменные в тексте и отдельно в строках набираются только с помощью редактора формул Microsoft Equation 3.0 или MathType 5.0-6.0; текст и переменная — курсивом, матрица и вектор — полужирным курсивом; размер: 12 пт., 9 пт., 7 пт., 18 пт., 12 пт. (обычный, индекс, мелкий индекс, крупный символ мелкий символ — соответственно). Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 6 пунктов. Поля зеркальные: верхнее — 30 мм, нижнее — 30 мм, внутри — 30 мм, снаружи — 20 мм. Междустрочный интервал — одинарный. Абзацный отступ — 1 см.

3. Текст рукописи должен соответствовать следующей структурной схеме: индекс УДК в верхнем левом углу страницы; НАЗВАНИЕ статьи — полужирный, по центру (прописными буквами без переноса слов); копирайт, год, инициалы и фамилия авторов, полужирный, курсив, по левому краю аннотация объемом до 100 слов, должна кратко отражать предмет статьи, примененные методы исследований и основные результаты, полученные авторами, и заканчиваться ключевыми словами (до 10 слов, отделяются друг от друга точкой с запятой); введение (постановка проблемы в общем виде и связь с важнейшими научными и практическими задачами, анализ последних исследований и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и на которые опирается автор, выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящена статья, формулировка целей статьи); основная часть (где излагаются основные материалы исследования с полным обоснованием полученных научных результатов), как правило, содержит такие структурные элементы: постановка задачи, метод решения (методика эксперимента), анализ результатов; выводы по данному исследованию (кратко и четко подытоживаются основные результаты, полученные авторами и перспективы дальнейших изысканий в данном направлении); СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. Далее приводится название статьи, инициалы и фамилия авторов, аннотация, ключевые слова на английском языке (перевод). В конце статьи обязательно указываются следующие сведения об авторах: фамилия, имя, отчество всех авторов полностью (на русском и английском языке); ученая степень и звание (на русском и английском языке); полное название организации – место работы каждого автора в именительном падеже, страна, город (на русском и английском языке); адрес электронной почты каждого автора; корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов. Дополнительно размещаются название статьи (строчными буквами, первая — прописная) на русском и английском языках. Страницы рукописи должны быть последовательно пронумерованы. Все числовые значе-

ния физических величин выражаются в системе СИ. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой, а не точкой. Для текстового материала используется настоящее время (за исключением обращения к предыдущим статьям).

4. Рисунки и таблицы располагаются по тексту строго в пределах печатного поля книжной ориентации страниц после первого упоминания. Вся текстовая информация на рисунках должна быть четкой и разборчивой и не иметь лишних деталей (например, на графиках не допускаются «вторичные» отметки на координатных осях и т.п.). Необходимо следить за тем, чтобы после возможного уменьшения до размера 80 мм высота букв и цифр на рисунке оставалась не менее 2 мм. Каждый рисунок имеет подпись (не совмещенную с рисунком), а таблица — заглавие (выравнивание — по центру). Все рисунки и таблицы должны быть последовательно пронумерованы арабскими цифрами. Желательно прилагать иллюстративный материал в графическом формате JPG, TIFF, BMP и др. (графики — черно-белые, с разрешением 300 dpi; фотографии — в оттенках серого, 300 dpi) в виде отдельных файлов с названиями ris1, ris2, ... Сканированные рисунки не принимаются.

5. Формулы выравниваются по центру и имеют, в случае необходимости, сквозную нумерацию по правому краю. Нумеровать следует только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте.

6. Перечень литературных источников (СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ) приводится общим списком в конце рукописи в порядке ссылок в тексте (а не в алфавитном порядке) на языке оригинала в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание» и ГОСТ 7.05-2008 «Библиографическая ссылка». Ссылка на источник дается в квадратных скобках. Ссылки допускаются только на опубликованные работы. Необходимо включение в список как можно больше свежих первоисточников по исследуемому вопросу (не более чем трех-четырехлетней давности). Не следует ограничиваться цитированием работ, принадлежащих только одному коллективу авторов или исследовательской группе. Желательны ссылки на современные зарубежные публикации. Статьи, не содержащие ссылок на работы, которые вышли в течение последнего десятилетия, как правило, автоматически считаются такими, которые не соответствуют редакционным требованиям.

7. Статья сопровождается письмом-заявлением от организации, сведениями об авторах (фамилия, имя, отчество, ученая степень, ученое звание, место работы, должность, почтовый адрес, телефон, E-mail).

8. Рукописи, не соответствующие редакционным требованиям, и статьи, не соответствующие тематике журнала, к рассмотрению не принимаются.

9. Редакция оставляет за собой право проводить редакционную правку рукописей. В случае отказа в публикации статей редколлегия не возвращает автору рукопись статьи. Корректура статей авторам не высылается.

10. Плата с авторов за публикацию статей не взымается. Материалы представляются по адресу: 83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24.
Контактные тел.: (062) 302-92-93.
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru/vestnikA

Редактор: *Е. В. Алтухов*
Технический редактор: *М. В. Фоменко*
Компьютерная верстка: *П. А. Машаров*

Свидетельство о государственной регистрации № 362 от 18.01.2016

Адрес редакции:
ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет",
ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк
Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93
E-mail: vestnikdonnu_a@mail.ru
URL: http://donnu.ru/vestnikA

Подписано в печать 29.04.2016 г.
Формат 60 × 84/8. Бумага офсетная.
Печать — цифровая. Усл. печ. л. 11,5
Тираж 100 экз. Заказ № 16-Май88

ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности
в Государственный реестр
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.