

**Вісник
Донецького
національного
університету**

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

ЗАСНОВАНИЙ У 1997 РОЦІ

Серія А. Природничі науки

№ 1/2014

ЗМІСТ

Механіка

<i>Абрамова О. П., Абрамов С. В.</i> Фрактальні об'ємні структури у багатошаровій наносистемі	7
<i>Вуколов Д. С., Сторожев В. І.</i> Дифракційне розсіювання нормальних хвиль зсуву на тунельному циліндричному включенні в пружному шарі із закріпленими гранями	14
<i>Гачкевич О. Р., Ірза С. М., Козьярська А.</i> Варіант методики оптимізації технологічних теплових режимів в скляному виробництві	22
<i>Довбня К. М., Крупко Н. А.</i> Пружна рівновага ізотропної пологої оболонки довільної гаусової кривини з тріщинами та отвором	29
<i>Єлагін О. В., Моїсєєнко І. О.</i> Аналіз других гармонік нормальних хвиль крутіння у закріпленому трансверсально-ізотропному циліндрі: модель врахування геометричної нелінійності	35
<i>Зиза О.В.</i> Один випадок інтегрованості рівнянь Кірхгофа-Пуассона	43
<i>Калоєров С. О., Занько А. І.</i> Результати нових досліджень по вигину багатозв'язної анізотропної плити	48
<i>Калоєров С. О., Самодуров А. О.</i> Розв'язок задачі електромагнітопружності для кусково-однорідних пластин	57
<i>Кононов Ю. М., Дідок М. К., Джуха Ю. О.</i> Про розв'язання узагальненого неоднорідного бігармонічного рівняння в задачах гідропружності	64
<i>Кононов Ю. М., Кисельова Н. В., Мішура Д. В.</i> Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання твердого тіла	70
<i>Кривий О. Ф., Морозов Ю. О.</i> Розв'язок задачі теплопровідності для двох компланарних тріщин у составному трансверсально-ізотропного просторі	76
<i>Подчасов М. П., Янчевський І. В.</i> Нестационарні нелінійні коливання ортотропних композитних циліндричних оболонок з протікаючою рідиною при дії зовнішніх рухомих імпульсних навантажень	84
<i>Шацький І. П.</i> Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною	91
<i>Шевченко В. П., Удовиченко А. Ю.</i> Дослідження напружено-деформованого стану оболонок при локальних навантаженнях за уточненими теоріями	94

Інформатика

<i>Богомаз У. Г., Белік Т. В., Білоусов В. В.</i> Оптикоелектронні технічні системи захисту інформації. Часове ущільнення–розущільнення потоків даних	99
<i>Романчук С. М.</i> Алгоритми управління технологічних режимів водопостачання міст	103
<i>Сторожев С. В.</i> Нечітко-множинне узагальнення методик оцінки стратегій в умовах невизначеності	111

Фізика

Абрамов В. С. Перехідні процеси в модельній наносистемі з фрактальною квантовою точкою	116
Куліш В. В. Спінові хвилі у феромагнітній нанооболонці. Врахування ефектів дисипації у короткохвильовому наближенні	124
Легенький Ю. А., Піменов Ю. М., Тарасова О. О. Вплив градієнтного магнітного поля на швидкість цементаційного осадження мідних дендритів	129
Похил Л. С., Ткаченко В. С., Гусєва Ю. І. Спінхвильовий інтерферометр	136

Хімія

Батіг С. М., Мельниченко В. І. Кінетичні параметри (ко)полімеризації метилметакрилату з метакриловою кислотою в присутності розчинників різної полярності	140
Жильцова С. В. Епоксидно-силоксанові наноккомпозити ангідридного тверднення, одержані з використанням золь-гель методу	144
Ігнатов О. В., Саванкова Т. М., Дідоренко К. Г., Таликова Г. Ю., Гетьман Є. І., Пасічник Л. В. Ізоморфне заміщення в системі $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$	152
Климов В. В., Селікова Н. І., Штонда А. С., Бронніков А. Н. Дослідження модифікованої кераміки ЦТС з малими діелектричними втратами	157
Маслова В. Ю., Николаєвський А. М., Хижан О. І., Тихонова Г. А., Хижан О. І. Антиоксидантна активність хінолілгідразонів при окисненні органічних речовин	163
Пойманова О. Ю., Розанцев Г. М., Білоусова К. Є., Зайцева Н. Н. Залежність стану системи $Na_2WO_4-HCl-NaCl-DMSO(40об.%) - H_2O$ від часу витримування	166
Решетняк О. О., Івченко Н. В., Шевченко В. М., Нікітіна Н. О. Желатинова плівка з іммобілізованим еріохромціаніном R-твердофазний реагент для визначення алюмінію(III)	170
Стецик В. В. Принципи класифікації кислот та основ за силою	176

Біологія

Аревадзе І. Ю. Вплив деяких іонів металів на бактеріальну очистку техногенних стічних вод з використанням УФ-випромінювання	181
Герасимов І. Г. Аналіз асиметрії захворюваності людини	186
Правила для авторів	189

До відома авторів

Журнал у відкритому доступі розміщується на сайті журналу <http://jvestnik-a.donnu.edu.ua> та на сайті бібліотеки ім. В.І. Вернадського <http://nbuv.gov.ua/>.

Науковий журнал «Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки» включено до переліку наукових видань, в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт. Постанови президії ВАК України:

№ 1-05/8 від 22.12.2010 – *Механіка (фізико-математичні науки)*;

№ 1-05/5 від 01.07.2010 – *Хімічні науки*;

№ 1-05/2 від 23.02.2011 – *Біологічні науки*;

№ 1-05/4 від 22.04.2011 – *Інформаційні технології (технічні науки)*.

Реферативна інформація відображається:

- у загальнодержавній реферативній базі даних «Україніка наукова» та публікується у відповідних тематичних серіях УРЖ «Джерело» (вільний доступ к ресурсам на Web-сервері <http://www.nbuv.gov.ua/>);
- у відповідних тематичних серіях реферативних журналів і реферативній базі даних Всеросійського інституту наукової і технічної інформації (ВІНІТІ) Російської академії наук з розміщенням відомостей про журнал в міжнародній БД «Ulrich's Periodicals Directory».

СОДЕРЖАНИЕ

Механика

<i>Абрамова О. П., Абрамов С. В.</i> Фрактальные объемные структуры в многослойной наносистеме	7
<i>Вуколов Д. С., Сторожев В. И.</i> Дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига на туннельном цилиндрическом включении в упругом слое с закрепленными гранями	14
<i>Гачкевич А. Р., Ирза Е. М., Козьярска А.</i> Вариант методики оптимизации технологических тепловых режимов в стеклянном производстве	22
<i>Довбня Е. Н., Крупко Н. А.</i> Упругое равновесие изотропной пологой оболочки произвольной гауссовой кривизны с трещинами и отверстием	29
<i>Елагин А. В., Моисеенко И. А.</i> Анализ вторых гармоник нормальных волн кручения в закрепленном трансверсально-изотропном цилиндре: модель учета геометрической нелинейности	35
<i>Зыза А. В.</i> Новый случай интегрируемости уравнений Кирхгофа-Пуассона	43
<i>Калоеров С. А., Занько А. И.</i> Результаты новых исследований по изгибу многосвязной анизотропной плиты	48
<i>Калоеров С. А., Самодуров А. А.</i> Решение задачи электромагнитоупругости для многосвязных кусочно-однородных пластинок	57
<i>Кононов Ю. Н., Дидок Н. К., Джуха Ю. А.</i> О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости	64
<i>Кононов Ю. Н., Киселёва Н. В., Мишура Д. В.</i> Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения твердого тела	70
<i>Кривой А. Ф., Морозов Ю. А.</i> Решение задачи теплопроводности для двух компланарных трещин в составном трансверсально-изотропном пространстве	76
<i>Подчасов Н. П., Янчевский И. В.</i> Нестационарные нелинейные колебания ортотропных композитных цилиндрических оболочек с протекающей жидкостью при действии внешних подвижных импульсных нагрузений	84
<i>Шацкий И. П.</i> Задачи изгиба пластины с частично залеченной трещиной	91
<i>Шевченко В. П., Удовиченко А. Ю.</i> Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при локальных нагрузках по уточненным теориям	94

Информатика

<i>Богомаз У. Г., Белик Т. В., Белоусов В. В.</i> Оптоэлектронные технические системы защиты информации. Временное уплотнение–разуплотнение потоков данных	99
<i>Романчук С. М.</i> Алгоритмы управления технологическими режимами водоснабжения городов	103
<i>Сторожев С. В.</i> Нечетко-множественное обобщение методик оценки стратегий в условиях неопределенности	111

Физика

<i>Абрамов В. С.</i> Переходные процессы в модельной наносистеме с фрактальной квантовой точкой	116
<i>Кулиш В. В.</i> Спиновые волны в ферромагнитной нанооболочке. Учет эффектов диссипации в коротковолновом приближении	124
<i>Легенький Ю. А., Пименов Ю. Н., Тарасова О. О.</i> Влияние градиентного магнитного поля на скорость цементационного осаждения медных дендритов	129
<i>Похил Л. С., Ткаченко В. С., Гусева Ю. И.</i> Спинволновой интерферометр	136

Химия

<i>Батиц С. М., Мельниченко В. И.</i> Кинетические параметры сополимеризации метилметакрилата с метакриловой кислотой в присутствии растворителей различной полярности	140
<i>Жильцова С. В.</i> Эпоксидно-силоксановые нанокомпозиты ангидридного отверждения, полученные с использованием золь-гель метода	144
<i>Игнатов А. В., Саванкова Т. М., Дидоренко Е. Г., Талыкова А. Ю., Гетьман Е. И., Пасечник Л. В.</i> Изоморфное замещение в системе $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$	152
<i>Климов В. В., Селикова Н. И., Штонда А. С., Бронников А. Н.</i> Исследование модифицированной керамики ЦТС с малыми диэлектрическими потерями	157
<i>Маслова В. Ю., Николаевский А. Н., Хижан Е. И., Тихонова Г. А., Хижан А. И.</i> Антиоксидантная активность хинолилгидразонов при окислении органических веществ	163
<i>Пойманова Е. Ю., Розанцев Г. М., Белоусова Е. Е., Зайцева Н. Н.</i> Зависимость состояния системы $Na_2WO_4-HCl-NaCl-DMSO(40об.%) - H_2O$ от времени выдерживания	166
<i>Решетняк Е. А., Ивченко Н. В., Шевченко В. Н., Никитина Н. А.</i> Желатиновая пленка с иммобилизованным эриохромцианином R-твердофазный реагент для определения алюминия(III)	170
<i>Стецик В. В.</i> Принципы классификации кислот и оснований по силе	176

Биология

<i>Аревадзе И. Ю.</i> Влияние некоторых ионов металлов на бактериальную очистку техногенных сточных вод с использованием УФ-излучением	181
<i>Герасимов И. Г.</i> Анализ асимметрии заболеваемости человека	186
Правила для авторов	189

CONTENTS*Mechanics*

<i>Abramova O. P., Abramov S. V.</i> Fractal volumetric structures in a multilayer nanosystem	7
<i>Vukolov D. S., Storozhev V. I.</i> Scattering of normal shear waves at the tunnel cylindrical inclusion in an elastic layer with fixed faces	14
<i>Hachkevych O., Irza E., Kozyarska A.</i> Variant of optimization method of technological thermal modes in glass production	22
<i>Dovbnya E. N., Krupko N. A.</i> Elastic equilibrium of isotropic shallow shell for arbitrary Gaussian curvature with cracks and hole	29
<i>Yelagin A. V., Moiseyenko I. A.</i> Analysis of second harmonic normal waves of torsion in transversely isotropic cylinder with fixed lateral surface: model of geometric nonlinearity	35
<i>Zyza A. V.</i> The new case integrability of Kirchhoff-Poisson equations	43
<i>Kaloerov S. A., Zanko A. I.</i> Results of new research about multi-connected anisotropic plate bending	48
<i>Kaloerov S. A., Samodurov A. A.</i> Solution of problem of electromagnetoelasticity for piecewise-homogeneous plates	57
<i>Kononov Yu. M., Didok N. K., Dzhuha Yu. A.</i> About solution of generalized inhomogeneous biharmonic equation in problems of hydroelasticity	64
<i>Kononov Yu. N., Kiselyova N. V., Mishura D. V.</i> Influence of dissipative and constant torque to the stability of the uniform rotation of a rigid body	70
<i>Kryvyy O. F., Morozov Yu. O.</i> Decision of heat conduction problem for two coplanar cracks in composite transversely isotropic space	76
<i>Podchasov N. P., Yanchevsky I. V.</i> Non-stationary nonlinear vibration of orthotropic composite cylindrical shells with flowed liquid under external mobile pulse load	84
<i>Shatsky I. P.</i> Problems of bending of plate with partially healed crack	91
<i>Shevchenko V. P., Udovychenko A. Y.</i> Research of the stress-strain state of shells under local load using refined theories	94

Computer science

<i>Bogomaz U. G., Belik T. V., Belousov V. V.</i> Optoelectronic technical information protection system. Temporary seal-decompression data streams	99
<i>Romanchuk S. M.</i> Control algorithm of technological regimes city water supply	103
<i>Storozhev S. V.</i> Techniques of evaluate strategies under uncertainty using methods of fuzzy sets	111

Physics

<i>Abramov V. S.</i> Transient processes in a model nanosystem with fractal quantum dot	116
<i>Kulish V. V.</i> Spin waves in a ferromagnetic nanoshell. Consideration of the dissipation effects in the short-wave approximation	124
<i>Legenkiy Yu. A., Pimenov Yu. N., Tarasova O. O.</i> Effect of gradient magnetic field on the rate of cementational deposition of copper dendrites	129
<i>Pokhyl L. S., Tkachenko V. S., Gusieva Yu. I.</i> Nanowire interferometer	136

Chemistry

<i>Batig S. M., Melnichenko V. I.</i> Kinetic characteristics of the copolymerization of methyl methacrylate with methacrylic acid in presence of the solvents of different polarity	140
<i>Zhil'tsova S. V.</i> Anhydride cured epoxy-silica nanocomposites obtained via the sol-gel method	144
<i>Ignatov A. V., Savankova T. M., Didorenko E. G., Talykova A. Y., Getman E. I., Pasichnik L. V.</i> Isomorphic substitution in the system $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$	152
<i>Klimov V. V., Selikova N. I., Shtonda A. S., Bronnikov A. N.</i> Study of modified PZT ceramics with low dielectric loss	157
<i>Maslova V. Y., Nikolaevskiy A. N., Khyzhan E. I., Tikhonova G. A., Khyzhan A. I.</i> Antioxidant activity of quinolilhydrazones in the oxidation of organic matters	163
<i>Poymanova E. Yu., Rozantsev G. M., Belousova E. E., Zaitseva N. N.</i> Dependence of the state of the system $Na_2WO_4-HCl-NaCl-DMSO(40\text{o}6\%) - H_2O$ during aging	166
<i>Reshetnyak E. A., Ivchenko N. V., Shevchenko V. N., Nikitina N. A.</i> Gelatin film with immobilized eriochrome cyanine R–solid-phase reagent for the determination of aluminium(III)	170
<i>Stetsyk V. V.</i> Principles of classification of acids and bases according to their strength	176

Biology

<i>Arevadze I. Yu.</i> Effect of some metal ions on bacterial purification of human-made waste water using UV radiation	181
<i>Gerasimov I. G.</i> The analysis of asymmetries diseases of the human	186
Instructions for authors	189

УДК 539:519.517.3

О. П. Абрамова, С. В. Абрамов*

*ООО «HotSport», г. Донецк

ФРАКТАЛЬНЫЕ ОБЪЕМНЫЕ СТРУКТУРЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ НАНОСИСТЕМЕ

Для описания стохастических полей деформаций фрактальных объемных структур в многослойной наносистеме получены основные нелинейные уравнения. Особые точки (аттракторы) поля деформации этих структур расположены на фрактальных квазидвумерных поверхностях. При этом используется теория дробного исчисления и концепция фрактала. Учитывается взаимодействие узлов, как в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки, так и межплоскостные взаимодействия. С помощью пространственных поворотов (внешнее управление) можно выполнять перестройку состояний фрактальных объемных структур. Анализ в терминах усредненных функций дает возможность выявить особенности поведения и условия перехода от одной структуры к другой.

Ключевые слова: фрактальная объемная структура, стохастическое поле деформации, усредненные функции, перестройка структуры, многослойная наносистема.

Введение. Исследование фундаментальных свойств наносистем и наноматериалов нового поколения [1–5] является актуальным для современных областей развития нанотехнологий, структурной и нелинейной механики [6]. Активными наноструктурными элементами в реальных наноматериалах являются кластеры, поры, квантовые точки, ямы, двумерные квантовые билиарды (квантовые кораллы) [7]. Эти элементы могут найти свое применение в квантовой информатике, наномеханике, квантовой оптике; для квантовых компьютеров, устройств молекулярной спиновой памяти [4]. Теоретическое описание хаотических состояний в структурной механике, анализ нелинейных динамических моделей, аттракторов и хаотического моделирования обсуждается в книгах [6–9].

Фрактальная дислокация [10–15] является одним из неклассических структурных объектов в модельной наносистеме. Возможность возникновения и перестройки квазидвумерных структур типа фрактальных эллиптической и гиперболической дислокаций, фрактальной квантовой точки исследовалась в работе [11]. Исследование особенностей поведения поля деформации фрактальных квазидвумерных структур в модельной наносистеме и определение критических значений управляющих параметров выполнено в работе [12]. Исследование возможности управления перестройкой полей деформации фрактальных квазидвумерных структур, возникающих в модельных наносистемах выполнено в работах [13–17]. При этом учет межплоскостных взаимодействий в многослойной наносистеме может приводить к образованию объемных фрактальных структур. В [15] обсуждались возможности создания фрактальных наноловушек на основе квазидвумерных фрактальных структур и управления поведением связанных систем: фрактальная ловушка – фрактальная структура.

Целью данной работы является описание особенностей поведения полей деформации объемных фрактальных структур и структурной перестройки в многослойной модельной наносистеме.

Основные уравнения и классификация фрактальных объемных структур. Рассматривается модельная наносистема [11–14]: объемная дискретная решетка $N_1 \times N_2 \times N_3$, узлы которой задаются целыми числами n, m, j ($n = \overline{1, N_1}$; $m = \overline{1, N_2}$; $j = \overline{1, N_3}$). Безразмерное переменное смещение u узла решетки описывается по аналогии с [11–13], но с измененным значением функции Q

$$u = (1 - \alpha)(1 - 2\text{sn}^2(u - u_0, k)) / Q. \quad (1)$$

Здесь α – фрактальная размерность поля деформации u вдоль оси Oz ($\alpha \in [0, 1]$); u_0 – постоянное (критическое) смещение; k – модуль функции эллиптического синуса.

Измененное значение Q учитывает взаимодействие узлов, как в плоскости основной прямоугольной дискретной решетки, так и межплоскостные взаимодействия. Это позволяет выполнить стохастическое (за счет внутренних изменений параметров, процесса самоорганизации) управление перестройкой возникающих структур. Исходное выражение для Q имеет вид

$$Q = p'_0 + p'_1 n + p'_2 m + p'_3 j - b_1 \left(\frac{n' - n_0}{n_c} \right)^2 - b_2 \left(\frac{m' - m_0}{m_c} \right)^2 - b_3 \left(\frac{j' - j_0}{j_c} \right)^2. \quad (2)$$

В выражение (2) входят тринадцать параметров. Параметр p'_0 не зависит от переменных n, m, j ; параметры p'_1, p'_2, p'_3 входят в линейную форму; параметры $b_1, b_2, b_3, n_0, n_c, m_0, m_c, j_0, j_c$ определяют поведение квадратичной формы. При этом параметры n_c, m_c, j_c выполняют роль полуосей объемных фрактальных структур в новой системе координат $O'n'm'j'$. Исходная система координат $Onmj$ описывается в терминах переменных n, m, j . Выполнив операцию пространственного поворота осей координат вокруг оси Oj , переходим от системы координат $Onmj$ к системе координат $O'n'm'j'$ по формулам

$$\begin{aligned} n' &= n \cdot k'_1 \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1) - m \cdot \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1) + j \cdot k_1 \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1); \\ m' &= n \cdot k'_1 \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1) + m \cdot \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1) + j \cdot k_1 \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1); \\ j' &= -n \cdot k_1 + j \cdot k'_1; \quad k_1 = \sin \theta_1; \quad k'_1 = \cos \theta_1; \quad k_1^2 + k'^2_1 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь безразмерное смещение $u_{1\beta}$ связано с полярным углом $\varphi_{1\beta}$ в плоскости Onm соотношением $u_{1\beta} = F(\varphi_{1\beta}, k_1)$, F – неполный эллиптический интеграл первого рода, k_1 – модуль эллиптических функций синуса (sn) и косинуса (cn), θ_1 – некоторый эффективный угол. Безразмерное смещение $u_{1\beta}$ является нелинейной функцией двух параметров $\varphi_{1\beta}$ и k_1 , которые определяют различные механизмы перестройки фрактальной объемной структуры и управления ею. Отметим, что из выражений (3) при $k_1 = 0$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} k'_1 &= 1; \quad \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1) = \sin \varphi_{1\beta}; \quad \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1) = \cos \varphi_{1\beta}; \\ n' &= n \cdot \cos \varphi_{1\beta} - m \cdot \sin \varphi_{1\beta}; \quad m' = n \cdot \sin \varphi_{1\beta} + m \cdot \cos \varphi_{1\beta}; \quad j' = j. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения (4) ранее использовались в работе [13] для описания влияния поворота в плоскости Onm на состояние поля деформации фрактальных квазидвумерных структур. В отличие от (4) выражения (3) учитывают пространственный поворот объемной структуры. Для другого предельного варианта при $k_1 = 1$ из (3) следуют соотношения

$$\begin{aligned} k'_1 &= 0; \quad \operatorname{sn}(u_{1\beta}, k_1) = \operatorname{th}(u_{1\beta}); \quad \operatorname{cn}(u_{1\beta}, k_1) = \operatorname{sech}(u_{1\beta}); \\ n' &= -m \cdot \operatorname{th}(u_{1\beta}) + j \cdot \operatorname{sech}(u_{1\beta}); \quad m' = m \cdot \operatorname{sech}(u_{1\beta}) + j \cdot \operatorname{th}(u_{1\beta}); \quad j' = -n. \end{aligned} \quad (5)$$

Выполнив операцию пространственного поворота осей координат вокруг оси Om , переходим от системы координат $Onmj$ к системе координат $O'n'm'j'$ по формулам

$$\begin{aligned} j' &= j \cdot k'_2 \operatorname{cn}(u_{2\beta}, k_2) - n \cdot \operatorname{sn}(u_{2\beta}, k_2) + m \cdot k_2 \operatorname{cn}(u_{2\beta}, k_2); \\ n' &= j \cdot k'_2 \operatorname{sn}(u_{2\beta}, k_2) + n \cdot \operatorname{cn}(u_{2\beta}, k_2) + m \cdot k_2 \operatorname{sn}(u_{2\beta}, k_2); \\ m' &= -j \cdot k_2 + m \cdot k'_2; \quad k_2 = \sin \theta_2; \quad k'_2 = \cos \theta_2; \quad k_2^2 + k'^2_2 = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь безразмерное смещение $u_{2\beta}$ связано с полярным углом $\varphi_{2\beta}$ в плоскости Ojn соотношением $u_{2\beta} = F(\varphi_{2\beta}, k_2)$, k_2 – модуль эллиптических функций, θ_2 – некоторый эффективный угол. Отметим, что из выражений (6) при $k_2 = 0$ следуют известные соотношения, которые описывают поворот в плоскости Ojn

$$\begin{aligned} k'_2 &= 1; \quad \operatorname{sn}(u_{2\beta}, k_2) = \sin \varphi_{2\beta}; \quad \operatorname{cn}(u_{2\beta}, k_2) = \cos \varphi_{2\beta}; \\ j' &= j \cdot \cos \varphi_{2\beta} - n \cdot \sin \varphi_{2\beta}; \quad n' = j \cdot \sin \varphi_{2\beta} + n \cdot \cos \varphi_{2\beta}; \quad m' = m. \end{aligned} \quad (7)$$

Для другого предельного варианта при $k_2 = 1$ из (6) следуют соотношения

$$\begin{aligned} k'_2 &= 0; \quad \operatorname{sn}(u_{2\beta}, k_2) = \operatorname{th}(u_{2\beta}); \quad \operatorname{cn}(u_{2\beta}, k_2) = \operatorname{sech}(u_{2\beta}); \\ j' &= -n \cdot \operatorname{th}(u_{2\beta}) + m \cdot \operatorname{sech}(u_{2\beta}); \quad n' = n \cdot \operatorname{sech}(u_{2\beta}) + m \cdot \operatorname{th}(u_{2\beta}); \quad m' = -j. \end{aligned} \quad (8)$$

Выполнив операцию пространственного поворота осей координат вокруг оси On , переходим от системы координат $Onmj$ к системе координат $O'n'm'j'$ по формулам

$$m' = m \cdot k'_3 \operatorname{cn}(u_{3\beta}, k_3) - j \cdot \operatorname{sn}(u_{3\beta}, k_3) + n \cdot k_3 \operatorname{cn}(u_{3\beta}, k_3);$$

$$\begin{aligned}
 j' &= m \cdot k_3' \operatorname{sn}(u_{3\beta}, k_3) + j \cdot \operatorname{cn}(u_{3\beta}, k_3) + n \cdot k_3 \operatorname{sn}(u_{3\beta}, k_3); \\
 n' &= -m \cdot k_3 + n \cdot k_3'; \quad k_3 = \sin \theta_3; \quad k_3' = \cos \theta_3; \quad k_3^2 + k_3'^2 = 1.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Здесь безразмерное смещение $u_{3\beta}$ связано с полярным углом $\varphi_{3\beta}$ в плоскости Omj соотношением $u_{3\beta} = F(\varphi_{3\beta}, k_3)$, k_3 – модуль эллиптических функций, θ_3 – некоторый эффективный угол. Отметим, что из выражений (9) при $k_3 = 0$ следуют известные соотношения, которые описывают поворот в плоскости Omj

$$\begin{aligned}
 k_3' &= 1; \quad \operatorname{sn}(u_{3\beta}, k_3) = \sin \varphi_{3\beta}; \quad \operatorname{cn}(u_{3\beta}, k_3) = \cos \varphi_{3\beta}; \\
 m' &= m \cdot \cos \varphi_{3\beta} - j \cdot \sin \varphi_{3\beta}; \quad j' = m \cdot \sin \varphi_{3\beta} + j \cdot \cos \varphi_{3\beta}; \quad n' = n.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Для другого предельного варианта при $k_3 = 1$ из (9) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
 k_3' &= 0; \quad \operatorname{sn}(u_{3\beta}, k_3) = \operatorname{th}(u_{3\beta}); \quad \operatorname{cn}(u_{3\beta}, k_3) = \operatorname{sech}(u_{3\beta}); \\
 m' &= -j \cdot \operatorname{th}(u_{3\beta}) + n \cdot \operatorname{sech}(u_{3\beta}); \quad j' = j \cdot \operatorname{sech}(u_{3\beta}) + n \cdot \operatorname{th}(u_{3\beta}); \quad n' = -m.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Ранее в работах [11–14] расположение особых точек (аттракторов) поля деформации в ядре квазидвумерных фрактальных структур являлось характерным как для линейной дислокации, реального эллипса, гиперболы или мнимого эллипса. В данной работе особые точки располагаются на квазидвумерных фрактальных поверхностях, уравнения которых зависят от трех аргументов n', m', j' . Если в выражениях (4) положить $\varphi_{1\beta} = 0$, то $n' = n$, $m' = m$, $j' = j$, тогда система координат $On'm'j'$ совпадет с исходной Omj . Это позволяет выполнить классификацию рассматриваемых исходных фрактальных структур (см. табл.). В таблице знак «+» указывает на положительное значение параметра, знак «±» – значение параметра может быть как положительным, так и отрицательным. Значения параметров $p_1' \neq 0$, $p_2' \neq 0$, $p_3' \neq 0$ приводят к появлению других фрактальных объемных структур. Дальнейший учет параметров $\varphi_{1\beta} \neq 0$ и $k_1 \neq 0$ позволяет выполнить исследования по перестройке состояний указанных фрактальных структур.

Таблица

Классификация исходных фрактальных объемных структур

Название фрактальной объемной структуры	p_0'	p_1'	p_2'	p_3'	b_1	b_2	b_3
Фрактальный эллипсоид (ФЭ)	+	0	0	0	1	1	1
Фрактальный однополостный гиперболоид (ФОГ)	+	0	0	0	1	1	-1
Фрактальный двуполостный гиперболоид (ФДГ)	+	0	0	0	1	-1	-1
Фрактальный эллиптический цилиндр (ФЭЦ)	+	0	0	0	1	1	0
Фрактальный гиперболический цилиндр (ФГЦ)	+	0	0	0	1	-1	0
Фрактальный эллиптический параболоид (ФЭП)	+	0	0	±	1	1	0
Фрактальный гиперболический параболоид (ФГП)	+	0	0	±	1	-1	0
Фрактальная квантовая точка (ФКТ)	+	0	0	0	-1	-1	-1
Фрактальное стохастическое состояние (ФСС)	+	0	0	0	0	0	0

На рис. 1 приведены графики функций смещения u для фрактального эллиптического параболоида (ФЭП) при следующих значениях параметров: $p_0' = 1.0123$; $p_3' = -0.3375$; $\varphi_{1\beta} = 0$; $k_1 = 0$ и значениях аргумента $j = j' = 0, 3, 4$. Решение нелинейного уравнения (1) со значением функции Q в виде (2) и (4) строится методом итераций при фиксированных значениях $\alpha = 0,5$; $k = 0,5$; $u_0 = 29,537$. Итерационная процедура по индексу m моделирует стохастический процесс на прямоугольной дискретной решетке с размерами $N_1 \times N_2 = 30 \times 40$. Управляющие параметры были следующими: $n_0 = 14,3267$; $n_c = 9,4793$; $m_0 = 19,1471$; $m_c = 14,7295$. При $j = 0$ наблюдается структура типа фрактальной эллиптической дислокации (рис. 1, а) с ярко выраженным стохастическим поведением поля деформации и основным пиком вниз при $n = 23$, $m = 13$ (рис. 1, б, в). При увеличении j (рис. 1, г) происходит стягивание эллипса, переориентация и смещение основного пика при $n = 14$, $m = 20$

(рис. 1, д, е). При переходе через критическое значение $j = 3$ поведение поля деформации меняется со стохастического на регулярное (рис. 1, ж). При этом изменяется форма и ширина основного пика, происходит уменьшение амплитуды (рис. 1, з, и).

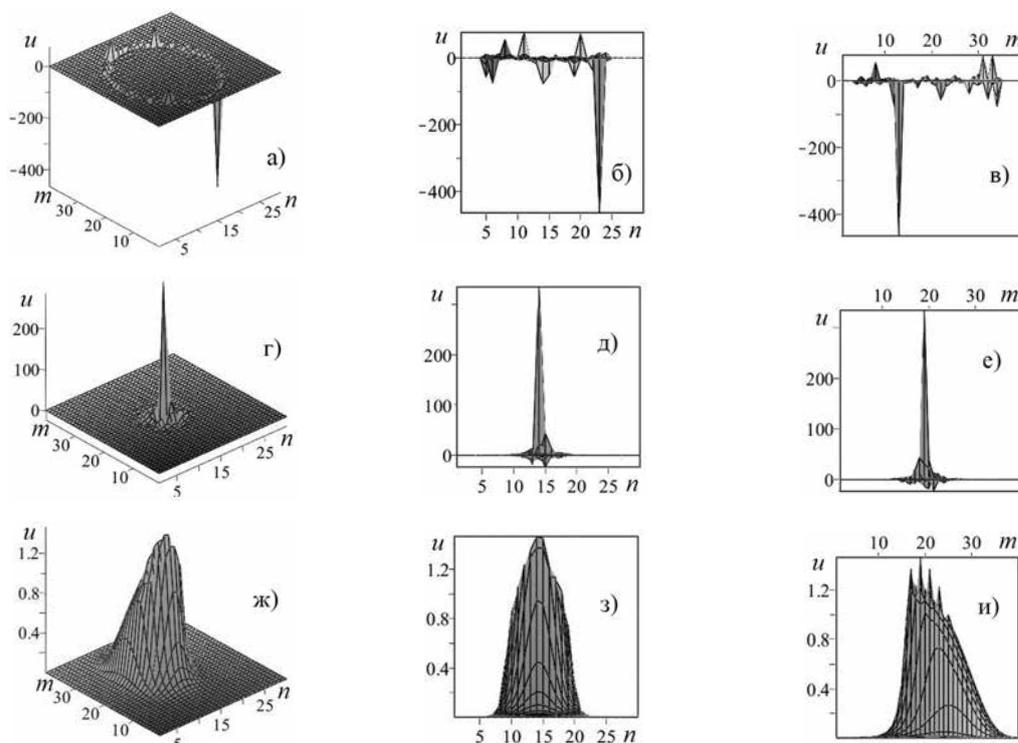


Рис. 1. Зависимости функций смещения u (а, г, ж) и проекций (б, в, д, е, з, и) от решеточных индексов n и m для ФЭП при $j = 0$ (а, б, в); $j = 3$ (г, д, е); $j = 4$ (ж, з, и) при $\varphi_{1\beta} = 0$.

Исходные фрактальные структуры, повороты которых описываются выражениями (3), (6), (9) при $\varphi_{1\beta} = \varphi_{2\beta} = \varphi_{3\beta} = 0$ и $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ совпадают. Поведение исходной структуры фрактального эллипсоида (ФЭ) при $j = 30$ представлено на рис. 2.

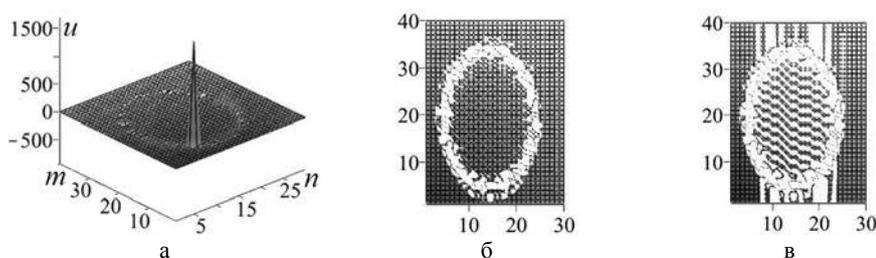


Рис. 2. Зависимость функции смещения u (а) и сечений (б) $u \in [-1, 1]$, (в) $u \in [0, 1]$ (вид сверху) от решеточных индексов n и m для исходной структуры ФЭ при $j = 30$.

Перестройка структуры фрактального эллипсоида (ФЭ) с помощью различных пространственных поворотов (внешнее управление) изображена на рис. 3. Исходное состояние сечения $u \in [0, 1]$ структуры ФЭ дано на рис. 2, в, а состояния сечений, полученные с помощью пространственных поворотов даны на рис. 3. Пространственный поворот вокруг оси Oj (рис. 3, а, б, в) описывается формулами (3). Пространственный поворот вокруг оси Om (рис. 3, г, д, е) описывается формулами (6). Пространственный поворот вокруг оси On (рис. 3, ж, з, и) описывается формулами (9). При этом параметры поворота следующие: первый механизм перестройки – начальные смещения не равны нулю $u_{1\beta} = u_{2\beta} = u_{3\beta} = -\pi/8$, эффективные углы равны нулю $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ для рис. 3, а, г, ж; второй механизм перестройки – начальные смещения равны нулю $u_{1\beta} = u_{2\beta} = u_{3\beta} = 0$, эффективные углы не равны нулю

$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi / 16$ для рис. 3, б, д, з; третий механизм перестройки – начальные смещения и эффективные углы не равны нулю $u_{1\beta} = u_{2\beta} = u_{3\beta} = -\pi / 8$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi / 16$ для рис. 3, в, е, и.

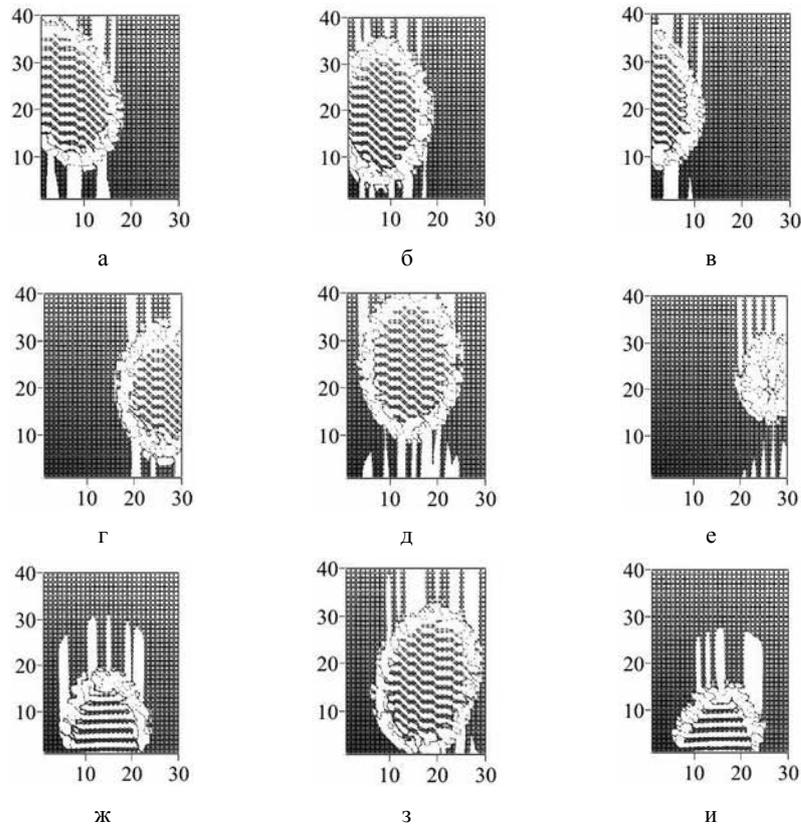


Рис. 3. Зависимость сечений функций смещения $u \in [0,1]$ (вид сверху) от решеточных индексов n и m структуры ФЭ при $j = 30$ для пространственных поворотов вокруг оси Oj (а, б, в), оси Om (г, д, е), оси On (ж, з, и).

Сравнительный анализ рис. 2 в и рис. 3 подтверждает возможность реализации различных механизмов перестройки структуры фрактального эллипсоида.

Поведение усредненных функций. Для исследования поведения стохастического поля деформации фрактальных объемных структур в многослойной наносистеме в рамках статистического подхода вводим усредненные функции по аналогии с работой [12]. Необходимость усреднения связана с тем, что элементы матрицы смещений узлов решетки, в общем случае, являются случайными действительными функциями. В случае усреднения по узлам в плоскости прямоугольной дискретной решетки $N_1 \times N_2$ вводятся операторы полей смещений \hat{u}_1 и плотности состояний $\hat{\rho}_1$. Этим операторам ставятся в соответствие прямоугольные матрицы \hat{u}_1 и $\hat{\rho}_1$ с размерами $N_1 \times N_2$ и $N_2 \times N_1$, матричными элементами u_{nm} и $\rho_{mn} = 1 / N_2 N_1$, соответственно. В случае усреднения по узлам в плоскости $N_2 \times N_3$ вводятся операторы полей смещений \hat{u}_2 и плотности состояний $\hat{\rho}_2$ с размерами $N_2 \times N_3$ и $N_3 \times N_2$, матричными элементами u_{mj} и $\rho_{jm} = 1 / N_3 N_2$, соответственно. В случае усреднения по узлам в плоскости $N_3 \times N_1$ вводятся операторы полей смещений \hat{u}_3 и плотности состояний $\hat{\rho}_3$ с размерами $N_3 \times N_1$ и $N_1 \times N_3$, матричными элементами u_{jn} и $\rho_{nj} = 1 / N_1 N_3$, соответственно. Для однородного распределения операторы $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\rho}_3$ имеют вид

$$\hat{\rho}_1 = \hat{\xi}_{N_2}^T \hat{\xi}_{N_1} / N_2 N_1; \quad \hat{\rho}_2 = \hat{\xi}_{N_3}^T \hat{\xi}_{N_2} / N_3 N_2; \quad \hat{\rho}_3 = \hat{\xi}_{N_1}^T \hat{\xi}_{N_3} / N_1 N_3. \quad (12)$$

где значок « T » означает операцию транспонирования; $\hat{\xi}_{N_1}, \hat{\xi}_{N_2}, \hat{\xi}_{N_3}$ – вектор-строки с элементами равными единице. Усредненные функции M_1, M_2, M_3 имеют вид [12]

$$M_1(j) = Sp(\hat{\rho}_1 \hat{u}_1); \quad M_2(n) = Sp(\hat{\rho}_2 \hat{u}_2); \quad M_3(m) = Sp(\hat{\rho}_3 \hat{u}_3). \quad (13)$$

Здесь S_p – операция вычисления следа квадратной матрицы. Поведение усредненной функции M_1 от j для ФЭП (рис. 4, а) подтверждает существование критического значения $j = 3$, при переходе через которое стохастическое поведение функции M_1 изменяется со стохастического на практически регулярное (рис. 1). Анализ поведения усредненных функций M_2 от n (рис. 4, б), M_3 от m (рис. 4, в) позволяет определить границы интервалов $n \in [6, 22]$, $m \in [6, 33]$, внутри которых поведение указанных функций стохастическое, а вне интервалов – практически регулярное. На рис. 5 приведены графики изменения усредненных функций M_1 от $j \in [0, 10]$ для различных исходных фрактальных объемных структур.

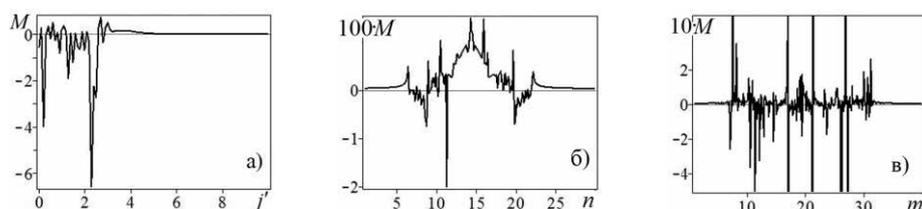


Рис. 4. Поведение усредненных функций $M = M_1$ от $j = j'$ (а); $M = M_2$ от n (б); $M = M_3$ от m , $10 \cdot M_3 \in [-5, 5]$ (в) для исходного ФЭП при $\varphi_{1\beta} = 0$, $k_1 = 0$.

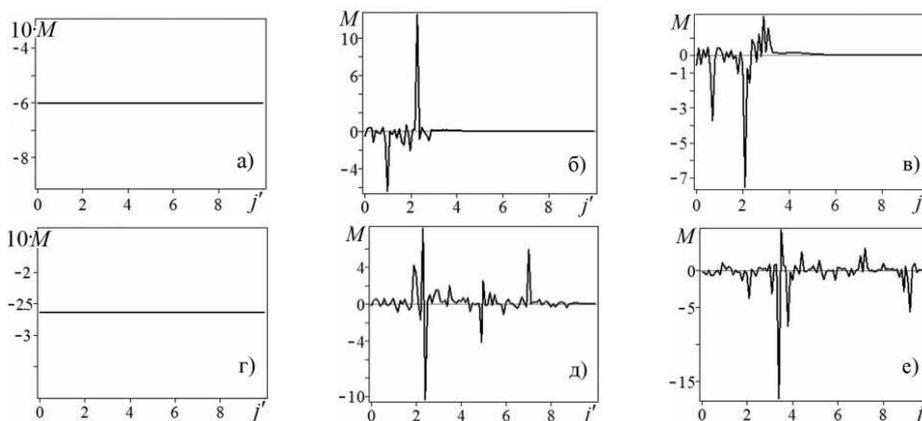


Рис. 5. Поведение усредненных функций $M = M_1$ от $j = j' \in [0, 10]$ для исходных ФЭЦ (а), ФЭ (б), ФОГ (в), ФГЦ (г), ФГП (д), ФДГ (е) при $\varphi_{1\beta} = 0$, $k_1 = 0$.

Для структур типа ФЭЦ (рис. 5, а) и ФГЦ (рис. 5, г) функции M_1 являются постоянными (не зависят от j , так как $p'_3 = 0$). Учет межплоскостных взаимодействий (либо $p'_3 \neq 0$ и $b_3 = 0$; либо $p'_3 = 0$ и $b_3 \neq 0$; либо $p'_3 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$) приводит к образованию структур типа ФЭ (рис. 5, б), ФОГ (рис. 5, в), ФГП (рис. 5, д), ФДГ (рис. 5, е), для которых поведение усредненных функций M_1 от j становится стохастическим. При этом наблюдается существование критических значений j , при переходе через которые стохастическое поведение поля деформаций изменяется на практически регулярное (рис. 5, б, в).

Выводы. Получены нелинейные итерационные уравнения для многослойной наносистемы. Эти уравнения учитывают взаимодействие узлов как внутри основных прямоугольных дискретных решеток, так и межплоскостные взаимодействия. При этом образуются фрактальные объемные структуры, для которых характерно расположение особых точек на фрактальных поверхностях. Показана возможность перестройки состояний фрактальных объемных структур в многослойной наносистеме с помощью различных пространственных поворотов (внешнее управление). Вводятся усредненные функции для усреднений в трех основных плоскостях. Анализ поведения указанных функций позволяет определить критические значения тех аргументов функций, при переходе через которые стохастическое поведение поля деформации сменяется на регулярное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шпак А. Н. Кластерные и наноструктурные материалы. Т. 1 / А. Н. Шпак, Ю. А. Куницкий, В. Л. Карбовский. – К.: Издательский дом «Академперіодика», 2001. – 588 с.

2. Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity / S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, et al. // Nature. – 2007. – Vol. 446. – P. 297–300.
3. Optical clocks and relativity. Science / C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband, et al. // Science. – 2010. – Vol. 329. – P. 1630–1633.
4. Raman K. V. Interface-engineered templates for molecular spin memory devices / K. V. Raman, A. M. Kamerbeek, A. Mukherjee // Nature. – 2013. – Vol. 493(7433). – P. 509–513.
5. Kahra S. A molecular conveyor belt by controlled delivery of single molecules into ultrashort laser pulses / S. Kahra, G. Leschhorn, M. Kowalewski // Nature Physics. – 2012. – Vol. 8(3). – P. 238–242.
6. Awrejcewicz Jan. Chaos in Structural Mechanics / Jan Awrejcewicz, V. A. Krysko. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 424 p.
7. Stockmann H.-J. Quantum Chaos. An Introduction / H.-J. Stockmann. – Cambridge Univers. Press, 1999. – 368 p.
8. Skiadas C. H. Chaotic Modeling and Simulation: Analysis of Chaotic Models, Attractors and Forms / C. H. Skiadas, C. Skiadas. – Taylor and Francis/CRC, London, 2009. – 361 p.
9. Nonlinear dynamics and chaos. Bifurcation groups and rare attractors / M. V. Zakrzhevsky, R. S. Smirnova, I. T. Schukin, et al. – Riga, RTU, Publishing House, 2012. – 181 p.
10. Абрамов В. С. Фрактальная дислокация как один из неклассических структурных объектов в наноразмерных системах / В. С. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 4. – С. 519–524.
11. Абрамова О. П. Перестройка поля деформации фрактальных квазидвумерных структур в наносистемах / О. П. Абрамова, С. В. Абрамов // Физико-мат. модел. сист.: матер. IX Межд. сем., Воронеж: ФГБОУ ВПО «Воронежский гос. техн. ун-т.», 2012. – Ч. 1. – С. 3–10.
12. Абрамова О. П. Особенности поведения поля деформации фрактальных квазидвумерных структур / О. П. Абрамова, С. В. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 9–17.
13. Абрамова О. П. Структурные переходы фрактальных квазидвумерных полей деформации в наносистемах / О. П. Абрамова, С. В. Абрамов // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф. (п. Мелекино, 11-14 июня 2013 г.). – Т. 1. – Донецк: ДонНУ, 2013. – С. 18–22.
14. Abramova O. P. Governance of Alteration of the Deformation Field of Fractal Quasi-two-dimensional Structures in Nanosystems / O. P. Abramova, S. V. Abramov // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2013. – No 3. – P. 367–375.
15. Abramova O. P. Fractal nanotraps based on quasi-two-dimensional fractal structures / O. P. Abramova, S. V. Abramov // Dynamical Systems Theory (Editors J. Awrejcewicz et. all.) DSTA 2013, Poland, Lodz, December 2-5, 2013. – P. 71–80.
16. Абрамов В. С. Фрактальная индукция, лавина, самоиндуцированная прозрачность, эхо в модельной наносистеме / В. С. Абрамов // Материалы X международного симпозиума по фотонному эхо и когерентной спектроскопии (ФЭКС'2013) (Йошкар-Ола, 30 июня–6 июля 2013 г.). – Йошкар-Ола: ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», 2013. – С. 78–86.
17. Abramov V. S. Correlation Relations and Statistical Properties of the Deformation Field of Fractal Dislocation in a Model Nanosystem / V. S. Abramov // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2013. – № 3. – P. 357–365.

Поступила в редакцию 17.01.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Для опису стохастичних полів деформацій фрактальних об'ємних структур в багат шаровій наносистемі отримані основні нелінійні рівняння. Особливі точки (атрактори) поля деформації цих структур розташовані на фрактальних квазидвумерних поверхнях. При цьому використовується теорія дробового числення і концепція фрактала. Враховується взаємодія вузлів, як у площині основний прямокутної дискретної решітки, так і міжплощинні взаємодії. За допомогою просторових поворотів (зовнішнє управління) можна виконувати перебудову станів фрактальних об'ємних структур. Аналіз в термінах усереднених функцій дає можливість виявити особливості поведінки та умови переходу від однієї структури до іншої.

Ключові слова: фрактальна об'ємна структура, стохастичне поле деформації, усереднені функції, перебудова структури, багат шарова наносистема.

SUMMARY

For the description of the stochastic deformation fields of fractal volumetric structures in a multilayer nanosystem basic nonlinear equations are obtained. The singular points (attractors) of the deformation field of these structures are located on fractal quasi-two-dimensional surfaces. This uses the theory of fractional calculus and the concept of fractal. The interaction of nodes both in the plane of the basic rectangular discrete lattice and the interplanar interactions is taken into account. Using spatial rotation (external governance) the alteration of the states of fractal volumetric structures can be carried out. The analysis in terms of averaged functions makes it possible to identify the features of the behavior and conditions of the transition from one structure to another.

Keywords: fractal volumetric structures, stochastic deformation field, averaged functions, alteration of the structure, multilayer nanosystem.

УДК 539.3:534.1

Д. С. Вуколов, В. И. Сторожев

ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН СДВИГА НА ТУННЕЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ В УПРУГОМ СЛОЕ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНЯМИ

С использованием метода изображений получено численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на круговом цилиндрическом изотропном упругом включении в плоскопараллельном деформируемом слое. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по соответствующим базисным частным решениям волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований, характеризующие ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании относительного радиуса включения, относительной длины падающей волны из низшей моды дисперсионного спектра, а также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения.

Ключевые слова: закрепленный изотропный упругий слой, центрально расположенное внутреннее цилиндрическое включение, дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига, численно-аналитическое исследование, метод изображений, ряды по базисным решениям волновых уравнений, варьирование геометрических и механических параметров, закономерности распределений волновых перемещений.

Введение. Проблемы теоретического анализа двумерных дифракционных полей, формирующихся в результате рассеяния стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде полостей и включений в упругих средах, несмотря на длительный период исследования, имеют ряд открытых, актуальных в фундаментальном и прикладном отношении аспектов. Как свидетельствует анализ результатов, представленных в монографиях [1–3], а также в обзорных разделах ряда недавних публикаций [4–8], это заключение в значительной мере касается и задач описания двумерных дифракционных полей, формирующихся в упругом слое при рассеянии нормальных волн продольного сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях и деформируемых включениях с параллельными плоскими гранями.

В частности, в работе [9] без примеров численной реализации описан метод получения дисперсионных соотношений для волн сдвига, распространяющихся вдоль изотропного слоя с периодическим рядом перпендикулярных направлению распространения и параллельных граням внутренних туннельных цилиндрических полостей. Метод базируется на использовании рядов по базисным решениям волнового уравнения в цилиндрических функциях.

В работах [10, 11] рассмотрены задачи о полях сдвиговых магнитоупругих волн в приграничном градиентно-неоднородном слое изотропного полупространства с внутренней туннельной цилиндрической полостью. Метод интегральных преобразований совместно с приемом интегрирования волновых уравнений в цилиндрических функциях в пространстве изображений применялся в работе [12] для исследования эффектов рассеяния упругих продольно-сдвиговых волн на круговом отверстии в изотропной полосе со свободными от напряжений границами.

Вместе с тем можно отметить, что описываемый в [2] численно-аналитический подход к решению задач дифракции волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях в упругом слое, базирующийся на концепции зеркального отражения (методе изображений [13]), также не был численно реализован, и не распространен на задачи о дифракционном рассеянии нормальных волн на деформируемых туннельных цилиндрических включениях.

В свете изложенного, целью данной работы является построение решения задачи о рассеянии распространяющихся вдоль слоя с закрепленными гранями симметричных сдвиговых волн при нормальном падении на параллельные граням центрально расположенное туннельное упругое цилиндрическое включение. Используется концепция представления дифракционных волновых полей разложениями по базисным системам решений волновых уравнений во вспомогательных локальных координатных системах с полюсами, зеркально расположенными относительно границ слоя.

Постановка задачи. Рассматривается изотропный упругий слой (рис. 1) толщины $2h$, занимающий в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$, область $V_L = \{-\infty < x_1, x_3 < \infty, |x_2| \leq h\}$. Грани слоя $x_2 = \pm h$ жестко закреплены, а внутри слоя расположено цилиндрическое упругое включение, занимающее область $V_I = \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_3 < \infty\}$. Материалы слоя и включения соответственно характеризуются пара-

метрами щільності ρ_1, ρ_2 і модулями сдвига μ_1, μ_2 . Полагається, що в шарі вздовж позитивного координатного напрямку Ox_1 розповсюджується нормальна симетрична по координаті x_2 поляризована вздовж Ox_3 хвиля продольного сдвига з круговою частотою ω із произвольної моди дисперсійного спектра, характеризується функцією еластичних хвильових переміщень $U_3^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t)$.

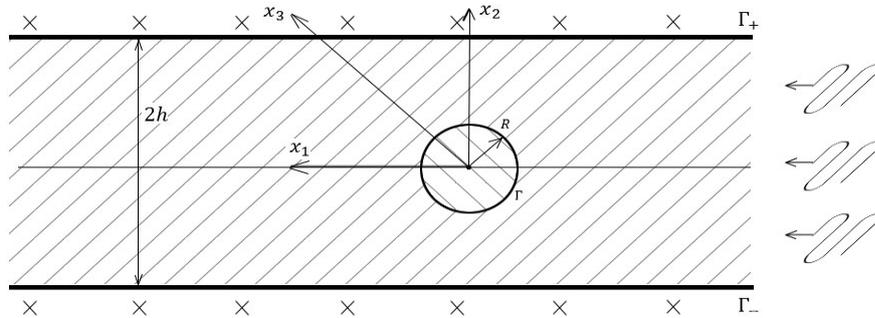


Рис. 1. Сечення шару з тунельним циліндричним включенням

Искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений $U_3^{(\text{отр})}(x_1, x_2, t)$ в отраженных волнах и волновых перемещений $U_3^{(\text{прел})}(x_1, x_2, t)$ в преломленных во включении волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнений стационарных сдвиговых упругих колебаний материалов слоя и включения, которые после отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру h принимают вид

$$(\nabla^2 + \Omega_j^2)U_3^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

$$\Omega = \Omega_1 = \left(\rho_1 \omega^2 / \mu_*\right)^{1/2}, \quad \Omega_2^2 = \Omega_1^2 (\mu_1 \rho_2 / \mu_2 \rho_1),$$

где

$$U_3^{(1)} = U_3^{(\text{пад})} + U_3^{(\text{отр})}, \quad U_3^{(2)} = U_3^{(\text{прел})} \quad (2)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$(U_3^{(1)})_{x_2=\pm h} = 0, \quad (U_3^{(1)})_\Gamma = (U_3^{(2)})_\Gamma, \quad (\sigma_{r3}^{(1)})_\Gamma = (\sigma_{r3}^{(2)})_\Gamma, \quad (3)$$

где Γ – цилиндрическая граница контакта материалов слоя и включения; $(\sigma_{r3}^{(j)})_\Gamma$ – отнесенные к нормирующему параметру $\mu_* = \mu_1$ амплитудные характеристики касательных напряжений на поверхности Γ в материалах слоя и включения.

Построение численно-аналитического решения задачи. На исходном этапе построения решения для функции волновых упругих перемещений в падающей нормальной упругой SH-волне вводится исходное представление

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t) = U_{30} \cos(\alpha_n x_2) e^{-i(\omega t - k_n x_1)}, \quad (4)$$

в котором $\alpha_n = (2n + 1)\pi / 2h$, $k_n = (\Omega_1^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$, n – номер моды нормальных бегущих симметричных SH-волн в закрепленном на плоских гранях слое. Представление (4) априори удовлетворяет первому из краевых условий (3).

Для преломленных во включении волн вводится представление вида

$$U_3^{(\text{прел})} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\Omega_2 r) \cos(n\theta), \quad (5)$$

в котором B_n – подлежащие определению коэффициенты в разложении поля преломленных во включении волн рядом по базисным цилиндрическим стоячим волнам; $J_n(\Omega_2 r)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода индекса n ; (r, θ) – полярные координаты с полюсом в центре сечения включения.

Для записи поля волн, отраженных от включения и удовлетворяющих краевому условию на закреп-

ленних гранях слоя, согласно концепции метода изображений вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами O_k , имеющими в Ox_1x_2 координаты $x_{1,k} = 0$, $x_{2,k} = 2kh$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Соответственно записывается представление

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega_1 r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^k (H_n(\Omega_1 r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega_1 r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})). \quad (6)$$

После применения теорем сложения цилиндрических функций оно преобразуется к виду

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] \right] \cos(n\theta), \quad (7)$$

и при использовании обозначения $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k)$ приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром включения

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (8)$$

Контурное представление на Γ для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$\left(e^{v_1 x_1 + v_2 x_2} \right)_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta}, \quad Q_p = J_p \left(-iR(v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \right) \left(\frac{(iv_1 + v_2)}{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}} \right)^p, \quad (9)$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})} = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left(R\sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{p/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \quad (10)$$

$$\delta_p^0 = \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases}$$

При использовании представлений (8) и (10) для записи функциональных уравнений, следующих краевых условий (3) на контактной поверхности Γ , и их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получена бесконечная система из двух групп линейных алгебраических уравнений:

$$B_n J_n(\Omega_2 r) - A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 R) \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\ = U_{30} \delta_n^0 J_n \left(R\sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 & B_n \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R) \right) - A_n \left(\frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R) \right) - \quad (11) \\
 & - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R) \right) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{n}{R} J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned}$$

После исключения в указанных группах коэффициента B_n система (11) преобразуется к следующему, используемому при редукции и численных исследованиях виду

$$\begin{aligned}
 & A_n \left(\frac{\mu_1}{R} \frac{n H_n^{(1)}(\Omega_1 R) - \Omega_1 H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} - \frac{H_n^{(1)}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} \right) + \delta_n^0 \left(\frac{\mu_1}{R} \frac{n J_n(\Omega_1 R) - \Omega_1 J_{n+1}(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} - \frac{J_n(\Omega_1 R)}{J_n(\Omega_2 R)} \right) \times \\
 & \times \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{J_n(\Omega_2 R)} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right)}{R \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega_2 R) - \Omega_2 J_{n+1}(\Omega_2 R) \right)} \right) \times \\
 & \times i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).
 \end{aligned}$$

В результате определения из приведенной алгебраической системы искомым коэффициентов может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям рассеиваемых и преломляющихся во включении волн.

Результаты численных исследований. Анализ ряда эффектов в распределениях волновых перемещений выполнен на основе расчета дифракционных полей для случаев падения симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной $\lambda = (2\pi/k_n)h^{-1}$ из низшей моды $n = 0$ дисперсионного спектра на включения с различными относительными радиусами. Полагается, что материал включения имеет большую, либо меньшую по сравнению с материалом слоя сдвиговую жесткость, а плотности указанных материалов равны.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов контурных распределений амплитуд волновых упругих перемещений на границе контакта слоя и включения по угловой координате $\tilde{\theta} \in [0; \pi]$, отсчитываемой от отрицательного до положительного направления оси Ox_1 , для различных значений относительной длины падающей волны. Распределения на рис. 2 относятся к случаю задания нормированных сдвиговых жесткостей $\mu_1 = \mu_*$, $\mu_2 = 4\mu_*$ и относительного радиуса включения $R = h/2$. Их анализ позволяет заключить, что при относительно коротких падающих волнах ($\lambda = 0,25$) амплитудные величины волновых перемещений имеют ряд сопоставимых по величине локальных максимумов вдоль контура, однако максимальный уровень амплитуды перемещений достигается во фронтальной точке взаимодействия волны с включением $\tilde{\theta} = 0$. При увеличении относительной длины падающей волны λ до значений $\lambda = 0,5$; $\lambda = 0,6$ наблюдается эффект смещения максимумов амплитуд перемещений к «боковой» точке контура включения $\tilde{\theta} \approx \pi/2$, причем для случая $\lambda = 0,6$ характерно также интенсивное возрастание указанных максимумов. При изменении λ в диапазоне $\lambda \in [1; 2]$ наблюдается качественная транс-

формація аналізуемого розподілення, при якій в випадку $\lambda = 2$ спостерігається виражений ефект «затенення», створюваного «відносно жорстким» включенням.

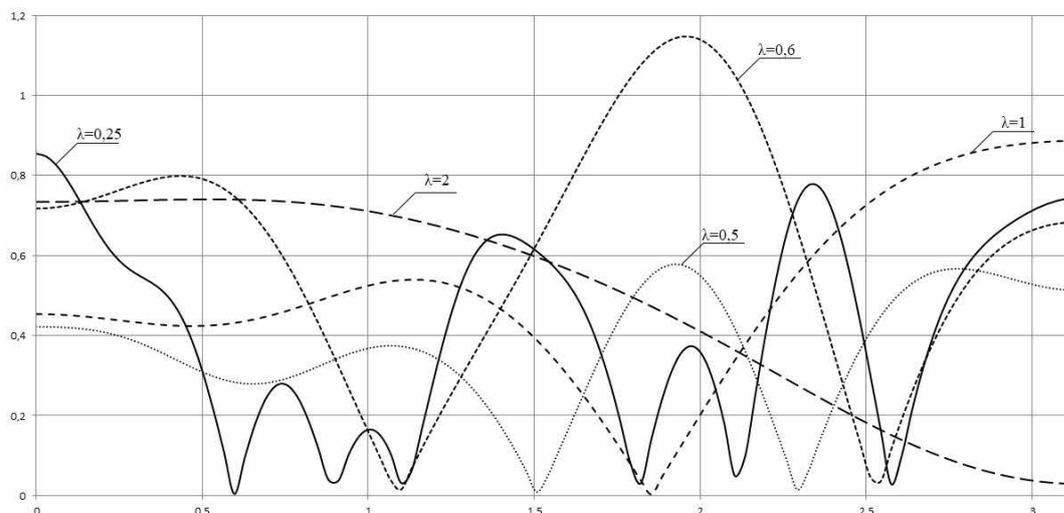


Рис. 2. Контурні розподілення амплітуд хвильових переміщень для «відносно жорсткого» включення

Аналогічні описаним вище результати досліджень для випадку задання нормованих сдвигових жорсткостей $\mu_1 = 4\mu^*$, $\mu_2 = \mu^*$ представлені на рис 3. В якості специфічних ефектів при падінні відносно коротких хвиль можна відзначити появу локалізованих областей підвищеної інтенсивності амплітуд контурних хвильових переміщень як в фронтальній, так і в теневій зонах Γ . В випадку ж $\lambda = 2$ для розглянутого «відносно м'якого» включення локальні максимуми амплітуд спостерігаються при $\tilde{\theta} = 0$ і $\tilde{\theta} \approx 2$, що принципово відрізняється від картини, спостережимої для «відносно жорсткого» включення.

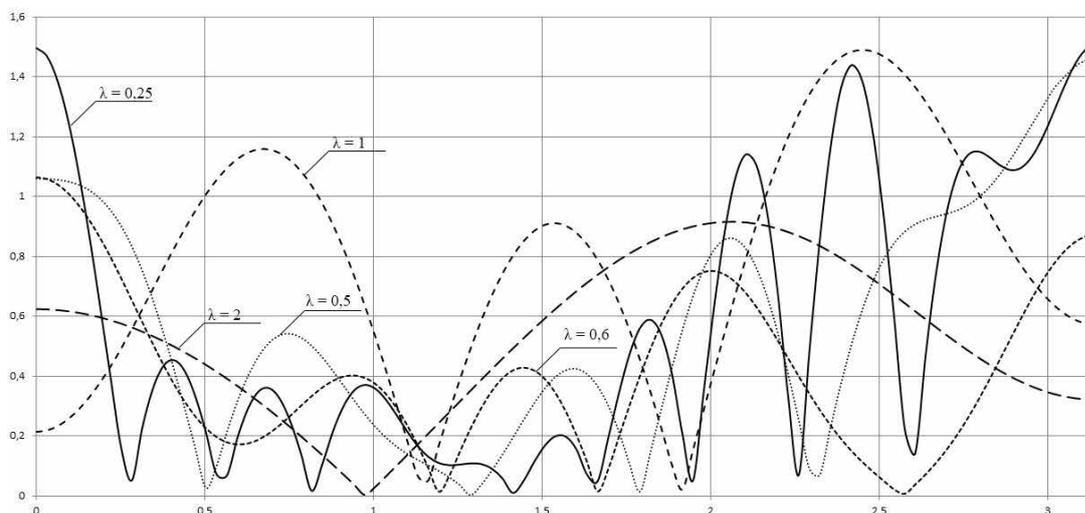


Рис 3. Контурні розподілення амплітуд хвильових переміщень для «відносно м'якого» включення

На рис. 4–10 в формі тонування зображень, на яких перехід від світлих тонів до темним відповідає наростанню інтенсивності характеризуємих величин, представлені картини розподілення рівней хвильових переміщень всередині включень різних діаметрів і в підобласті слоя $x_1 \in [-h; h]$, $x_2 \in [-4h; 8h]$ поза включенням для моментів часу, відповідних початку періодів хвильових коливань. Варіюємими параметрами є також співвідношення модулів сдвига для матеріалів слоя і включення і відносна довжина падаючої хвилі. В якості висновків, наступних із аналізу даних розподілень, можна вказати на наступні ефекти.

При відносно великих розмірах включення $R = 0,75h$ і відносно великій довжині падаючих хвиль $\lambda = 0,5h$ генеруються достатньо малоінтенсивні, відбиваються в фронтальну

область волны, и, вместе с тем, наблюдается значительное влияние включения на картину поля огибающих волн во всей рассматриваемой области за ним. При этом относительно мягкое включение играет роль «концентратора» волновых перемещений (рис. 4), а относительно жесткое – роль «рассеивателя» волн, о чем свидетельствуют формы волновых фронтов в области включений и всплеск интенсивности перемещений в приконтурной теневой области за мягким включением (рис. 5). Приведенные распределения подтверждают априорные свойства сопоставительного уменьшения длины преломляющихся волн в мягком включении и увеличения длины этих волн в относительно жестком включении. Более контрастно изменяющимся является поле в тыльной зоне жесткого включения.

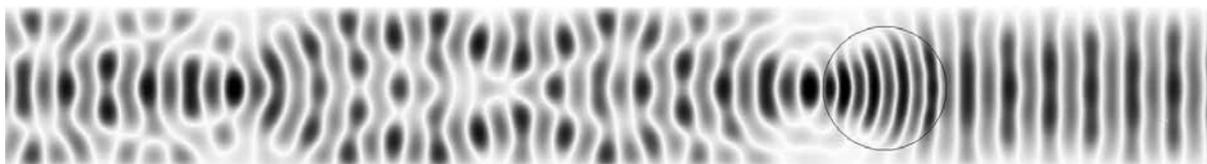


Рис. 4. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,5h$; $\mu_1 = 2\mu_*$; $\mu_2 = \mu_*$

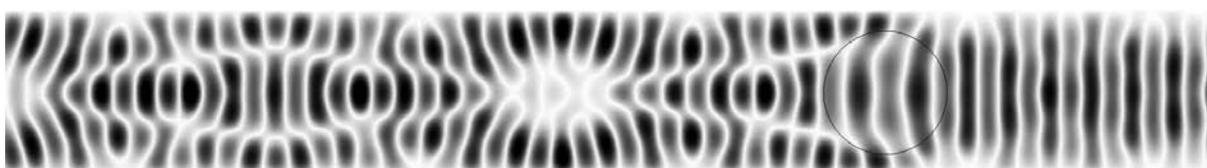


Рис. 5. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,5h$; $\mu_1 = \mu_*$; $\mu_2 = 2\mu_*$

Рис. 6 и рис. 7 иллюстрируют тенденции изменений в картинах распределений дифракционных полей в случае «относительно мягких» включений при последовательном уменьшении относительной длины падающей волны. Можно отметить, что при сохранении эффекта концентрирования волновых перемещений в тыльной приконтурной зоне и усложнения картины рассеянного поля во всей рассматриваемой области за включением, при уменьшении λ усиливается влияние отраженных волн во фронтальной области перед включением.

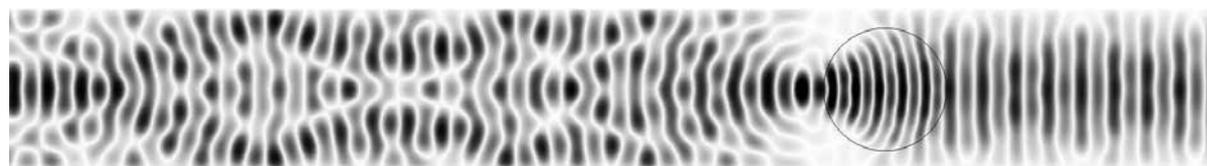


Рис. 6. Картина распределения волновых перемещений для $R = 0,75h$; $\lambda = 0,4h$; $\mu_1 = 2\mu_*$; $\mu_2 = \mu_*$

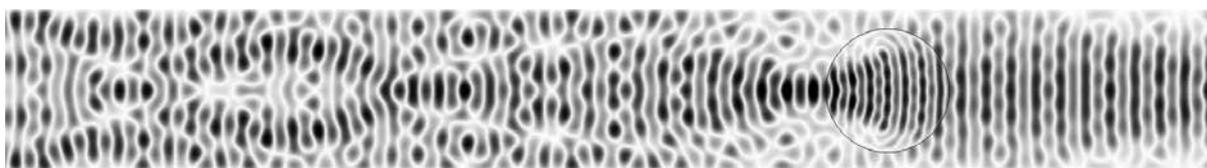


Рис. 7. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,3h$; $\mu_1 = 2\mu_*$; $\mu_2 = \mu_*$

В случае падения еще более коротких волн включения $\lambda = 0,3h$ и $\lambda = 0,2h$ на жесткое включение с $R = 0,75h$ степень влияния отраженных волн во фронтальной зоне также начинает возрастать по сравнению со случаем $\lambda = 0,5h$, однако за включением формируются еще более сложная по структуре картина (рис. 8, рис. 9) распределения волновых перемещений с элементами квазипериодичности.

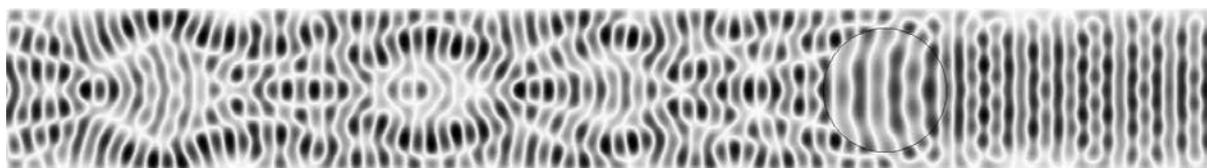
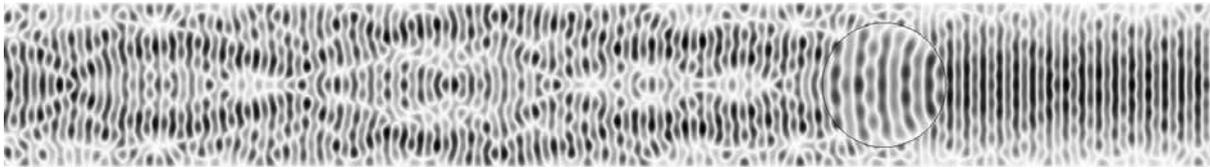
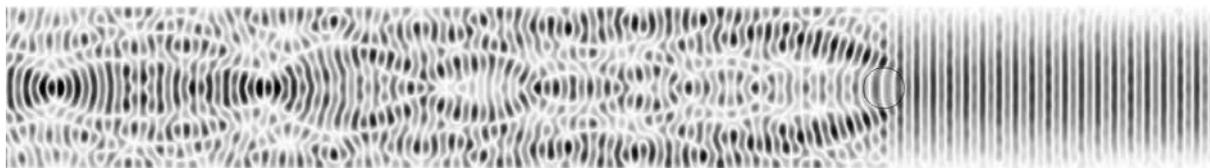


Рис. 8. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,3h$; $\mu_1 = \mu_*$; $\mu_2 = 2\mu_*$

Рис. 9. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,75h$; $\lambda = 0,2h$; $\mu_1 = \mu_*$; $\mu_2 = 2\mu_*$

Наконец, на рис. 10 представлена картина дифракционного поля для случая, когда на относительно жесткое включение малого радиуса $R = 0,25h$ падает относительно короткая волна, длина которой $\lambda = 0,2h$ сопоставима с радиусом включения. В этом случае в рассеянном поле выделяются явно выраженные интенсивные огибающие потоки и наблюдается специфический эффект возникновения зон фокусировки волн в теневой области на очень больших расстояниях от включения.

Рис. 10. Картина распределения волновых перемещений для случая $R = 0,25h$, $\lambda = 0,2h$, $\mu_1 = \mu_*$, $\mu_2 = 2\mu_*$

Выводы. В итоге проведенных теоретических исследований с использованием метода изображений получено численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на круговом цилиндрическом изотропном упругом включении в плоскопараллельном деформируемом слое. Рассмотрен случай нормального падения волны из произвольной моды дисперсионного спектра на включение с осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решение задачи сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей в областях сечения слоя и включения рядами по базисным частным решениям соответствующих волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований для случая падения волны нижней моды дисперсионного спектра. В результате этих исследований установлен ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании относительного радиуса включения, относительной длины падающей волны, а также соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения. В частности, описаны фокусирующая либо рассеивающая функция включения для преломляющихся в нем волн в зависимости от соотношения жесткости материалов включения и слоя; эффекты усложнения картины распределения волновых перемещений в протяженной теневой зоне за включением и малости искажений, вносимых в поле падающих волн отраженными от включения волнами во фронтальной области взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pao Y.-H. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations / Y.-H. Pao, C. C. Mow. – New York: Crane Russak, 1973 – 308 p.
2. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А. Н. Гузь, В. Т. Головчан. – К.: Наукова думка, 1972. – 254 с.
3. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.
4. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer / X.-Q. Fang // Int. J. Solids Struct. – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
5. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, et al. // Compos. Sci. Technol. – 2009. – Vol. 69 – P. 1115–1123.
6. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // Phil. Mag. Lett. – 2010. – Vol. 90. – P. 361–380.
7. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // Mater. Struct. – 2011. – Vol. 44. – P. 67–75.
8. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.
9. Golovchan V. T. Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities / V. T. Golovchan, A. N. Guz // Soviet Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 12, Iss. 9. – P. 888–892.
10. Острик В. И. Динамические задачи магнитоупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями и трещинами продольного сдвига / В. И. Острик, Л. А. Фильштинский // Известия Национальной Академии Наук республики Армения. Механика. – 1991. – Т. 44, № 4. – С. 34–45.

11. Ostrik V. I. The interaction of a magnetoelastic shear wave with longitudinal cavities in a conducting layer / V. I. Ostrik, L. A. Filshinskii // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 79, Iss. 6. – P. 1450–1454.
12. Itou S. Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip / S. Itou // Lett. Appl. Engng. Sci. – 1984. – Vol. 22, No. 4. – P. 475–490.
13. Taraldsen G. The complex image method / G. Taraldsen // Wave Motion. – 2005. – Vol. 43. – P. 91–97.

Поступила в редакцію 25.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

З використанням методу зображень отримано чисельно – аналітичний розв'язок двовимірної крайової задачі про дифракційне розсіяння біжучих симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву на круговому циліндричному ізотропному пружному включенні в плоско-паралельному деформівному шарі. Розглянуто випадок нормально-го падіння хвилі з довільної моди дисперсійного спектру на включення з віссю, що лежить в серединній площині шару з закріпленими плоскими гранями. Рішення задачі зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів представлень хвильових полів в областях перерізу шару і включення рядами за відповідним базисним частинними розв'язками хвильових рівнянь у циліндричних функціях. Представлені результати числових досліджень, що характеризують ряд провідних закономірностей в розподілах хвильових переміщень в ближньому і далекому дифракційному полі при варіюванні відносного радіуса включення, відносної довжини падаючої хвилі з нижчої моди дисперсійного спектра, а також співвідношення модулів зсуву для матеріалів шару і включення.

Ключові слова: закріплений ізотропний пружний шар, центрально розташоване внутрішнє циліндричне включення, дифракційне розсіювання нормальних хвиль зсуву, чисельно-аналітичне дослідження, метод зображень, ряди за базисним розв'язками хвильових рівнянь, варіювання геометричних і механічних параметрів, закономірності розподілів хвильових переміщень.

SUMMARY

Using the method of images by numerical-analytical solution of two-dimensional boundary problem of diffraction scattering running symmetric normal shear waves by a circular cylindrical isotropic elastic inclusion in plane-parallel deformable layer are obtained. Normal incidence the waves on inclusion with the axis lying in the median plane of the layer with fixed faces are investigated. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of representations of wave fields in the areas of cross-section layer and inclusion in rows by the basic particular solutions of wave equations in cylindrical functions. The results of numerical investigation of characterizing a number of leading effects in the distribution of the wave motion in the near- and far- field diffraction by varying the relative radius of inclusions, the relative length of the incident wave on the lowest mode of dispersion spectrum, and the ratio of the shear modulus for the material layer and inclusion are presented.

Keywords: fixed isotropic elastic layer with centrally located inner cylindrical inclusion, diffractive scattering of normal shear waves, numerical-analytical study, the method of images, the series of basic solutions of wave equations, variation of geometrical and mechanical parameters, effects of distribution of wave motion fields.

УДК 539.3

О. Р. Гачкевич*, Є. М. Ірза*, А. Козьярська**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; м. Львів,

**Політехніка Опольська, м. Ополь, Польща

ВАРІАНТ МЕТОДИКИ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ В СКЛЯНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Запропоновано методику оптимізації технологічних теплових режимів нагріву-охолодження термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) за врахування особливостей механічної поведінки скла в широкому діапазоні температур. Враховується залежність від температури обмежень на напруження.

Ключові слова: теплові технологічні режими, скляні тіла, оптимізація.

Вступ. Конструкції із скла в процесі їх виготовлення, технологічної обробки (обезгажуванні, відпалі, гартуванні і т.п.) піддаються певним тепловим процесам навантаження, пов'язаних з їх нагрівом-охолодженням. В результаті дії температурних полів в них виникають напруження (як тимчасові так і залишкові), які можуть перевищувати допустимі значення і приводити до руйнування конструкцій або погіршувати їх експлуатаційні властивості. Поряд з цими факторами, процеси нагріву-охолодження є енергозатратними.

Тому виникає практична потреба у розробці ефективних математичних методик по оптимальному керуванню тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл.

Оптимальне керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл полягає в тому, що система керування повинна забезпечити оптимум певного критерію оптимальності при обмеженнях на напружено-деформований стан тіла і технологічні умови процесу нагріву-охолодження.

Загальні підходи до розробки ефективних математичних методик по оптимальному керуванню тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл достатньо повно висвітлені в літературі. У переважній більшості прикладних робіт, присвячених кількісному опису термомеханічних процесів в скляних тілах при різного роду теплових навантаженнях, властивості скла приймаються постійними (незалежними від температури), або опис термомеханічної поведінки здійснюється загальними рівняннями для всього діапазону температур, в якому перебуває тіло під час процесу теплового навантаження. Форма тіла обертання як правило канонічна. При побудові оптимального керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл використовується здебільшого один критерій оптимальності. В порівнянні з існуючими в літературі дослідженнями в цьому напрямі, в роботі запропоновано математичну методику оптимального керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження для термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) з врахуванням особливостей механічної поведінки скла в широкому діапазоні температур. Пропонується поетапний підхід при побудові математичної моделі термомеханічної поведінки термочутливих скляних тіл обертання довільної форми в залежності від діапазону температур в якому перебуває тіло або його частина з різними критеріями оптимальності. Обмеження на напружений стан беруться залежними від температури.

Методика оптимізації технологічних теплових режимів в процесах нагріву-охолодження скляних тіл передбачає:

- математичну постановку задачі оптимізації;
- розробку числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку;
- програмну реалізацію числового алгоритму.

Математична постановка задач оптимізації технологічних теплових режимів нагріву-охолодження скляних тіл включає такі етапи: вибір параметрів стану, формулювання математичних залежностей, які описують поведінку тіл за даних умов процесу теплового навантаження (розробку математичної моделі); вибір критерію оптимальності; вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціоналу оптимізації; формування обмежень на параметри стану і функції керування.

В роботі виділяються три діапазони температур з характерними для них властивостями скла: діапазон температур, які є меншими нижньої температури відпалу t_v^H (в якому скляні тіла ведуть себе як пружні); діапазон температур від нижньої температури відпалу t_v^H до температури склування t_g (в якому скляні тіла ведуть себе як в'язкопружні); діапазон температур, які є вищими за температуру склування t_g (в якому скло веде себе як в'язка рідина).

Вихідні положення та припущення. Розглядається скляне тіло обертання, яке займає область Ω евклідового простору R^3 і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло віднесене до криволінійної системи координат $Ox^1x^2x^3$. На частині Γ_u поверхні Γ тіла задані переміщення $\vec{u} = \vec{u}_0$, а на частині Γ_σ – силове навантаження, яке характеризується вектором \vec{p} , $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

Тіло піддається технологічному осесиметричному нагріванню, яке здійснюється зовнішнім середовищем з температурою $t_c(\vec{r}, \tau)$ через частину поверхні Γ_t ($\vec{r} \in \Gamma_t$), тепловим потоком $q(\vec{r}, \tau)$ через частину поверхні Γ_q ($\vec{r} \in \Gamma_q$), ($\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$), а також розподіленими джерелами тепла потужності $Q(\vec{r}, \tau)$, ($\vec{r} \in \Omega$).

Вважаємо, що при розглядуваних теплових навантаженнях напружений стан тіла не впливає на його температуру, тобто пряму задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній постановці (в переміщеннях). При цьому температурне поле в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}t) + Q - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \text{ на } \Omega \quad (1)$$

за початкової

$$t(\vec{r}, 0) = t_0(\vec{r}) \text{ на } \Omega \quad (2)$$

і крайових

$$k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0 \text{ на } \Gamma_t, \quad k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + q = 0 \text{ на } \Gamma_q \quad (3)$$

умов. Тут $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона, $k(t)$ – коефіцієнт теплопровідності, $\rho(t)$ – густина, $c(t)$ – питома теплоємність, τ – біжучий час, \vec{r} – радіус-вектор точки, \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні, α – коефіцієнт тепловіддачі.

Зв'язок між компонентами $\{\sigma\}$ тензора напружень і компонентами $\{\varepsilon\}$ тензора деформацій відповідає типу теплових навантажень і інтервалам температур, в яких знаходиться тіло [2].

Деформації в термопружному тілі описуємо наступними залежностями [1]:

- для $t \leq t_v^H$:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^t\}; \quad (4)$$

- для $t_v^H < t \leq t_g$:

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^e\} + d\{\varepsilon^c\} + d\{\varepsilon^t\}; \quad (5)$$

- для $t > t_g$:

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon^c\} + d\{\varepsilon^t\}. \quad (6)$$

Тут $\{\varepsilon^e\} = [D]^{-1}\{\sigma\}$ – пружні деформації; $\{\varepsilon^t\} = \{\delta\} \int_{t_0}^t \alpha_t(\zeta) d\zeta$ – температурні деформації;

$d\{\varepsilon^c\} = \frac{1}{2\eta}\{\tilde{\sigma}\}d\tau$ – в'язкі деформації ($\sigma_0 = 3K_0(\varepsilon_0 - \varepsilon^t)$ – термопружні об'ємні деформації); $[D]$ – матриця пружних характеристик; $\{\delta\}$ – компоненти одиничного тензора Кронекера; α_t – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\{\tilde{\sigma}\}$, $\{\tilde{\varepsilon}\}$ – компоненти девіатора напружень і деформацій відповідно, σ_0 , ε_0 – середнє нормальне напруження і середнє відносне видовження відповідно, $\eta(t)$ – динамічна в'язкість, $K_0(t)$ – модуль об'ємного стиску.

Обмежуємося випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами $\{\varepsilon\}$ тензора деформацій і компонентами $\{u\}$ вектора переміщень є

$$\{\varepsilon\} = [Z]\{u\}, \quad (7)$$

де $[Z]$ – матриця диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності.

В області $\bar{\Omega}$, яку займає тіло, повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\bar{\nabla} \bar{\sigma}^i + X^i = 0 \quad (8)$$

при граничних умовах

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma}^i = p^i \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad \bar{u} = \bar{u}^0 \text{ на } \Gamma_u, \quad i = \overline{1,3}. \quad (9)$$

Тут X^i – контраваріантні компоненти вектора об'ємних сил в криволінійних координатах.

Залежності (1) – (9) складають повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень, компонент тензорів деформацій і напружень при заданих температурі навколишнього середовища t_c , потужності внутрішніх джерел тепла Q , тепловому потоці q , об'ємних силах \bar{X} і зовнішньому силовому навантаженні \bar{p} і залежностях, які пов'язують прирости деформацій з напруженнями і температурою.

Вибір критерію і відповідного функціоналу, який реалізує цей критерій оптимізації, здійснюється виходячи з основних призначень процесу термообробки.

За функціонал оптимізації вибирається функціонал

$$J = \max_{\Omega, \tau} |\sigma_i - \sigma_d|, \quad i = \overline{1,3}, \quad (10)$$

при розгляді оптимального за напруженнями керування тепловими режимами або функціонал

$$J = \tau_k, \quad (11)$$

при розгляді оптимального за швидкодією керування. Тут σ_i – головні значення компонент тензора напружень, $\sigma_d(t)$ – значення допустимих напружень, які змінюється в залежності від температури, τ_k – тривалість процесу термообробки.

Функцією керування в розглядуваних процесах можуть бути як температура зовнішнього середовища $t_c(\bar{r}, \tau)$ (зокрема температура на поверхні) чи коефіцієнт тепловіддачі $\alpha(t)$, так і густина теплового потоку $q(\bar{r}, \tau)$ (залежно від технологічних умов процесу нагріву-охолодження). Потужність джерел тепла Q вважаємо заданою [1].

Типовими обмеженнями в даних задачах є обмеження на рівень виникаючих напружень в тілі

$$\max_{\Omega, \tau} |\sigma_i(\bar{r}, \tau)| \leq \sigma_d(t), \quad i = \overline{1,3}. \quad (12)$$

До таких типових обмежень можна віднести обмеження на температуру тіла під час процесу термообробки

$$t_1 \leq t(\bar{r}, \tau) \leq t_2, \quad (13)$$

обмеження на функцію керування $h(\tau)$

$$h_1 \leq h(\tau) \leq h_2, \quad (14)$$

а також обмеження на швидкість зміни функції керування

$$v_1 \leq \frac{dh(\tau)}{d\tau} \leq v_2. \quad (15)$$

Кількість додаткових умов чи обмежень на параметри розглядуваних полів і функції керування в процесі термообробки в прийнятій схемі оптимізації є неістотною.

В даній постановці задача оптимізації технологічних теплових режимів нагріву-охолодження в процесах термообробки скляних тіл обертання полягає в мінімізації функціоналу (10) або (11) при в'язях (1) – (9) і обмеженнях (13) – (15).

Алгоритм розв'язування. Важливим елементом в схемі оптимізації є побудова розв'язків прямих задач які описують температурне і механічне поля (сформульованих в рамках використовуваної термомеханічної моделі).

Алгоритм розв'язування прямих задач базується на числових методах зважених залишків (МЗЗ) в поєднанні з методом скінчених елементів (МСЕ), які дають можливість отримати ефективні наближені розв'язки сформульованих вище задач [3].

Алгоритм їх розв'язання включає:

- розбиття області, яку займає тіло, на елементи;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання за допомогою методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів системи алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах елементів;
- алгоритм розв'язання цієї системи.

Згідно МСЕ розбиваємо область Ω на скінчену кількість n_e елементів $\Omega^{(e)}$, щоб виконувались умови:

$$\forall e, m: e = \overline{1, n_e}, m = \overline{1, n_e}, \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(m)} = \emptyset, e \neq m; \Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^{(e)}.$$

Скалярну величину t (температуру) на елементі розбиття представляємо за допомогою функцій форми у вигляді

$$t^{(e)} = [N_t^{(e)}] \{T^{(e)}\}, \quad (16)$$

де $[N_t^{(e)}]$ – матриця функцій форми елемента розбиття (для скалярної величини), $\{T^{(e)}\}$ – вектор значень температури у вузлах елемента.

Компоненти $\{u\}$ вектора (переміщення \vec{u}) на елементі розбиття записуємо за допомогою функцій форми елемента розбиття у вигляді:

$$\{u^{(e)}\} = [N_u^{(e)}] \{U^{(e)}\}, \quad (17)$$

де $[N_u^{(e)}]$ – матриця функцій форми елемента розбиття (для векторної величини), $\{U^{(e)}\}$ – значення компонент $\{u^{(e)}\}$ вектора переміщення \vec{u} у вузлах елемента.

Задача теплопровідності (1) – (3) з використанням методу зважених залишків (зокрема методу Гальоркіна) в поєднанні з методом скінчених елементів зведена до вигляду:

$$[C_t] \frac{d\{T\}}{d\tau} + [K_t] \{T\} = \{f_t\}. \quad (18)$$

Тут $[C_t]$, $[K_t]$, $\{f_t\}$ – відповідні температурні матриці жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} [C_t] &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} \rho c [N_t^{(e)}]^T [N_t^{(e)}] d\Omega, \\ [K_t] &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} k [B_t^{(e)}]^T [B_t^{(e)}] d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_t^{(e)}} \alpha [N_t^{(e)}]^T [N_t^{(e)}] d\Gamma, \\ \{f_t\} &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_t^{(e)}]^T Q d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_t^{(e)}} \alpha [N_t^{(e)}]^T t_c d\Gamma - \sum_{e=1}^{n_{e2}} \int_{\Gamma_q^{(e)}} [N_t^{(e)}]^T q d\Gamma, \\ & [B_t^{(e)}]^T [B_t^{(e)}] = \vec{\nabla} [N_t^{(e)}]^T \vec{\nabla} [N_t^{(e)}]. \end{aligned}$$

Використавши метод скінчених різниць (поділивши проміжок $[0, \tau_k]$ на дискретну множину точок $\tau_0, \tau_1 \dots$ з кроком $\Delta\tau_n$), з (18) отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$([C_t] + \theta \Delta\tau_n [K_t]) \{T\}_{n+1} = ([C_t] - (1-\theta) \Delta\tau_n [K_t]) \{T\}_n + (1-\theta) \{f_t\}_n \Delta\tau_n + \theta \{f_t\}_{n+1} \Delta\tau_n. \quad (19)$$

Тут індексами $n, n+\theta, n+1$ позначено значення величин в момент часу $\tau_n, \tau_{n+\theta}, \tau_{n+1}$ відповідно. При цьому $\theta \in [0, 1]$.

За рахунок вибору точки колокації θ співвідношення (19) перетворюється в одну із наступних відомих скінчено-різницевоїх схем для рівняння (18), а саме: при $\theta = 0$ – схему Ейлера (схема з різницею вперед), $\theta = 0.5$ – схему Кранка-Нікольсона (схема з центральною різницею), $\theta = 0.66667$ – метод Гальоркіна, $\theta = 1$ – схему з різницею назад.

Нелінійна система алгебраїчних рівнянь (19) розв'язується за допомогою ітераційного методу.

Системи рівнянь (4), (7) – (9), які описують модель термопружного тіла, з використанням також методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів зводимо до вигляду:

$$[K_u] \{U\} = \{F_u\}. \quad (20)$$

Тут $[K_u]$, $\{F_u\}$ – відповідно матриця жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$[K_u] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega,$$

$$\{F_u\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{X^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_\sigma^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} d\Gamma,$$

$$[B_u^{(j)}] = [Z] [N_u^{(j)}].$$

Нелінійна система алгебраїчних рівнянь (20) розв'язується також за допомогою ітераційного методу.

Системи рівнянь (5), (7) – (9), які описують модель термов'язкопружного тіла, з використанням також методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів зводимо до вигляду (інтегрального рівняння Вольтера другого роду):

$$[K]\{U(\tau)\} = \{F_0(\tau)\} + \int_0^\tau [F_1(\tau, \xi)] \{U(\xi)\} d\xi. \quad (21)$$

Тут $[K]$, $[F_1]$, $\{F_0\}$, – відповідно матриці жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_0^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega;$$

$$\{F_0\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_0^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{X^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_\sigma^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} d\Gamma;$$

$$[F_1] = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega.$$

Систему інтегральних рівнянь (21) розв'язуємо методом послідовних наближень.

Системи рівнянь (6), (7) – (9), які описують модель термов'язкого тіла, з використанням також методу зважених залишків в поєднанні з методом скінчених елементів зводимо до вигляду:

$$[C] \frac{d\{U\}}{d\tau} + [K]\{U\} = \{F\}. \quad (22)$$

Тут $[C]$, $[K]$, $\{F\}$ – відповідно матриці жорсткості і вектор навантаження, які мають наступний вигляд:

$$[C] = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(j)}} [B_u^{(j)}]^T [D_2^{(j)}] [B_u^{(j)}] d\Omega;$$

$$[K] = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(j)}} [B_u^{(j)}]^T [D_1^{(j)}] [B_u^{(j)}] d\Omega;$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D_1^{(e)}] \{\varepsilon_t^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{X^{(e)}\} d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma_\sigma^{(e)}} [N_u^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} d\Gamma.$$

Використавши метод скінчених різниць, систему (22) зводимо, як і у випадку температурної задачі, до вигляду:

$$([C] + \theta \Delta \tau_n [K])\{U\}_{n+1} = ([C] - (1 - \theta) \Delta \tau_n [K])\{U\}_n + (1 - \theta)\{F\}_i \Delta \tau_n + \theta\{F\}_{n+1} \Delta \tau_n. \quad (23)$$

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [4]. В рамках запропонованого підходу проводиться дискретизація по часу з кроком

$\Delta\tau_n$ тривалості процесу термообробки. Оптимальний розв’язок функції керування на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-постійних функцій. Значення h_{n+1} функції керування h в момент часу τ_{n+1} знаходимо за формулою

$$h_{n+1} = h_n + a_n \Delta\tau_n \quad \text{або} \quad h_{n+1} = b_n, \quad (24)$$

де a_n, b_n – шукані параметри, які змінюються в заданих границях.

Таким чином мінімізація функціоналів (10), (11) на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ зводиться до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції однієї змінної $J_k = J_k(a_n)$ або $J_k = J_k(b_n)$ (аргументом якої є параметр a_n або b_n). Параметр a_n або b_n шукається шляхом перебору з множини значень його зміни на основі інформації про величину критерію оптимізації (яка отримується із розв’язку прямої задачі на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$) при виконанні заданих обмежень (замість задачі знаходження траєкторії зміни функції керування, яка належить множині потужності континуум, ми встановлюємо лому, яка належить кінцевій множині ломаних, що проходять через вузли сітки).

Приклад. Запропоновану методику побудови оптимального режиму нагріву-охолодження скляних тіл обертання проілюструємо на прикладі режиму знегажування пустотілого скляного тіла обертання.

Тіло віднесене до циліндричної системи координат $Or\varphi z$. Розбиття області (осьового перерізу в силу осесиметричності тіла), на біквдратичні елементи представлено на рис. 1. Тіло виготовлене із скла С-93.

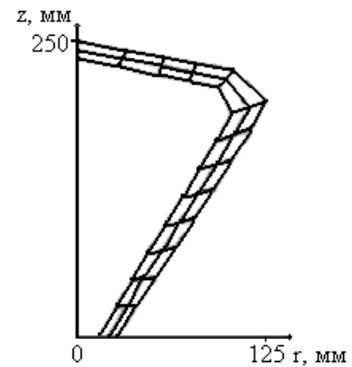


Рис. 1. Розбиття осьового перерізу тіла обертання

Ставиться задача нагріву тіла від початкової температури $t(\bar{r}, 0) = 20^\circ\text{C}$ до максимальної $t_{\max} = 380^\circ\text{C}$ з послідовним охолодженням до натуральної за мінімальний час при обмеженнях на допустимі напруження і швидкість зміни функції керування.

Термомеханічна поведінка тіла описується системою рівнянь (1)–(5), (7)–(9), яка зведена до системи алгебраїчних рівнянь (19)–(21).

За функціонал оптимальності прийнято час термообробки (11), а критерій оптимальності – його мінімум. Внутрішня поверхня тіла теплоізольована, а на зовнішній задана температура t_c , яка є функцією керування.

Температуру t_c на зовнішній поверхні шукаємо по приведеній вище методиці. Значення функції керування (температури t_c на зовнішній поверхні) в момент часу τ_{i+1} визначаємо за формулою

$$t_{c,i+1} = a_i (\tau_{i+1} - \tau_i) + t_{c,i}, \quad (25)$$

де $t_{c,i+1}, t_{c,i}$ – значення цієї функції в моменти часу τ_{i+1} і τ_i відповідно (рис.2).

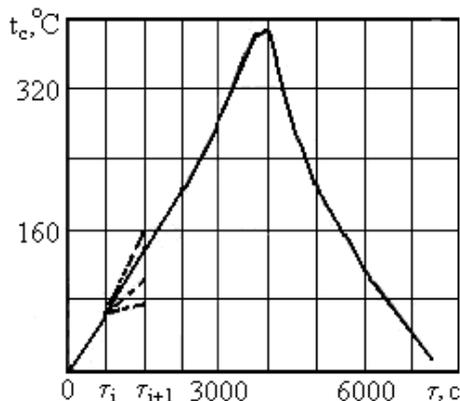


Рис. 2. Зміна в часі оптимальної температури на зовнішній поверхні тіла

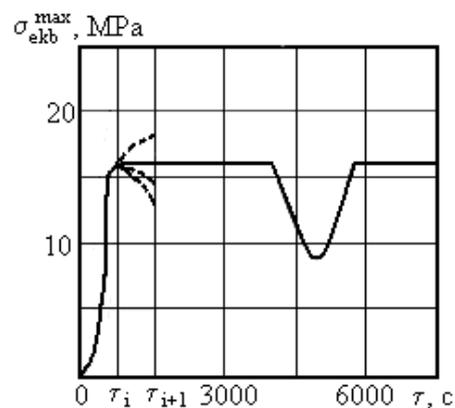


Рис. 3. Зміна в часі відповідних максимальних еквівалентних напружень

Параметр a_i (тангенс кута нахилу прямої, яка проходить через точки з координатами $(\tau_i, t_{c,i})$ і $(\tau_{i+1}, t_{c,i+1})$) визначаємо методом прямого пошуку (показані пунктирні лінії на рис. 2 відповідають різ-

ним наближеним значенням кута нахилу в вузлі τ_i , а суцільна лінія відповідає заданому оптимальному куту нахилу) на інтервалі $[0, \pi/2]$ його зміни з кроком (який визначається необхідною точністю). На рис.3 відображена зміна відповідних еквівалентних максимальних напружень.

Аналізуючи побудову оптимального по швидкодії режиму знегажування можна зробити висновок, що мінімізація часу знегажування досягається за рахунок виходу на допустимі напруження або на обмеження по швидкості зміни функції керування.

Висновки. Розроблено методику дослідження температурного і термонапруженого станів в термочувствительних скляних тілах обертання довільної форми, температура яких міняється в широкому діапазоні, при тепловому навантаженні і на цій основі побудоване оптимальне керування тепловими режимами в процесах нагріву-охолодження скляних тіл обертання при обмеженнях на напружено-деформований стан тіл і технологічні умови процесу. Запропонована методика може бути використана при оптимізації та автоматизації теплових процесів в скляному виробництві з метою підвищення продуктивності відповідних технологічних процесів. Отримані результати можуть застосовуватися як базові під час розв'язання більш складних задач, а також бути корисними при тестуванні результатів розрахунків, отриманих за допомогою інших методів. Вони можуть знайти застосування у скляному виробництві.

Дослідження виконано за фінансової підтримки ДФФД (проект № Ф54.2/015).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гачкевич А. Р. Математические модели и методы термомеханики стеклянных тел вращения при тепловом нагружении / А. Р. Гачкевич, Е. М. Ирза, В. Я. Бойчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 8–19.
2. Коваленко А. Д. Избранные труды / А. Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1976. – 307 с.
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – London: "Butterworth Heinemann", 2000. – 689 p.
4. Химмельбау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельбау. – М.: Мир, 1975. – 532 с.

Надійшло до редакції 18.09.2013 р.

РЕЗЮМЕ

В работе предложена методика оптимизации тепловых режимов при нагреве-охлаждении термочувствительных стеклянных тел вращения (форма которых отличается от канонической) при учете особенностей механического поведения стекла в широком диапазоне температур и зависимости от температуры значений допустимых напряжений.

Ключевые слова: тепловые технологические режимы, стеклянные тела, оптимизация.

SUMMARY

The optimization method of technological thermal modes in the process of heating-cooling of termosensitive glass bodies of rotation (the form of which is different from canonical) consideration features of mechanical behavior of glass in the wide range of temperatures. Is taken into account dependence on temperature stress limits.

Keywords: thermal technological modes, glass bodies, optimization.

УДК 539.3

Е. Н. Довбня, Н. А. Крупко

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ С ТРЕЩИНАМИ И ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрено упругое равновесие изотропной пологой оболочки произвольной гауссовой кривизны. Конструкция, находящаяся под действием растягивающей нагрузки, ослаблена двумя сквозными трещинами, расположенными вдоль оси x , и круговым отверстием между ними. Поставленная задача была сведена к системе линейно алгебраических уравнений. Численное решение основывалось на использовании специальных квадратурных формул для интегралов типа Коши, в случае, когда неизвестные функции имеют корневую особенность на концах промежутка интегрирования и метода конечных разностей. В результате были получены значения коэффициентов концентрации напряжений вдоль контура отверстия и значения коэффициентов интенсивности усилий на концах трещин.

Ключевые слова: отверстие, трещина, оболочка, преобразование Фурье, коэффициенты концентрации напряжений, коэффициенты интенсивности усилий.

Введение. В современной технике, автомобилестроении и других отраслях широко используются тонкие оболочки различной конфигурации. Наличие мелких повреждений, трещин, разрезов и других дефектов играет существенную роль в ухудшении несущей способности конструкций, а, следовательно, такие конструкции становятся менее надежными, особенно в том случае, если дефектов много. Возникает необходимость исследования напряженно-деформируемого состояния оболочек с целью изучения качества прочности изделий с разрезами, отверстиями. Определение распределения нагрузки в окрестности дефекта позволяет проанализировать напряженно-деформированное состояние оболочки с дефектами, определить срок эксплуатации изделия. Напряженное состояние цилиндрической оболочки, находящейся под внутренним давлением, и, содержащей осевую трещину, было рассмотрено в [1]. В работе [2] были вычислены коэффициенты интенсивности напряжений на концах трещины в сферической и цилиндрической оболочках, когда к поверхности трещины были приложены равномерно растягивающая и изгибающая нагрузки. Исследования [3–7] посвящены взаимовлиянию сквозных трещин в оболочках. Многие ученые занимались решением научных задач, когда границы трещин и отверстия соприкасаются [8, 9]. Однако ряд исследований, в которых в качестве концентраторов напряжения выступают сквозные трещины и отверстия, ограничиваются частными случаями геометрии оболочки (сферическими либо цилиндрическими оболочками) [10–12].

Целью данной работы является исследование напряженно-деформированного состояния изотропной оболочки произвольной гауссовой кривизны с круговым отверстием и со сквозными трещинами.

Постановка задачи. Рассматривается изотропная полая оболочка постоянной толщины h . Заданную систему координат так, что оси x , y будут ориентированы вдоль линий главных кривизн срединной поверхности оболочки, а ось z будет направлена по нормали к ней. Оболочка, находящаяся под действием симметричной внешней нагрузки – равномерное растяжение вдоль оси y интенсивности p , ослаблена двумя коллинеарными сквозными трещинами длины $2l$, направленными вдоль оси x , и круговым отверстием радиуса r_0 , расположенным в центре конструкции (рис. 1). Для решения задачи будем считать, что размеры трещин и отверстия велики по сравнению с толщиной оболочки, но малы по сравнению с ее другими линейными размерами. Данное замечание позволяет рассматривать задачу о равновесии тонкой оболочки с трещинами и отверстием с помощью двумерной теории оболочек. В рамках этой теории трещины моделируются как математические разрезы срединной поверхности конструкции.

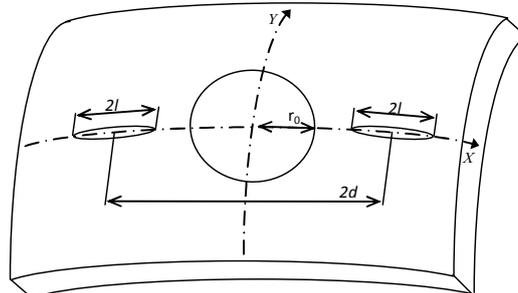


Рис. 1. Оболочка с отверстием и трещинами

Пусть расстояние между центрами трещин равно $2d$. Обозначим гладкие участки контуров трещин, отверстия через L_i , $i = \overline{0, 2}$. Уравнения L_i запишутся следующим образом

$$L_0 : \alpha_0(t) = r_0 \cos(t), \quad \beta_0(t) = r_0 \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$L_1 : \alpha_1(t) = lt + d, \quad \beta_1(t) = 0; \quad L_2 : \alpha_2(t) = lt - d, \quad \beta_2(t) = 0; \quad t \in [-1, 1].$$

Направляющие косинусы вектора внешней нормали примут вид

$$\alpha'_i(t) = -n_{2i}(t), \quad \beta'_i(t) = n_{1i}(t), \quad i = \overline{0, 2}.$$

Напряженное состояние конструкции представим в виде суммы основного напряженного и возмущенного состояния оболочки. Основное напряженное состояние характеризуется величинами со звездочкой. Будем считать эти величины известными. В данной работе были использованы уравнения теории оболочек с большим показателем изменчивости [13], которые совпадают с уравнениями пологих оболочек [14]. В рамках теории пологих оболочек предусматривается, что метрика срединной поверхности оболочки совпадает с метрикой плоскости, то есть коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $A \approx 1$, $B \approx 1$, а главные кривизны k_1 и k_2 (вдоль осей x , y соответственно) являются постоянными [15]. Основные соотношения теории пологих оболочек имеют вид:

– уравнения равновесия, исходя из гипотезы Кирхгофа-Лява [16],

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = -X, \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = N_1, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = N_2, \\ -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = -Z;$$

– геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \chi_1 = -\frac{\partial \theta_1}{\partial x}, \quad \chi_2 = -\frac{\partial \theta_2}{\partial y}, \quad \chi_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right);$$

– уравнение неразрывности деформации

$$k_1 \chi_1 + k_2 \chi_2 + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial y^2} = 0;$$

– соотношения упругости

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad S = \frac{Eh}{(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \\ H = D(1-\nu) \chi_{12}, \quad M_1 = D(\chi_1 + \nu \chi_2), \quad M_2 = D(\nu \chi_1 + \chi_2).$$

Здесь X, Y, Z – проекции внешней нагрузки на оси координат, T_1, T_2, S – мембранные усилия, M_1, M_2, H – моменты, N_1, N_2 – перерезывающие силы; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ – компоненты тангенциальной деформации срединной поверхности оболочки, $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ – компоненты изгибающей деформации, u, v, w – перемещения в направлениях x, y, z соответственно, θ_1, θ_2 – углы поворота нормали; $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Граничные условия для возмущенного напряженного состояния будут иметь вид

$$L_0: T_n = -T_n^*, \quad S_{n\tau} = -S_{n\tau}^*, \quad M_n = -M_n^*, \quad H_{n\tau} = -H_{n\tau}^*, \quad N_n = -N_n^*, \\ L_1: T_2^1 = -T_2^{1*}, \quad M_2^1 = -M_2^{1*}, \quad L_2: T_2^2 = -T_2^{2*}, \quad M_2^2 = -M_2^{2*}.$$

Будем считать, что контура трещин и отверстия свободны от нагрузки и берега трещин в процессе деформирования оболочки не контактируют между собой.

Поставленная задача сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных. Для сведения системы дифференциальных уравнений к системе граничных интегральных уравнений используется двумерное интегральное преобразование Фурье. Ограничения на использование данного преобразования позволяет обойти теория обобщенных функций.

Система граничных интегральных уравнений. Интегральные представления внутренних усилий и моментов [17] позволяют построить систему граничных интегральных уравнений для рассматриваемой задачи

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^5 (K_{ij}(\alpha_0(\theta) - \alpha_0(\tau), \beta_0(\theta) - \beta_0(\tau)) \psi_j(\tau)) d\tau + \\ + \int_{-1}^1 \sum_{j=6}^7 K_{ij}(\alpha_0(\theta) - \alpha_{j-5}(s), \beta_0(\theta) - \beta_{j-5}(s)) \psi_j(s) ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-1}^1 \sum_{j=8}^9 K_{ij} (\alpha_0(\theta) - \alpha_{j-7}(s), \beta_0(\theta) - \beta_{j-7}(s)) \psi_j(s) ds = F_i(\theta), \quad i = \overline{1,4}, \theta \in [0, 2\pi] \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^5 (K_{ij} (\alpha_{i-4}(t) - \alpha_0(\tau), \beta_{i-4}(t) - \beta_0(\tau)) \psi_j(\tau)) d\tau + \\
 & + \int_{-1}^1 \sum_{j=6}^7 K_{ij} (\alpha_{i-4}(t) - \alpha_{j-5}(s), \beta_{i-4}(t) - \beta_{j-5}(s)) \psi_j(s) ds + \\
 & + \int_{-1}^1 \sum_{j=8}^9 K_{ij} (\alpha_{i-4}(t) - \alpha_{j-7}(s), \beta_{i-4}(t) - \beta_{j-7}(s)) \psi_j(s) ds = F_i(t), \quad i = 5, 6, t \in [-1, 1] \\
 & \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^5 (K_{ij} (\alpha_{i-6}(t) - \alpha_0(\tau), \beta_{i-6}(t) - \beta_0(\tau)) \psi_j(\tau)) d\tau + \\
 & + \int_{-1}^1 \sum_{j=6}^7 K_{ij} (\alpha_{i-6}(t) - \alpha_{j-5}(s), \beta_{i-6}(t) - \beta_{j-5}(s)) \psi_j(s) ds + \\
 & + \int_{-1}^1 \sum_{j=8}^9 K_{ij} (\alpha_{i-6}(t) - \alpha_{j-7}(s), \beta_{i-6}(t) - \beta_{j-7}(s)) \psi_j(s) ds = F_i(t), \quad i = 7, 8, t \in [-1, 1]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Неизвестные функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= Eh \left(\frac{\partial[u]}{\partial s} \Big|_{L_0} - n_{20} \frac{\lambda}{R_2} [w] \Big|_{L_0} \right); \quad \psi_2 = Eh \left(\frac{\partial[v]}{\partial s} \Big|_{L_0} + n_{10} \frac{1}{R_2} [w] \Big|_{L_0} \right); \\
 \psi_3 &= Eh \frac{1}{c^2 R_2} \frac{\partial[\theta_1]}{\partial s} \Big|_{L_0}; \quad \psi_4 = Eh \frac{1}{c^2 R_2} \frac{\partial[\theta_2]}{\partial s} \Big|_{L_0}; \quad \psi_5 = Eh \frac{1}{c R_2} (n_{10} [\theta_1] \Big|_{L_0} + \lambda n_{20} [\theta_2] \Big|_{L_0}); \\
 \psi_6 &= Eh \left(\frac{\partial[v]}{\partial s} \Big|_{L_1} \right); \quad \psi_7 = Eh \left(\frac{\partial[v]}{\partial s} \Big|_{L_2} \right); \quad \psi_8 = Eh \frac{1}{c^2 R_2} \frac{\partial[\theta_2]}{\partial s} \Big|_{L_1}; \quad \psi_9 = Eh \frac{1}{c^2 R_2} \frac{\partial[\theta_2]}{\partial s} \Big|_{L_2};
 \end{aligned}$$

где $[f]_L = f^+ - f^-$ – скачок функции f при переходе через контур L со стороны внешней нормали,

R_2 – радиус одной из главных кривизн оболочки, $c = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} / \sqrt{R_2 h}$. Ядра системы (1) имеют особенность типа Коши и методика их получения приводится в работе [18]. На контуре отверстия зададим компоненты главного вектора и главного момента, которые запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}
 P_x(s) &= \int_{L_s} T_n dy + S_{n\tau} dx; \quad P_y(s) = \int_{L_s} S_{n\tau} dy - T_n dx; \quad P_z(s) = \int_{L_s} N_n ds + k_2 P_y dy + k_1 P_x dx; \\
 M_x^{(s)}(s) &= - \int_{L_s} (P_z + H_{n\tau}) dy - (M_n - k_1 M_z^{(s)}) dx; \\
 M_y^{(s)}(s) &= \int_{L_s} (P_z + H_{n\tau}) dx + (M_n - k_2 M_z^{(s)}) dy; \quad M_z^{(s)} = \int_{L_s} P_x dy - P_y dx.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Правую часть системы (1) представим через производные компонентов главного вектора и главного момента с учетом (2) таким образом

$$\begin{aligned}
 F_1 &= P'_x(s) = T_1 n_1 + S n_2; \quad F_2 = P'_y(s) = S n_1 + T_2 n_2; \quad F_3 = M'_x(s) = -P_z n_1 + k_1 n_2 M_z; \\
 F_4 &= M'_y(s) = -P_z n_2 - k_2 n_1 M_z; \quad F_i(t) = B_i^*(t) + B_i(t); \quad i = \overline{5,8}.
 \end{aligned}$$

Мембранные усилия и изгибающие моменты на линии трещины в оболочке, вызванные внешними нагрузками, имеют вид:

$$B_i^*(t) = T_2^{(i-4)*} \Big|_{L_{i-4}}; \quad i = 5, 6; \quad B_i^{(i-6)*}(t) = 0; \quad i = 7, 8.$$

Граничные условия для коллинеарных трещин приобретут следующий вид

$$B_i(t) = T_2^{i-4} \Big|_{L_{i-4}} = 0; i = 5, 6; B_i(t) = M_2^{i-6} \Big|_{L_{i-4}} = 0; i = 7, 8.$$

Таким образом, задача была сведена к решению системы восьми граничных интегральных уравнений при девяти неизвестных функциях. То есть, количество неизвестных функций превышает количество уравнений. Для обеспечения единственности решения необходимо добавить еще одно уравнение. Данный вопрос был затронут во многих работах, в частности в работе [19] предлагались разные варианты выбора дополнительного уравнения, но численная реализация была проведена только для случая, когда в качестве этого уравнения задать компоненты главного вектора P_z . В данной работе в качестве дополнительного уравнения было выбрано следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\psi_5}{d\theta^2} = cr_0 \left(n_1 \frac{d\psi_3}{d\theta} + \lambda n_2 \frac{d\psi_4}{d\theta} + 2(-n_2\psi_3 + \lambda n_1\psi_4) \right) - \psi_5.$$

Численное решение системы. Для сведения системы сингулярных интегральных уравнений (1) к системе линейно алгебраических уравнений использовались специальные квадратурные формулы для интегралов типа Коши, в случае, когда неизвестные функции имеют корневую особенность на концах промежутка интегрирования [20–22]. Подобные сингулярные уравнения часто встречаются в задачах теории упругости, аэро- и гидродинамики. В работе [22] такой метод решения получил название метод механических квадратур. Для девятого дифференциального уравнения был использован метод конечных разностей. Решение разностной схемы называется приближенным решением дифференциальной задачи [23].

Таким образом, рассмотренная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений размерности $(9N + 2) \times (9N + 4)$. Для обеспечения единственности решения системы добавлены два алгебраических уравнения, полученные из таких интегральных уравнений

$$\int_{L_0} \psi_3 ds = 0; \int_{L_0} \psi_4 ds = 0.$$

Постановка задачи была сделана для случая, когда берега трещин не контактируют между собой. Поэтому после решения системы граничных интегральных уравнений необходимо проверить корректность постановки граничных условий, т.е. отсутствие контакта берегов разрезов [19]

$$2[u] \Big|_{L_i} \pm h[\theta_2] \Big|_{L_i} > 0, i = \overline{1, 2}.$$

Результаты численного исследования. В проведенном исследовании были вычислены коэффициенты концентрации напряжения, которые характеризуют напряженное состояние на контуре кругового отверстия в оболочке

$$K_{\theta}^T = T_{\theta}/p_0h; T_{\theta} = Eh\varepsilon_{\tau}/(1-\nu^2); \varepsilon_{\tau} = (n_{20}\psi_1 - n_{10}\psi_2)/(Eh); (p_0h = pR/2).$$

Параметр ρ определяет расстояние между дефектами $\rho = l/\gamma = l/d$.

Зависимость коэффициентов интенсивности усилий от гауссовой кривизны оболочки представлена на рис. 2 для следующих параметров оболочки: $h/r_0 = 0,1$; $R/h = 1$. Результаты приводятся для случая, когда дефекты находятся достаточно близко друг к другу, параметр $\rho = 0,4$. Рис. 2, а соответствует значениям коэффициентов интенсивности усилий на внутреннем конце разреза, а рис. 2, б – на внешнем конце разреза.

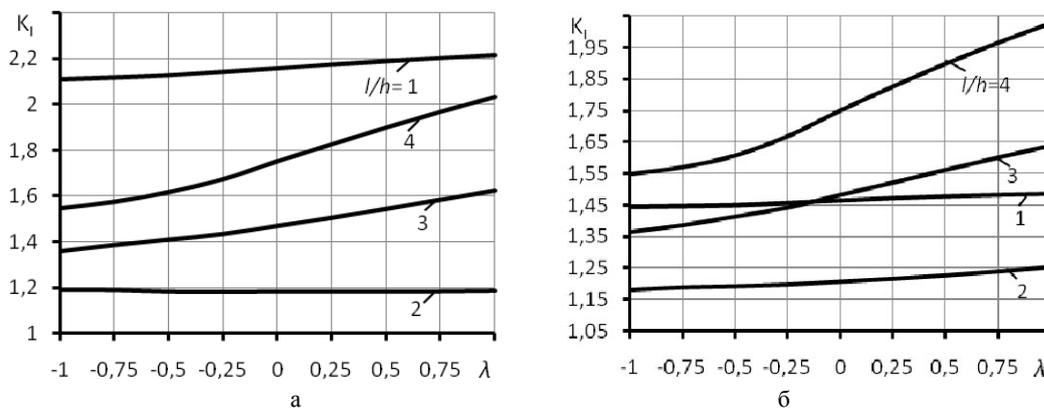


Рис. 2

Рис. 3 показує залежність коефіцієнтів концентрації напружень на контурі кругового отвору від гауссової кривизни оболочкі. Параметри оболочкі наступні: $h/r_0 = 0,1$; $R/h = 1$; $\rho = 0,4$. На рис. 3, а приводяться значення коефіцієнтів концентрації напружень на контурі отвору в точці $\theta = 0$, а на рис. 3, б – в точці $\theta = \pi/2$.

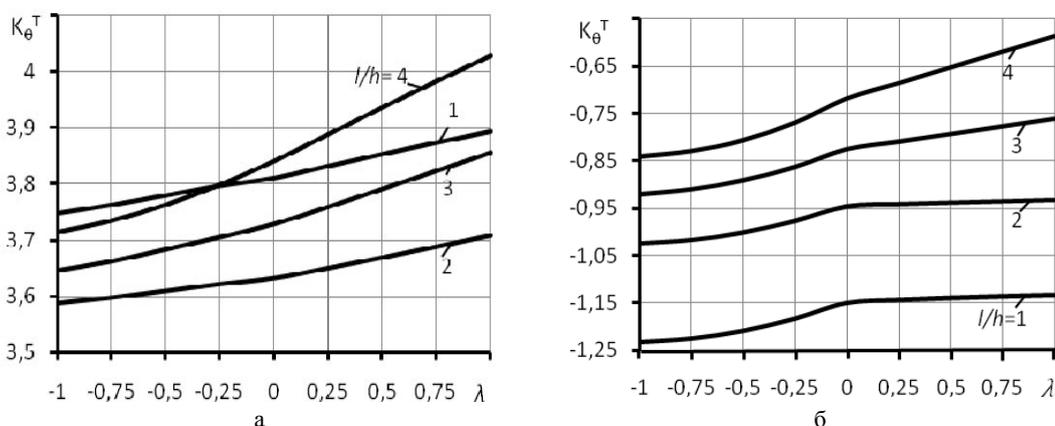


Рис. 3

Выводы. Было проведено исследование напряженно-деформированного состояния изотропной полой оболочки произвольной гауссовой кривизны с круговым отверстием и со сквозными трещинами под действием растягивающей нагрузки. Проведенное исследование показало, что уменьшение расстояния между дефектами оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние оболочки. При приближении дефектов друг к другу значения коэффициентов концентрации напряжения на контуре отверстия и значения коэффициентов интенсивности усилий на концах разрезов возрастают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Folias E. S. An axial crack in a pressurized cylindrical shell / E. S. Folias // International Journal of Fracture Mechanics. – 1965. – No 1. – P. 104–113.
2. Erdogan F. Cylindrical and spherical shells with cracks / F. Erdogan, J. Kibler // International Journal of Fracture Mechanics. – 1969. – Vol. 5, No 3. – P. 229–237.
3. Barsoum R. S. Analysis of through cracks in cylindrical shells by the quarter-point elements / R. S. Barsoum, R. W. Loomis, B. D. Stewart // International Journal of Fracture Mechanics. – 1979. – Vol. 15, No 3. – P. 259–280.
4. Chudnovsky A. Elastic interaction of a crack with a random array of microcracks / A. Chudnovsky, W. Shaofu // International Journal of Fracture. – 1991. – No 49. – P. 123–140.
5. Erdogan F. A note on the interference of two collinear cracks in shell / F. Erdogan, M. Ratwani // International Journal of Fracture. – 1974. – Vol. 10, No. 4. – P. 463–465.
6. Sanders J. L. Circumferential Through-Cracks in Cylindrical Shells under Tension / J. L. Sanders // Journal of Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 49, No 1. – P. 103–107.
7. Schmueser D. The periodic array of interface cracks and their interaction / D. Schmueser, M. Comlnou // International Journal of Solids and Structures. – 1979. – Vol. 15. – P. 927–934.
8. Picazo M. On the elastic compliance of a circular hole with two symmetric radial cracks initiated at its boundary / M. Picazo, I. Sevostianov // International Journal of Fracture. – 2011. – No 167. – P. 273–280.
9. Evaluation of S.I.F for crack emanating at 450 orientation from a hole in pressurised cylinder using fea / D. A. Akash, A. Anand, G. V. G. Reddy, L.J. Sudev // International Journal of Applied Research in Mechanical Engineering. – 2013. – Vol. 3, No 1. – P. 44–48.
10. Ishihama N. Axial cracks on both sides of a hole in a cylindrical shell / N. Ishihama // International Journal of Fracture. – 1984. – No 25. – P. 263–272.
11. Junhong G. Stress analysis for an elliptical hole with two straight cracks / G. Junhong, L. Guanting // Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 39, No 5. – P. 609–703.
12. Sergeev V. Stress intensity factors for an arbitrarily oriented crack near a hole in longeron web / V. Sergeev, E. Madenci, D. R. Ambur // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 1999. – No 31. – P. 213–222.
13. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: «Наука», 1976. – 512 с.
14. Власов В.З. Избранные труды. – В 3-х т. – Т.1 / В.З. Власов. – М.: Изд-во АН СССР., 1962. – 528 с.
15. Варвак П. М. Справочник по теории упругости / П. М. Варвак, А. Ф. Рябов. – К.: Будівельник, 1971. – 432 с.
16. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика / В. Л. Бидерман. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
17. Хижняк В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учеб. пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1979. – 179 с.
18. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек нулевой и отрицательной кривизн, ослабленных разрезами и отверстиями / Е. Н. Довбня // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естественные науки. – 1998. – № 2. – С. 45–52.

19. Шевченко В. П. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статички пологих ортотропних оболонок з розрізами й отворами / В. П. Шевченко, К. М. Довбня // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 47–59.
20. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: «Наукова думка», 1976. – 444 с.
21. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
22. Erdogan F. E. Numerical solutions of singular integral equations / F. E. Erdogan, G. D. Gupta, T. S. Cook // Methods of analysis and solutions of crack problems. Leyden: Noordhoff Intern. publ. – 1973. – P. 368–425.
23. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Поступила в редакцию 13.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто пружну рівновагу ізотропної пологої оболонки довільної гаусової кривини. Конструкція, що знаходиться під дією розтягу, послаблена двома наскрізними тріщинами, розташованими вздовж осі x , та круговим отвором між ними. Поставлена задача була зведена до системи лінійно алгебраїчних рівнянь. Чисельне рішення ґрунтувалося на використанні спеціальних квадратурних формул для інтегралів типу Коші, у разі, коли невідомі функції мають кореневу особливість на кінцях проміжку інтегрування і методу кінцевих різниць. У результаті були отримані значення коефіцієнтів концентрації напружень уздовж контуру отвору та значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль на кінцях тріщин.

Ключові слова: отвір, тріщина, оболонка, перетворення Фур'є, коефіцієнти концентрації напружень, коефіцієнти інтенсивності зусиль.

SUMMARY

The elastic equilibrium problem of isotropic shallow shell for arbitrarily gaussian curvature has been considered. The construction, which subjected to tension load, is weakened by two through cracks, located along the x -axis, and by circular hole between them. The problem was reduced to a system of linear algebraic equations. Numerical solution is based on the finite difference method and on the use of special quadrature formulas for Cauchy type integrals, while the unknown functions have a root singularity at the ends of the integration interval. As a result the stress concentration factors were obtained along hole contour and the stress intensity factors were obtained at the ends of cracks.

Keywords: hole, crack, shell, Fourier transformation, stress concentration factors, stress intensity factors.

УДК 539.3: 534.1

А. В. Елагин, И. А. Моисеенко

**АНАЛИЗ ВТОРЫХ ГАРМОНИК НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ
В ЗАКРЕПЛЕННОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ:
МОДЕЛЬ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

В статье представлены результаты теоретического численно-аналитического исследования свойств нелинейных вторых гармоник, генерируемых при распространении монохроматических осесимметричных нормальных упругих волн кручения вдоль осевого направления в трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения с закрепленной боковой поверхностью. Для цилиндров из титаната бария, титаната-цирконата свинца и монокристаллического цинка проведен частотный параметрический анализ амплитуд и форм волновых движений во вторых гармониках для нормальных волн исследуемого типа. Описан ряд закономерностей, свойственных рассматриваемому типу волновых процессов.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, геометрическая нелинейность, монохроматические нормальные крутильные волны, нелинейные ангармонические возмущения, амплитудно-частотные характеристики вторых гармоник.

Анализ нелинейных ангармонических эффектов при распространении волн деформаций остается актуальной фундаментальной и прикладной научной проблемой с обширным рядом в различной мере изученных аспектов [1–7]. К исследованным в наименьшей мере относятся задачи описания нелинейных ангармонических возмущений в полях нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль волноводов пространственной геометрии [8–13]. В частности, анализ свойств нелинейных вторых гармоник для уединенных монохроматических нормальных волн в цилиндрических волноводах реализован только для случаев осесимметричных крутильных и продольно-сдвиговых волн в изотропных круговых цилиндрах с несколькими типами краевых условий на боковой поверхности. В этих исследованиях использовалась модель геометрически и физически нелинейного деформирования с использованием потенциала Мурнагана и теории конечных деформаций [14–19].

В данной работе исследованы характеристики малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндрических волноводах распространены на случай модели геометрически нелинейного волнового деформирования трансверсально-изотропных цилиндров.

Постановка задачи. Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр кругового сечения с радиусом R , занимающий область

$$V = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\} = \left\{ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1, -\infty < x_3 < \infty \right\}$$

в отнесенных к нормирующему параметру $R_* \equiv R$ безразмерных цилиндрических $O_{r\theta z}$ и прямоугольных $O_{x_1x_2x_3}$ координатах. Для описания волнового динамического деформирования цилиндра из материала с

осью упругой симметрии, ориентированной вдоль координатной оси O_z , используется модель, основанная на тензорном представлении упругого потенциала U с квадратичными членами по деформациям ε_{jq} вида

$U = (c_{jqpk} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{pk})/2$ в прямоугольных координатах $O_{x_1x_2x_3}$, на выражениях для механических напряжений на основных площадках этих координат $\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d}$ и тензорных нелинейных соотношениях

для конечных деформаций $\varepsilon_{jq} = (u_{j,q} + u_{q,j} + u_{l,q} u_{l,j})/2$, в которых $u_{j,q} = \partial u_j / \partial u_q$, u_j ($j = \overline{1,3}$) – компоненты вектора волновых упругих перемещений в прямоугольных координатах. Компоненты вектора перемещений u_j ($j = \overline{1,3}$) и u_α ($\alpha = r, \theta, z$) соответственно в прямоугольных и цилиндрических координатах считаются безразмерными, отнесенными к нормирующему параметру u_* с линейной размерностью, имеющему вид $u_* = \max_{\{r, \theta, z, t, \alpha\}} |\check{u}_\alpha(r, \theta, z, t)|$. Отношение введенных нормирующих параметров

$\delta = u_*/R_*$ в рамках гипотезы о малости исследуемых нелинейных волновых эффектов [1–4] интерпретируется как малый параметр $\delta \ll 1$. Полагается также, что рассматриваемые далее компоненты тензора

упругих постійних матеріала циліндра c_{ij} і динамічні напруження $\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d}$ являються безрозмірними характеристиками, отнесеними к нормуючому параметру c_* .

В рамках приймаємої методології для компонентів вектора хвильових переміщень u_α ($\alpha = r, \theta, z$) вводяться представлення $u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta u_\alpha^{(n)}$, включаючі лінійні складові $u_\alpha^{(l)}$ і нелінійні ангармонічні порушення $u_\alpha^{(n)}$. Вирази для компонентів тензора динамічних напружень $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ на основних площадках циліндричної системи координат, що відповідають такому варіанту представлення u_α , приймають форму сумм лінійних і квадратичних членів по степеням параметра δ

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(l)})\delta + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(n)}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) \right) \delta^2 \quad (\alpha, \beta = r, \theta, z),$$

а входять в ці представлення характеристики симетричних тензорів $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)})$ ($q = l, n$) і $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})$ в рамках розглядаємої моделі для випадку осесиметричного геометрично нелінійного деформування трансверсально-ізотропного циліндра мають вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) &= c_{13}\partial_z u_z^{(q)} + c_{12}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{11}\partial_r u_r^{(q)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})(\partial_r u_\theta^{(q)} - r^{-1}u_\theta^{(q)}), \\ \sigma_{rz}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) &= c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)}, \\ \sigma_{\theta r}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})(\partial_r u_\theta^{(q)} - r^{-1}u_\theta^{(q)}), \quad \sigma_{zr}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \\ \sigma_{z\theta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) &= c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)}, \quad \sigma_{zz}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{33}\partial_z u_z^{(q)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{13}\partial_r u_r^{(q)} \quad (q = l, n); \quad (1) \\ \sigma_{rr}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left(c_{13}(\partial_z u_z^{(l)})^2 + c_{11}(\partial_z u_r^{(l)})^2 + c_{12}r^{-2}(u_r^{(l)})^2 + c_{12}(\partial_z u_\theta^{(l)})^2 + \right. \\ &+ c_{11}r^{-2}(u_\theta^{(l)})^2 + 2c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44})(\partial_r u_z^{(l)})^2 + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + \\ &+ 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 3c_{11}(\partial_r u_r^{(l)})^2 - (c_{11} + c_{12})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11}(\partial_r u_\theta^{(l)})^2 \left. \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left(c_{13}(\partial_z u_z^{(l)})^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + c_{12}(\partial_z u_r^{(l)})^2 + 3c_{11}r^{-2}(u_r^{(l)})^2 + \right. \\ &+ c_{11}(\partial_z u_\theta^{(l)})^2 + c_{11}r^{-2}(u_\theta^{(l)})^2 + c_{13}(\partial_r u_z^{(l)})^2 + 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + \\ &+ c_{12}(\partial_r u_r^{(l)})^2 - (c_{11} - c_{12})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11}(\partial_r u_\theta^{(l)})^2 \left. \right), \\ \sigma_{zz}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left(3c_{33}(\partial_z u_z^{(l)})^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_z^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44})(\partial_z u_r^{(l)})^2 + \right. \\ &+ c_{13}r^{-2}(u_r^{(l)})^2 + (c_{13} + 2c_{44})(\partial_z u_\theta^{(l)})^2 + c_{13}r^{-2}(u_\theta^{(l)})^2 + c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + \\ &+ c_{33}(\partial_r u_z^{(l)})^2 + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + c_{13}(\partial_r u_r^{(l)})^2 + c_{13}(\partial_r u_\theta^{(l)})^2 \left. \right), \\ \sigma_{r\theta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left((c_{12} - c_{11})\partial_z u_r^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{12} - c_{11})r^{-2}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)} + 2c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + \right. \\ &+ (c_{12} - c_{11})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11}\partial_r u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} \left. \right), \\ \sigma_{rz}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + c_{33}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44})\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}, \\
 \sigma_{\theta z}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) & = c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} - c_{44}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}, \\
 \sigma_{\theta r}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) & = \frac{1}{2}\left(-2c_{13}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_z u_z^{(l)} + (c_{12} - c_{11})\partial_z u_r^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} - 2c_{11}r^{-2}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)}\right. \\
 & \quad \left.- 2c_{11}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12})r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + (c_{11} - c_{12})\partial_r u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\right), \\
 \sigma_{zr}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) & = \frac{1}{2}\left(2(c_{13} + 2c_{44})\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + 2c_{12}r^{-1}(\partial_z u_r^{(l)})^2 + (c_{12} - c_{11})r^{-1}(\partial_z u_r^{(l)})^2 +\right. \\
 & \quad \left.+ 2c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + 2c_{11}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 2c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12})\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\right), \\
 \sigma_{z\theta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) & = \frac{1}{2}\left(2(c_{13} + 2c_{44})\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{11} + c_{12})r^{-1}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)} +\right. \\
 & \quad \left.+ 2c_{12}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12})\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\right). \tag{2}
 \end{aligned}$$

В соотношениях (1), (2) величины c_{ij} являются упругими постоянными второго порядка для трансверсально-изотропного материала цилиндра; $\partial_\alpha = \partial/\partial\alpha$ ($\alpha = r, \theta, z$). Подстановка общих представлений для компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ в виде сумм линейных и квадратичных членов по степеням параметра δ в уравнения движения

$$\begin{aligned}
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{rr}) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta} + \partial_z\sigma_{rz} - r^{-1}\sigma_{\theta\theta} - \delta(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_r & = 0, \\
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{\theta r}) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta} + \partial_z\sigma_{\theta z} - r^{-1}\sigma_{r\theta} - \delta(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_\theta & = 0, \\
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{zr}) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{z\theta} + \partial_z\sigma_{zz} - \delta(\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_z & = 0, \tag{3}
 \end{aligned}$$

а также в граничные условия закрепления боковой поверхности цилиндра

$$(u_r)_{r=1} = (u_\theta)_{r=1} = (u_z)_{r=1} = 0 \tag{4}$$

с последующим приравнованием слагаемых одинакового порядка малости по степеням малого параметра δ в рассматриваемом случае приводит к следующей рекуррентной последовательности краевых задач определения амплитудных составляющих для комплексных функций перемещений $u_\alpha^{(l)}$ и $u_\alpha^{(n)}$

$$\begin{aligned}
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{rr}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)})) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \\
 + \partial_z\sigma_{rz}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_r^{(l)} & = 0, \\
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{\theta r}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)})) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \\
 + \partial_z\sigma_{\theta z}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - r^{-1}\sigma_{r\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_\theta^{(l)} & = 0, \\
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{zr}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)})) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{z\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \\
 + \partial_z\sigma_{zz}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_z^{(l)} & = 0; \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$(u_r^{(l)})_{r=1} = (u_\theta^{(l)})_{r=1} = (u_z^{(l)})_{r=1} = 0; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 r^{-1}\partial_r(r\sigma_{rr}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)})) + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \partial_z\sigma_{rz}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - \\
 - r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_r^{(n)} = -\left(r^{-1}\partial_r(r\sigma_{rr}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)})) +\right. \\
 \left.+ r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \partial_z\sigma_{rz}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(n)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)})\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r^{-1} \partial_r \left(r \sigma_{\theta r}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \partial_z \sigma_{\theta z}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \\
 & - r^{-1} \sigma_{r\theta}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta^{(n)} = - \left(r^{-1} \partial_r \left(r \sigma_{\theta r}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \partial_z \sigma_{\theta z}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) - r^{-1} \sigma_{r\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right), \\
 & r^{-1} \partial_r \left(r \sigma_{zr}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{z\theta}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \partial_z \sigma_{zz}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z^{(n)} = \\
 & = - \left(r^{-1} \partial_r \left(r \sigma_{zr}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{z\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \partial_z \sigma_{zz}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right); \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\left(u_r^{(n)} \right)_{r=1} = \left(u_\theta^{(n)} \right)_{r=1} = \left(u_z^{(n)} \right)_{r=1} = 0. \quad (8)$$

В случае определения вторых гармоник для осесимметричных нормальных волн кручения с круговой частотой ω в закрепленном цилиндре после введения исходных представлений

$$\begin{aligned}
 u_\theta^{(l)} &= u_\theta^{(0,l)}(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \quad u_r^{(l)} = u_z^{(l)} = 0, \\
 u_\alpha^{(n)} &= u_\alpha^{(0,n)}(r) \exp(-2i(\omega t - kz)) \quad (\alpha = r, \theta, z), \quad (9)
 \end{aligned}$$

задача сводится к нахождению амплитудных составляющих $u_\theta^{(0,l)}(r)$, $u_\alpha^{(0,n)}(r)$ из граничных задач

$$r^2 \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'' + r \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \left((\beta r)^2 - 1 \right) u_\theta^{(0,l)} = 0, \quad (10)$$

$$u_\theta^{(0,l)}(1) = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{11}^{(1)} u_r^{(0,n)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2} u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} \left(u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{14}^{(1)} \left(u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{15}^{(1)} \left(u_r^{(0,n)} \right)'' = \\
 & = \Delta_{11}^{(2)} r^{-3} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)^2 + \Delta_{12}^{(2)} r^{-1} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)^2 + \Delta_{13}^{(2)} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \Delta_{14}^{(2)} r^{-2} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \\
 & \quad \Delta_{15}^{(2)} r^{-1} \left(\left(u_\theta^{(0,l)} \right)' \right)^2 + \Delta_{16}^{(2)} r^{-1} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'' + \Delta_{17}^{(2)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'', \\
 & \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} \left(u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} \left(u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{25}^{(1)} \left(u_z^{(0,n)} \right)'' = \Delta_{21}^{(2)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)^2 + \\
 & + \Delta_{22}^{(2)} r^{-2} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)^2 + \Delta_{23}^{(2)} r^{-1} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \Delta_{24}^{(2)} \left(\left(u_\theta^{(0,l)} \right)' \right)^2 + \Delta_{25}^{(2)} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)''; \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$u_r^{(0,n)}(1) = u_z^{(0,n)}(1) = 0. \quad (13)$$

В соотношениях (10), (12) введены обозначения $\beta = \sqrt{\Omega^2 - 2c_{44}k^2 / (c_{11} - c_{12})}$ и $\Delta_{ij}^{(p)}$ для постоянных коэффициентов, выражаемых через упругие постоянные материала цилиндра, параметры приведенной частоты и нормированного волнового числа следующими представлениями:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11}^{(1)} &= \Omega^2 - c_{44}k^2, \quad \Delta_{12}^{(1)} = -c_{11}, \quad \Delta_{13}^{(1)} = c_{11}, \quad \Delta_{14}^{(1)} = ik(c_{13} + c_{44}), \quad \Delta_{15}^{(1)} = c_{11}, \quad \Delta_{11}^{(2)} = c_{11}, \\
 \Delta_{12}^{(2)} &= k^2(c_{12} - c_{11})/2, \quad \Delta_{13}^{(2)} = k^2(c_{12} + c_{44})/2, \quad \Delta_{14}^{(2)} = (c_{12} - 3c_{11})/2, \\
 \Delta_{15}^{(2)} &= (c_{11} - c_{12})/2, \quad \Delta_{16}^{(2)} = (c_{11} - c_{12})/2, \quad \Delta_{17}^{(2)} = -c_{11}, \quad \Delta_{21}^{(1)} = \Omega^2 - c_{33}k^2, \quad \Delta_{22}^{(1)} = ik(c_{13} + c_{44}), \\
 \Delta_{23}^{(1)} &= ik(c_{13} + c_{44}), \quad \Delta_{24}^{(1)} = c_{44}, \quad \Delta_{25}^{(1)} = c_{44}, \quad \Delta_{21}^{(2)} = ik^3(c_{44} - c_{13}/2), \quad \Delta_{22}^{(2)} = -ic_{13}k/2, \\
 \Delta_{23}^{(2)} &= ik(c_{11} - c_{12})/2, \quad \Delta_{24}^{(2)} = ik(c_{12} - c_{11} - c_{13})/2, \quad \Delta_{25}^{(2)} = ik(c_{12} - c_{11})/2,
 \end{aligned}$$

где $\Omega = \sqrt{2\rho\omega^2 / (c_{11} - c_{12})}$.

Базисные решения задачи первого приближения (10), (11), описывающие моды крутильных волн с номером p , имеют вид

$$u_{\theta}^{(0,l)}(r) = u^{(0)} \beta_p^* J_1(\beta_p^* r), \quad \beta_p^* = \sqrt{\beta_p^2 - 2c_{44}k^2 / (c_{11} - c_{12})},$$

где β_p ($p = \overline{1, \infty}$) – корни трансцендентного дисперсионного уравнения $J_1(\beta) = 0$.

Структура соотношений краевой задачи (12), (13) показывает, что искомые вторые гармоники априори являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой. Частные решения системы неоднородных дифференциальных уравнений (12) получены на основе замены их правых частей представлениями в виде степенных рядов по переменной r с использованием абсолютно сходящихся степенных разложений для входящих в выражение $u_{\theta}^{(0,l)}(r)$ цилиндрических функций Бесселя первого рода, в результате которой система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{(1)} u_r^{(0,n)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2} u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} (u_r^{(0,n)})' + \Delta_{14}^{(1)} (u_z^{(0,n)})' + \Delta_{15}^{(1)} (u_r^{(0,n)})'' &= (u^{(0)})^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p r^p \\ \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} (u_r^{(0,n)})' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} (u_z^{(0,n)})' + \Delta_{25}^{(1)} (u_z^{(0,n)})'' &= (u^{(0)})^2 \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p r^p. \end{aligned} \quad (14)$$

Для коэффициентов α_p и β_p в представлениях (14) получены крайне громоздкие аналитические представления. Таким образом, полное решение системы дифференциальных уравнений (12) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= \left(-A_1 \xi_1 J_1(\xi_1 r) - A_2 \xi_2 J_1(\xi_2 r) + (u^{(0)})^2 F_1(r) \right) \exp(-2i(\omega t - kz)), \\ u_z^{(n)} &= \left(A_1 \eta_1 J_0(\xi_1 r) + A_2 \eta_2 J_0(\xi_2 r) + (u^{(0)})^2 F_2(r) \right) \exp(-2i(\omega t - kz)), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\xi_j = \sqrt{\left(-B - (-1)^j \sqrt{B^2 - 4AC} \right) / (2A)}, \quad \eta_j = \left(ik \xi_j^2 (c_{13} + c_{44}) \right) / \left(\Omega^2 - c_{33}k^2 - c_{44}\xi_j^2 \right) \quad (j = 1, 2),$$

$$A = c_{11}c_{44}, \quad B = -(c_{11} + c_{44})\Omega^2 - (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33}k^2), \quad C = (\Omega^2 - c_{33}k^2)(\Omega^2 - c_{44}k^2);$$

A_j – произвольные постоянные коэффициенты; $F_j(r)$ – частные решения системы уравнений (12),

представляемых в виде рядов $F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p$, $F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p$, с определяемыми из рекуррентных

формул коэффициентами

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta_{13}^{(n)}}, \quad b_1 = \frac{\beta_1}{\Delta_{23}^{(n)}}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2 - b_1 \Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)} + 2\Delta_{13}^{(n)} + 2\Delta_{15}^{(n)}}, \quad b_2 = \frac{\beta_2 - a_1 (\Delta_{22}^{(n)} - \Delta_{24}^{(n)})}{2\Delta_{23}^{(n)} + 2\Delta_{25}^{(n)}},$$

$$b_{p+2} = \left(\beta_{p+2} - \Delta_{21}^{(n)} b_p - \Delta_{22}^{(n)} a_{p+1} - \Delta_{24}^{(n)} (p+1) a_{p+1} \right) / \left(\Delta_{23}^{(n)} (p+2) + \Delta_{25}^{(n)} (p+1)(p+2) \right),$$

$$a_{p+2} = \left(\alpha_{p+2} - \Delta_{11}^{(n)} a_p - \Delta_{14}^{(n)} (p+1) b_{p+1} \right) / \left(\Delta_{12}^{(n)} + \Delta_{13}^{(n)} (p+2) + \Delta_{15}^{(n)} (p+1)(p+2) \right) \quad (p = \overline{1, \infty}).$$

В результате подстановки представлений (15) в краевые условия (13), в предположении о том, что точки $(2k, 2\Omega)$ не принадлежат какой-либо из мод дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в закрепленном по боковой поверхности цилиндре, определяются коэффициенты A_j в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_1 &= (u^{(0)})^2 \frac{\chi_{12} F_2(R) - \chi_{22} F_1(R)}{\chi_{11} \chi_{22} - \chi_{12} \chi_{21}}, \quad A_2 = (u^{(0)})^2 \frac{\chi_{21} F_1(R) - \chi_{11} F_2(R)}{\chi_{11} \chi_{22} - \chi_{12} \chi_{21}}, \\ \chi_{11} &= -\xi_1 J_1(\xi_1 r), \quad \chi_{12} = \xi_2 J_1(\xi_2 r), \quad \chi_{21} = \eta_1 J_0(\xi_1 r), \quad \chi_{22} = \eta_2 J_0(\xi_2 r). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, получена аналитическая форма представлений комплексных функций волновых перемещений в геометрически нелинейных вторых гармониках монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения, позволяющая провести анализ ряда амплитудно-частотных эффектов в ангармонических возмущениях.

Результаты численных исследований. В качестве исследуемых кинематических характеристик для вторых гармоник осесимметричных монохроматических нормальных волн кручения в данной работе рассматриваются параметрические частотные изменения в зависимости распределений нормированных амплитудных значений волновых перемещений в анализируемых ангармонических возмущениях вдоль радиальной координаты в области сечения волновода. Представляемые на рис. 1 – рис. 4 и анализируемые ниже результаты расчетов относятся к случаям распространения крутильных волн с варьируемой относительной длиной $\tilde{\lambda} = 2\pi/(\tilde{k}R)$ из двух низших действительных ветвей дисперсионных спектров в цилиндрах из титаната бария, титаната-цирконата свинца и монокристаллического цинка с физико-механическими характеристиками, приведенными в работе [4]. Зависимости для указанных материалов соответственно представлены на рисунках сплошными, пунктирными и точечно-пунктирными линиями.

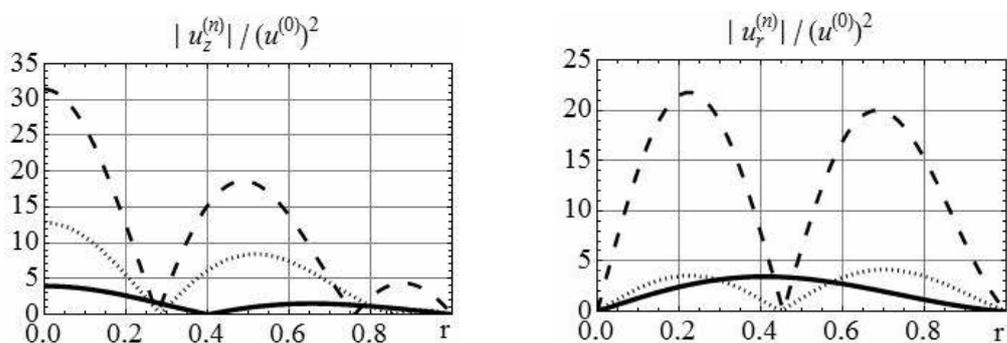


Рис. 1. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1$ из первой моды для цилиндров с закрепленной границей

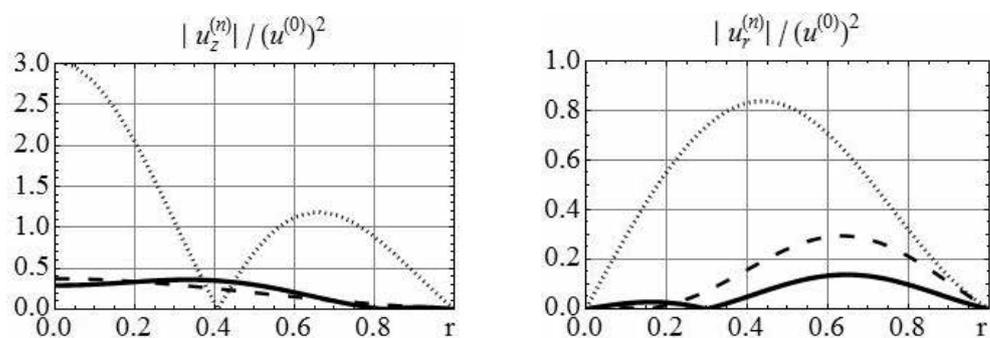


Рис.2. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из первой моды для цилиндров с закрепленной границей

Как показывает сопоставление распределений, приведенных на рис. 1 и рис. 2 для случаев распространения относительно коротких $\tilde{\lambda} = 1$ и относительно длинных $\tilde{\lambda} = 4$ нормальных волн кручения из нижней действительной моды дисперсионных спектров для рассматриваемых цилиндров, увеличение относительной длины ведет к существенному, составляющему более порядка снижению амплитудных максимумов в ангармонических возмущениях. Если для волн с $\tilde{\lambda} = 1$ наибольшими являются нормированные амплитуды вторых гармоник в цилиндре из титаната-цирконата свинца, то для волн с $\tilde{\lambda} = 4$ существенно доминируют по величине амплитуды вторых гармоник в цилиндре из цинка. Преимущественно продольными являются вторые гармоники относительно коротких волн в цилиндре из цинка и относительно длинных волн в цилиндре из титаната-цирконата свинца. Во всех остальных представленных на рис. 1 и рис. 2 случаях радиальная и осевая компоненты вторых гармоник имеют сопоставимые величины. Для обоих вариантов относительной длины характерно низкими являются амплитудные уровни ангармонических возмущений в цилиндре из титаната бария. Можно также указать на эффект появления дополнительной узловой линии в радиальных амплитудных распределениях волновых перемещений во вторых гармониках для цилиндров из титаната-цирконата свинца и цинка по сравнению со случаем цилиндра из титаната бария.

Радиальные распределения нормированных амплитудных значений волновых перемещений в анализируемых ангармонических возмущениях для волн кручения из вторых мод дисперсионных спектров рассматриваемых цилиндров представлены на рис. 3 и рис. 4. В случае коротких волн доминирующими по величине являются вторые гармоники в цилиндре из цинка, имеющие преимущественно продольный тип. В случае же относительно длинных волн общий уровень амплитудных максимумов, как и в предшествующем случае, снижается практически на порядок и отсутствует выраженное доминирование амплитудных максимумов для какого-либо из рассматриваемых цилиндров.

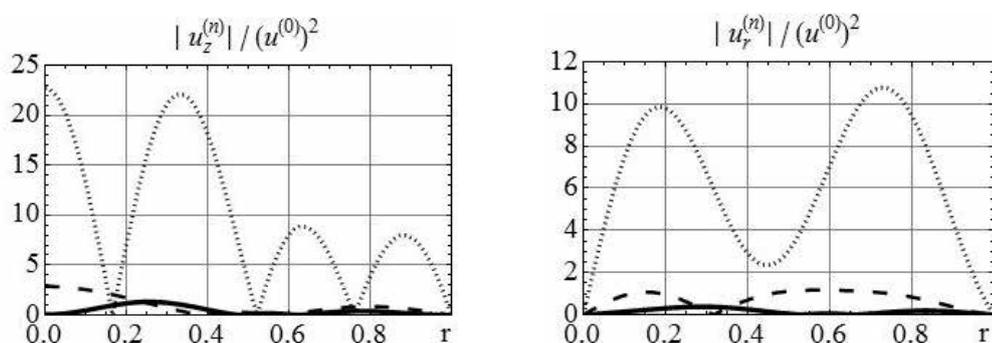


Рис.3. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1$ из второй моды для цилиндров с закрепленной границей

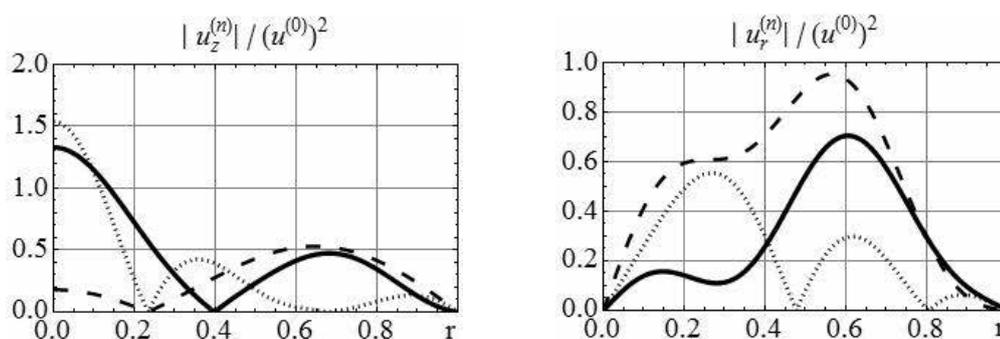


Рис.4. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из второй моды для цилиндров с закрепленной границей

Выводы. В статье представлена разработка теоретической численно-аналитической методики исследования свойств нелинейных вторых гармоник, генерируемых при распространении монохроматических осесимметричных нормальных упругих волн кручения вдоль направления оси в трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения с закрепленной боковой поверхностью в рамках модели геометрически нелинейного деформирования с использованием квадратичного упругого потенциала и теории конечных деформаций. Представления для волновых упругих перемещений во вторых гармониках, представляющих собой осесимметричные упругие волны продольно-сдвигового типа, получены на основе метода малого параметра в аналитической форме. Проведен частотный параметрический анализ амплитуд и форм волновых движений во вторых гармониках для нормальных волн исследуемого типа в цилиндрах из титаната бария, титаната - цирконата свинца и монокристаллического цинка. Дано описание ряда закономерностей в зависимостях максимумов амплитуд нелинейных вторых гармоник от параметра относительной длины нормальной волны кручения и фактора ее принадлежности к конкретной моде дисперсионного спектра, а также от типа материала цилиндра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лямов В. Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах / В. Е. Лямов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 224 с.
2. Зарембо Л. К. Нелинейная акустика / Л. К. Зарембо, В. И. Тимошенко. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 104 с.
3. Красильников В. А. Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
4. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.

5. Рушицький Я. Я. Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль / Я. Я. Рушицький // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 1. – С. 90–105.
6. Rushchitsky J. J. Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Plane-Strain State / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, No 5. – P. 496–505.
7. Rushchitsky J. J. Analysis of a Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Longitudinal Wave / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, No 2. – P. 148–158.
8. Куренная К. И. Вторые гармоники нелинейных нормальных SH-волн в пластине из монокристалла германия / К. И. Куренная, В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 131–138.
9. Куренная К. И. Ангармонические эффекты при распространении нелинейных нормальных P-SV волн в анизотропном упругом слое / К. И. Куренная, В. И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 116–124.
10. Kurennaaya K. I. Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal layer / K. I. Kurennaaya, V. I. Storozhev // J. Computational and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 6, No 1. – P. 67–82.
11. Kurennaaya K. I. Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer / K. I. Kurennaaya, V. I. Storozhev // Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7-10 July 2003). – Stockholm, IIAV, 2003. – P. 3605–3612.
12. Куслива А. О. Нелінійні ефекти при розповсюдженні монохроматичних пружних SH хвиль в анізотропному шарі з гнучкими нерозтяжними покриттями граней / А. О. Куслива // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2008. – Вип. 2. – С. 81–87.
13. Кусливая А. А. Нелинейные эффекты при распространении нормальных P-SV волн в слое со скользящей заделкой граней / А. А. Кусливая, В. И. Сторожев // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 313–319.
14. Sugimoto N. Nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto, M. Hirao // J. Acoust. Soc. Am. – 1977. – Vol. 62, No 1. – P. 23–32.
15. Sugimoto N. Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – Vol. 64, No 4. – P. 1190–1195.
16. Елагин А. В. Кинематические свойства нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в цилиндрическом волноводе / А. В. Елагин, В. И. Сторожев // Актуальные проблемы механики деформированного твердого тела: Материалы VI Международной научной конференции. – Донецк, 2010. – С. 141–145.
17. Yelagin A. V. Nonlinear second harmonics axisymmetric waves of torsion in a cylindrical waveguide with a clamped surface / A. V. Yelagin, V. I. Storozhev // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 347–353.
18. Єлагін О. В. Нелінійні ангармонічні збудження при розповсюдженні осесиметричних поздовжньо-зсувних нормальних хвиль в пружному циліндрі / О. В. Єлагін, В. І. Сторожев // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2010. – Вип. 2. – С. 77–83.
19. Сторожев В. И. Влияние типа краевых условий на уровни вторых гармоник осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндре / А. В. Елагин, В. И. Сторожев // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 315–324.

Поступила в редакцію 12.05.2014 г.

РЕЗЮМЕ

У статті представлено результати теоретичного чисельно-аналітичного дослідження властивостей нелінійних других гармонік, що генеруються при поширенні монохроматичних осесиметричних нормальних пружних хвиль кручення вздовж напрямку осі у трансверсально-ізотропному циліндрі кругового перерізу із закріпленою бічною поверхнею. Для циліндрів з титанату барію, титанату-цирконату свинцю та монокристалічного цинку проведено частотний параметричний аналіз амплітуд і форм хвильових рухів в других гармоніках для нормальних хвиль досліджуваного типу. Дано опис ряду закономірностей, властивих розглядуваному типу хвильових процесів.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний циліндричний хвилевід, геометрична нелінійність, монохроматичні нормальні крутильні хвилі, нелінійні ангармонічних збудження, амплітудно-частотні характеристики других гармонік.

SUMMARY

In article are presented the theoretical numerical-analytical investigation of nonlinear second harmonics generated by the propagation of axisymmetric normal elastic torsion waves along the axial direction in a transversely isotropic cylinder of circular cross section with a fixed lateral surface. The forms and amplitudes of wave motion in geometrical nonlinear wave with variable relative lengths were analyzed for a cylinder made of ceramics of barium titanate, ceramics of plumbum titanate zirconate and of monocrystal zinc.

Keywords: transversely isotropic cylindrical waveguide, geometric nonlinearity, monochromatic normal torsion wave, nonlinear anharmonic perturbation, amplitude-frequency characteristics of the second harmonics.

УДК 531.38

А. В. Зыза

НОВЫЙ СЛУЧАЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА-ПУАССОНА

В работе исследуются условия существования специального класса полиномиальных решений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Построено одно новое частное решение уравнений рассматриваемого движения, зависящее от двух независимых параметров. Новое решение выражается в виде функций, полученных обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа-Пуассона, гиростат, потенциальные и гироскопические силы, эллиптические функции времени, инвариантное соотношение.

Введение. Движение многих объектов недеформируемых конструкций современной техники, начиная с гироскопических систем и заканчивая устройствами, имитирующими живые организмы, моделируется как движение системы твердых тел типа гиростата в различных силовых полях.

Математическая сложность модели и практическая важность разработок в этой области определяют ряд научных направлений. Одним из них является направление, в котором изучается классическая задача о движении твердого тела и различные ее обобщения. Среди этих задач особое место занимает задача о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил, дифференциальные уравнения которой допускают только три первых интеграла [1].

Интегрирование уравнений динамики тяжелого твердого тела в случае, когда применение теории Якоби невозможно в силу отсутствия четвертого дополнительного интеграла, проводится с помощью других методов [2, 3]. В классической задаче для уравнений движения получено большое количество новых частных решений различной структуры, в частности, полиномиальной. Однако для нее в теории полиномиальных решений в основном появляются для действительных решений только теоремы несуществования новых решений. Это в определенной мере исчерпывает проблему построения полиномиальных решений в классической задаче.

Принципиальной сложностью исследования полиномиальных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона является невозможность получения уравнений типа Н. Ковалевского и П. В. Харламова [2, 3] на функции – квадраты второй и третьей компонент вектора угловой скорости гиростата – в силу нелинейности правых частей дифференциальных уравнений по компонентам вектора, характеризующего направление оси симметрии силовых полей. Тем не менее, большое количество параметров уравнений Кирхгофа-Пуассона и более общая структура по отношению к уравнениям Эйлера-Пуассона позволила построить новые решения различных полиномиальных классов [4–8].

В данной статье начато изучение условий существования в задаче о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил полиномиальных решений специального класса. Структура этого класса решений такова, что одна из основных переменных задачи содержит дробно-линейную функцию от первой компоненты вектора угловой скорости гиростата. В статье получен новый случай интегрируемости уравнений движения гиростата.

Постановка задачи. Преобразование дифференциальных уравнений движения гиростата.

Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем и ньютоновском притяжении масс. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку и параллельной вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Уравнения движения рассматриваемого гиростата относятся к уравнениям класса Кирхгофа [9] и в векторной форме [1] таковы

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times Bv + v \times (Cv - s), \quad \dot{v} = v \times \omega. \quad (1)$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot v) + (Cv \cdot v) = 2E, \quad 2(A\omega + \lambda) \cdot v - (Bv \cdot v) = 2k, \quad v \cdot v = 1. \quad (2)$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $v = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ – гиростатический момент;

$s = (s_1, s_2, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиристора построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E и k – постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + B_3 \omega_2 v_3 - B_3 \omega_3 v_2 + (C_3 - C_2) v_2 v_3 + \lambda_2 \omega_3 + s_2 v_3,$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1) \omega_1 \omega_3 + B_1 \omega_3 v_1 - B_3 \omega_1 v_3 + (C_1 - C_3) v_1 v_3 - \lambda_1 \omega_3 - s_1 v_3,$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 - B_1 \omega_2 v_1 + B_2 \omega_1 v_2 + (C_2 - C_1) v_1 v_2 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1 + s_1 v_2 - s_2 v_1; \quad (3)$$

$$\dot{v}_1 = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2; \quad (4)$$

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - 2(s_1 v_1 + s_2 v_2) + C_1 v_1^2 + C_2 v_2^2 + C_3 v_3^2 = 2E,$$

$$2(A_1 \omega_1 + \lambda_1) v_1 + 2(A_2 \omega_2 + \lambda_2) v_2 + 2A_3 \omega_3 v_3 - B_1 v_1^2 - B_2 v_2^2 - B_3 v_3^2 = 2k, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1. \quad (5)$$

Следуя [5, 7], поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) решений вида

$$\omega_1 = p, \quad \omega_2 = Q(p) = \sum_{i=0}^n b_i p^i, \quad \omega_3 = R(p) = \sum_{j=0}^m c_j p^j,$$

$$v_1 = \varphi(p) = \sum_{i=0}^l a_i p^i, \quad v_2 = \psi(p) = \sum_{j=0}^{m_1} g_j p^j, \quad v_3 = \frac{\varkappa(p)}{p} \omega_3, \quad \varkappa(p) = \sum_{i=0}^{m_1} f_i p^i, \quad (6)$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа, коэффициенты b_i, c_j, a_i, g_j, f_i – параметры, подлежащие определению.

Подставим выражения (6) в уравнения (3), (4) и геометрический интеграл из (5):

$$\dot{p} = (p\psi(p) - Q(p)\varkappa(p))(p\varphi'(p))^{-1} \sqrt{R(p)}; \quad (7)$$

$$\psi'(p)(p\psi(p) - Q(p)\varkappa(p)) = \varphi'(p)\Omega(p)p, \quad \Omega(p) = \varkappa(p) - \varphi(p),$$

$$\left(R(p)\varkappa^2(p)p^{-2} \right)' \Omega(p)p = 2\psi'(p)\varkappa(p)(Q(p)\varphi(p) - p\psi(p)); \quad (8)$$

$$A_1 \Omega(p)p = \psi'(p) \left\{ ((C_3 - C_2)\psi(p) + B_3 Q(p) + s_2)\varkappa(p) + ((A_2 - A_3)Q(p) - B_2 \psi(p) + \lambda_2)p \right\}; \quad (9)$$

$$A_2 Q'(p)\Omega(p)p = \psi'(p) \left\{ ((C_1 - C_3)\varphi(p) - B_3 p - s_1)\varkappa(p) + (B_1 \varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1)p \right\},$$

$$A_3 R'(p)\Omega(p) = 2\psi'(p) \left\{ ((C_2 - C_1)\psi(p) - B_1 Q(p) - s_2)\varphi(p) + \right. \\ \left. + (B_2 \psi(p) + (A_1 - A_2)Q(p) - \lambda_2)p + s_1 \psi(p) + \lambda_1 Q(p) \right\}; \quad (10)$$

$$\left(\varphi^2(p) + \psi^2(p) - 1 \right) p^2 + R(p)\varkappa^2(p) = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (7)–(10) штрихом обозначено дифференцирование по переменной p . Если функции $Q(p), R(p), \varphi(p), \psi(p), \varkappa(p)$ определены, то зависимость $p = p(t)$ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (7).

Новое частное решение. Рассмотрим случай, когда полиномы из (6) имеют вид

$$Q(p) = b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0, \quad R(p) = c_6 p^6 + c_5 p^5 + c_4 p^4 + c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0,$$

$$\varphi(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0, \quad \psi(p) = g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0, \quad \varkappa(p) = f_1 p + f_0. \quad (12)$$

В решении (6), (12) $f_0 \neq 0$. Если же $f_0 = 0$, то указанный класс решений (6) будет относиться к классу Докшевича [10], а само решение (6), (12) можно охарактеризовать как решение с тремя линейными инвариантными соотношениями $\omega_1 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_0 = 0$, $\omega_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_0 = 0$, $\omega_3 + \delta v_3 = 0$. Производная в силу уравнений (3), (4) на этих соотношениях тождественно равна нулю, следовательно решение (6), (12) будет частным случаем решения [11].

Подставим полиномы из (12) в динамическое уравнение (9). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях этого уравнения и обозначая $\alpha = C_3 - C_2$, заключаем, что уравнение (9) при $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$ может быть тождеством по p только при выполнении условий

$$\begin{aligned} (\alpha g_3 + B_3 b_3) f_1 + (A_2 - A_3) b_3 - B_2 g_3 &= 0, \\ (\alpha g_2 + B_3 b_2) f_1 + (\alpha g_3 + B_3 b_3) f_0 + (A_2 - A_3) b_2 - B_2 g_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда в силу (13) динамическое уравнение (9) упрощается

$$\Omega(p) = \psi'(p) (d_2 p^2 + d_1 p + d_0) (A_1 p)^{-1}. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_2 &= (\alpha g_1 + B_3 b_1) f_1 + (\alpha g_2 + B_3 b_2) f_0 + (A_2 - A_3) b_1 - B_2 g_1, \\ d_1 &= (\alpha g_0 + B_3 b_0 + s_2) f_1 + (\alpha g_1 + B_3 b_1) f_0 + (A_2 - A_3) b_0 - B_2 g_0 + \lambda_2, \\ d_0 &= (\alpha g_0 + B_3 b_0 + s_2) f_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношение (14) позволит упростить другие уравнения исследуемой системы (8)–(10). Исключим функцию $\Omega(p)$ из уравнений (8), (10). Затем подставим в упрощенные уравнения, геометрический интеграл (11), а также в уравнение (14) полиномы (12). Требование того, чтобы полученные равенства были тождествами по p приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты полиномов решения (6), (12):

$$\begin{aligned} A_1 a_3 + 3g_3 d_2 = 0, \quad A_1 a_2 + 2g_2 d_2 + 3g_3 d_1 = 0, \quad A_1(a_1 - f_1) + g_1 d_2 + 2g_2 d_1 + 3g_3 d_0 = 0, \quad g_1 d_0 = 0, \\ A_1(a_0 - f_0) + g_1 d_1 + 2g_2 d_0 = 0, \quad A_1(g_3 - b_3 f_1) - 3a_3 d_2 = 0, \\ A_1(b_2 f_1 + b_3 f_0 - g_2) + 2a_2 d_2 + 3a_3 d_1 = 0, \quad A_1(b_1 f_1 + b_2 f_0 - g_1) + a_1 d_2 + 2a_2 d_1 + 3a_3 d_0 = 0, \\ A_1(b_0 f_1 + b_1 f_0 - g_0) + a_1 d_1 + 2a_2 d_0 = 0, \quad A_1 b_0 f_0 + a_1 d_0 = 0, \quad \gamma_4 d_2 - 2A_1 b_3 a_3 = 0, \\ \gamma_4 d_1 + \gamma_3 d_2 - 2A_1(b_3 a_2 + b_2 a_3) = 0, \quad \gamma_4 d_0 + \gamma_3 d_1 + \gamma_2 d_2 - 2A_1(b_3 a_1 + b_2 a_2 + b_1 a_3 - g_3) = 0, \\ \gamma_3 d_0 + \gamma_2 d_1 + \gamma_1 d_2 - 2A_1(b_3 a_0 + b_2 a_1 + b_1 a_2 + b_0 a_3 - g_2) = 0, \\ \gamma_2 d_0 + \gamma_1 d_1 + \gamma_0 d_2 - 2A_1(b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2 - g_1) = 0, \\ \gamma_1 d_0 + \gamma_0 d_1 - 2A_1(b_1 a_0 + b_0 a_1 - g_0) = 0, \quad \gamma_0 d_0 - 2A_1 b_0 a_0 = 0, \quad 3A_2 b_3 d_2 - A_1(\beta f_1 + B_1) a_3 = 0, \\ A_2(2b_2 d_2 + 3b_3 d_1) - A_1((\beta f_1 + B_1) a_2 + \beta a_3 f_0) = 0, \quad A_2 b_1 d_0 - A_1(\beta a_0 - s_1) f_0 = 0, \\ A_2(b_1 d_2 + 2b_2 d_1 + 3b_3 d_0) - A_1((\beta a_1 - B_3) f_1 + B_1 a_1 + \beta a_2 f_0 + A_3 - A_1) = 0, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \\ A_2(b_1 d_1 + 2b_2 d_0) - A_1((\beta a_0 - s_1) f_1 + (\beta a_1 - B_3) f_0 + B_1 a_0 - \lambda_1) = 0, \quad 3c_6 A_3 d_2 - A_1 \delta_3 a_3 = 0, \\ A_3(6c_6 d_1 + 5c_5 d_2) - 2A_1(\delta_3 a_2 + \delta_2 a_3) = 0, \\ A_3(6c_4 d_0 + 5c_5 d_1 + 4c_4 d_2) - 2A_1(\delta_3 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_1 a_3 + B_2 g_3 + (A_1 - A_2) b_3) = 0, \\ A_3(5c_5 d_0 + 4c_4 d_1 + 3c_3 d_2) - 2A_1(\delta_3 a_0 + \delta_2 a_1 + \delta_1 a_2 + \delta_0 a_3 + B_2 g_2 + (A_1 - A_2) b_2 + s_1 g_3 + \lambda_1 b_3) = 0; \\ A_3(4c_4 d_0 + 3c_3 d_1 + 2c_2 d_2) - 2A_1(\delta_2 a_0 + \delta_1 a_1 + \delta_0 a_2 + B_2 g_1 + (A_1 - A_2) b_1 + s_1 g_2 + \lambda_1 b_2) = 0, \\ A_3(3c_3 d_0 + 2c_2 d_1) - 2A_1(\delta_1 a_0 + \delta_0 a_1 + B_2 g_0 + (A_1 - A_2) b_0 - \lambda_2 + s_1 g_1 + \lambda_1 b_1) = 0, \\ c_2 A_3 d_0 - A_1(\delta_0 a_0 + s_1 g_0 + \lambda_1 b_0) = 0, \quad a_0^2 + g_0^2 + c_2 f_0^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta &= C_1 - C_3, \quad \gamma_0 = 2c_2 f_1 + c_3 f_0, \quad \gamma_1 = 3c_3 f_1 + 2c_4 f_0, \quad \gamma_2 = 4c_4 f_1 + 3c_5 f_0, \\ \gamma_3 &= 5c_5 f_1 + 4c_6 f_0, \quad \gamma_4 = 6c_6 f_1, \quad \delta_0 = -(\alpha + \beta) g_0 - B_1 b_0 - s_2, \\ \delta_1 &= -(\alpha + \beta) g_1 - B_1 b_1, \quad \delta_2 = -(\alpha + \beta) g_2 - B_1 b_2, \quad \delta_3 = -(\alpha + \beta) g_3 - B_1 b_3 \end{aligned}$$

Система уравнений (13), (15), (16) разрешима относительно ненулевых параметров A_1 и f_1 , например, при $d_0 = 0$, $d_1 = 0$. Запишем ее решение так

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{(1+\mu_2)\mu_3 A_1}{3h^2(3\mu_2+2)\mu_4}, \quad A_3 = \frac{(1+\mu_2)\mu_3 A_1}{3h^2(2\mu_2+3)\mu_4}, \quad B_1 = -\frac{5(\mu_2+1)\mu_2\mu_3 A_1}{9h^2(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_4 f_1}, \\
B_2 &= -\frac{\mu_2\mu_3 A_1}{9(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_4 f_1}, \quad B_3 = -B_2, \quad \alpha = \frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3 A_1}{9(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_4 f_1^2}, \\
\beta &= -\frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3 A_1}{9h^2(2\mu_2+3)\mu_4 f_1^2}, \quad s_1 = \frac{4(\mu_2+1)^2 \mu_2 \mu_3^2 A_1}{9h^2(2\mu_2+3)\mu_1 \mu_4 f_1^2}, \quad s_2 = \frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3\mu_5 A_1}{9h(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_1 \mu_4 f_1^2}, \\
\lambda_1 &= \frac{2(\mu_2+1)\mu_2\mu_3(72h^8 + 493h^6 + 1045h^4 + 672h^2 + 36)A_1}{9h^2(2\mu_2+3)\mu_1 \mu_4 f_1}, \\
\lambda_2 &= \frac{2\mu_2\mu_3(78h^{10} + 770h^8 + 3071h^6 + 6111h^4 + 5976h^2 + 2268)A_1}{9h(2\mu_2+3)(3\mu_2+2)\mu_1 \mu_4 f_1}; \quad (17) \\
a_3 &= hg_3, \quad a_2 = \frac{6h^2(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1^2}{(\mu_2+1)\mu_3^2}, \quad a_1 = \frac{9\mu_2 f_1(8h^4 + 23h^2 + 6)}{2\mu_3}, \quad a_0 = -\frac{2(\mu_2+1)\mu_3}{\mu_1}, \\
f_0 &= a_0, \quad b_3 = \frac{h^3(\mu_2+2)(2\mu_2+3)^2 \mu_1^2 f_1^2}{2(\mu_2+1)^3 \mu_3^3}; \quad b_2 = \frac{2h(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1(3h^4 + 11h^2 + 9)}{(\mu_2+1)^2 \mu_3^2}, \\
b_1 &= \frac{\mu_5}{2h(\mu_2+1)\mu_3}, \quad b_0 = 0, \quad g_3 = \frac{h^3(\mu_2+2)(2\mu_2+3)^2 \mu_1^2 f_1^3}{2(\mu_2+1)^3 \mu_2 \mu_3^3}, \\
g_2 &= \frac{9h(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1^2}{(\mu_2+1)\mu_3^2}, \quad g_1 = \frac{3f_1(2h^6 + 53h^4 + 165h^2 + 126)}{2h\mu_3}, \quad g_0 = -\frac{\mu_5}{h\mu_1}, \\
c_6 &= -\frac{h^6(\mu_2+2)^2(2\mu_2+3)^4 \mu_1^4 f_1^4}{4(\mu_2+1)^6 \mu_2 \mu_3^6}, \quad c_5 = -\frac{2h^4(\mu_2+2)^2(2\mu_2+3)^3(4\mu_2+5)\mu_1^3 f_1^3}{(\mu_2+1)^5 \mu_3^5}, \\
c_4 &= -\frac{3h^2(\mu_2+2)(2\mu_2+3)^2 \mu_1^2 f_1^2(88h^8 + 653h^6 + 1783h^4 + 2112h^2 + 900)}{2(\mu_2+1)^4 \mu_3^4}, \\
c_3 &= -\frac{2(\mu_2+2)(2\mu_2+3)\mu_1 f_1(538h^{12} + 5144h^{10} + 20119h^8 + 41280h^6 + 46917h^4 + 27972h^2 + 6804)}{(\mu_2+1)^3 \mu_3^3}, \\
c_2 &= -\frac{1}{4h^2(\mu_2+1)^2 \mu_3^2} \left(14080h^{18} + 201444h^{16} + 1261149h^{14} + 4550815h^{12} + 10468239h^{10} + \right. \\
&\quad \left. + 15950673h^8 + 16072128h^6 + 10254600h^4 + 3713040h^2 + 571536 \right), \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \left(5184h^{18} + 75348h^{16} + 470269h^{14} + 1647759h^{12} + 3555231h^{10} + \right. \\
&\quad \left. + 4869169h^8 + 4197360h^6 + 2166696h^4 + 594000h^2 + 63504 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\mu_2 &= h^2 + 1, \quad \mu_3 = 35h^6 + 113h^4 + 48h^2 - 36, \\
\mu_4 &= 9h^4 + 32h^2 + 24, \quad \mu_5 = 72h^{10} + 587h^8 + 1916h^6 + 3117h^4 + 2484h^2 + 756. \quad (19)
\end{aligned}$$

В соотношениях (17)–(19) h – действительный положительный корень уравнения

$$90h^{12} + 644h^{10} + 1595h^8 + 1425h^6 - 153h^4 - 864h^2 - 324 = 0,$$

то есть $0,8385827025 < h < 0,8385827026$.

Решение (6), (12) при условиях (17), (18) будет действительным, например, при

$$A_1 = a, \quad f_1 = -\frac{1}{20f}, \quad p \in [10f, 13f], \quad (a > 0, f > 0). \quad (20)$$

Тогда зависимость p от времени t найдем из дифференциального уравнения

$$\dot{p} = -\frac{h}{3} p^2 \sqrt{c_6 p^4 + c_5 p^3 + c_4 p^2 + c_3 p + c_2}.$$

Это позволит получить зависимость от времени всех переменных решения (6), (12), (17), (18), (20).

Выводы. Таким образом, в статье построено одно новое частное решение полиномиального вида задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Полученное решение зависит от двух параметров и выражается в виде эллиптических функций времени. Найденное решение имеет аналог в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
2. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
3. Гашененко И. Н. Классические задачи динамики твердого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Изд-во Наук. думка, 2012. – 401 с.
4. Горр Г. В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой / Г. В. Горр, А. В. Зыза // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
5. Зыза А. В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа / А. В. Зыза // Вісник Донецьк. ун-ту. Сер.А: Природн. науки. – 2006. – № 1. – С. 40–41.
6. Зыза А. В. Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа-Пуассона / А. В. Зыза // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103–109.
7. Зыза А. В. Новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Зыза // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 92–99.
8. Зыза А. В. О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата / А. В. Зыза // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 33–42.
9. Харламов П. В. О различных представлениях уравнений Кирхгофа / П. В. Харламов, Г. В. Мозалевская, М. Е. Лесина // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
10. Докшевич А. И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку / А. И. Докшевич // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 12–15.
11. Харламов П. В. О решениях уравнений динамики твердого тела / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 3. – С. 567–572.

Поступила в редакцию 14.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

У роботі досліджуються умови існування спеціального класу поліноміальних розв'язків задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Отримано один новий частковий розв'язок рівнянь руху, який залежить від двох незалежних параметрів. Новий розв'язок виражається у вигляді функцій, отриманих оберненням еліптичних інтегралів Лежандра третього роду.

Ключові слова: поліноміальні розв'язки, рівняння Кірхгофа-Пуассона, гіростат, потенціальні і гіроскопічні сили, еліптичні функції часу, інваріантні співвідношення.

SUMMARY

In the paper conditions of existence of special class of polynomial solutions of the task about the gyrostat movement under the influence of potential and gyroscopic forces are studied. One particular solution of this problem depending two independent parameters is constructed. This solution is represental in a form functions obtained by the inversion of elliptic Legendre integrals of the thir kind.

Keywords: polunomial solutions, Kirrhhoff-Poisson equations, gyrostat, potential and gyroscopic forcocos, elliptic function of time, invariant correlation.

УДК 539.3

С. А. Калоеров, А. И. Занько

РЕЗУЛЬТАТЫ НОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ИЗГИБУ
МНОГОСВЯЗНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛИТЫ

С помощью новых представлений комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит даны решения задач об изгибе плиты с эллиптическими контурами под действием изгибающих моментов на контурах или распределенных усилий по основанию. Для нахождения общих представлений функций используются конформные отображения, разложения функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, для удовлетворения граничным условиям в случае односвязных областей – метод рядов, для многосвязных областей – обобщенный метод наименьших квадратов. Численными исследованиями изучено влияние геометрических и физико-механических характеристик плиты на значения изгибающих моментов. В случае распределенных усилий по основанию плиты показано существенное отличие получаемых результатов от известных данных других авторов.

Ключевые слова: анизотропная тонкая плита, плита с отверстием, комплексные потенциалы, дифференциальная форма граничных условий, обобщенный метод наименьших квадратов

Несмотря на большую потребность решения практических задач для тонких многосвязных анизотропных плит, находящихся в условиях изгиба, до сих пор в этом направлении исследований выполнено недостаточно. Для решения таких задач С. Г. Лехницким [1] были введены комплексные потенциалы теории изгиба анизотропных плит, решена задача об изгибе бесконечной плиты с эллиптическим отверстием. В дальнейшем эти функции были использованы для решения задачи об изгибе опертой по контуру анизотропной сплошной эллиптической плиты [2], получены некоторые результаты для плиты с двумя эллиптическими отверстиями [3], эллиптической плиты с эллиптическим отверстием [4–6], для многосвязных анизотропных [7, 8].

В статье [9] исследованы общие свойства комплексных потенциалов, получены их общие представления для конечной и бесконечной многосвязной области, исследованы их логарифмические особенности, их поведение в окрестности бесконечно удаленной точки. В данной работе с использованием результатов последней статьи даны решения ряда задач, проведены численные исследования, исследована достоверность получаемых результатов и их согласование с известными.

1. Основные соотношения для комплексных потенциалов. Рассмотрим тонкую анизотропную плиту постоянной толщины $2h$, имеющую в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат $Oxuz$, плоскость Oxu которой совместим со срединной плоскостью плиты. Пусть срединная плоскость плиты занимает конечную многосвязную область S , ограниченную контурами L_l , которые нагружены внешними воздействиями в виде поперечных усилий и моментов или жестко подкреплены.

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой плиты сводится к нахождению комплексных потенциалов изгиба $W_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики изгиба плиты (прогиб, углы поворотов, моменты, перерезывающие силы) вычисляются по формулам [9, 10]

$$w = w_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k); \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (1, \mu_k) W_k'(z_k); \quad (1.2)$$

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k); \quad (1.3)$$

$$(N_x, N_y) = (N_{x0}, N_{y0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W_k'''(z_k), \quad (1.4)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y); \quad (1.5)$$

$D_{ij} = B_{ij} D_0$ – жсткості матеріала плити, в котрих

$$\begin{aligned} B_{11} &= (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, & B_{12} &= (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta, & B_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, \\ B_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, & B_{26} &= (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, & B_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta, \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

a_{ij} – коефіцієнти деформації матеріала; $D_0 = 2h^3/3$;

$$\begin{aligned} M_{x0} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{y0} &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy0} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \\ N_{x0} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right), \\ N_{y0} &= - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \end{aligned} \quad (1.7)$$

μ_k – корні характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (1.8)$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2,$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \quad s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3. \quad (1.9)$$

Производные комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ на контурах плити удовлетворяют определенным граничным условиям. Если контур L_l загружен или жестко подкреплен, то граничные условия имеют вид [9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} W'_k(z_k) = f_{li} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (1.10)$$

причем в случае загруженного контура L_l

$$g_{kl1} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{kl2} = q_k,$$

$$f_{l1} = - \int_0^s (f_l dx + m_l dy) + J_{01} - c_{l1}x + c_{l1}, \quad f_{l2} = - \int_0^s (m_l dx - f_l dy) - J_{02} + c_{l1}y + c_{l2},$$

$$J_{01} = \int_0^s (N_{xy0} - H_{xy0}) dx + M_{x0} dy, \quad J_{02} = \int_0^s -M_{y0} dx + (N_{xy0} + H_{xy0}) dy,$$

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds, \quad N_{xy0} = \int_0^s N_{n0} ds, \quad N_{n0} = -N_{y0} \frac{dx}{ds} + N_{x0} \frac{dy}{ds}, \quad (1.11)$$

в случае подкрепленного контура

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad f_{l1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + w_n^* \frac{dy}{ds} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{\partial w^*}{\partial y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds},$$

$$f_{l2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} - w_n^* \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2, \quad (1.12)$$

c_l – вещественная, c_{1l} , c_{2l} – комплексные постоянные; $w^*(s)$, $w_n^* = (\partial w / \partial n)^*$ – заданные на контуре L_l значения прогиба и ее производной по нормали.

В общем случае функции $W'_k(z_k)$ имеют вид [9]

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + W'_{0k}(z_k), \quad (1.13)$$

в котором A_{kl} , B_{kl} – постоянные, вычисляемые из решения систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l}{2\pi D_{11}} \right), \quad (1.14)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl}}{2\pi D_{11}} \right), \quad (1.15)$$

P_l – главный вектор приложенных к L_l поперечных сил; M_{xl} , M_{yl} – компоненты главного момента, относительно начала координат, внешних воздействий, распределенных по контуру L_l ; z_{kl} – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях

$$z_k = x + \mu_k y \quad (1.16)$$

произвольным точкам z_l внутри контуров отверстий L_l ; $W'_{0k}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими при аффинных преобразованиях контурам L_l . Исходя из приведенных соотношений, приведем решения конкретных задач.

2. Изгиб эллиптической плиты усилиями, распределенными по верхнему основанию. Рассмотрим эллиптическую плиту с контуром L_0 и полуосями a_0 и b_0 (рис. 1). Плита по верхнему основанию находится под действием равномерного давления интенсивности q_0 . По контуру L_0 она жестко заделана.

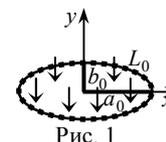


Рис. 1

В данном случае функции (1.13) имеют вид

$$W'_k(z_k) = W'_{0k0}(z_k), \quad (2.1)$$

в котором $W'_{0k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в односвязных областях S_k , ограниченных эллипсами L_{k0} , соответствующими контуру L_0 при аффинных преобразованиях (1.16). В этих областях функции можно разложить в ряды по полиномам Фабера [11]

$$W'_{0k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \quad (2.2)$$

где $P_n(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + m_{k0}^n / \zeta_{k0}^n; \quad (2.3)$$

ζ_{k0} – переменные, определяемые из конформных отображений внешности единичных кругов $|\zeta_{k0}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k0} [12]:

$$z_k = R_{k0} (\zeta_{k0} + m_{k0} / \zeta_{k0}); \quad (2.4)$$

$$R_{k0} = (a_0 - i\mu_k b_0) / 2, \quad m_{k0} = (a_0 + i\mu_k b_0) / (a_0 - i\mu_k b_0).$$

В рассматриваемом случае частное решение дифференциального уравнения (1.5) выберем в виде

$$w_0(x, y) = d_0(x^2 + y^2)^2, \tag{2.5}$$

в котором d_0 – постоянная. Тогда

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 4d_0x(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 4d_0y(x^2 + y^2); \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} M_{x0} &= -4d_0 \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right], \\ M_{y0} &= -4d_0 \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right], \\ H_{xy0} &= -4d_0 \left[D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy \right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

и из (1.5) и (2.5) с учетом того, что в данном случае $q(x, y) = q_0$, получим, что

$$d_0 = \frac{q_0}{8 \left[3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \right]}.$$

На контуре диска $x = a_0 \cos \vartheta$, $y = b_0 \sin \vartheta$, где ϑ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π . Тогда

$$x = \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = -\frac{ib_0}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad x^2 + y^2 = \frac{a_0^2 - b_0^2}{4} \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{a_0^2 + b_0^2}{2}, \tag{2.8}$$

где $\sigma = e^{i\vartheta}$. Кроме того, $\zeta_{k0} = \sigma$. Подставляя функции (2.1) с учетом выражений (2.6), (2.8) в граничные условия (1.12) и применяя метод рядов, находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[a_{k0n} m_{k0}^n + \bar{a}_{k0n} \right] &= -\frac{d_0 a_0}{2} \left[(3a_0^2 + b_0^2) \delta_{1n} + (a_0^2 - b_0^2) \delta_{3n} \right], \\ \sum_{k=1}^2 \left[\mu_k a_{k0n} m_{k0}^n + \bar{\mu}_k \bar{a}_{k0n} \right] &= -\frac{d_0 i b_0}{2} \left[(a_0^2 + 3b_0^2) \delta_{1n} + (a_0^2 - b_0^2) \delta_{3n} \right], \\ a_{k0n} &= 0, \quad n \neq 1, \quad n \neq 3. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда функции (2.1) будут такими:

$$W'_k(z_k) = \sum_{n=1,3} a_{k0n} \left(\zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n} \right) = \frac{a_{k01} z_k}{R_{k0}} + a_{k03} \left(\frac{z_k^3}{R_{k0}^3} - 3m_{k0} \frac{z_k}{R_{k0}} \right), \tag{2.10}$$

а для моментов (1.3) найдем

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left[\frac{a_{k01}}{R_{k0}} + 3a_{k03} \left(\frac{z_k^2}{R_{k0}^3} - \frac{m_{k0}}{R_{k0}} \right) \right], \tag{2.11}$$

Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов в плите из материалов: КАСТ–В изотропный (материал М1) [13], дигидрофосфат аммония $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ (М2) [14], стеклопластик косоугольной намотки (М3) [15, 16], сосна (М4) [10]. Коэффициенты a_{ij} деформаций для этих материалов приведены в табл. 1.

Для кругового диска в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , в табл. 2 с точностью до q_0 приведены значения изгибающих моментов M_n , M_s (возникающих от нормальных напряжений σ_n и σ_s на площадках, касательных и перпендикулярных к

Таблица 1

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{22} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{12} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	$a_{66} \cdot 10^{-4}$, МПа ⁻¹	
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500	1,000
М2	0,435	0,175	-0,115	1,150	2,486
М3	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571
М4	2,381	0,100	-0,024	1,333	23,810

контуру) в точках контура L_0 , где они достигают максимальных значений. Из данных табл. 2 видно, что, чем выше «степень анизотропии», т. е. степень отличия a_{11}/a_{22} от 1, тем больше уровень концентрации изгибающих момен-

Таблица 2

θ , рад	Материал							
	M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4
	Моменты M_n				Моменты M_s			
0	-0,125	-0,077	-0,064	-0,012	-0,015	-0,050	-0,017	-0,003
$\pi/12$	-0,125	-0,080	-0,064	-0,018	-0,015	-0,055	-0,028	-0,016
$\pi/6$	-0,125	-0,092	-0,074	-0,042	-0,015	-0,064	-0,048	-0,042
$\pi/4$	-0,125	-0,116	-0,105	-0,099	-0,015	-0,068	-0,058	-0,055
$\pi/3$	-0,125	-0,149	-0,156	-0,181	-0,015	-0,064	-0,048	-0,042
$5\pi/12$	-0,125	-0,179	-0,206	-0,259	-0,015	-0,055	-0,028	-0,016
$\pi/2$	-0,125	-0,191	-0,227	-0,290	-0,015	-0,050	-0,017	-0,003

тов M_n (максимальное по модулю их значение), для изотропного материала, как и следовало ожидать, значения моментов не зависят от угла θ , вблизи контура диска моменты всегда отрицательны.

3. Изгиб эллиптической кольцевой плиты распределенными по контурам изгибающими моментами. Рассмотрим теперь кольцевую плиту, с внешним и внутренним эллиптическими контурами L_0 и L_1 , имеющими полуоси a_0, b_0 и a_1, b_1 (рис. 2). Будем считать, что центры эллипсов совпадают, на их контурах L_l ($l = 0, 1$) заданы распределенные изгибающие моменты m_l .

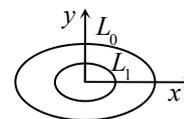


Рис.2

В данном случае функции $W'_k(z_k)$ представим в виде

$$W'_k(z_k) = W'_{0k0}(z_k) + W'_{0k1}(z_k), \tag{3.1}$$

где $W'_{0k0}(z_k)$ – функции, голоморфные внутри контуров L_{k0} , получаемых из L_0 аффинными преобразованиями (1.16) и представимые рядами по полиномам Фабера (2.2), которые можно, как и выше, представлять рядами Тейлора по степеням z_k/R_{k0} ; $W'_{0k1}(z_k)$ – функции, голоморфны вне контуров L_{k1} соответствующих контуру L_1 . Для нахождения общего вида последних функций используем конформные отображения.

Отобразим внешность единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1} :

$$z_k = R_{k1}(\zeta_{k1} + m_{k1}/\zeta_{k1}). \tag{3.2}$$

Здесь

$$R_{k1} = (a_1 - i\mu_k b_1)/2, \quad m_{k1} = (a_1 + i\mu_k b_1)/(a_1 - i\mu_k b_1).$$

Функции $W'_{0k1}(z_k)$, голоморфные вне эллипсов L_{kl} , в конформно отображенных областях будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{k1} . Следовательно, для комплексных потенциалов окончательно получим

$$W'_{0k}(z_k) = a_{k00} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{k0n} \left(\frac{z_k}{R_{k0}} \right)^n + \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n} \right], \tag{3.3}$$

где a_{kln} – неизвестные постоянные.

Окончательно функции $W'_k(z_k)$ и их производные запишем в виде

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad W''_k(z_k) = \sum_{l=0}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'_{kln} a_{kln}, \tag{3.4}$$

в котором

$$\varphi_{k0n} = \left(\frac{z_k}{R_{k0}} \right)^n, \quad \varphi_{k1n} = \frac{1}{\zeta_{k1}^n}, \quad \varphi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}, \quad \varphi'_{k1n} = -\frac{n}{\zeta_{k1}^{n-1} R_{k1} (\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \tag{3.5}$$

Для определения постоянных a_{kln} удовлетворим граничным условиям на контурах кольца, которые будем использовать в дифференциальной форме. Продифференцировав условия (1.11) по дуге контура, найдем [19]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} \delta_k W_k''(t_k) = f_{li1} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (3.6)$$

где

$$\delta_k = \frac{dz_k}{ds}, \quad f_{l11} = -m_l \frac{dy}{ds} - c_l \frac{dx}{ds}, \quad f_{l21} = -m_l \frac{dx}{ds} + c_l \frac{dy}{ds}; \quad (3.7)$$

Граничным условиям будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [11, 17, 18]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек t_m ($m = \overline{1, M}$), в которых удовлетворим условиям (3.6), получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{l=0}^1 \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \phi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = f_{li1} \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (3.8)$$

Эту систему дополним уравнениями однозначности прогиба [9] для контура L_1 :

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{k11} R_{k1} = 0. \quad (3.9)$$

После нахождения решения системы (3.8), (3.9) с использованием метода сингулярного разложения постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты (1.3).

Для кругового кольца из материалов М1 и М4 при действии моментов m_0 на внешнем контуре и незагруженном внутреннем контуре в зависимости от центрального угла θ и значения отношения a_1/a_0 в табл. 3 с точностью до m_0 приведены значения моментов M_s , в точках контуров L_0, L_1 , где они достигают максимальных значений. Для изотропного материала М1 значения моментов не зависят от угла θ . Видно, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов резко возрастают, приближаясь к одинаковым значениям.

Влияние «степени анизотропии» для рассматриваемой задачи значительно меньше, чем в задаче о диске при действии давления по основанию.

Заметим, что полученные результаты достаточно хорошо согласуются с найденными в работе [4], где для удовлетворения граничным условиям использовался метод рядов. Но там рассмотрены лишь случаи, когда радиус отверстия мал ($a_1/a_0 = 0,2$) и поэтому влияние отверстия на значения моментов около внешнего контура незначительно (см. табл. 3 при $a_1/a_0 = 0,1$).

4. Изгиб эллиптической кольцевой плиты под действием равномерного давления по основанию. Пусть рассмотренная в предыдущем пункте плита по контуру L_0 жестко заделана, по контуру L_1 свободна или жестко подкреплена, по верхнему основанию она загружена равномерным давлением интенсивности q_0 (рис. 3).

В данном случае функции $W'_k(z_k)$ и их производные имеют вид (3.4).

Выберем частное решение дифференциального уравнения (1.5) в виде (2.5). На основе (2.5), (1.7), (1.11), (2.7) находим

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds = 0;$$

$$N_{x0} = -8d_0 [(3D_{11} + D_{12} + 2D_{66})x + 3(D_{16} + D_{26})y],$$

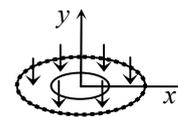


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 N_{y0} &= -8d_0 [3(D_{16} + D_{26})x + (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22})y]; \\
 f_{01}(s) &= -4d_0 \left\{ 2 \left[xy(3D_{11} - 3D_{22} - 2D_{66}) - x^2(3D_{16} + 2D_{26}) + y^2D_{16} \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}, \\
 f_{02}(s) &= -4d_0 \left\{ - \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left[xy(3D_{11} - 3D_{22} + 2D_{66}) - x^2D_{26} + y^2(2D_{16} + 3D_{26}) \right] \frac{dy}{ds} \right\}; \\
 N_{n0} &= -8d_0 \left\{ (3D_{11} + D_{12} + 2D_{66}) \frac{dy}{ds} x - 3(D_{16} + D_{26}) \left(\frac{dx}{ds} x - \frac{dy}{ds} y \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22}) \frac{dx}{ds} y \right\}, \\
 N_{xy0} &= -24d_0 \left\{ xy(D_{11} - D_{22}) - \frac{1}{2}(D_{16} + D_{26})(x^2 - y^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Для определения постоянных a_{kln} удовлетворим граничным условиям на контурах кольца, которыми будем удовлетворять в дифференциальной форме (3.6). Причем для данной задачи

$$f_{l11} = f_{01}(s) - m_l dy/ds - c_l dx/ds, \quad f_{l21} = -f_{02}(s) - m_l dx/ds + c_l dy/ds; \quad (3.10)$$

для загруженного контура;

$$f_{l11} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad f_{l21} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}; \quad (3.11)$$

для жестко подкрепленного контура.

Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с предыдущим параграфом.

Для кругового кольца с неподкрепленным и незагруженным внутренним контуром и жестко заделанным внешним контуром в зависимости от центрального угла θ и отношения a_1/a_0 с точностью до q_0 в табл. 4 и табл. 5 приведены значения моментов M_n и M_s соответственно. При этом на контуре отверстия $M_n = 0$, поэтому в табл. 4 даны их значения только для контура L_0 . Для изотропного материала М1 значения моментов не зависят от угла θ и поэтому они в таблицах приведены только для $\theta = 0$. Видно, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов M_s по модулю уменьшаются.

В табл. 6 приведены результаты, аналогичные данным табл. 4, 5, когда внутренний контур кольца жестко подкреплен. Как и ранее, кольцо загружено равномерно распределенными по верхнему основанию усилиями интенсивности q_0 . Видно, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов M_s по модулю уменьшаются.

Таблица 4

Материал	θ , рад	a_1/a_0		
		0,1	0,5	0,9
М1	0	-0,127	-0,134	-0,045
М4	0	-0,012	-0,014	-0,045
	$\pi/12$	-0,018	-0,022	-0,058
	$\pi/6$	-0,042	-0,056	-0,079
	$\pi/4$	-0,099	-0,146	-0,064
	$\pi/3$	-0,185	-0,249	-0,035
	$5\pi/12$	-0,265	-0,240	-0,015
	$\pi/2$	-0,294	-0,201	-0,009

Таблица 5

Материал	θ , рад	a_1/a_0					
		L_0			L_1		
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
М1	0	-0,015	0,060	-0,005	0,135	-0,016	0,002
М4	0	-0,003	-0,003	-0,011	0,400	0,351	0,105
	$\pi/12$	-0,016	-0,019	-0,052	0,331	0,223	0,010
	$\pi/6$	-0,042	-0,056	-0,079	0,186	0,054	-0,026
	$\pi/4$	-0,056	-0,082	-0,036	0,090	-0,008	-0,007
	$\pi/3$	-0,043	-0,058	-0,008	0,045	-0,015	-0,001
	$5\pi/12$	-0,016	-0,015	-0,001	0,025	-0,009	0,000
	$\pi/2$	-0,003	-0,002	0,000	0,019	-0,006	0,000

Таблиця 6

Моменты	Материал	θ , рад	a_1/a_0					
			0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
			L_0			L_1		
M_n	M1	0	-0,124	-0,094	-0,024	0,124	0,094	0,024
	M4	0	-0,012	-0,011	-0,003	0,001	-0,001	0,002
		$\pi/12$	-0,018	-0,016	-0,004	0,017	0,010	0,003
		$\pi/6$	-0,042	-0,035	-0,008	0,060	0,041	0,008
		$\pi/4$	-0,098	-0,072	-0,018	0,120	0,086	0,019
		$\pi/3$	-0,179	-0,127	-0,034	0,179	0,139	0,035
		$5\pi/12$	-0,255	-0,195	-0,049	0,222	0,183	0,049
		$\pi/2$	-0,290	-0,226	-0,056	0,238	0,201	0,055
M_s	M1	0	-0,015	-0,011	-0,003	0,015	0,011	0,003
	M4	0	-0,003	-0,003	-0,001	0,000	0,000	0,000
		$\pi/12$	-0,016	-0,014	-0,003	0,015	0,009	0,003
		$\pi/6$	-0,042	-0,035	-0,008	0,060	0,041	0,008
		$\pi/4$	-0,055	-0,040	-0,010	0,067	0,048	0,011
		$\pi/3$	-0,042	-0,029	-0,008	0,042	0,032	0,008
		$5\pi/12$	-0,016	-0,012	-0,003	0,014	0,011	0,003
		$\pi/2$	-0,003	-0,002	-0,001	0,002	0,002	0,001

Заметим, что наши результаты значительно отличаются от ранее полученных [7]. Так, если рассматривать как в указанной работе, эллиптическое кольцо, для которого $b_0/a_0 = 0,4$, $a_1/a_0 = 0,2$, $b_1/a_0 = 0,1$, то значения моментов M_n в точках внешнего контура при углах θ , равных 0 , $\pi/4$, $\pi/2$, по нашему решению получаются такими: -0,0686, -0,0250, -0,0363, тогда как в работе [7] они соответственно равны: 0,1948, 0,3508, 1,0476. Для тех же размеров значения моментов M_s по нашему решению такие: -0,0018, -0,0305, -0,0115, а в работе [7] приведены значения: 0,0056, 0,4263, 0,3325. Расхождения наших результатов с данными работы [7] для точек внутреннего контура еще более значительные. Эталонном для изучения достоверности результатов могут служить числовые значения величин по точному аналитическому решению задачи об изгибе сплошного эллиптического диска, на основе которого для моментов получены выражения (2.11). Для случаев малых отверстий в кольце, когда их влиянием около внешнего контура можно пренебречь, значения моментов в точках внешнего контура должны быть такими же, как и в задаче о сплошном эллиптическом диске. Значения моментов M_n и M_s в сплошном диске, вычисленные по формулам (2.11) для указанных выше θ , равных 0 , $\pi/4$, $\pi/2$, получаются такими: -0,0714, -0,0274, -0,0368 и -0,0019, -0,0334, -0,0116. Как видно, эти значения хорошо согласуются с приведенными выше (-0,0686, -0,0250, -0,0363 и -0,0018, -0,0305, -0,0115) для сравнительно небольшого отверстия ($b_0/a_0 = 0,4$, $a_1/a_0 = 0,2$, $b_1/a_0 = 0,1$), а не с данными работы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит / С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, вып. 2. – С. 181–209.
2. Меглинский В. В. Изгиб анизотропной эллиптической плиты, опертой по контуру / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1971. – Вып. 5. – С. 102–110.
3. Меглинский В. В. Изгиб эллиптической анизотропной плиты с двумя эллиптическими отверстиями / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1966. – Вып. 6. – С. 19–27.
4. Иванов Г. М. Чистый изгиб анизотропной эллиптической плиты с отверстием / Г. М. Иванов, В. В. Меглинский // Некоторые задачи о концентрации напряжений и деформаций в упругих телах. – 1969. – Вып. 4. – С. 111–115.
5. Душутина Н. И. Об изгибе эллиптической плиты с внецентренным эллиптическим отверстием / Н. И. Душутина, В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 4. – С. 116–122.
6. Копнина В. И. Исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической анизотропной плиты с отверстием / В. И. Копнина, В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1971. – Вып. 6. – С. 67–73.
7. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.
8. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А. С. Космодамианский. – К., Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
9. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров //

- Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113–132.
10. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
11. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.
12. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С. А. Калоеров, Е. С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
13. Амбарцумян С. А. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки / С. А. Амбарцумян, С. М. Дургарьян // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 120–127.
14. Акустические кристаллы: Справочник / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, В. В. Чкалова и др.; Под ред. М. П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
15. Справочник по композиционным материалам: В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А. Б. Геллера, М. М. Гельмонта; под ред. Б. Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
16. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. акад. И. К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1006 с.
17. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 280 с.
18. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
19. Калоеров С. А. Изгиб многосвязной анизотропной плиты сложной конфигурации / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф., (Донецк–Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк, 2013. – Т. 1. – С. 158–162.

Поступила в редакцию 26.02.2014 г.

РЕЗЮМЕ

За допомогою нових уявлень комплексних потенціалів теорії вигину анізотропних плит дані рішення задач про вигин плити з еліптичними контурами під дією згинальних моментів на контурах або розподілених зусиль по основі. Для знаходження загальних уявлень функцій використовуються конформні відображення, розкладання функцій в ряди Лорана і за поліномами Фабера, для задоволення граничним умовам у разі однозв'язних областей – метод рядів, для багатозв'язних областей – узагальнений метод найменших квадратів. Чисельними дослідженнями вивчено вплив геометричних і фізико-механічних характеристик плити на значення згинальних моментів. У разі розподілених зусиль по основі плити показано істотну відмінність одержуваних результатів від відомих даних інших авторів.

Ключові слова: анізотропна тонка плита, плита з отвором, комплексні потенціали, диференціальна форма граничних умов, узагальнений метод найменших квадратів.

SUMMARY

With the help of new representations of complex potentials of the bending theory of anisotropic plates has given the solutions of bending plate problems with elliptical contours under the action of bending moments on the contours or distributed efforts on base. To find the common representations of functions are used conformal mapping, expansions of functions in Laurent series and by Faber polynomials, to satisfy the boundary conditions in the case of simply connected domains - series method, for multiply connected domains – generalized least-squares method. Numerical researches investigated the influence of geometrical and physical- mechanical characteristics of the plate on the values of the bending moments. In the case of dispersed efforts onto the base of the plate it is shown a significant difference of the obtained results from the known data of other authors.

Keywords: anisotropic thin plate, a plate with an aperture, the complex potentials, differential form of the boundary conditions, the generalized least-squares method.

УДК 539.3

С. А. Калоеров, А. А. Самодуров

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ
ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

Приведены основные соотношения электромагнитоупругости для многосвязных пьезопластинок. С использованием этих соотношений, а также разложением голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера решение задачи для кусочно-однородной пластинки с рядом упругих включений обобщенным методом наименьших квадратов сведено к системе линейных алгебраических уравнений, псевдорешение которой находится с помощью сингулярного разложения. Проведены численные исследования, с помощью которых выявлено влияние относительной жесткости материалов включений и расстояний между ними на значения основных характеристик электромагнитоупругого состояния.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, пьезоматериалы, кусочно-однородная пластинка, упругие включения.

В различных областях современной науки и техники в качестве элементов конструкций используются пластинки из пьезоматериалов. Поэтому весьма актуальной является разработка эффективных методов определения напряженного состояния таких элементов и к настоящему времени разработаны методы определения их электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) под действием различных механических сил и электромагнитных полей [1–4]. Значительное влияние на ЭМУС пластинок оказывает наличие в них концентраторов напряжений типа отверстий и включений. В работах [3, 4] предложены методы исследования ЭМУС многосвязных пластинок с отверстиями и трещинами, а в статьях [5, 6] методом рядов получено точное аналитическое решение задачи для пластинки с одним упругим включением.

В данной статье приведено решение задачи электромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки с произвольным числом упругих включений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим занимающую многосвязную область S пьезопластинку, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). В отверстия без предварительного натяжения вставлены упругие включения из других пьезоматериалов с областями $S^{(l)}$, находящиеся с пластинкой-матрицей в условиях идеального механического и электромагнитоупругого контактов. Пластинка находится под действием внешних сил и электромагнитных полей. Если контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем иметь бесконечную многосвязную пластинку. При этом будем считать, что на бесконечности заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ и угол жесткого поворота ω_3^∞ , а также индукции $D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty$ или напряженности $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$ электромагнитного поля.

При использовании теории комплексных потенциалов определение электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязной пьезопластинок сводится к нахождению комплексных потенциалов электромагнитоупругости $\Phi_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, индукции и напряженности) в пластинке-матрице вычисляются по формулам [3, 4]:

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\ (u, v, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0), \\ (D_x, D_y, E_x, E_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k), \\ (B_x, B_y, H_x, H_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (1.2)$$

μ_k – корні характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu) \left[l_{2\beta}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{2v}^2(\mu) \right] - l_{3g}(\mu) \left[l_{3g}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu) l_{2v}(\mu) \right] - \\ - l_{3p}(\mu) \left[l_{3p}(\mu) l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu) l_{2v}(\mu) \right] = 0; \quad (1.3)$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2v}(\mu) = -v_{11}\mu^2 + 2v_{12}\mu - v_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \quad (1.4)$$

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \\ \lambda_{7k} = v_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -v_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k; \\ p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})v_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k, \\ r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})v_k - (v_{11}\mu_k - v_{12})\rho_k, \\ h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (v_{11}\mu_k - v_{12})v_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \quad (1.5)$$

$$v_k = \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}, \quad \rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k) l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}; \quad (1.6)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения тела как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy

против часовой стрелки, причем $\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; u_0 , v_0 – компоненты поступательного движения

тела; Φ_0 и Ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электрического и магнитного полей.

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (1.2). В общем случае функции имеют вид [3, 7]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (1.7)$$

где Γ_k – постоянные, равные нулю в случае конечной области и определяемые из системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right) \quad (1.8)$$

для бесконечной области при задании на бесконечности компонент векторов индукции электромагнитного поля или системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0 \right) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right), \quad (1.9)$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля; A_{kl} , A_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kl} = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (1.10)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kr}^0 = \left(\frac{Y_r}{2\pi}, -\frac{X_r}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (1.11)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; X_l , Y_l и Q_{el} , Q_{ml} – компоненты главного вектора приложенных к контуру L_l внешних усилий и суммарные электрические заряды и магнитные диполи; X_r , Y_r и Q_{er}^0 , Q_{mr}^0 – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенные электрические заряды и магнитные диполи в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$.

Функции $\Phi_k(z_k)$ для неподкрепленных контуров L_l удовлетворяют граничным условиям [7]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, v_k, \rho_k \right) \Phi_k(z_k) = \pm \int_0^s \left(-Y_{ln}, X_{ln}, D_{ln}, B_{ln} \right) ds + (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}) \quad (1.12)$$

при задании на контуре индукции электромагнитного поля D_{ln} , B_{ln} или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_k(z_k) = \left(\mp \int_0^s Y_{ln} ds, \mp \int_0^s -X_{ln} ds, \varphi_{l*}, \psi_{l*} \right) + (c_{l1}, c_{l2}, -\varphi_0, -\psi_0), \quad (1.13)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей φ_{l*} , ψ_{l*} . Для контуров, на которых заданы перемещения u_{l*} , v_{l*} , граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, v_k, \rho_k \right) \Phi_k(t_k) = \left(u_{l*} + \omega_3 y - u_0, v_{l*} - \omega_3 x - v_0, \pm \int_0^s D_{ln} ds + c_{l3}, \pm \int_0^s B_{ln} ds + c_{l4} \right), \quad (1.14)$$

при задании на контурах индукций или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(p_k, q_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_k(t_k) = (u_{l*} + \omega_3 y - u_0, v_{l*} - \omega_3 x - v_0, \varphi_{l*} - \varphi_0, \psi_{l*} - \psi_0), \quad (1.15)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей. В (1.12)–(1.15) верхние знаки в правой части относятся к внешнему контуру, нижние – к контурам отверстий и тонких колец.

При идеальном механическом и электромагнитном контакте пластинки с включением с областью $S^{(l)}$ граничные условия на L_l имеют вид [3, 5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_k(z_k) - \left(1, \mu_k^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, v_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)} \right) \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = \left(c_{l1}, c_{l2}, \omega_3 y - u_0 - \omega_3^{(l)} y + u_0^{(l)}, -\omega_3 x - v_0 + \omega_3^{(l)} x + v_0^{(l)}, c_{l3}, c_{l4}, \varphi_0, \psi_0 \right), \quad (1.16)$$

где $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ – комплексные потенциалы для включения с областью $S^{(l)}$, которые в общем случае имеют вид (1.7), где нужно принимать, что $\Gamma_k = 0$, $A_k^{(l)}$, $A_k^{(j)0}$ – величины, вычисляемые по формулам

(1.10), (1.11); $c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}, \Phi_0, \Psi_0, u_0, u_0^{(l)}, v_0, v_0^{(l)}$ – постійні. Якщо включення з контуром L_l являється абсолютно жорстким, то також повинно виконуватися умову [3]

$$\sum_{k=1}^4 (\beta_{kl1} - \bar{\beta}_{kl1}) = 0, \tag{1.17}$$

в якому β_{kl1} – вирах функції $\Phi_{k0}(z_k)$ в точці z_{kl} .

2. Розв'язок задачі для нескінченної пластинки з еліптичними (круговими) включеннями.

Нехай в п'єзопластинці з еліптичними отворами без попереднього напруження впаваю еластичні включення з інших п'єзоматеріалів, знаходячись з пластинкою в умовах ідеального механічного і електромагнітно-пружого контакту (рис. 1). Позначимо півосі включень і контури отворів через a_l, b_l і L_l . На нескінченності пластинка знаходиться під дією зусиль $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, однорідного електромагнітного поля, характеризуемого напруженностями $E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty$; кут повороту $\omega_3^\infty = 0$.

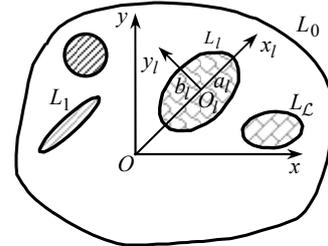


Рис. 1

В розглянутому випадку комплексні потенціали (1.7) для пластинки і включень мають вигляд

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \Phi_{k0}^{(l)}(z_k^{(l)}), \tag{2.1}$$

де Γ_k – постійні, визначаються з системи (1.9); $\Phi_{k0}(z_k)$ – функції, голоморфні поза еліптичними контурами L_{kl} , відповідних контурам L_l при афінних перетвореннях (1.2); $\Phi_{k0}^{(l)}(z_k^{(l)})$ – функції, голоморфні в еліпсах $L_k^{(l)}$, відповідних контурам L_l при афінних перетвореннях $z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y$. Для побудови вказаних функцій використовуємо методи конформних відображень.

Отобразив конформно зовнішність одиничних кіл $|\zeta_{kl}| \geq 1$ і $|\zeta_k^{(l)}| \geq 1$ на зовнішності еліпсів L_{kl} і $L_k^{(l)}$ по формулам [8]

$$z_k = z_{0kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad z_k^{(l)} = z_{0k}^{(l)} + R_k^{(l)} \left(\zeta_k^{(l)} + \frac{m_k^{(l)}}{\zeta_k^{(l)}} \right), \tag{2.2}$$

де

$$\begin{aligned} z_{0kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2 R_{kl}}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

і проводя відповідні розкладання [3], для функцій отримаємо вирази

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \frac{(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n}{(R_k^{(l)})^n}. \tag{2.5}$$

Выражения для $z_{0k}^{(l)}$, $R_k^{(l)}$ получаются по формулам (2.3), если в них μ_k заменить на $\mu_k^{(l)}$ – корни характеристического уравнения (1.3) для материала включения $S^{(l)}$.

Постоянные, входящие в функции (2.4), будем определять из граничных условий (1.16) на контурах контактов пластинки и включений. В случае многосвязной области этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, получаемой из (1.16) дифференцированием по дуге контура ds ,

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\varepsilon_{ki} \delta_k \Phi'_k(z_k) - \varepsilon_{ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = 0 \quad (i = \overline{1, 8}). \quad (2.6)$$

Здесь

$$\delta_k = dz_k/ds, \quad \varepsilon_{ki} = (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, r_k^0, h_k^0), \\ \varepsilon_{ki}^{(l)} = (\lambda_{6k}^{(l)}, \lambda_k^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, \lambda_{8k}^{(l)}, \lambda_{10k}^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)}). \quad (2.7)$$

Для производных комплексных потенциалов имеем выражения

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k), \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \Psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}), \quad (2.8)$$

в которых

$$\Phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \Psi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = \frac{n (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1}}{(R_k^{(l)})^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (2.9)$$

Граничным условиям (2.6) удовлетворим обобщенным методом наименьших квадратов. Выберем на контурах включений систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$, в которых удовлетворим граничным условиям (2.6). Подставив функции (2.8), (2.9) в граничные условия (2.6), получим систему

$$\sum_{k=1}^4 \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon_{ki} \delta_k a_{kln} \Phi'_{kln}(t_{klm}) + \overline{\varepsilon_{ki}} \overline{\delta_k} \overline{a_{kln}} \overline{\Phi'_{kln}(t_{klm})} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varepsilon_{ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} a_{kn}^{(l)} \Psi_{kn}^{(l)}(t_{km}^{(l)}) + \overline{\varepsilon_{ki}^{(l)}} \overline{\delta_k^{(l)}} \overline{a_{kn}^{(l)}} \overline{\Psi_{kn}^{(l)}(t_{km}^{(l)})} \right) \right] = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 [\varepsilon_{ki} \delta_k \Gamma_k] \quad (i = \overline{1, 8} \quad m = \overline{1, M_l}). \quad (2.10)$$

Псевдорешение этой системы будем находить с применением сингулярного разложения [9, 10]. После нахождения псевдорешения системы (2.10) постоянные, входящие в комплексные потенциалы, будут известны, что позволит вычислять напряжения в пластине и в упругих включениях.

3. Анализ численных результатов. Были проведены численные исследования для пластинки, изготовленной из следующих материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [11]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют кадмию селениду $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [12]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют $PZT - 4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (М3) [12]. При проведении расчетов постоянные материалов включений были связаны с соответствующими постоянными материала пластинки следующим образом:

$$s_{ij}^{(l)} = \lambda_s^{(l)} \cdot s_{ij}, \quad g_{ki}^{(l)} = \lambda_{pe} \cdot g_{ki}, \quad p_{ki}^{(l)} = \lambda_{pe} \cdot p_{ki}, \quad \beta_{kl}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_{pe}} \cdot \beta_{kl}, \quad \chi_{kl}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_{pe}} \cdot \chi_{kl}, \quad v_{ij}^{(l)} = \frac{1}{\lambda_{pe}} \cdot v_{ij},$$

где $\lambda_s^{(l)}$ – параметры относительной жесткости включений; λ_{pe} – параметр пьезоэффектности материалов включений. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для пластинки из материалов М1 и М3.

В таблице для растяжения усилиями $\sigma_y^\infty = p$ пластинки с двумя одинаковыми круговыми включениями (рис. 2) радиуса a с точностью до p приведены значения напряжений в точке перемычки А для некоторых зна-

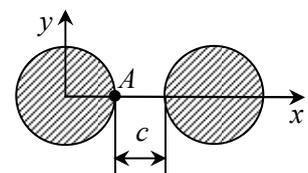


Рис. 2

$\lambda_s^{(l)}$	Напря- жение	c/a									
		∞	2	1	0,5	0,1	∞	2	1	0,5	0,1
		Пластинка из материала М1					Пластинка из материала М3				
∞	σ_s	3,019	3,042	3,299	4,075	8,693	2,652	2,658	2,891	3,647	8,491
10^3	σ_s	3,012	3,035	3,299	4,137	6,428	2,652	2,658	2,896	3,652	7,918
10^2	σ_s	2,951	2,973	3,299	3,958	4,670	2,659	2,664	2,900	3,669	6,577
10^1	σ_s	2,460	2,465	2,643	1,709	1,443	2,717	2,713	2,943	3,746	5,475
	σ_n	0,006	0,025	0,073	0,203	0,172	0,045	0,045	0,045	0,041	0,007
10^{-1}	σ_s	0,285	0,353	0,662	0,616	0,683	3,258	3,380	3,410	3,006	2,199
	σ_n	-0,015	-0,039	-0,219	-0,177	-0,148	1,042	1,566	1,757	0,538	-1,792
10^{-2}	σ_s	0,184	0,260	0,637	0,562	0,625	3,327	3,540	3,541	2,894	2,142
	σ_n	-0,018	-0,043	-0,268	-0,208	-0,170	1,224	1,995	2,369	0,418	-2,395
10^{-3}	σ_s	0,643	0,448	0,453	-1,338	-0,804	3,336	3,563	3,561	2,859	2,130
	σ_n	-0,015	-0,043	-0,365	-1,871	-1,625	1,245	2,053	2,457	0,351	-2,460
0	σ_s	0,645	0,549	0,464	-1,401	-0,932	3,335	3,561	3,560	2,860	2,132
	σ_n	-0,144	-0,151	-0,368	-1,870	-1,625	1,245	2,049	2,464	0,351	-2,467

чений отношения c/a , где c – расстояние между контурами включений, и параметра $\lambda_s^{(l)}$ при $\lambda_{pe} = 1$.

Величины, соответствующие значениям $\lambda_s^{(l)}$, равным ∞ и 0, относятся к случаям пластинки с абсолютно мягкими и абсолютно жесткими включениями соответственно. На рис. 3 (для пластинки из материала М1) и рис. 4 (для пластинки из материала М3) изображены графики распределения в пластинке

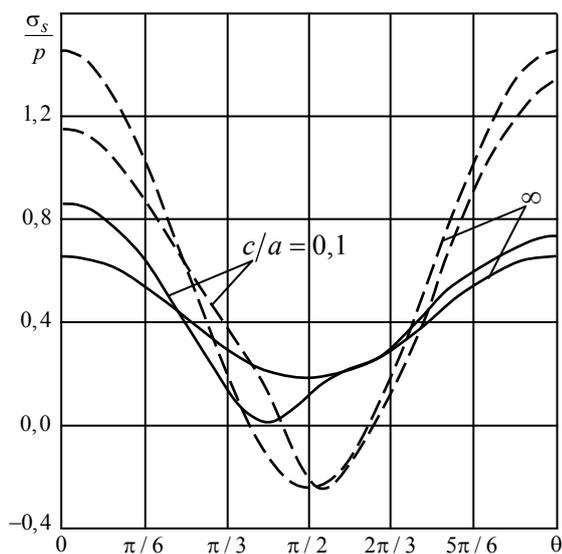


Рис. 3

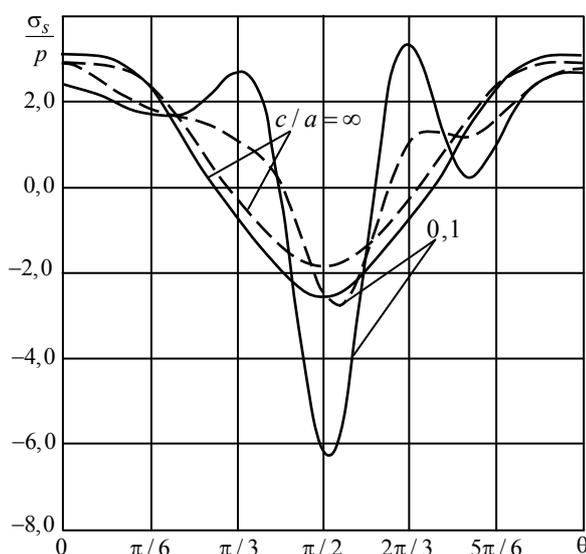


Рис. 4

вблизи контура нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру левого включения. При этом θ – центральный угол, отсчитываемый от линий центров включений против часовой стрелки, сплошные линии относятся к случаю, когда $\lambda_s^{(l)} = 0,5$, штриховые – когда $\lambda_s^{(l)} = 2$.

Из таблицы и рис. 3, 4 видно, что с уменьшением расстояния между включениями концентрация напряжений в зоне между включениями растет; при $c/a > 2$ влияние одного включения на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь. Чем мягче материал включений (чем больше $\lambda_s^{(l)}$), тем больше эта концентрация напряжений; при $\lambda_s^{(l)} > 10^3$ включения можно считать абсолютно мягкими. В этом случае значения напряжений в пластинке совпадают с соответствующими зна-

ченнями для пластинки с отверстиями [2]. При $\lambda_s^{(l)} < 10^{-3}$ включения можно считать абсолютно жесткими, если $c/a > 0,1$, а при меньших значениях c/a переход к абсолютно жесткому ядру осуществляется при еще меньших значениях параметра $\lambda_s^{(l)}$. Но значения напряжений в пластинке с абсолютно жесткими включениями значительно отличаются от соответствующих значений для пластинки с отверстиями, контуры которых жестко подкреплены [7]. Значения указанных величин совпадают, если материалы включений не обладают пьезоэффектом, т. е. когда λ_{pe} весьма малы [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).
2. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
4. Калоеров С. А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
5. Калоеров С. А. Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости / С. А. Калоеров, А. А. Самодуров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Вып. 7(53). – С. 118–130.
6. Калоеров С. А. Решение задачи электромагнитоупругости для кусочно-однородных пластин / С. А. Калоеров, А. А. Самодуров // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф. (Донецк–Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк, 2013. – Т. 1. – С. 163–167.
7. Калоеров С. А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластины с подкрепленными отверстиями / С. А. Калоеров, А. А. Самодуров // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2013. – Вып. 1. – С. 42–48.
8. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С. А. Калоеров, Е. С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., Т. 7).
9. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
10. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
12. Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method / A. Hrennikoff // J. Appl. Mech. – 1941. – Vol. 8. – P. A169–A175.

Поступила в редакцию 28.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Наведені основні співвідношення електромагнітопружності для багатозв'язних п'єзопластинок. З використанням цих співвідношень, а також розкладання голоморфних функцій в ряди Лорана та по поліномам Фабера розв'язок задачі для кусково-однорідної пластинки з рядом пружних включень узагальненим методом найменших квадратів зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, псевдорозв'язок якої знайдено сингулярним розкладанням. Проведені числові дослідження, з допомогою яких виявлен вплив відносної жорсткості матеріала включення на значення основних характеристик електромагнітопружного стану.

Ключевые слова: електромагнітопружність, п'єзоматеріали, кусково-однорідна пластинка, пружні включення.

SUMMARY

Basic relations of electromagnetoelasticity for multiply piezoplates are given. With the use of these relations and the expansion of holomorphic functions in the Laurent series and Faber polynomials given the solution of the problem for a piecewise-homogeneous plate with several elastic inclusions which is reduced to a system of linear algebraic equations by the generalized least squares method, which solution founds by pseudo-singular value decomposition. Numerical investigations by which revealed the effect of relative rigidity the material of inclusion on the value of main characteristics of electromagnetoelastic state.

Keywords: electromagnetoelasticity, piezomaterials, piecewise-homogeneous plate, elastic inclusions.

УДК 531.39:539.3:517.9

Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок, Ю. А. Джуха

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОГО НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ГИДРОУПРУГОСТИ

Развит метод построения решений обобщенного неоднородного бигармонического уравнения, возникающего в задачах гидроупругости. Рассмотрено применение этого метода в задаче о собственных совместных колебаниях идеальной жидкости и упругих оснований цилиндрического резервуара произвольного поперечного сечения. Аналитические выражения коэффициентов разложения найдены в зависимости от массовых и упругих параметров пластин, наличия предварительного натяжения пластин и поля массовых сил.

Ключевые слова: неоднородное обобщенное бигармоническое уравнение, упругая пластина, идеальная жидкость.

Введение. Основным вопросом при исследовании движения твердых и упругих тел с полостями, содержащими жидкость, является вопрос устойчивости движения, так как относительное движение жидкости в полости оказывает на него дестабилизирующее воздействие. Аналогичная задача возникает в строительной механике при создании резервуаров больших емкостей, подверженных ветровым или сейсмическим импульсным нагрузкам. Эта же задача возникает при решении транспортировки жидких грузов в цистернах, танкерах. Для ограничения подвижности жидкости в резервуарах используются упругие пластины или мембраны, ограничивающие колебания свободной поверхности. Теоретическому исследованию динамики идеальной жидкости в прямом круговом цилиндре и прямоугольном канале, свободная поверхность которых покрыта плоскими упругими пластинами или мембраной, посвящены работы [1–5]. Использованию операторных методов в исследовании эволюционных задач динамики жидкости в рассматриваемых резервуарах посвящены работы [6, 7]. Собственные и вынужденные колебания идеальной жидкости в цилиндрическом резервуаре с неплоским дном рассмотрены в работах [8–10]. В работах [1, 11] разработана динамическая схема движения твердого тела с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена тонкая пластина. В работе [12] получены условия устойчивости положения равновесия упругих пластин, разделяющих многослойную идеальную жидкость. В статьях [13, 14] нашло дальнейшее развитие исследование собственных колебаний многослойной жидкости, разделенной упругими пластинками. В работах [15, 16] на основании модального анализа проведены исследования поперечных и вращательных колебаний цилиндрического резервуара с упругими основаниями и идеальной жидкостью. Методика использования модального анализа предполагает известными собственные частоты и собственные формы совместных колебаний пластин и жидкости. Основная сложность задачи состоит в построении собственных форм на основании найденных собственных частот. Во всех рассмотренных работах были рассмотрены только частные случаи построения решений неоднородного обобщенного бигармонического уравнения и аналитическое разложение коэффициентов разложения.

В данной статье это ограничение снимается.

Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрический резервуар с упругими основаниями, содержащий идеальную несжимаемую жидкость. Резервуар имеет произвольное поперечное сечение Ω , жесткую боковую стенку Σ и упругие основания в виде тонких пластин с изгибной жесткостью D_i , подверженных растягивающим усилиям T_i в срединной поверхности. Колебания жидкости и упругих оснований предполагаются совместными (безотрывными). Движение жидкости будем считать потенциальным. Как было отмечено выше, при использовании модального анализа необходимо располагать собственными частотами и соответствующими собственными формами. Данная постановка включает ряд интересных частных задач: абсолютно жесткое нижнее основание [11], упругое нижнее основание и свободная поверхность [16], жесткое верхнее дно и упругое основание, а также различные случаи вырождения пластин в мембраны. В каждой из перечисленных задач возникает необходимость в построении решения следующего неоднородного обобщенного бигармонического уравнения

$$D\Delta_2^2 w - T\Delta_2 w - (\chi\omega^2 \pm \rho g)w = \sum_n a_n(\omega^2)\psi_n \int_{\Omega} w\psi_n d\Omega \quad (1)$$

при различных граничных условиях закрепления пластин

$$B_1 w|_{\gamma} = 0, \quad B_2 w|_{\gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь w и ω – собственная форма и собственная частота совместных колебаний пластины и жидкости, χ , D , T – соответственно поверхностная плотность, жесткость и натяжение пластины, ρ – плотность

жидкости, g – ускорение силы тяжести, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, – операторы граничных условий закрепления пластин, коэффициенты a_n и выбор знака при ρg зависят от вида конкретно рассматриваемой задачи [2, 15]. В случае наиболее часто используемых условий жесткого защемления оператор B_1 является единичным, а $B_2 = \partial/\partial v$. Здесь ψ_n и k_n – собственные функции и собственные числа краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области Ω

$$\Delta_2 \psi + k_n^2 \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial v|_\gamma = 0, \quad (3)$$

где γ – контур закрепления пластины, v – единичный вектор нормали к γ .

Построение решения неоднородного обобщенного бигармонического уравнения. Общее решение краевой задачи (1), (2) представляется в виде линейной комбинации независимых решений одно-родного обобщенного бигармонического уравнения и частотного решения неоднородного уравнения [11]. Однородное бигармоническое уравнение зависит от четырех основных параметров: D , T , $\chi \omega^2$, ρg , а также от выбора знака. В этой связи построение его частных решений для различных комбинаций основных параметров представляет определенный интерес. Частное решение неоднородного уравнения можно построить методом вариации постоянных. Однако проще искать это решение в виде разложения по собственным функциям [1, 11] краевой задачи (3). Таким образом, для построения решений рассматриваемых задач гидроупругости необходимо иметь полный набор частных решений обобщенного бигармонического уравнения (1). Из вида дифференциального уравнения (1) и предложенного метода следует, что рассматриваемые задачи будут иметь аналитическое решение, если будут известны коэффициенты разложения в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям ψ_n решений уравнения (1)

$$E_{in}^\circ = \frac{1}{N_n^2} \int_\Omega u_i \psi_n d\Omega, \quad N_n^2 = \int_\Omega \psi_n^2 d\Omega. \quad (4)$$

Методику построения решения уравнения (1) покажем на примере прямого кругового цилиндра радиуса R . В этом случае собственные функции задачи (3) имеют вид

$$\psi_{nj} = J_n(k_{nj}r) [\cos(n\theta) + M_n \sin(n\theta)],$$

где J_n – функции Бесселя первого рода n -го порядка, $k_{nj} = \mu_{nj}/R$, μ_{nj} – корни уравнения $J'_n(\mu_{nj}) = 0$, M_n – константы, $n = \overline{0, \infty}$, $j = \overline{1, \infty}$. В случае круговой области интегралы (4) имеют вид

$$E_{inj}^\circ = \frac{1}{N_{nj}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R u_i(r) \psi_{nj}(k_{nj}r) \Phi_n^2(\theta) r dr d\theta, \quad N_{nj}^2 = \frac{1}{2} R^2 J_n^2(\mu_{nj}) (1 - n^2 / \mu_{nj}^2). \quad (5)$$

Частные решения соответствующего (1) однородного уравнения запишутся в виде

$$w = u(r) [\cos(n\theta) + M_n \sin(n\theta)].$$

Радиальная компонента $u(r)$ определяется из уравнения

$$\Delta_{2n}^2 u + 2p \Delta_{2n} u + qu = 0, \quad (6)$$

в котором

$$\Delta_{2n} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}, \quad p = -\frac{T}{2D}, \quad q = -\frac{\chi \omega^2 \pm \rho g}{D}.$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению фундаментальной системы решений (ФСР) для обыкновенного дифференциального уравнения (6) и вычислению соответствующих коэффициентов разложения для всех возможных соотношений параметров механической системы. Линейная независимость базисных наборов функций проверялась на основе проверки равенства нулю Вронскиана, построенного из функций тестируемого набора по методике, описанной в [17]. В силу громоздкости, детальные выкладки не приводятся.

Рассмотрим построение ФСР в зависимости от основных механических параметров пластины (D , T , χ), плотности жидкости ρ и поля массовых сил g .

1. *Вырождение пластины в мембрану* ($D = 0$, $T \neq 0$). В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$\Delta_{2n} u - \beta u = 0, \quad (7)$$

где $\beta = (\chi \omega^2 \pm \rho g) / T$. ФСР уравнения (7) будет набор функций

$$u_1 = J_n(\sqrt{\beta}r), \quad u_2 = Y_n(\sqrt{\beta}r), \quad \text{если } \chi \omega^2 > \rho g;$$

$$u_1 = I_n(\sqrt{-\beta}r), \quad u_2 = K_n(\sqrt{-\beta}r), \quad \text{если } \chi\omega^2 < \rho g;$$

$$u_1 = \begin{cases} (r/R)^n, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} (r/R)^n, & n > 0, \\ \ln(r/R), & n = 0, \end{cases} \quad \text{если } \chi\omega^2 = \rho g.$$

Здесь J_n и Y_n – соответственно функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка, I_n и K_n – соответственно модифицированные функции Бесселя первого и второго рода n -го порядка. Здесь функция u_2 имеет особенность при $r = 0$. Поэтому при построении ФСР, ограниченной в начале координат, будем учитывать только функцию u_1 . Коэффициенты разложения E_{1nj}° функций u_1 имеют вид

$$E_{1nj}^\circ = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta = k_{nj}, \\ 2(\beta R J_{n+1}(\beta R) - n J_n(\beta R)) / \left(((\beta R)^2 - \mu_{nj}^2) e_{nj} \right), & \text{если } \beta \neq k_{nj}, \end{cases} \quad (8)$$

$$E_{1nj}^\circ = 2(\beta R I_{n+1}(\beta R) + n I_n(\beta R)) / \left(((\beta R)^2 + \mu_{nj}^2) e_{nj} \right), \quad (9)$$

$$E_{1nj}^\circ = 2n/e_{nj}. \quad (10)$$

где $e_{nj} = J_n(\mu_{nj})(1 - n^2/\mu_{nj}^2)$. Полученные выражения совпадают с приведенными в [11].

Рассмотрим теперь возможные ситуации при условии $D \neq 0$.

2. *Отсутствие мембранного натяжения ($T = 0$)*. Тогда $p = 0$ и можно выделить случаи.

Случай 2.1. Механическая система находится в состоянии невесомости ($\mathbf{g} = 0$), а пластина является безмассовой ($\chi = 0$). Уравнение (6) в этом случае принимает вид

$$\Delta_{2n}^2 u = 0.$$

ФСР данного уравнения является

$$u_1 = (r/R)^n, \quad u_2 = (r/R)^{2+n}, \quad (11)$$

$$u_3 = \begin{cases} (r/R)^2 \ln(r/R), & \text{если } n = 0, \\ (r/R) \ln(r/R), & \text{если } n = 1, \\ (r/R)^{2-n}, & \text{если } n > 1, \end{cases} \quad u_4 = \begin{cases} (r/R) \ln(r/R), & \text{если } n = 0, \\ (r/R)^{-n}, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

В выражения собственных форм w войдут только u_1 и u_2 . Коэффициенты разложения E_{1nj}° функции u_1 из (11) даны в формуле (10), а коэффициенты разложения u_2 имеют вид

$$E_{2nj}^\circ = 2(n + 2 - 4n(n + 1)/\mu_{nj}^2) / e_{nj},$$

Случай 2.2. При учете массы пластины или наличия силы тяжести, уравнение (6) запишется в виде

$$\Delta_{2n}^2 u + qu = 0.$$

В этом случае, если $q > 0$, имеем следующий набор ФСР

$$u_1 = \text{ber}_n(\sqrt[4]{q}r) / \left(1 + \left| \text{ber}_n(\sqrt[4]{q}R/2) \right| \right), \quad u_2 = \text{bei}_n(\sqrt[4]{q}r) / \left(1 + \left| \text{bei}_n(\sqrt[4]{q}R/2) \right| \right),$$

$$u_3 = \text{ker}_n(\sqrt[4]{q}r) / \left(1 + \left| \text{ker}_n(\sqrt[4]{q}R/5) \right| \right), \quad u_4 = \text{kei}_n(\sqrt[4]{q}r) / \left(1 + \left| \text{kei}_n(\sqrt[4]{q}R/5) \right| \right). \quad (12)$$

Здесь ber_n , bei_n , ker_n , kei_n – функции Кельвина, определяемые формулами [17]

$$\text{ber}_n(r) + i \text{bei}_n(r) = J_n\left(r e^{3\pi i/4}\right), \quad \text{ker}_n(r) + i \text{kei}_n(r) = e^{-i\pi n/2} K_n\left(r e^{\pi i/4}\right).$$

Данный случай может иметь место, только если пластина является верхним основанием резервуара и выполнено соотношение $\chi\omega^2 < \rho g$. Если пластина является нижним основанием или имеет место неравенство $\chi\omega^2 > \rho g$, то $q < 0$ и ФСР составляют функции

$$u_1 = J_n(\sqrt[4]{-q}r), \quad u_2 = I_n(\sqrt[4]{-q}r)/I_n(\sqrt[4]{-q}R), \quad u_3 = Y_n(\sqrt[4]{-q}r), \quad u_4 = K_n(\sqrt[4]{-q}r). \quad (13)$$

Коэффициенты разложения функций u_1 и u_2 в выражениях (12) имеют вид

$$E_{1nj}^{\circ} = 2/\left(e_{nj} \left[(\beta R)^4 + \mu_{nj}^4 \right]\right) \left\{ \mu_{nj}^2 \left[n \operatorname{ber}_n(\beta R) + \frac{\beta R}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}_{n+1}(\beta R) + \operatorname{bei}_{n+1}(\beta R)) \right] - \right. \\ \left. - (\beta R)^2 \left[n \operatorname{bei}_n(\beta R) - \frac{\beta R}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}_{n+1}(\beta R) + \operatorname{bei}_{n+1}(\beta R)) \right] \right\}^{-1}, \\ E_{2nj}^{\circ} = 2/\left(e_{nj} \left[(\beta R)^4 + \mu_{nj}^4 \right]\right) \left\{ \mu_{nj}^2 \left[n \operatorname{bei}_n(\beta R) - \frac{\beta R}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}_{n+1}(\beta R) - \operatorname{bei}_{n+1}(\beta R)) \right] - \right. \\ \left. - (\beta R)^2 \left[n \operatorname{ber}_n(\beta R) + \frac{\beta R}{\sqrt{2}} (\operatorname{ber}_{n+1}(\beta R) + \operatorname{bei}_{n+1}(\beta R)) \right] \right\}^{-1}.$$

Коефіцієнти розкладання функцій u_1 і u_2 в (13) дані в формулах (8) і (9), в яких $\beta = \sqrt[4]{-q}$.

3. Положительное предварительное натяжение ($T > 0$). Будем считать, что пластина подвержена растягивающему усилию в срединной плоскости ($p > 0$). Для безмассовой пластины в невесомости $q = 0$. В этом случае ФСР имеет вид

$$u_1 = (r/R)^n, \quad u_2 = J_n(\sqrt{2p}r), \quad u_3 = \begin{cases} \ln(r/R), & \text{если } n = 0 \\ (r/R)^{-n}, & \text{если } n > 0 \end{cases}, \quad u_4 = Y_n(\sqrt{2p}r).$$

Если $q \neq 0$, возможны следующие ситуации:

Случай 3.1. $p^2 - q = 0$, тогда

$$u_1 = J_n(\sqrt{p}r), \quad u_2 = \frac{r}{R} J_{n+1}(\sqrt{p}r), \quad u_3 = \frac{r}{R} Y_{n+1}(\sqrt{p}r), \quad u_4 = Y_n(\sqrt{p}r).$$

Случай 3.2. $p^2 - q > 0$ и $q > 0$, тогда

$$u_1 = J_n(\beta_1 r), \quad u_2 = J_n(\beta_2 r), \quad u_3 = Y_n(\beta_1 r), \quad u_4 = Y_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 3.3. $p^2 - q > 0$ и $q < 0$, тогда

$$u_1 = \frac{I_n(\beta_1 r)}{I_n(\beta_1 R)}, \quad u_2 = J_n(\beta_2 r), \quad u_3 = K_n(\beta_1 r), \quad u_4 = Y_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{-p + \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 3.4. $p^2 - q < 0$, тогда

$$u_1 = \operatorname{Re}(J_n(\beta r)), \quad u_2 = \operatorname{Im}(J_n(\beta r)), \quad u_3 = \operatorname{Re}(Y_n(\beta r)), \quad u_4 = \operatorname{Im}(Y_n(\beta r)), \quad (14)$$

где $\beta = \sqrt{p + i\sqrt{q - p^2}}$.

В последнем случае, на основе представления функций Бесселя в виде степенных рядов [17], функции u_i можно также представить в виде степенных рядов. Однако, для практического использования в системах компьютерной математики, запись (14) является более удобной.

Интегралы

$$\int_0^R \frac{r}{R} J_{n+1}(\beta r) J_n(k_{nj} r) r dr, \quad \int_0^R \operatorname{Re}(J_n(\beta r)) J_n(k_{nj} r) r dr, \quad \int_0^R \operatorname{Im}(J_n(\beta r)) J_n(k_{nj} r) r dr.$$

не выражаются через известные специальные функции [17]. Интегралы от других функций с точностью до нормирующего множителя приведены выше.

4. Случай отрицательного предварительного натяжения ($T < 0$). Случай $p < 0$ возможен, если к контуру пластины приложена сжимающая нагрузка. В зависимости от соотношения величин p и q возможны следующие ситуации:

Случай 4.1. $q = 0$, тогда

$$u_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad u_2 = \frac{I_n(\sqrt{-2pr})}{I_n(\sqrt{-2pR})}, \quad u_3 = \begin{cases} \ln(r/R), & \text{если } n=0 \\ (r/R)^{-n}, & \text{если } n>0 \end{cases}, \quad u_4 = K_n(\sqrt{-2pr}).$$

Случай 4.2. $p^2 - q = 0$, тогда

$$u_1 = \frac{I_n(\sqrt{-pr})}{I_n(\sqrt{-pR})}, \quad u_2 = \frac{r I_{n+1}(\sqrt{-pr})}{R I_{n+1}(\sqrt{-pR})}, \quad u_3 = \frac{r}{R} K_{n+1}(\sqrt{-pr}), \quad u_4 = K_n(\sqrt{-pr}).$$

Случай 4.3. $p^2 - q > 0$ и $q > 0$

$$u_1 = \frac{I_n(\beta_1 r)}{I_n(\beta_1 R)}, \quad u_2 = \frac{I_n(\beta_2 r)}{I_n(\beta_2 R)}, \quad u_3 = K_n(\beta_1 r), \quad u_4 = K_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{-p + \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{-p - \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 4.4. $p^2 - q > 0$ и $q < 0$, тогда

$$u_1 = \frac{I_n(\beta_1 r)}{I_n(\beta_1 R)}, \quad u_2 = J_n(\beta_2 r), \quad u_3 = K_n(\beta_1 r), \quad u_4 = Y_n(\beta_2 r),$$

где $\beta_1 = \sqrt{-p + \sqrt{p^2 - q}}$, $\beta_2 = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$.

Случай 4.5. $p^2 - q < 0$, тогда

$$u_1 = \operatorname{Re}(J_n(\beta r)), \quad u_2 = \operatorname{Im}(J_n(\beta r)), \quad u_3 = \operatorname{Re}(Y_n(\beta r)), \quad u_4 = \operatorname{Im}(Y_n(\beta r)),$$

где $\beta = \sqrt{p + i\sqrt{q - p^2}}$.

Выводы. Построены решения обобщенного неоднородного бигармонического уравнения для задач о колебании жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями в зависимости от основных механических параметров пластины и жидкости. Проведены аналитические вычисления коэффициентов разложения решений однородного обобщенного бигармонического уравнения по собственным функциям колебаний жидкости в прямом круговом цилиндре. Полученные формулы составляют теоретическую базу разработанного авторами программного комплекса для численно-аналитических исследований собственных и вынужденных колебаний цилиндрического резервуара с упругими основаниями и идеальной жидкостью. Во всех перечисленных ситуациях функции u_i даны в форме наиболее удобной для дальнейшего использования в численных исследованиях. В частности, нормировка функций, приведенная в (12), существенно снижает погрешность при вычислениях с плавающей запятой в случаях $r \gg 1$ и $r \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана / Л. В. Докучаев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 49–54.
2. Capodanno P. Small planar oscillations of a container with elastic cover containing two immiscible liquids / P. Capodanno // Eur. J. Mech. B. – 1990. – Vol. 9, No 3. – P. 289–306.
3. Bauer H. F. Frequencies of a hydroelastic rectangular system / H. F. Bauer // Forschung im Ingenieurwesen. – 1993. – Vol. 59, No 1–2. – P. 18–28.
4. Кононов Ю. Н. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на свободной и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гидромеханика. – 2003. – Т. 5 (77), № 3. – С. 48–54.
5. Кононов Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Динамические системы: межвед. науч. сборник – Таврич. нац. ун-т, 2006. – Вып. 21. – С. 7–13.
6. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Н.З. Кан. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
7. Копачевский Н. Д. Дифференциально-операторные и интегродифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем / Н. Д. Копачевский, Л. Д. Орлова, Ю. С. Пашкова // Ученые записки Симферопольского ун-та. – Симферополь: Изд. СГУ, 1995. – № 2 (41). – С. 96–108.
8. Троценко В. А. Поперечные колебания жидкости в длинном цилиндрическом контейнере с мембраной или упругой пластинкой на свободной поверхности / В. А. Троценко, Р. И. Богун // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 379–404.

9. Богун Р. І. Власні коливання рідини в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном та пружними елементами на вільній поверхні рідини / Р. І. Богун, В. А. Троценко // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 4. – С. 461–482.
10. Богун Р. І. Вимушені коливання рідини в рухомому резервуарі з мембраною на її вільній поверхні / Р. І. Богун // Аналітична механіка та її застосування: зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – Т. 7, № 3. – С. 62–77.
11. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
12. Шевченко В. П. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость / В. П. Шевченко, Ю. Н. Кононов // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – К.: Наук. Думка, 2007. – С. 348–361.
13. Карнаух А. Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А. Ю. Карнаух // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 202–206.
14. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластины, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями / А. Ю. Карнаух // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. – 2013. – № 2 (173). – С. 38–41.
15. Кононов Ю. Н. Задача сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок // Механика твердого тела. – 2011. – Т. 40. – С. 210–220.
16. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. – 2013. – № 5 (177). – С. 30–34.
17. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцію 20.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Розвинуто метод побудови розв'язків узагальненого неоднорідного бігармонічного рівняння, що виникає в задачах гідропружності. Розглянуто застосування цього методу в задачі про власні сумісні коливання ідеальної рідини та пружних основ циліндричного резервуару довільного поперечного перетину. Аналітичні вирази коефіцієнтів розкладу знайдено у залежності від масових та пружних параметрів пластин, наявності попереднього натягу пластин і поля масових сил.

Ключові слова: неоднорідне узагальнене бігармонічне рівняння, пружна пластина, ідеальна рідина.

SUMMARY

The method of building of solutions for generalized inhomogeneous biharmonic equation in hydroelastic problems was developed. This method was applied to the problem of free oscillations of ideal liquid and elastic bases of cylindrical tank with arbitrary cross section. Analytical expressions of the expansion coefficients were deduced in depending on the mass and elastic parameters of the plates, pre-tension of plates and fields of mass forces.

Keywords: generalized inhomogeneous biharmonic equation, elastic plate, ideal liquid.

УДК 531.36, 531.38

Ю. Н. Кононов, Н. В. Киселёва, Д. В. Мишура

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНОГО И ПОСТОЯННОГО МОМЕНТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Получены в виде системы неравенств условия асимптотической устойчивости равномерного вращения несимметричного тяжелого твёрдого тела, находящегося под действием диссипативного и постоянного моментов. Проведены численные исследования влияния несимметрии твёрдого тела, диссипативного и постоянного моментов на области устойчивости. Обобщены известные результаты для симметричного твёрдого тела на случай динамической несимметрии твёрдого тела и диссипативной несимметрии.

Ключевые слова: динамически несимметричное твёрдое тело, сопротивляющаяся среда, асимптотическая устойчивость.

Введение. Известно, что в задаче о движении волчка Лагранжа существуют два типа стационарных движений: равномерные вращения вокруг вертикально расположенной оси динамической симметрии и регулярные прецессии. Вращение статически устойчивого волчка и регулярные прецессии всегда устойчивы, а вращение спящего волчка устойчивы при выполнении условия Маевского [1].

В монографиях [2, 3] показано, что динамическая несимметрия твёрдого тела приводит к появлению дополнительного интервала неустойчивости, длина которого стремится к нулю при стремлении к нулю величины дебаланса.

Эволюция вращений твёрдого тела в среде с линейной диссипацией рассмотрены в [4]. Оценено влияние вязкости жидкости, момента сил светового давления на вращение спутника относительно центра масс. В [4] на основании метода усреднения исследовано быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного твёрдого тела в сопротивляющейся среде. Движение тела состоит из движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора кинетического момента с медленно убывающими величинами кинетического момента и кинетической энергией, и из движения самого вектора кинетического момента. Изменения кинетической энергии и модуля кинетического момента зависят только от сопротивления среды. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента вокруг вертикали зависит от действия силы тяжести и силы сопротивления среды.

В статье [5] рассмотрена задача о движении тяжелого динамически симметричного твёрдого тела вокруг неподвижной точки, находящегося под действием диссипативного и постоянного моментов. Показано, что эти моменты могут оказывать существенно дестабилизирующее влияние на устойчивость равномерного вращения твёрдого тела. В настоящей работе обобщены результаты этой статьи на случай равномерного вращения динамически несимметричного твёрдого тела и диссипативной несимметрии.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твёрдого динамически несимметричного тела с неподвижной точкой, находящегося под действием диссипативного момента $\vec{M}_d = -D\vec{\omega}$ ($D = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$) и постоянного момента $\vec{M}_p = P\vec{\gamma}$. Будем считать, что \vec{M}_p приложен к внешней рамке безынерционного карданова подвеса. Здесь $\vec{\omega}$ – угловая скорость твёрдого тела, $\vec{\gamma}$ – единичный вектор вертикали, D_1, D_2, D_3 и P – постоянные ($D_i > 0, i = \overline{1, 3}$).

Проектируя уравнения движения тела на главные оси инерции тела для неподвижной точки, имеем

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = \Gamma\gamma_2 + P\gamma_1 - D_1\omega_1, \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_1\omega_3 = -\Gamma\gamma_1 + P\gamma_2 - D_2\omega_2, \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = P\gamma_3 - D_3\omega_3; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 = 0, \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\gamma}$ на главные оси инерции твёрдого тела для неподвижной точки; $\Gamma = mgL_1$, m – масса волчка, L_1 – расстояние от центра масс до неподвижной точки, g – ускорение свободного падения.

Система (1) виражає теорему об зміні кінетического моменту $J\vec{\omega}$ тіла ($J = \text{diag}(A, B, C)$) – тензор інерції твёрдого тіла відносно нерухомих точки), а система (2) визначає умову постійності вектора $\vec{\gamma}$ в інерціальній системі відліку.

Уравнення руху (1), (2) допускають рішення

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0 = P/D_3, \quad (3)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = -1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0 = -P/D_3, \quad (4)$$

відповідають рівномірним обертанням твёрдого тіла з кутовою швидкістю ω_0 навколо вертикальної осі. При цьому рішення (3) відповідає випадку сплячого волчка (центр мас знаходиться вище нерухомих точки), а рішення (4) – випадку статически стійкого волчка (центр мас знаходиться нижче нерухомих точки).

Побудова рішення задачі. Для дослідження стійкості рішення (3) покладемо в збуреному русі $\gamma_3 = 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega_0 + \sigma$ і запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху для системи (1), (2) ($\omega_1 = \Omega_1$, $\omega_2 = \Omega_2$)

$$A\dot{\Omega}_1 + (C - B)\Omega_2\omega_0 = \Gamma\gamma_2 + P\gamma_1 - D_1\Omega_1, \quad (5)$$

$$B\dot{\Omega}_2 + (A - C)\Omega_1\omega_0 = -\Gamma\gamma_1 + P\gamma_2 - D_2\Omega_2, \quad (6)$$

$$C\dot{\sigma} = D_3\omega_0\delta - D_3\sigma, \quad (7)$$

$$\dot{\gamma}_1 + \Omega_2 - \omega_0\gamma_2 = 0, \quad (8)$$

$$\dot{\gamma}_2 + \omega_0\gamma_1 - \Omega_1 = 0, \quad (9)$$

$$\dot{\delta} = 0. \quad (10)$$

Характеристическе рівняння, відповідає системі (5)–(10), завжди має місце нульовий корінь, обумовлений наявністю геометрического інтеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, і один дійсний від'ємний корінь, рівний $-D_3/C$. Крім того, рівняння (5), (6), (8), (9) відділяються від інших рівнянь системи (5)–(10). Тому рішення (3) асимптотически стійке, якщо всі корні характеристического рівняння, відповідає підсистемі (5), (6), (8), (9), мають від'ємні дійсні частини, і рішення (3) асимптотически нестійке, якщо хоча б один корінь характеристического рівняння має додативну дійсну частину. Асимптотическа стійкість по змінній γ_3 слідує з асимптотическою стійкістю по змінним γ_1 , γ_2 і співвідношенню $\gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2$.

Рішення системи (5)–(10) будемо шукати в формі $\Omega_i = \Omega_{i0}e^{\lambda t}$, $\gamma_i = \gamma_{i0}e^{\lambda t}$. Тоді (5), (6), (8) і (9) запишуться наступним чином

$$\begin{cases} A\lambda\Omega_{10}e^{\lambda t} + (C - B)\Omega_{20}e^{\lambda t}\omega_0 = \Gamma\gamma_{20}e^{\lambda t} + P\gamma_{10}e^{\lambda t} - D_1\Omega_{10}e^{\lambda t}, & (11) \\ B\lambda\Omega_{20}e^{\lambda t} + (A - C)\Omega_{10}e^{\lambda t}\omega_0 = -\Gamma\gamma_{10}e^{\lambda t} + P\gamma_{20}e^{\lambda t} - D_2\Omega_{20}e^{\lambda t}, & (12) \\ \lambda\gamma_{10}e^{\lambda t} + \Omega_{20}e^{\lambda t} - \omega_0\gamma_{20}e^{\lambda t} = 0, & (13) \\ \lambda\gamma_{20}e^{\lambda t} + \omega_0\gamma_{10}e^{\lambda t} - \Omega_{10}e^{\lambda t} = 0. & (14) \end{cases}$$

З (13) і (14) виразимо γ_{10} , γ_{20} і підставимо в (11), (12)

$$A\lambda\Omega_{10} + (C - B)\Omega_{20}\omega_0 - \frac{\Gamma(\Omega_{10}\lambda + \Omega_{20}\omega_0)}{\lambda^2 + \omega_0^2} - \frac{P(\Omega_{10}\omega_0 - \Omega_{20}\lambda)}{\lambda^2 + \omega_0^2} + D_1\Omega_{10} = 0, \quad (15)$$

$$B\lambda\Omega_{20} + (A - C)\Omega_{10}\omega_0 + \frac{\Gamma(\Omega_{10}\omega_0 - \Omega_{20}\lambda)}{\lambda^2 + \omega_0^2} - \frac{P(\Omega_{10}\lambda + \Omega_{20}\omega_0)}{\lambda^2 + \omega_0^2} + D_2\Omega_{20} = 0. \quad (16)$$

Отримані рівняння (15) і (16) є однорідною системою двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Для того, щоб однорідна система двох лінійних рівнянь з двома невідомими мала нетривіальне рішення, необхідно і достативно, щоб визначник матриці цієї системи був рівний нулю.

Таким чином, характеристическе рівняння для системи (5), (6), (8) і (9) примет вид

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (17)$$

где

$$a_3 = \frac{AD_2 + BD_1}{AB}, \quad a_2 = \frac{J^2 + D_1D_2 + A\Gamma_1 + B\Gamma_2}{AB}, \quad a_1 = \frac{A\Gamma_1 + B\Gamma_2 + (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2)J}{AB},$$

$$a_0 = \frac{\Gamma_1\Gamma_2 + \tilde{D}_1\tilde{D}_2}{AB}, \quad \Gamma_1 = (C - A)\omega_0^2 - \Gamma, \quad \Gamma_2 = (C - B)\omega_0^2 - \Gamma, \quad J_s = J\omega_0,$$

$$J = A + B - C, \quad \tilde{D}_1 = D_1\omega_0 - P, \quad \tilde{D}_2 = D_2\omega_0 - P, \quad \Gamma = mgL_1.$$

Так же, как и в [5], уравнения (5), (6), (8) и (9) описывают движение линейной механической системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием сил произвольной структуры: диссипативных, потенциальных, гироскопических и циркуляционных.

В [5] из-за динамической симметрии ($B = A$) и в случае одинаковых коэффициентов диссипации ($D_2 = D_1$) было возможно введение комплекснозначных координат, что существенно упростило нахождение границ областей устойчивости.

Исследование характеристического уравнения (17) будем проводить с помощью иннерного подхода. Согласно критерию Льенара-Шипара из [6], для существования асимптотически устойчивых решений необходимо и достаточно, чтобы матрица третьего порядка, составленная из коэффициентов многочлена (17)

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

была иннерно-положительной [6], а также положительна половина коэффициентов уравнения (17). Для решения нашей задачи пусть это будут коэффициенты a_2 и a_0 .

Иннерная положительность матрицы (18) определяется двумя неравенствами $a_3 > 0$ и $\det(I_3) = -a_0a_3^2 + a_1a_2a_3 - a_1^2 > 0$. Неравенство $a_3 = (AD_2 + BD_1)/AB > 0$ выполняется всегда, т.к. A , B , D_1 и D_2 положительны по определению. Определитель матрицы I_3 представляется в виде кубического многочлена по ω_0

$$\begin{aligned} & 2CPJ^2(AD_2 + BD_1)\omega_0^3 - \\ & -J\left(\left(B(2B - C)D_1^2 + A(2A - C)D_2^2 + (A(2B - C) + B(2A - C))D_1D_2\right)\Gamma + \right. \\ & \quad \left. + 4ABP^2J\right)\omega_0^2 + P(2(A - B)(AD_2 - BD_1)J\Gamma - \\ & \quad - (AD_2 + BD_1)\left((J - C)D_1D_2 - (AD_2^2 + BD_1^2)\right))\omega_0 + \\ & + (A - B)^2D_1D_2\Gamma^2 - (D_1 + D_2)(AD_2 + BD_1)D_1D_2\Gamma - P^2(AD_2 + BD_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, определяющие условия асимптотической устойчивости для решения (3), будут следующими

$$J^2 + D_1D_2 + A((C - A)\omega_0^2 - \Gamma) + B((C - B)\omega_0^2 - \Gamma) > 0, \quad (19)$$

$$\left((C - A)\omega_0^2 - \Gamma\right)\left((C - B)\omega_0^2 - \Gamma\right) + (D_1\omega_0 - P)(D_2\omega_0 - P) > 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & 2CPJ^2(AD_2 + BD_1)\omega_0^3 - \\ & -J\left(\left(B(2B - C)D_1^2 + A(2A - C)D_2^2 + (A(2B - C) + B(2A - C))D_1D_2\right)\Gamma + \right. \\ & \quad \left. + 4ABP^2J\right)\omega_0^2 + P(2(A - B)(AD_2 - BD_1)J\Gamma - \\ & \quad - (AD_2 + BD_1)\left((J - C)D_1D_2 - (AD_2^2 + BD_1^2)\right))\omega_0 + \\ & + (A - B)^2D_1D_2\Gamma^2 - (D_1 + D_2)(AD_2 + BD_1)D_1D_2\Gamma - P^2(AD_2 + BD_1)^2 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для того, чтобы получить условия устойчивости, соответствующие решению (4), необходимо в неравенствах (19)–(21) заменить P на $-P$.

Таким образом, три неравенства (19)–(21) являются условиями асимптотической устойчивости равномерного вращения вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твёрдого тела, находящегося под действием диссипативного и постоянного моментов.

Рассматриваемая механическая система является многопараметрической и зависит от главных моментов инерции A , B , C , восстанавливающего или опрокидывающего момента Γ , коэффициентов диссипации D_1 , D_2 , D_3 и величины постоянного момента P . В связи с этим дальнейшие аналитические вычисления представляют большие сложности, поэтому исследование условий асимптотической устойчивости (19)–(21) проведем численно для твёрдого тела.

Анализ численных результатов. В статье [7] были получены условия асимптотической устойчивости равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. В этой связи возникает задача об оценке относительного движения жидкости и несимметрии твёрдого тела на области устойчивости. Для этого необходимо провести расчеты в случае «затвердевшей» жидкости, поэтому на примере эллипсоидальной полости с полуосями a и c были исследованы неравенства (19)–(21). Значения коэффициентов A , B и C для твёрдого тела с эллипсоидальной полостью приведены в [8]:

$$m = m_0 + \frac{4}{3}\pi\rho a^3\beta, \quad B_0 = A_0(1 - \varepsilon), \quad D_2 = D_1(1 - \varepsilon_D),$$

$$A = A_0 + \frac{ma^2}{5}(1 + \beta^2) + (L + L_1)^2 m, \quad B = B_0 + \frac{ma^2}{5}(1 + \beta^2) + (L + L_1)^2 m,$$

где ρ – плотность жидкости; A_0 , B_0 и C_0 – главные моменты инерции твёрдого тела относительно неподвижной точки; m_0 – масса твёрдого тела; L и L_1 – соответственно расстояние от центра масс тела с жидкостью до центра масс жидкости и до неподвижной точки, отнесенное к полуоси эллипсоида a ; c – длина полуоси эллипсоидальной полости, являющейся ее осью симметрии ($\beta = c/a$).

Численные расчёты были проведены для следующих значений параметров: $A_0 = 10$, $C_0 = 11$, $m_0 = 0,1$, $L = 1$, $L_1 = 1$, $\beta \in [0; 10]$, $\varepsilon \in (-1; 1)$, $\varepsilon_D \in (-1; 1)$, $\omega_0 = P/D_3$, $P = 1$, $\Gamma = 0$ и $\Gamma = -mgL_1$.

На рис. 1 представлены границы областей устойчивости в зависимости от параметров $D_{13} = D_1/D_3$ и β , построенные при $\Gamma = 0$ и различных значениях ε и ε_D . На рис. 1, а горизонтально заштрихованы области устойчивости при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0$, вертикально заштрихованы области при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon_D = 0$. На рис. 1, б горизонтально заштрихованы области устойчивости при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0$, вертикально заштрихованы области при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon_D = 0,5$. На рис. 1, в горизонтально заштрихованы области устойчивости при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0$, вертикально заштрихованы области при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0,5$.

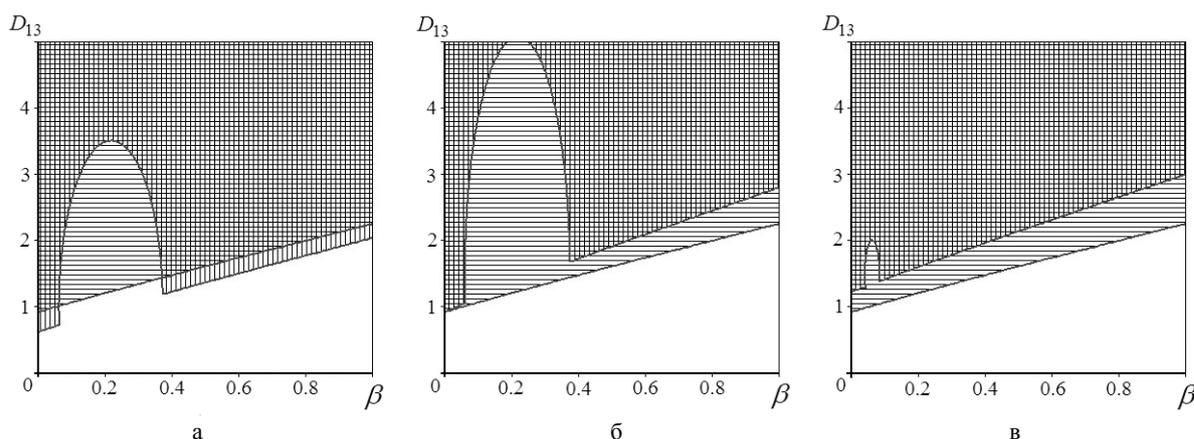


Рис. 1. Области устойчивости при $\Gamma = 0$

На основании проведенных расчетов и приведенного рис. 1 можно сделать вывод, что при увеличении только ε от 0 до 1 отмечается появление дополнительной области неустойчивости на отрезке $\beta \in [0; 1]$ и некоторое увеличение существующей области устойчивости (нижняя граница области сместилась ниже (рис. 1, а)). При увеличении только ε_D от 0 до 1 также отмечается появление дополнитель-

ной области неустойчивости на отрезке $\beta \in [0; 1]$, а также уменьшение существующей области устойчивости (нижняя граница области переместилась выше (рис. 1, *в*)). При одновременном увеличении величины дебалансов ε и ε_D от 0 до 1 также отмечается появление дополнительных областей неустойчивости и уменьшение существующих областей устойчивости (рис. 1, *б*). Дополнительные области неустойчивости зависят от величин дебалансов ε и ε_D и исчезают при одновременном $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon_D \rightarrow 0$.

На рис. 2 представлены границы областей устойчивости в зависимости от параметров D_{13} и β , построенные при $\Gamma = -mgL_1$ и различных значениях ε и ε_D . На рис. 2, *а* горизонтально заштрихованы области устойчивости при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0$, вертикально заштрихованы области при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon_D = 0$. На рис. 2, *б* горизонтально заштрихованы области устойчивости при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0$, вертикально заштрихованы области при $\varepsilon = 0,5$ и $\varepsilon_D = 0,5$. На рис. 2, *в* горизонтально заштрихованы области устойчивости при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0$, вертикально заштрихованы области при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon_D = 0,5$.

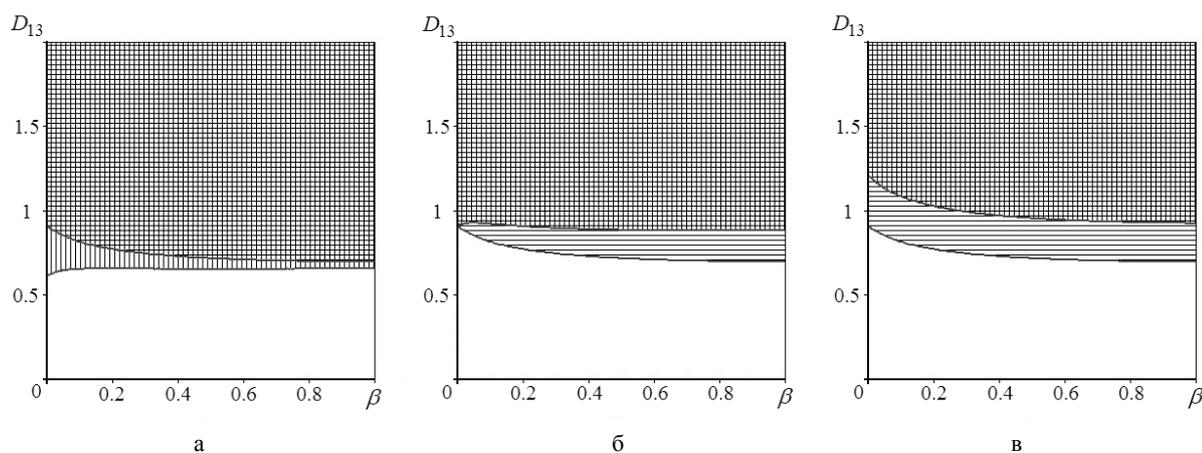


Рис.2. Области устойчивости при $\Gamma = -mgL_1$

Из проведенных дальнейших численных расчетов и приведенного рис. 2 следует, что при увеличении только ε от 0 до 1 отмечается увеличение области устойчивости на отрезке для $\beta \in [0; 1]$ (рис. 2, *а*). При увеличении только ε_D от 0 до 1 отмечается уменьшение области устойчивости для $\beta \in [0; 1]$ (рис. 2, *в*). При одновременном увеличении величины дебалансов ε и ε_D от 0 до 1 также отмечается уменьшение существующих областей устойчивости (рис. 2, *б*). Отметим еще раз, что на рис. 2 представлены области устойчивости для $\beta \in [0; 1]$. Дополнительные области неустойчивости, аналогичные рис. 1, появляются для $\Gamma = -mgL_1$ на отрезке $\beta \in [5; 6]$. Дополнительные области неустойчивости зависят от величин дебалансов ε и ε_D и исчезают при одновременном $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon_D \rightarrow 0$.

Выводы. Динамическая несимметрия твёрдого тела ($B \neq A$) и диссипативная несимметрия ($D_2 \neq D_1$) приводят к появлению дополнительных областей неустойчивости, которые исчезают при $B = A$ и $D_2 = D_1$. Динамическая несимметрия твёрдого тела оказывает большее влияние на дополнительные области неустойчивости, чем диссипативная несимметрия. С увеличением коэффициента динамической несимметрии область устойчивости может как увеличиваться, так и уменьшаться, а с увеличением коэффициента диссипативной несимметрии область устойчивости может только уменьшаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. – М.: Наука, 1990. – 176 с.
2. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
3. Болграбская И. А. Динамика систем связанных твёрдых тел / И. А. Болграбская, М. Е. Лесина, Д. А. Чебанов // Задачи и методы: математика, механика, кибернетика. – Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
4. Возмущенные и управляемые вращения твёрдого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич. – Одесса: Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова. – 2013. – 288 с.

5. Карапетян А. В. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа / А. В. Карапетян, И. С. Лагутина // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – № 5. – С. 29–33.
6. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури. – М.: Наука, 1979. – 304 с.
7. Кононов Ю. Н. Об устойчивости вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с полостью, содержащей идеальную жидкость / Ю. Н. Кононов, Н. В. Киселёва // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2007. – № 1. – С. 48–51.
8. Докучаев Л. В. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей жидкость / Л. В. Докучаев, Р. В. Рвалов // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1973. – № 2. – С. 6–14.

Поступила в редакцию 14.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Отримано у вигляді системи нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного важкого твердого тіла, що знаходиться під дією дисипативного та постійного моментів. Проведено чисельні дослідження впливу несиметрії твердого тіла, дисипативного і постійного моментів на області стійкості. Узагальнено відомі результати для симетричного твердого тіла на випадок динамічної несиметрії твердого тіла і дисипативної несиметрії.

Ключові слова: динамічно несиметричне тверде тіло, середа, що чинить опір, асимптотична стійкість.

SUMMARY

The conditions for asymptotic stability of the uniform rotation of an asymmetric heavy rigid body under the action of a dissipative and permanent moments were obtained in the form of inequalities. Numerical studies of the influence of asymmetry solid, permanent and dissipative moments on the field of sustainability were conducted. Were summarized the known results for symmetric rigid body in case of dynamic asymmetry of a rigid body and dissipative asymmetry.

Keywords: dynamic asymmetry of a rigid body, resisting medium, asymptotic stability.

УДК 539.3

А. Ф. Кривой*, Ю. А. Морозов**

*Одесская национальная морская академия, г. Одесса

**Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХ КОМПЛАНАРНЫХ ТРЕЩИН
В СОСТАВНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Построено решение осесимметричной задачи теплопроводности для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства содержащего две расположенных параллельно плоскости соединения сред, компланарные круговые термоактивные (на которых задана температура или тепловой поток) трещины, в трехмерной постановке. Получены распределения температур в зависимости от теплофизических свойств материалов и расстояния от трещин до границы соединения полупространств.

Ключевые слова: теплопроводность, кусочно-однородное трансверсально-изотропное пространство, термоактивная трещина, двумерные сингулярные интегральные уравнения.

Введение. Проблемы термоупругости в двухсвязных телах, находящихся под действием тепловых нагрузок, часто возникают в различных технических задачах. Наличие границы соединения материалов с разными коэффициентами теплопроводности приводит к появлению существенной неоднородности в распределении температурных полей вблизи границы, а присутствие различных тонких термоизолированных или термоактивных трещин (включений), на которых, заданы температура или тепловой поток, вносит дополнительный вклад в эту неоднородность (обуславливает возрастание в их окрестности температурных градиентов и напряжений).

Неоднородность тепловых полей порождает неоднородность деформаций и напряжений в двухсвязных материалах, что в свою очередь может быть причиной появления новых дефектов и распространения уже имеющихся. Поэтому важно исследовать влияние взаимодействия неоднородностей и границ раздела материалов под действием тепловых и механических нагрузок на распределение тепловых полей и деформаций, чтобы понять качественную картину происходящего процесса.

Задача о распределении температуры и напряжений в полупространстве, с двумя параллельными круговыми трещинами рассмотрена в [1, 2]. В [3] была решена задача теплопроводности для системы параллельных термоактивных включений центры которых лежат соосно в параллельных плоскостях и компланарных, лежащих в одной плоскости с центрами на одной прямой.

При исследовании напряженного состояния составных тел с термоактивными или термоизолированными трещинами, определение температурного поля по заданной на трещине температуре или тепловому потоку имеет как самостоятельное значение, так и вспомогательное, как первый этап решения несвязанной задачи термоупругости.

В работе [4] рассмотрена задача теплопроводности для межфазной круговой и кольцевых трещин. В данной работе построено решение осесимметричной задачи теплопроводности, для кусочно-однородного трансверсально-изотропного пространства, содержащего две расположенных параллельно плоскости раздела сред коллинеарные круговые термоактивные трещины (на которых задана температура или тепловой поток), в трехмерной постановке.

Постановка задачи стационарной термоупругости. Рассмотрим неоднородное пространство, состоящее из двух различных трансверсально-изотропных полупространств, полностью сцепленных в плоскости $x_3 = 0$. В каждом из полупространств в плоскостях $x_3 = h^\pm$ имеются две термоактивные круговые трещины, занимающие области $\Omega_\pm : \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ (рис. 1).

Введем следующие обозначения

$$\mathbf{v} = \{v_k(x, y, z)\}_{k=1,6} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\}$$

Компоненты вектора \mathbf{v} при $x_3 \neq 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\pm$ согласно [5], удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

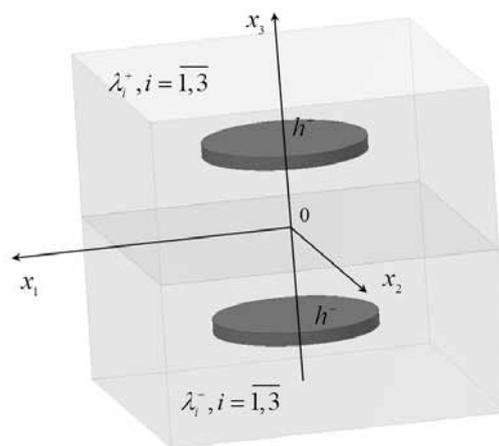


Рис.1

$$\mathbf{I}\partial_3 \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{M}T,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_{13}}{c_{33}}\partial_1 & -\frac{c_{23}}{c_{33}}\partial_2 \\ -\partial_1 & 0 & 0 \\ -\partial_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^T,$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}\right)\partial_1^2 - c_{66}\partial_2^2 & -\left(c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}\right)\partial_{12}^2 \\ 0 & -\left(c_{12} + c_{66} - \frac{c_{13}c_{23}}{c_{33}}\right)\partial_{12}^2 & -\left(c_{22} - \frac{c_{23}^2}{c_{33}}\right)\partial_2^2 - c_{66}\partial_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & -\mathbf{A}_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_1 - \frac{c_{13}}{c_{33}}\beta_3, \beta_2 - \frac{c_{23}}{c_{33}}\beta_3, 0, \beta_3, 0, 0 \right)^T, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}^T, \quad \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$c_{kl} = \theta(x_3)c_{kl}^+ + \theta(-x_3)c_{kl}^-, \quad k, l = \overline{1, 6}, \quad c_{23} = c_{13}, c_{55} = c_{44}, c_{22} = c_{11}, \quad 2c_{66} = c_{11} - c_{12},$$

$$\beta_j = \theta(x_3)\beta_j^+ + \theta(-x_3)\beta_j^-, \quad j = \overline{1, 3}, \quad -\beta_1 = c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + c_{13}\lambda_3, \quad -\beta_2 = c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + c_{23}\lambda_3,$$

$$-\beta_2 = c_{13}\lambda_1 + c_{23}\lambda_2 + c_{33}\lambda_3, \quad \lambda_j = \theta(x_3)\lambda_j^+ + \theta(-x_3)\lambda_j^-.$$

Первый этап решения стационарной задачи термоупругости состоит в определении температурно-го поля T , и заключается в решении задачи теплопроводности при заданных граничных условиях.

Постановка задачи теплопроводности. Рассмотрим на берегах трещины следующие варианты условий. На обеих трещинах задана температура (задача А):

$$\zeta_0(x_1, x_2, h^\pm \pm 0) = T_1(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_+, \quad \zeta_0(x_1, x_2, h^\mp \pm 0) = T_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_-. \quad (1)$$

На верхней трещине задана температура, а на нижней тепловой поток (задача В):

$$\zeta_0(x_1, x_2, h^\pm \pm 0) = T(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_+, \quad \zeta_3(x_1, x_2, h^\mp \pm 0) = q(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_-. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения $\zeta = \{\zeta_n\}_{n=0,3} = \{T, q_1, q_2, q_3\}$, где T – температура, q_i – компоненты вектора теплового потока \mathbf{q} .

Построение разрывного решения задачи стационарной теплопроводности для составного трансверсально-изотропного пространства. Компоненты вектора ζ при $x_3 \neq 0$, $(x_1, x_2) \notin \Omega_\pm$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [6]:

$$\lambda_i \partial_i \zeta_0(\mathbf{x}) + \zeta_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \partial_i \zeta_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\lambda_i = \lambda_i^+ \theta(x_3) + \lambda_i^- \theta(-x_3)$, $i = \overline{1, 3}$, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, λ_i^+, λ_i^- – коэффициенты теплопроводности, для верхнего $x_3 > 0$ и нижнего $x_3 < 0$ полупространства соответственно. Полное сцепление полупространств обеспечивают условия непрерывности

$$\langle \zeta_k(x_1, x_2) \rangle^\pm = \zeta_k(x_1, x_2) - \zeta_k(x_1, x_2) = 0, \quad k = 0, 3. \quad (4)$$

На трещинах будем считать заданными скачки (или суммы) температуры и теплового потока: $\langle \zeta_k \rangle_{\Omega_\pm}^\pm = \chi_k^{\pm, (\pm)}$,

$$\langle f \rangle_{\Omega_\pm}^\pm = f(x_1, x_2, h^\pm + 0) \pm f(x_1, x_2, h^\pm - 0) = 0, \quad k = 0, 3. \quad (5)$$

Сведём систему (3) к одному уравнению и следуя работе [7] перейдем в пространство обобщенных функций $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$, получим

$$\left[\lambda^2 (\partial_1^2 + \partial_2^2) + \partial_3^2 \right] \zeta_0(\mathbf{x}) = f, f = \sum_{\pm} \sum_{k=0}^1 \delta^{(k)}(\Omega_{\pm}) \langle \partial_3^{1-k} \zeta_0 \rangle_{\Omega_{\pm}}^-, \zeta_0 \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3), \quad (6)$$

где $\lambda^2 = \lambda_1/\lambda_3$, $\lambda^2 = \lambda_+^2 \theta(\eta_3) + \lambda_-^2 \theta(-\eta_3)$, $\delta(\Omega_{\pm})$ – обобщенная функция Дирака, сосредоточенная на поверхности Ω_{\pm} .

Фундаментальным решением задачи (6) для составного трансверсально-изотропного пространства, будем называть функцию $\psi_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ из $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$, если она удовлетворяет следующей краевой задаче.

$$\left[\lambda^2 (\partial_1^2 + \partial_2^2) + \partial_3^2 \right] \psi_0(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^1 \delta^{(k)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad j = 1, 2 \quad (7)$$

$$\psi_0^+(x_1, x_2, 0) = \psi_0^-(x_1, x_2, 0), \quad \lambda_3^+ \partial_3 \psi_0^+(x_1, x_2, 0) = \lambda_3^- \partial_3 \psi_0^-(x_1, x_2, 0),$$

После применения к (7) трехмерного преобразования Фурье, проблема нахождения функции $\psi_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ сведена к задаче Римана в $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$:

$$p^+(\alpha, \beta, \gamma) \Psi^+ = -p^-(\alpha, \beta, \gamma) \Psi^- + F, \quad (8)$$

$$p^{\pm}(\alpha, \beta, \gamma) = \theta(\pm x_3)(-i\alpha, -i\beta, -i\gamma), \quad F = \sum_{k=0}^1 (-i\gamma)^k e^{i(\alpha x_1^0 + \beta x_2^0 + \gamma x_3^0)}.$$

Используя, результаты работы [8], запишем решение задачи (8) в виде

$$\Psi^{\pm} = \pm \sum_{k=0}^1 \frac{(-i\gamma)^k v_{0k}^0}{p^{\pm}(\alpha, \beta, \gamma)} + \sum_{k=0}^1 \frac{(-i\gamma)^k e_0^*}{p^{\pm}(\alpha, \beta, \gamma)}, \quad e_0^* = e^{i\alpha x_1^0 + i\beta x_2^0 + i\gamma x_3^0}. \quad (9)$$

Выразив неизвестные функции v_{0k}^0 через скачки (4) и применив обратное преобразование Фурье, используя известную формулу [9]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha^2 + \beta^2) e^{i\alpha x + i\beta y} dx dy = \int_0^{\infty} t F(t) J_0(t \sqrt{x^2 + y^2}) dt,$$

получим явное выражение для ψ_j , $j = 0, 3$:

$$\psi_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \theta(x_3) \psi_j^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + \theta(-x_3) \psi_j^-(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0), \quad j = 0, 3, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) &= -b_{11}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,0}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp b_{12}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + b_{11}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,0}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp b_{12}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,1}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \\ &- \left[\lambda_{\pm}^{-1} \mathcal{L}_{1,0}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \mathcal{L}_{1,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \right], \\ \psi_3^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) &= \pm \lambda_3^{\pm} b_{21}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,1}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \lambda_3^{\pm} b_{22}^{\pm\mp} \mathcal{L}_{3,2}^{\mp}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp \lambda_3^{\pm} b_{21}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) - \lambda_3^{\pm} b_{22}^{\pm\pm} \mathcal{L}_{2,2}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + \\ &+ \lambda_3^{\pm} \left[-\text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \mathcal{L}_{1,1}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) + \lambda_{\pm} \mathcal{L}_{1,2}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \right], \\ r_0 &= \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_1^0)^2}, \quad z_{1,\pm} = \lambda_{\pm} (x_3 - x_3^{0,\pm}), \quad z_{2,\pm} = \lambda_{\pm} (x_3 + x_3^{0,\pm}), \quad z_{2,\pm} = \lambda_{\pm} x_3 - \lambda_{\mp} x_3^{0,\mp}, \\ b_{11}^{\pm\pm} &= \left[\lambda_{\pm}^{-1} h_1^{\pm} \mp \lambda_{\pm} h_2^{\pm} \right], \quad b_{12}^{\pm\pm} = b_{21}^{\pm\pm} = \left[h_1^{\pm} \mp \lambda_{\pm} h_2^{\pm} \right], \quad b_{22}^{\pm\pm} = \lambda_{\pm} \left[h_1^{\pm} \mp \lambda_{\pm} h_2^{\pm} \right], \\ b_{11}^{\pm\mp} &= \lambda_{\pm}^{-1} h_1^{\mp} - h_2^{\mp}, \quad b_{12}^{\pm\mp} = \lambda_{\mp} \left[\lambda_{\pm}^{-1} h_1^{\mp} - h_2^{\mp} \right], \quad b_{21}^{\pm\mp} = \left[h_1^{\mp} - \lambda_{\pm} h_2^{\mp} \right], \quad b_{22}^{\pm\mp} = \lambda_{\mp} \left[h_1^{\mp} - \lambda_{\pm} h_2^{\mp} \right], \\ \mathcal{L}_{j,k}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} t^k e^{-t|z_j^{\pm}|} J_0(tr_0) dt, \quad j = 2, 3. \end{aligned}$$

Полученное выражение для $\psi_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$ ($j = 0, 3$), позволяет решение краевой задачи (3)–(5) в пространстве $\mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)$ записать в следующем виде

$$\zeta_j(\mathbf{x}) = \theta(x_3)\zeta_j^+(\mathbf{x}) + \theta(-x_3)\zeta_j^-(\mathbf{x}), j = 0, 3, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_0^\pm(\mathbf{x}) &= \frac{-1}{2\pi} \left\{ \iint_{\Omega_\pm} \left[b_{11}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \mp b_{12}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{\lambda_\pm^{-1}}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \right] d\mathbf{x}^0 - \iint_{\Omega_\mp} \left[b_{11}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm b_{12}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \lambda_\mp^{-1} \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}} \right] d\mathbf{x}^0 + \iint_{\Omega_\pm} \left[\lambda_\pm^{-1} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} - \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm})}{\lambda_\pm} \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} \right] d\mathbf{x}^0, \\ \zeta_3^\pm(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_\pm^\pm}{\lambda_\mp^\mp} \iint_{\Omega_\mp} \left[\mp b_{21}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}} - b_{22}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \partial_3^2 \frac{\lambda_\mp^{-1}}{\mathcal{R}_\mp^{(3)}} \right] d\mathbf{x}^0 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\lambda_3^\pm}{\lambda_\pm^\pm} \iint_{\Omega_\pm} \left[b_{21}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \mp b_{22}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \lambda_\pm^{-1} \partial_3^2 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(2)}} \right] d\mathbf{x}^0 + \frac{\lambda_3^\pm}{\lambda_\pm^\pm} \iint_{\Omega_\pm} \left[\chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3^2 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} - \right. \\ &\quad \left. - \text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \partial_3 \frac{1}{\mathcal{R}_\pm^{(1)}} \right] d\mathbf{x}^0, \quad \mathcal{R}_\pm^{(j)} = \sqrt{r_0^2 + z_{j,\pm}^2}, j = 2, 3. \end{aligned}$$

Выполнив предельный переход $x_3 \rightarrow h^\pm$, получим суммы физических величин

$$\begin{aligned} \chi_0^{\pm\pm}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\pm} \left\{ b_{11}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{2,\pm}} \pm b_{12}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\tilde{z}_{2,\pm}}{\mathcal{R}_{2,\pm}^3} \right\} d\mathbf{x}^0 + \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\mp} \left\{ b_{11}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{3,\pm}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp b_{12}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\mp^{-1} \lambda_\pm \tilde{z}_{3,\mp}}{\mathcal{R}_{3,\mp}^3} \right\} d\mathbf{x}^0 - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\pm} \lambda_\pm^{-1} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{r_0} d\mathbf{x}^0 - 2\chi_0^{\pm\pm}(\mathbf{x}), \\ \chi_3^{\pm\pm}(\mathbf{x}) &= \frac{\lambda_3^\pm}{2\pi} \left\{ \lambda_\mp^{-1} \iint_{\Omega_\mp} \left[\pm b_{21}^{\pm\mp} \chi_3^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\pm \tilde{z}_{3,\mp}}{\mathcal{R}_{3,\mp}^3} - b_{22}^{\pm\mp} \chi_0^{\mp\mp}(\mathbf{x}^0) \lambda_\mp^{-1} \left[\frac{3\lambda_\pm^2 \tilde{z}_{3,\mp}^2}{\mathcal{R}_{3,\mp}^5} - \frac{\lambda_\pm^2}{\mathcal{R}_{3,\mp}^3} \right] \right] d\mathbf{x}^0 \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \iint_{\Omega_\pm} \left[b_{21}^{\pm\pm} \chi_3^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\tilde{z}_{2,\pm}}{\mathcal{R}_{2,\pm}^3} \pm b_{22}^{\pm\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \left(\frac{3\lambda_\pm \tilde{z}_{2,\pm}^2}{\mathcal{R}_{2,\pm}^5} - \frac{\lambda_\pm}{\mathcal{R}_{2,\pm}^3} \right) \right] d\mathbf{x}^0 + \left[2\pi\chi_3^{\pm\pm}(\mathbf{x}) - \iint_{\Omega_\pm} \chi_0^{\mp\pm}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\pm^{-1}}{r_0^3} d\mathbf{x}^0 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathcal{R}_{j,\pm} = \sqrt{r_0^2 + \tilde{z}_{j,\pm}^2}$, $j = 2, 3$, $\tilde{z}_{2,\pm} = 2\lambda_\pm x_3^{0,\pm}$, $\tilde{z}_{3,\mp} = \lambda_\pm h^\pm - \lambda_\mp x_3^{0,\pm}$.

Сведение поставленных задач к интегральным уравнениям и их решение. Используя соотношения (11) и граничные условия (1) и (2), поставленные задачи сведем к системам двумерных сингулярных интегральных уравнений. Для задачи А система будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \left[\frac{-b_{11}^{++}}{\mathcal{R}_{2,+}} - \lambda_+^{-1} \frac{1}{r_0} \right] d\mathbf{x}^0 + b_{11}^{+-} \iint_{\Omega_-} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{3,-}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) d\mathbf{x}^0 &= 2\pi T_1(\mathbf{x}), \\ \iint_{\Omega_-} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \left[\frac{-b_{11}^{--}}{\mathcal{R}_{2,-}} - \lambda_-^{-1} \frac{1}{r_0} \right] d\mathbf{x}^0 + b_{11}^{-+} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \frac{1}{\mathcal{R}_{3,+}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) d\mathbf{x}^0 &= 2\pi T_2(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Для задачи В следующий вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \left[\frac{-b_{11}^{++}}{\mathcal{R}_{2,\pm}} - \lambda_\pm^{-1} \frac{1}{r_0} \right] d\mathbf{x}^0 - b_{12}^{+-} \iint_{\Omega_-} \chi_0^{-+}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_-^{-1} \lambda_+ \tilde{z}_{3,-}}{\mathcal{R}_{3,-}^3} &= 2\pi T(\mathbf{x}), \\ -\frac{b_{21}^{+-}}{\lambda_+} \iint_{\Omega_+} \chi_3^{-+}(\mathbf{x}^0) \frac{\lambda_\pm \tilde{z}_{3,+}}{\mathcal{R}_{3,+}^3} d\mathbf{x}^0 + \iint_{\Omega_-} \chi_0^{-+}(\mathbf{x}^0) \left[b_{22}^{--} \left(\frac{3\lambda_- \tilde{z}_{2,-}^2}{\mathcal{R}_{2,-}^5} - \frac{\lambda_-}{\mathcal{R}_{2,-}^3} \right) - \frac{\lambda_-^{-1}}{r_0^3} \right] d\mathbf{x}^0 &= \frac{4\pi q(\mathbf{x})}{\lambda_3^-}. \end{aligned} \quad (14)$$

Воспользовавшись формулами 2.12.8 из [10], получим следующие соотношения

$$\int_0^\infty J_0(tr_0) = \frac{1}{r_0}, \quad \int_0^\infty t^k e^{-t|\tilde{z}_{j,\pm}|} J_0(tr_0) dt = \frac{1}{\mathcal{R}_{j,\pm}^{2k+1}}, k = 0, 1, \tag{15}$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t|\tilde{z}_{j,\pm}|} J_0(tr_0) dt = \frac{3\lambda_{\pm} \tilde{z}_{j,\pm}^2}{\mathcal{R}_{j,\pm}^5} - \frac{\lambda_{\pm}}{\mathcal{R}_{j,\pm}^3}, j = 2, 3.$$

используя которые, перейдем в системах (13), (14) к полярным координатам и применив конечное преобразование Фурье и теорему о свертке [9], а так же формулы интегрирования и дифференцирования функций Бесселя [11] и соотношение (2.12) из [12] получим следующие системы интегральных уравнений.

– Для задачи А :

$$\begin{cases} -b_{11}^{++} W_{n,n}^{0,h_2^+} [\chi_{3n}^{++}] - \lambda_+^{-1} W_{n,n} [\chi_{3n}^{++}] + b_{11}^{+-} W_{n,n}^{0,h_3^-} [\chi_{3n}^{--}] = 2\pi T_{1n}(r), \\ b_{11}^{-+} W_{n,n}^{0,h_2^+} [\chi_{3n}^{++}] - b_{11}^{--} W_{n,n}^{0,h_2^-} [\chi_{3n}^{--}] - \lambda_-^{-1} W_{n,n} [\chi_{3n}^{--}] = 2\pi T_{2n}(r). \end{cases} \tag{16}$$

– Для задачи В :

$$\begin{cases} -b_{11}^{++} W_{n,n}^{0,h_2^+} [\chi_{3n}^{++}] - \lambda_+^{-1} W_{n,n} [\chi_{3n}^{++}] - b_{12}^{+-} W_{n,n+1}^{0,h_3^-} [\tilde{\chi}_{0n}^{--}] = 2\pi T_n(r), \\ -b_{21}^{-+} W_{n,n}^{1,h_3^+} [\chi_{3n}^{++}] + b_{22}^{--} W_{n,n+1}^{1,h_2^-} [\tilde{\chi}_{0n}^{--}] - \lambda_-^{-1} W_{n,n+1} [\tilde{\chi}_{0n}^{--}] = \frac{2\pi q_n(r)}{\lambda_3^-}, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$W_{n,n}^{v,h_i^\pm} [\chi_{jn}^{\pm}] = \frac{1}{\pi} \int_0^a W_{n,n}^{v,h_i^\pm}(r, \rho) \chi_{jn}^{\pm}(\rho) \rho d\rho, \quad W_{n,n}^{v,h_i^\pm}(r, \rho) = \int_0^\infty h_i^\pm t^v J_n(rt) J_n(\rho t) dt, \quad h_i^\pm = e^{-t|\tilde{z}_{i,\pm}|},$$

$$W_{n,n} [\chi_{jn}^{\pm}] = \frac{1}{\pi} \int_0^a W_{n,n}(r, \rho) \chi_{jn}^{\pm}(\rho) \rho d\rho, \quad W_{n,n}(r, \rho) = \int_0^\infty J_n(rt) J_n(\rho t) dt,$$

$$\chi_{jn}^{\pm}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_j^{\pm}(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad \chi_j^{\pm}(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_{jn}^{\pm}(\rho) e^{in\varphi}, \quad \tilde{\chi}_{0n}^{\pm}(\rho) = \rho^n [\rho^{-n} \chi_{0n}^{\pm}(\rho)]'.$$

Если на дефектах заданы постоянные значения температуры и теплового потока: $T_k^\pm(x_1, x_2) = T_k$, $k = 1, 2$ (задача А); $T(x_1, x_2) = T$, $q(x_1, x_2) = q$ (задача В) то системы (15) и (16) будут иметь ненулевые решения только при $n = 0$. Их решения будем разыскивать в виде рядов по полиномам Якоби ($y = \rho/a$) [13].

$$\tilde{\chi}_0^{--}(y) = y(1-y^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^- P_m^{1,-1/2}(1-2y^2), \quad \chi_3^{++}(y) = (1-y^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^+ P_m^{1,-1/2}(1-2y^2). \tag{18}$$

Используя стандартную процедуру метода ортогональных многочленов, сводим системы интегральных уравнений (16), (17) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^+ a_{k,m}^+ + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^- a_{k,m}^- = f_k^1, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^+ b_{k,m}^+ + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^- b_{k,m}^- = f_k^2, \quad k = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{19}$$

Коэффициенты в системе (19) для задачи А имеют следующий вид:

$$a_{k,m}^+ = -b_{11}^{++} \lambda_+ - A_k, \quad a_{k,m}^- = b_{11}^{+-} \lambda_+ q_{k,m}^{3,-}, \quad b_{k,m}^+ = b_{11}^{+-} \lambda_-, \quad b_{k,m}^- = -b_{11}^{--} \lambda_- g_{k,m}^{2,-} - A_k,$$

$$f_k^j = \frac{4\lambda_{\pm} T \pi k!}{\Gamma(k+1/2)(2k+1/2)} \delta_{k0}, \quad j = 1, 2, \quad A_k = (2k+1/2)^{-1}, \quad \psi_k^\pm \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} = \alpha_k^\pm.$$

для задачи В следующий: $a_{k,m}^+ = -\frac{2b_{11}^{++}}{\lambda_+} g_{k,m}^{2,+} - A_k$, $a_{k,m}^- = -\frac{2b_{12}^{+-}}{\lambda_-} g_{k,m}^{3,-} \Big|_{\nu=0}^{\mu=1}$, $b_{k,m}^+ = \frac{2b_{21}^{-+}}{\lambda_-} g_{k,m}^{3,+} \Big|_{\nu=1}^{\mu=0}$,

$$b_{k,m}^- = -B_k + \frac{2b_{22}^-}{\lambda_-} g_{k,m}^{2,-} \Big|_{v=1}^{\mu=1}, f_k^1 = \frac{4\pi T}{\lambda_+^{-1}} \frac{k!}{\Gamma(k+1/2)(2k+1/2)} \delta_{k0}, f_k^2 = \frac{4\pi q}{\lambda_3^- \lambda_-^{-1}} \frac{k!}{\Gamma(k+3/2)(2k+1/2)} \delta_{k0},$$

$$B_k = (2k+3/2)^{-1}, g_{k,m}^{l,\pm}(v,\mu) = \int_0^\infty e^{-t|z_{l,\pm}|} \frac{J_{2k+v+1/2}(t) J_{2m+\mu+1/2}(t)}{t} dt, g_{k,m}^{j,+} \Big|_{v=\mu=0} \equiv g_{k,m}^{j,+}.$$

Система (19) решалась методом редукции, для которого доказана сходимость.

В результате с помощью разрывного решения (10) получены формулы для определения поля температур в окрестности трещин, которые для задачи А имеют следующий вид:

$$\zeta_0^+(x_3, x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^\infty \left\{ \alpha_m^+ [b_{11}^{++} W_2^+(x_3, x) + \lambda_+^{-1} W_1^+(x)] - \alpha_m^- b_{11}^{+-} W_3^-(x_3, x) \right\},$$

$$\zeta_0^-(x_3, x) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^\infty \left\{ \alpha_m^- [b_{11}^{--} W_2^-(x_3, x) + \lambda_-^{-1} W_1^-(x)] - \alpha_m^+ b_{11}^{-+} W_3^+(x_3, x) \right\},$$

для задачи В следующий вид:

$$\zeta_0^+(x_3, x) = -\frac{b_{11}^{++}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ W_2^{0,+}(x_3, x) - \frac{\lambda_+^{-1}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ W_1^{0,+}(x_3, x) + \frac{b_{12}^{+-}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- W_3^{1,\pm}(x_3, x),$$

$$\zeta_0^-(x_3, x) = \frac{b_{12}^{--}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- W_2^{1,-}(x_3, x) + \frac{b_{11}^{-+}}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^+ W_3^{0,+}(x_3, x) - \text{sgn}(x_3 - x_3^{0,\pm}) \sum_{m=0}^\infty \alpha_m^- W_1^{1,-}(x_3, x),$$

где

$$W_l^{\mu,\pm}(x_3, x) = \frac{1}{2^{1/2}} \int_0^\infty e^{-t|z_{l,\pm}|} t^{-1/2} J_{2m+\mu+1/2}(t) J_0(xt) dt, \quad x = r/a.$$

Численные результаты и выводы. На основании формул (20), (21) были проведены численные исследования распределения температуры T в зависимости от расстояния h^\pm до границы соединения сред. На рис. 2, 3 получены распределение температур при $h^+ = a/3$, на рис. 4, 5 при $h^+ = a/5, h^- = a/3$, на рис. 6, 7 при $h^+ = a/7, h^- = a/7$. Вычисления проведены при следующих значениях коэффициентов теплопроводности $\lambda_1^+ = 247,04 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, $\lambda_3^+ = 194,95 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, $\lambda_1^- = 107,08 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, $\lambda_3^- = 79,256 \text{ Вт/м}\cdot\text{гр}$, и для задачи А заданных на поверхности трещин значений температур $T_k(x_1, x_2) = 60^0 \quad k=1,2$ (рис. 2, 4, 6), для задачи В значения температуры $T(x_1, x_2) = 60^0$ и теплового потока $q(x_1, x_2) = 600 \text{ Вт}$ (рис. 3, 5, 7).

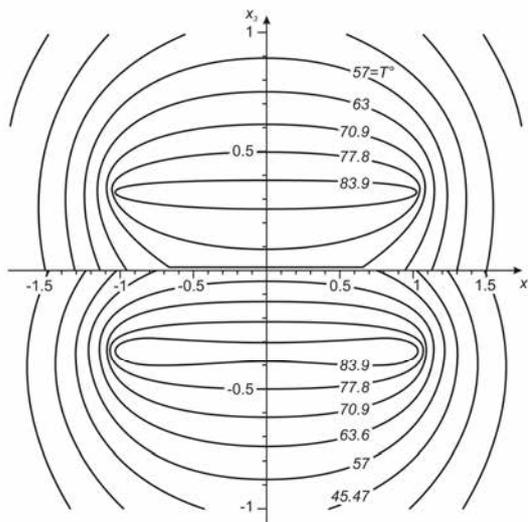


Рис. 2

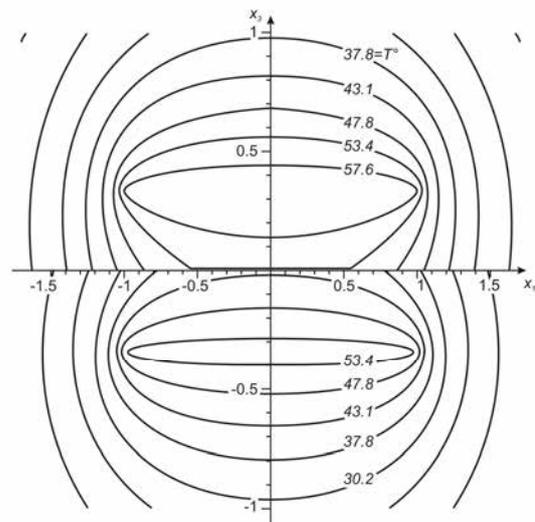


Рис. 3

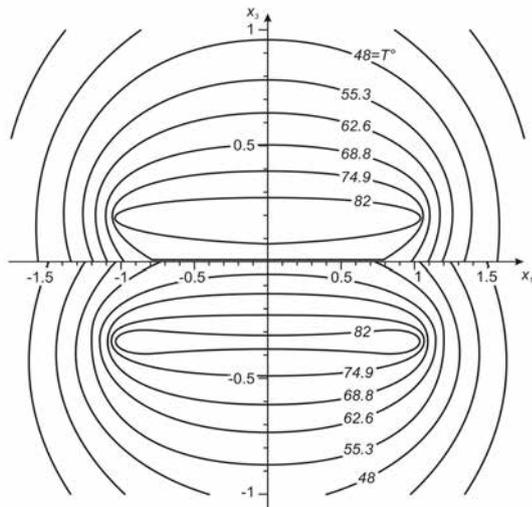


Рис. 4

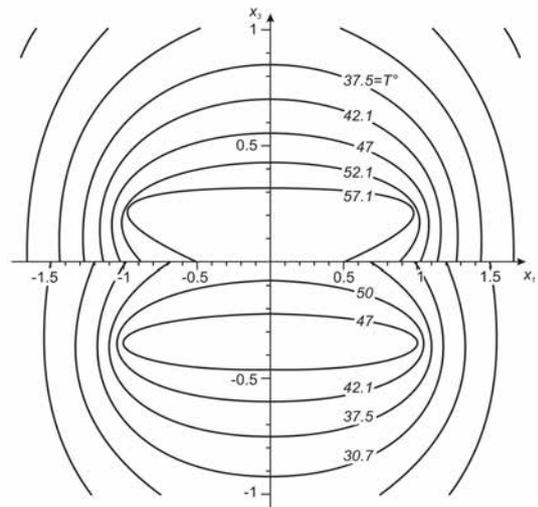


Рис. 5

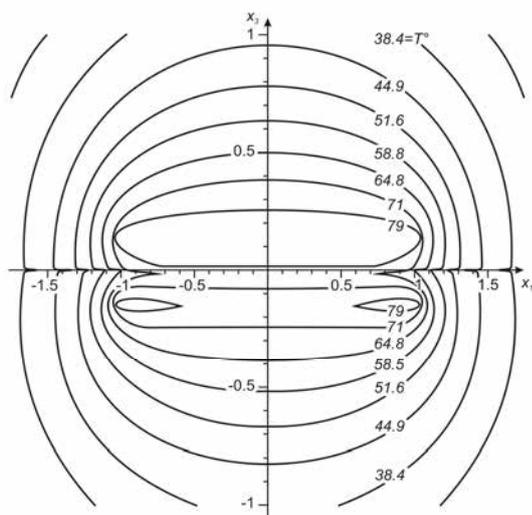


Рис. 6

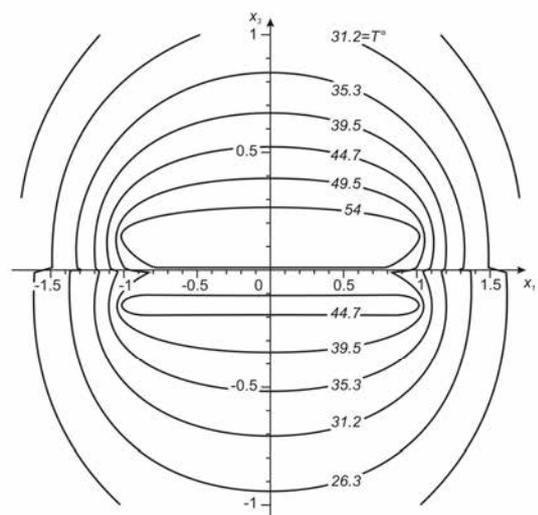


Рис. 7

Результаты вычислений показывают, что значение температуры для задачи А примерно на 30 % выше чем для задачи В. При сближении трещин (рис. 4–7) наблюдаются уменьшение температуры, как вблизи трещины, так и на удалении от неё. Так же проведенные исследования показывают, что на распределение температурных полей существенное влияние оказывает плоскость соединения материалов, особенно это заметно для задачи В (рис. 3, 5, 7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кит Г. С. Термоупругое состояние тела с двумя компланарными или параллельными трещинами / Г. С. Кит, О. П. Сушко // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 3–8.
2. Кит Г. С. Розподіл температури та напружень у тілі при тепловиділенні у кругових дискових областях / Г. С. Кит, О. П. Сушко // машинознавство. – 2009. – № 2 (140). – С. 3–7.
3. Кривой А. Ф. Решение задачи теплопроводности для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами / А. Ф. Кривой, Ю. А. Морозов // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 107–119.
4. Petrova V. Thermal fracture of a functionally graded homogeneous bimaterial with system of cracks (Citations:1) / V. Petrova, S. Schmauder // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2011. – Vol. 55, No 2. – P. 148–157.
5. Ding H. Elasticity of Transversely Isotropic Materials (SOLID MECHANICS AND ITS APPLICATIONS) / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Springer, Dordrecht, 2006. – Vol. 126. – 443 p.
6. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 488 с.
7. Kryvyy O. The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium / O. Kryvyy // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – Vol. 191. – P. 387–398.

8. Кривий О. Ф. Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами / О. Ф. Кривий // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 23–35.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
10. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 751 с.
11. Градштейн И. Ц. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. Ц. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
12. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
13. Попов Г. Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений / Г. Я. Попов // *Изв. вузов. Математика.* – 1966. – № 4. – С. 3–7.

Поступила в редакцию 16.10.2013 г.

РЕЗЮМЕ

Побудовано розв'язок вісесиметричної задачі теплопровідності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору, що містить дві розташованих паралельно площині з'єднання середовищ компланарні кругові термоактивні (на яких задана температура або тепловий потік) тріщини, в тривимірній постановці. Отримано розподіл температур залежно від теплофізичних властивостей матеріалів та відстані від тріщин до границі з'єднання півпросторів.

Ключові слова: теплопровідність, кусково-однорідний трансверсально-ізотропний простір, термоактивна тріщина, двовимірні сингулярні інтегральні рівняння.

SUMMARY

The solution of the axisymmetric problem of heat conduction for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space containing two arranged parallel to the plane of compound medium coplanar circular thermoactive (on which the is given by the temperature or heat flux) cracks in three-dimensional setting. Distributions of the temperature depending on the thermal properties of materials and the distance from the cracks to the border joint of the half-space.

Keywords: thermal conductivity, piecewise-homogeneous orthotropic space, thermoactive crack, two-dimensional singular integral equations.

УДК 539.1:534.1

М. П. Подчасов, І. В. Янчевський

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ

НЕСТАЦІОНАРНІ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНИХ КОМПОЗИТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПРОТІКАЮЧОЮ РІДИНОЮ ПРИ ДІЇ ЗОВНІШНІХ РУХОМИХ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Викладено результати чисельно-аналітичних досліджень впливу на характеристики деформування композитних циліндричних оболонок, в яких тече ідеальна нестислива рідина, при перехідних режимах їх нелінійних коливань в разі дії зовнішніх навантажень, що мають вигляд пакету прямокутних імпульсів тиску. Навантаження вважаються розподіленими по площадці на поверхні оболонки, яка переміщується вздовж оболонки з постійною швидкістю. На базі рівнянь класичної теорії оболонок, записаних в змішаній формі, розроблена та реалізована методика чисельного визначення максимальних значень радіальних прогинів оболонок за весь час перехідного процесу. Із застосуванням цієї методики досліджені залежності максимальних значень прогинів від швидкості потоку U та параметрів навантажень, таких як швидкість переміщення площадки V , кількість повних проходів площадкою всієї довжини оболонки, тривалість імпульсу та його амплітуда. Показано, що при фіксованих інших параметрах навантаження різним значенням U відповідають свої певні значення V , при яких максимальні прогини під час нестационарних коливань є найбільшими. Встановлена принципова можливість при наявності певних співвідношень між порівняно невеликими за значенням U та V , швидкого зростання амплітуд нестационарних коливань, при яких прогини перевищують межі конструктивних обмежень.

Ключові слова: композитна циліндрична оболонка, ідеальна нестислива рідина, швидкість потоку, швидкість рухомого навантаження.

Вступ. Вивченню усталених коливань гідродинамічних об'єктів, на які діють періодичні силові фактори з незмінною геометрією площадок навантаження присвячені численні публікації. У роботах [1–5], зокрема, у якості об'єктів дослідження виступають взаємодіючі з рідиною композитні циліндричні оболонки, які моделюють окремі конструктивні елементи трубопроводних систем. Однак у зв'язку з ускладненням умов функціонування сучасних трубопроводів, в т.ч. наявністю рухомих збурюючих сил, все більш актуальними стають дослідження перехідних процесів в таких об'єктах, які обумовлені дією сил, що розподілені по ділянкам зі змінними у часі границями.

В даній роботі представлені результати досліджень характеристик динамічних процесів переходу до режимів усталених коливань композитних циліндричних оболонок, в яких із заданою швидкістю тече рідина. Вважається, що окрім гідродинамічного тиску оболонка зазнає дію радіального зовнішнього навантаження, що має вигляд пакету прямокутних імпульсів тиску, при цьому площадки навантаження переміщуються вздовж твірної оболонки з заданою постійною швидкістю.

Постановка задачі. Об'єктом дослідження є кругова циліндрична ортотропна оболонка, всередині якої в напрямку осі Ox зі швидкістю $U = \text{const}$ тече рідина (рис. 1) Вважається, що: оболонка вільно оберта на торцях; має довжину L , радіус R , товщину h , за позитивний напрямок відліку її прогину w обраний напрямок до центру кривизни. Припускається, що рідина є ідеальною і нестисловою, а її течія – потенціальною. На зовнішню поверхню оболонки діє рівномірно розподілений по площадці контакту тиск $q(t)$. В системі зв'язаних з оболонкою координат, повздовжньої x та дугової $y = \theta R$, площадка має довжину $\Delta(t) = x_k(t) - x_0(t)$ та ширину $l = y_k - y_0 = R(\theta_k - \theta_0) = \text{const}$.

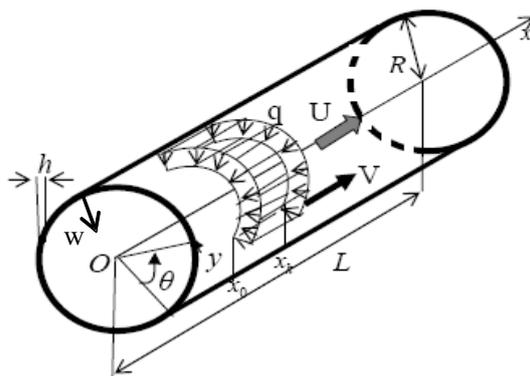


Рис. 1. Схема досліджуваної гідродинамічної системи

Відносно параметрів навантаження прийняті такі припущення. Площадка навантаження кілька разів ($N_{\text{плоч}}$) з часовим інтервалом $\tau_{\text{сер}}$ переміщується вздовж твірної оболонки. При цьому проміжок часу $T_{\text{нав}}$, коли оболонка зазнає дію зовнішнього тиску, визначається за формулою $T_{\text{нав}} = (L + \Delta_m) / V$, де через Δ_m позначено максимальне значення $\Delta(t)$ за умови, що $x_0(t) \leq x_k(t) \leq L$. На рис. 2 зображені

пунктирною та суцільною лініями, відповідно, графіки функцій $x_0(t)$ та $x_k(t)$ для випадку коли $L=1$ м, $N_{\text{площ}}=4$, $T_{\text{наб}}=\tau_{\text{сер}}=1$ с. Зауважимо, що значення тангенсів кутів нахилу кривих на рисунку дорівнюють швидкості площадки V . Відносно зміни в часі тиску $q(t)$ вважається, що він представляє пакет прямокутних імпульсів, які мають амплітуду Q , тривалість $T_{\text{имн}}$ та слідує з інтервалом $\tau_{\text{имн}}$.

На рис. 3, а зображено графік функції $q(t)$, побудований при наступних значеннях параметрів: $Q=5$ Па, $T_{\text{имн}}=\tau_{\text{имн}}=0,1$ с. Відповідно, рис. 3, б ілюструє еволюцію добутку $q(t)$ на різницю функцій $x_k(t)$ і $x_0(t)$, графіки яких представлені на рис. 2.

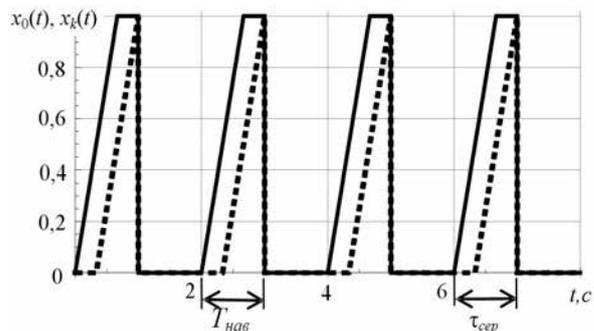


Рис. 2. Залежності координат границь площадки контакту від часу

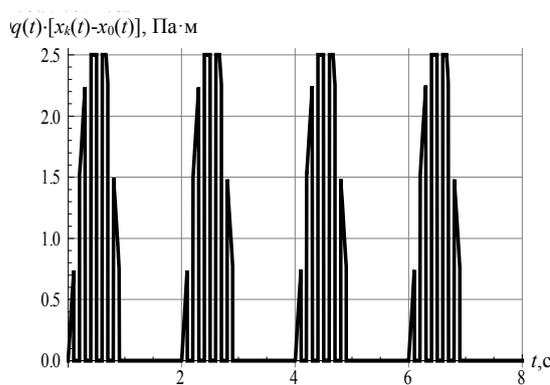
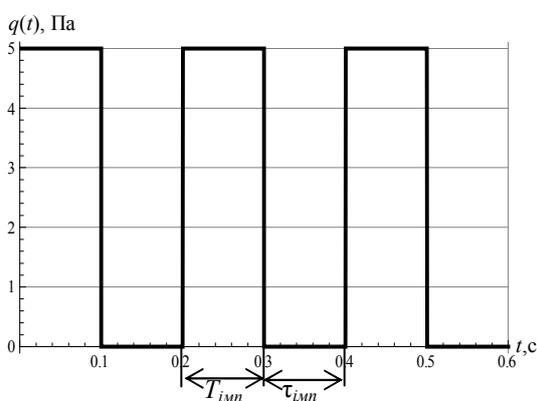


Рис. 3. Еволюції зовнішнього навантаження та його добутку на довжину площадки навантаження

Для опису нестационарного деформування оболонки при взаємодії з внутрішнім потоком рідини залучаються динамічні рівняння, представлені в змішаній формі [6–8]:

$$\frac{1}{h} \nabla_D^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{q}{h} - \frac{P_2}{h};$$

$$\nabla_{\delta}^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$
(1)

Тут використані позначання, які використовуються в класичній теорії оболонок [7]:

$$\nabla_D^4 = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad \nabla_{\delta}^4 = \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

ρ – густина оболонки; ρ_0 – густина рідини, яка в ній тече; E_1, E_2 – модулі пружності в напрямку осей x і y відповідно; G – модуль зсуву; $D_i = E_i h^3 / 12 (1 - \mu_1 \mu_2)$ ($i=1,2$) – жорсткості при згині в осьовому та окружному напрямках; $D_3 = D_1 \mu_2 + 2D_G$ – зведена жорсткість; $D_G = G h^3 / 12$ – жорсткість при крученні; ε – коефіцієнт демпфірування; μ_1, μ_2 – коефіцієнти Пуассона ($E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$); $\delta_i = E_i$; $2\delta_3 = 1/G - 2\mu_1/E_1$.

Гідродинамічний тиск $P_{\bar{a}}$, який фігурує в першому рівнянні (1), обчислюється за відомою формулою [6, 8] – $P_2 = -\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{r=R}$. При цьому потенціал швидкостей рідини $\psi(x, r, \theta, t)$ є розв'язком відповідної крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0 \leq r \leq R; 0 \leq x \leq l; 0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=0} < \infty; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=R} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

Динамічний прогин оболонки, який задовольняє прийнятими крайовими умовами, представлено у вигляді суми п'яти доданків, які відповідають його розвиненню за першими двома повздовжніми модами та за двома спряженими коловими модами, а також осесиметричного невід'ємного доданку, а саме:

$$w(x, y, t) = [f_1(t) \cos sy + f_2(t) \sin sy] \sin \lambda_1 x + [f_3(t) \cos sy + f_4(t) \sin sy] \sin \lambda_2 x + |f_5(t)| f(x). \quad (2)$$

Тут $f_k(t)$ ($k=1..5$) – функції часу, які підлягають визначенню; $\lambda_1 = \pi/L$; $\lambda_2 = 2\pi/L$; $s = n/R$ – параметр хвилеутворення (n – кількість повних колових хвиль). Останній "коригувальний" доданок $|f_5(t)| f(x)$ відображає відомий з експериментів з динаміки замкнених оболонок ефект "переважного випинання всередину" [7]. При цьому функція $f(x)$ представляла достатньо точну апроксимацію функції $\sin^4 \lambda_1 x$ першими трьома членами її розвинення в ряд Фур'є по синусах на інтервалі $[0, L]$. З механічної точки зору цей доданок можна інтерпретувати як накладання на рух системи певних в'язей.

Відзначимо, що всі, наведені нижче, результати чисельних досліджень отримані для оболонки, яка мала такі фізичні параметри:

$$L=1 \text{ м}; R=L/5; h=R/100; \rho=1650 \text{ кг/м}^3; \rho_0=1000 \text{ кг/м}^3;$$

$$n=3; \theta_0=\pi/4; \theta_k=3\pi/4; E_1=2,15 \cdot 10^9 \text{ Па}; E_2=1,23 \cdot 10^9 \text{ Па}; G=2,1 \cdot 10^8 \text{ Па}; \mu_1=0,19.$$

Метод розв'язання. На підставі представлення (2) за допомогою процедури Бубнова-Гальборкіна вхідна система рівнянь (1) була зведена до системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь відносно функцій $f_k(t)$ ($k=1..5$):

$$\begin{aligned} \ddot{f}_j + \varepsilon_1 \dot{f}_j + (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2) f_j + \beta_1 U \frac{df_{j+2}}{dt} &= F_j(f_1, f_2, f_3, f_4, |f_5|, x_0, x_k, q), \quad (j=1, 2); \\ \ddot{f}_j + \varepsilon_2 \dot{f}_j + (\omega_2^2 - \alpha_2 U^2) f_j + \beta_2 U \frac{df_{j-2}}{dt} &= F_j(f_1, f_2, f_3, f_4, |f_5|, x_0, x_k, q), \quad (j=3, 4); \\ \text{sign}(f_5) \ddot{f}_5 + \varepsilon_3 \text{sign}(f_5) \dot{f}_5 + (\omega_5^2 - \alpha_3 U^2) f_5 &= F_5(f_1, f_2, f_3, f_4, |f_5|, x_0, x_k, q). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $\alpha_i, \beta_i, \omega_i, \varepsilon_i$ – постійні коефіцієнти, які виражаються через геометричні та фізичні параметри оболонки; $F_j(f_1, f_2, f_3, f_4, |f_5|, x_0, x_k, q)$ – нелінійні функції своїх змінних; $x_0 = x_0(t, V, L, \Delta_m, N_{\text{площ}}, \tau_{\text{сер}})$; $x_k = x_k(t, V, L, \Delta_m, N_{\text{площ}}, \tau_{\text{сер}})$; $q = q(t, Q, T_{\text{имн}}, \tau_{\text{имн}})$.

Надалі система (3) чисельно інтегрувалася за умови, що в початковий момент часу $t=t_0=0$ значення функцій f_k та їх похідних за часом такі: $f_i(t_0)=0$; $\dot{f}_i(t_0)=10h$ м/с. Тобто вважалося, що спочатку оболонка має строго циліндричну форму, але існує деяка тенденція до збудження її коливань.

З метою спрощення аналізу результатів чисельних експериментів (відокремлення високочастотних складових коливань) вводилися в розгляд обвідні $Og \max w(x, y, t)/h$ максимальних значень безрозмірних прогинів $w(x, y, t)/h$ в момент часу t в довільній точці оболонки з координатами x, y . Ці функції визначалися наступним чином. Після знаходження $w(x, y, t)$ шляхом інтегрування (3) задавалися значення параметрів τ і n_τ . Останні задавали відповідно тривалість інтервалів часу $[t-\tau, t+\tau]$, на яких обчислювалися максимальні в часі значення прогину, а також кількість n_τ проміжків часу, на які розбивався інтервал $[t-\tau, t+\tau]$. Остаточою, для довільної точки оболонки $M(x, y)$ значення обвідної в момент часу t визначалося як максимальне число з масиву чисел $\{w(x, y, t+i\tau/n_\tau)\}$ при $-n_\tau \leq i \leq n_\tau$, тобто

$Og \max w(x, y, t) = \max_{-n_\tau \leq i \leq n_\tau} \{w(x, y, t + i\tau/n_\tau)\}$. Зазначимо, що наведені нижче результати розрахунків отримані при значеннях параметрів $\tau = 5(2\pi/\omega_5)$ та $n_\tau = 40$.

Для визначення координат $x=X$ і $y=Y$ точки поверхні оболонки, в якій в момент закінчення перехідного процесу $t = T_{сер} = N_{площ}(T_{нав} + \tau_{сер})$ її прогин максимальний, було використано наступну процедуру. Розглядалася прямокутна сітка із кроком $\Delta x = L/n_x$ по координаті x та $\Delta y = 2\pi R/nn_y$ – по координаті y , що покриває частину поверхні оболонки. Далі обчислювався масив значень $A = \{Og \max w(iL/n_x, j2\pi R/(nn_y), T_{сер})\}$ ($i=1..n_x$; $j=1..n_y$) та визначався максимальний елемент цього масиву й відповідні йому значення координат X, Y , при цьому n_x і n_y були задані (в представлених нижче розрахунках було обрано $n_x = 20$, $n_y = 60$). Очевидно, що за умови періодичності $w(x, y, t)$ по змінній y прогини оболонки в точках з координатами $x=X$ і $y=Y$ та $x=X$ і $y=Y + 2\pi Rk/n$ ($k=1..n-1$) співпадатимуть.

Аналіз результатів. Окремі питання, що пов'язані з дослідженням властивостей неусталених радіальних коливань досліджуваного об'єкта, висвітлювались в [9]. Нижче наведені деякі, найбільш суттєві, результати цих досліджень.

На рис. 4 зображені еволюції, обчислених в точці оболонки з координатами $x=X$ і $y=Y$, функцій $Og \max w(x, y, t)/h$ для випадку, коли кількість площадок $N_{площ} = 4$. На кожній площадці діяв лише один імпульс, тривалість якого дорівнювала часу навантаження $T_{имп} = T_{нав}$, і імпульси слідували безпосередньо один за одним, тобто $\tau_{сер} = \tau_{имп} = 0$. При цьому швидкість потоку $U = 5$ м/с, а параметри навантаження були такими: $Q = 1000$ Па; $\Delta_m = L/4$.

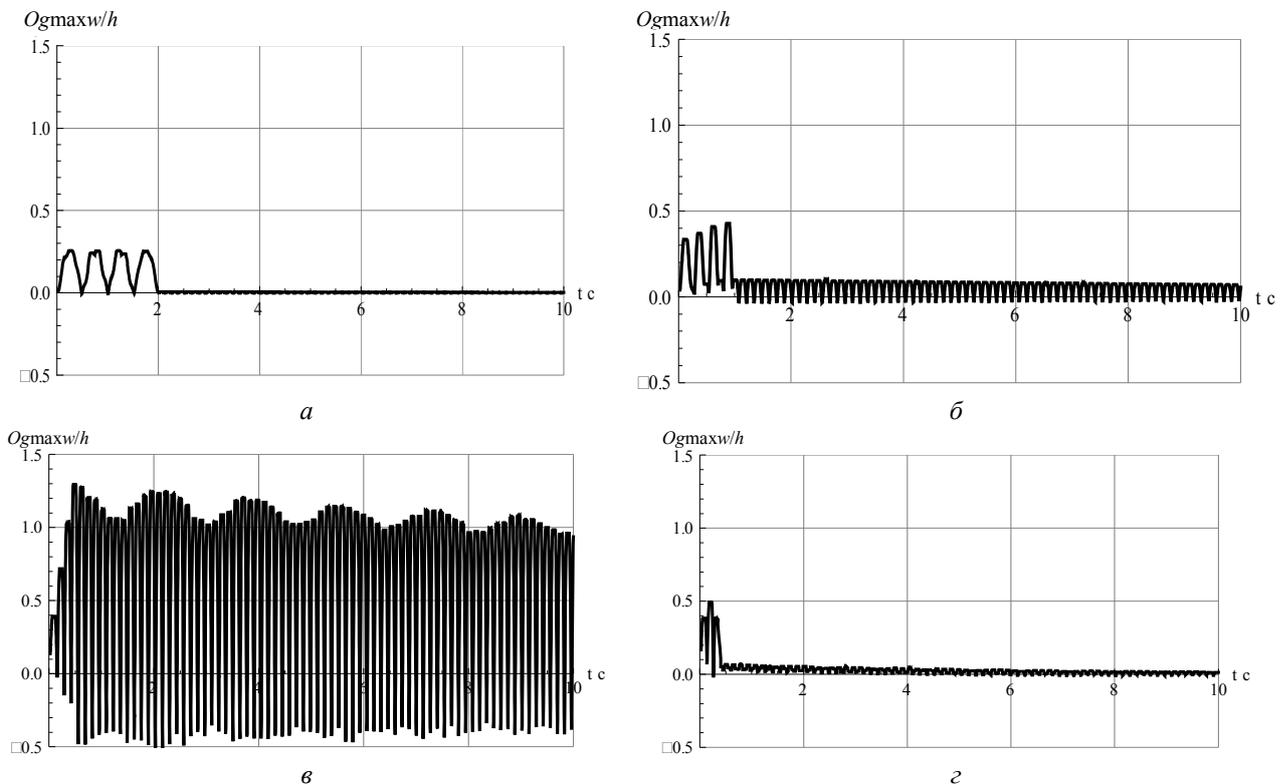


Рис. 4. Характеристики зміни в часі обвідних максимумів прогинів при різних значеннях швидкостей площадки у випадку дії на неї лише одного імпульсу

Рис. 4 відносяться до випадків, коли швидкості площадки V мали значення $V = 2,488$ м/с (рис. 4, а), $V = 4,975$ м/с (рис. 4, б), $V = 9,951$ м/с (рис. 4, в) та $V = 12,439$ м/с (рис. 4, г). Відношення

інтервалів часу навантаження $T_{нав}$ до величини періоду мінімальної власної частоти оболонки з рідиною $T_1 = 2\pi/\omega_1$ відповідно дорівнювали: $T_{нав}/T_1 = 4$, $T_{нав}/T_1 = 2$, $T_{нав}/T_1 = 1$ та $T_{нав}/T_1 = 0,8$. Як видно, при зазначених параметрах навантаження, перехідний коливальний рух оболонки суттєво змінюється, зазнаючи значного збільшення значень максимальних прогинів та тривалості перехідного процесу, при наявності деякого, умовно кажучи, "резонансного" співвідношення $T_{нав}/T_1 = 1$.

Дані про зміну в часі функцій $Og \max w(x, y, t)/h$ дозволяють визначити значення максимальних безрозмірних прогинів оболонки за весь час перехідного процесу $\max w/h = \max_{\tau \leq t \leq T_{\epsilon}} [Og \max w(x, y, t)/h]$, де

T_{ϵ} момент часу, після якого амплітуди коливань починають зменшуватися. Надалі, саме ці значення будуть використовуватися в якості характеристик неусталених нелінійних коливань оболонки.

Вплив значень безрозмірного параметру Δ_m/L на максимальні безрозмірні прогини оболонки, які мають місце під час неусталених коливань, ілюструють зображені на рис. 5 криві. Ці криві побудовані при наступних припущеннях [9]. На оболонку діє лише один імпульс з тривалістю $T_{имп} = T_{нав}$, тобто $N_{площ} = 1$, $\tau_{сер} = \tau_{имп} = 0$. Швидкості площадки навантаження та течії рідинного заповнювача дорівнювали, відповідно, $V = 5$ м/с та $U = 10$ м/с.

Криві, позначені індексами 1–4, відповідають значенням амплітуд імпульсів $Q = 500$ Па, $Q = 1000$ Па, $Q = 1500$ Па та $Q = 2000$ Па. Наведені графіки свідчать про те, що в даному випадку при збільшенні відносної довжини максимальної площадки навантаження Δ_m/L величини $\max w/h$ зменшуються, а при збільшенні Q очікувано, приблизно пропорційно, збільшуються.

При дії, як і в попередньому випадку одиночного імпульсу на кожній площадці, досліджувався вплив на динаміку перехідних процесів швидкості V при інших фіксованих значеннях параметрів навантаження. Для цього на певному інтервалі її зміни з кроком ΔV обиралися значення V_j , для яких визначалися відповідні значення $\max w/h$ і будувалися графіки функцій $\max w/h = f(V)$ коли інші параметри навантаження мали ті чи інші фіксовані значення.

Графіки цих функцій отримані в припущенні, що $\Delta_m = L/4$, $U = 5$ м/с, $\Delta V = 2,5$ м/с, $Q = 1000$ Па, і представлені на рис. 6. Крива 1, що зображена крапками, відповідає випадку, коли $N_{площ} = 2$; штрихпунктирна крива 2 – випадку $N_{площ} = 3$; пунктирна крива 3 – випадку $N_{площ} = 4$, а суцільна крива 4 – випадку $N_{площ} = 5$. Ці криві свідчать про наявність при зазначених параметрах навантаження і $U = 5$ м/с деякої "критичної" швидкості $V = V_{кр}$, в околі якої функції $\max w/h = f(V)$ мають максимуми. Крім цього, із збільшенням в певних межах кількості імпульсів $N_{площ}$, спостерігається загальна тенденція до збільшення значень величин $\max w/h$.

Для аналогічного попередньому випадку, коли на кожній площадці діє лише один імпульс і площадки слідують безпосередньо одна за однією, тобто коли виконуються умови $T_{имп} = T_{нав}$, $\tau_{сер} = \tau_{имп} = 0$, досліджувалась залежність величин $\max w/h$ від швидкостей площадки V та швидкості

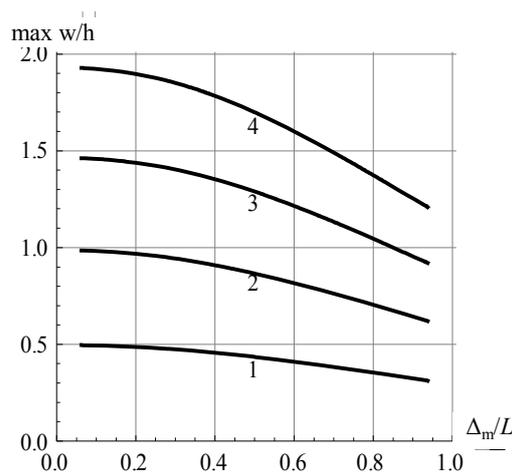


Рис. 5. Залежності величин $\max w/h$ від параметру Δ_m/L при різних значеннях амплітуд імпульсів

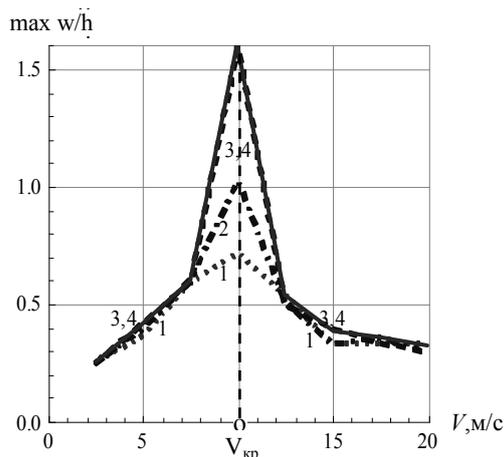


Рис. 6. Залежності величин $\max w/h$ від швидкості площадок навантаження при різних їх кількостях

потоків рідини U . В графічній формі результати цих досліджень, отримані за умов, що $N_{\text{площ}}=5$, $\Delta_m=L/4$, $Q=1000$ Па, і представлені на рис. 7.

Зображені точками крива 1, штрихпунктиром крива 2, пунктиром крива 3 та суцільною лінією крива 4 побудовані для значень $U=0$ (випадок априорі нерухомої рідини), $U=5$ м/с, $U=10$ м/с і $U=12$ м/с, відповідно. Зазначимо, що при побудові наведених графіків, з метою обов'язково розглядати для кожного значення U випадок виконання "резонансного" співвідношення $T_{\text{нав}}/T_1=1$, крок по змінній V обчислювався за формулою $\Delta V=(L+\Delta_m)/4T_1$ оскільки $T_1=2\pi/\omega_1$, в свою чергу, залежить від U .

З цього рисунку видно, що кожному з наведених значень U відповідають свої значення "критичних" швидкостей $V_{кр0}$, $V_{кр5}$, $V_{кр10}$ та $V_{кр12}$, при яких максимальні за весь час нестационарних коливань оболонки її радіальні прогини стають найбільшими. Для цих значень V , при досить великих значеннях U або Q , максимальні прогини оболонки під час перехідних процесів можуть суттєво перевищувати конструктивні обмеження, що на них накладаються, або межі застосування використаної в даних дослідженнях класичної теорії оболонок. Так, на кривій 4 максимальне значення $\max w/h$ наближається до 6, яке близьке до границі застосування вказаної теорії.

Досліджувався також перехідний процес деформування оболонки в загальному випадку, коли на неї діє пакет імпульсів тиску, розподілених на серії рухомих площадок навантаження. Еволюцію такого навантаження ілюструє рис. 4, б. За умов, що $\Delta_m=L/2$, $Q=1000$ Па, $N_{\text{площ}}=N_{\text{имп}}=4$, $T_{\text{имп}}=T_{\text{нав}}/2N_{\text{имп}}$, $\tau_{\text{сер}}=1$ с, $\tau_{\text{имп}}=T_{\text{имп}}$, $\Delta V=0,5$ м/с, обчислювалися залежності $\max w/h$ від V для окремих значень швидкостей потоку U . Графіки таких функцій $\max w/h=f(V)$ приведені на рис. 8. На ньому криві 1–4, нанесені відповідно точками, штрихпунктиром, пунктиром та суцільною лінією, відносяться до значень $U=6$ м/с, $U=5$ м/с, $U=4$ м/с і $U=4,5$ м/с.

Як і в попередньому випадку, відзначаємо можливість виникнення, при певних значеннях параметрів навантаження та швидкості потоку, великих радіальних прогинів оболонки під час перехідних процесів (крива 4). При цьому наявність таких прогинів, значення яких виходять за рамки конструктивних обмежень, є тенденцією до практичної втрати стійкості оболонки. Важливо, що ця тенденція може мати місце при порівняно невеликих значеннях V та U .

Слід зазначити, що наведена методика чисельних досліджень динаміки оболонок з рідиною, яка в них протікає і на яку діють рухомі навантаження, може бути безпосередньо застосована для вивчення характеристик перехідних коливань оболонок у випадках, коли імпульси тиску мають не прямокутну, а іншу, наприклад, експоненціально згасаючу або синусоїдальну форму.

Висновок. Коротко резюмуючи наведені тут результати досліджень, відзначимо наступне. Вивчення характеристик нестационарних нелінійних коливань оболонок з рідиною належить до кола актуальних науково-практичних задач, оскільки під час перехідних процесів прогини оболонок можуть суттєво перевищувати відповідні значення при усталених коливаннях. При цьому оболонки переважно випинаються в середину та їх максимальні радіальні прогини, які досягаються під час перехідного режиму, суттєво нелінійним чином залежать від усіх параметрів рухомого навантаження та швидкості потоку рі-

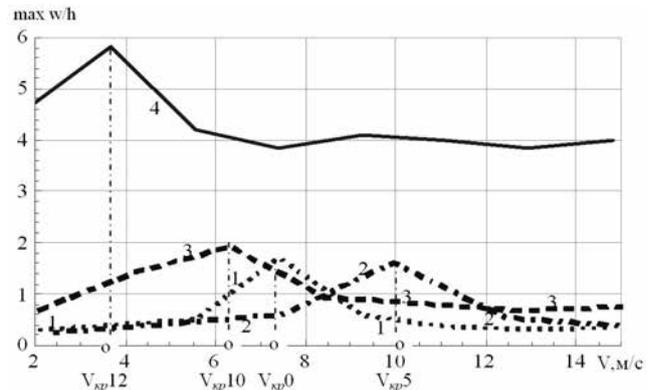


Рис. 7. Залежності $\max w/h$ від швидкості площадок навантаження при різних значеннях швидкостей потоку рідини

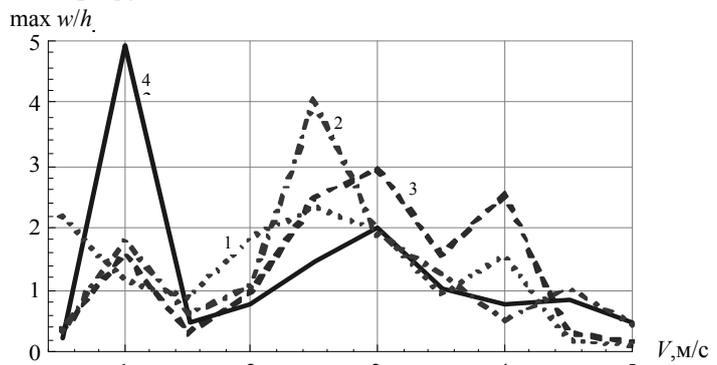


Рис. 8. Залежності величин $\max w/h$ від швидкості площадок навантаження при дії пакету імпульсів, розподілених на серії рухомих площадок навантаження

дини, особливо від V і U . Якщо інші параметри навантаження фіксовані, то для кожного значення U існують певні швидкості площадки $V=V_{кр}$, при яких максимальні безрозмірні прогини $\max w/h$ досягають своїх найбільших значень. При певних співвідношеннях між параметрами навантаження та U прогини оболонок під час нестационарних коливань мають тенденцію до швидкого зростання й їх значення можуть перевищувати границі конструктивних і теоретичних обмежень, що може трактуватися як практична втрата стійкості оболонки. Такий ефект має місце при порівняно невеликих значеннях V та при швидкостях потоку рідни U суттєво менших за першу критичну швидкість дивергенції аналогічної оболонки без рухомого навантаження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ковальчук П. С. О расчете одночастотных нелинейных колебаний цилиндрических оболочек при взаимодействии с протекающей жидкостью / П. С. Ковальчук // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 75–84.
2. Kovalchuk P. S. On stability of elastic cylindrical shells interacting with flowing fluid / P. S. Kovalchuk, N. P. Podchasov // Int. Appl. Mech. – 2010. – Vol. 46, No 1. – P. 73–82.
3. Кубенко В. Д. Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, М. П. Подчасов // Доп. НАН України. – 2010. – № 5. – С. 50–56.
4. Кубенко В. Д. Анализ нестационарных процессов в цилиндрических оболочках при взаимодействии с протекающей жидкостью / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов // Прикл. механика. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 36–52.
5. Amabili M. Nonlinear dynamics and stability of circular cylindrical shell containing flowing fluid. Part 1: Stability / M. Amabili, F. Pellicano, M.P. Paidoussis // J. of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 225, No 4. – P. 655–699.
6. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с.
7. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
8. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
9. Подчасов Н. П. Переходные колебания ортотропных цилиндрических оболочек с протекающей жидкостью при действии одиночного импульса внешней нагрузки с подвижной площадкой контакта / Н. П. Подчасов // Матер. Міжнар. наук.-практ. конф. "Математика в сучасному технічному університеті" (м. Київ, 19-20 квітня 2013 р.). – С. 114–117.

Надійшло до редакції 26.09.2013 р.

РЕЗЮМЕ

Изложены результаты численно-аналитических исследований влияния на характеристики деформирования композитных цилиндрических оболочек, в которых течет идеальная несжимаемая жидкость, при переходных режимах их нелинейных колебаний в случае действия внешних нагрузок, имеющих вид пакета прямоугольных импульсов давления. Нагрузки считаются распределенными по площадке, которая движется вдоль поверхности оболочки с постоянной скоростью. На основе уравнений классической теории оболочек, записанных в смешанной форме, разработана и реализована методика численного определения максимальных значений радиальных прогибов оболочек за все время переходного процесса. С применением этой методики исследованы зависимости максимальных значений прогибов от скорости потока U и параметров нагрузок, таких как скорость перемещения площадки V , количество полных проходов площадкой всей длины оболочки, продолжительность импульса и его амплитуда. Показано, что при фиксированных других параметрах нагрузки разным значениям U отвечают свои определенные значения V , при которых максимальные прогибы во время нестационарных колебаний являются наибольшими. Установлена принципиальная возможность, при наличии определенных соотношений между сравнительно небольшими по значению U и V , быстрого роста амплитуд нестационарных колебаний, при которых прогибы превышают границы конструктивных ограничений.

Ключевые слова: композитная цилиндрическая оболочка, идеальная несжимаемая жидкость, скорость потока, скорость подвижной нагрузки.

SUMMARY

Results of numerically-analytical investigation of influence of external loads which looks like a package of rectangular impulses of pressure on characteristics of nonlinear deformation of composite cylindrical shells with flowed ideal incompressible liquid are presented. Loads are considered as distributed on areas which moves along shell's surface with constant speed. On the basis of the equations of the classical shell's theory which have been written down in the mixed form the technique of calculation of the maximal values of radial deflections of shells for all time of transient process is developed and realized. Using this technique dependences of the maximal values of deflections on speed of the stream U and loads' parameters, such as speed of moving area V , quantity of full passes all shell's length by an area, duration of an impulse and its amplitude are investigated. It is shown that at fixed other load's parameters, different values U corresponds certain values V at which the maximal deflections during non-stationary vibrations are the greatest. It is established that at presence of certain ratio between rather small values U and V , fast growth of amplitudes of non-stationary vibrations at which deflections exceed borders of constructive restrictions.

Keywords: composite cylindrical shell, ideal incompressible liquid, speed of stream, speed of moving load.

УДК 539.375

І. П. Шацький

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Івано-Франківськ

ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИНИ З ЧАСТКОВО ЗАЛІКОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ

Запропоновано модель частково залікованої тріщини в зігнутій пластині. У зоні відновлення суцільності поверхнева енергія вважається інакшою, ніж у непошкодженому матеріалі. Враховано ефект закриття тріщини від згину.

Ключові слова: пластина, залікована тріщина, згин.

Вступ. Проблема реновації тривало експлуатованих виробів, споруд та біологічних об'єктів залишається актуальною для сучасного матеріалознавства. У праці [1] підведено підсумки моделювання дефектів, залікованих за ін'єкційними технологіями, тонкими податливими включеннями. Розриви переміщень на відновлених ділянках у плоских та просторових задачах знаходять за числовими розв'язками інтегро-диференціальних рівнянь. У цій роботі пропонуємо аналітичний підхід до експрес-оцінки міцності тонких пластин з частково залікованими тріщиноподібними дефектами, береги яких контактують в умовах деформації згином. Огляди робіт з моделювання контакту берегів тріщин засобами двовимірних теорій пластин містяться у працях [2–5].

Модель та постановка задачі. Розглядаємо пружну ізотропну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену прямолінійною наскрізною тріщиною $\Omega = L_0 \times [-h, h]$, розташованою вздовж відрізка осі абсцис $L_0 = (-l_0, l_0)$. Нехай на деякій ділянці тріщини $\Sigma = L_h \times [-h, h] \subseteq \Omega$ суцільність пластини є відновленою, а на поверхні $\Omega \setminus \Sigma$ є можливим розрив переміщень. У результаті дістаємо новий об'єкт – пластину із частково залікованою тріщиною, локалізованою вздовж контура $L = L_0 \setminus L_h$ (загалом, багатозв'язного). Для спрощення приймаємо, що пружні властивості тіла із залікованою тріщиною зберігаються (нехтуємо подробицями реології з'єднувального шару). Однак питома поверхнева енергія γ_h роз'єднання поверхонь на Σ є інакшою, ніж γ_0 у суцільному тілі (зазвичай $\gamma_h \leq \gamma_0$). Таким чином, приходимо до задачі механіки тріщини у однорідній за пружними властивостями та неоднорідній за тріщиностійкістю пластині. У кінцевому результаті прагнемо відповісти на питання: яким повинен бути контур L_h , щоб при заданому співвідношенні γ_h/γ_0 підвищити несучу здатність дефектної пластини на потрібну величину.

Дослідження провели для задач рівномірного симетричного згину пластини з урахуванням контакту берегів тріщини в рамках класичних двовимірних теорій Кірхгофа та плоского напруженого стану, базуючись на енергетичному підході механіки крихкого руйнування.

Відповідно до моделі закриття тріщини по лінії у лицьовій поверхні пластини [3, 6] сформулювали крайову задачу згину пластини з частково залікованою тріщиною:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \\ [u_y] = h |[\vartheta_y]| > 0, \quad M_y = h N_y \operatorname{sgn}[\vartheta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L; \\ N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_y = m, \quad M_{xy} = 0, \quad M_x = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут φ і w – функція напружень і прогин пластинки, Δ – оператор Лапласа, $[u_y]$ і $[\vartheta_y]$ – стрибки переміщення і кута повороту нормалі, N_x, N_{xy}, N_y і M_x, M_{xy}, M_y – мембранні сили і згинальні моменти.

Як відомо [6], задача (1) зводиться до сингулярного інтегрального рівняння відносно стрибка кута повороту нормалі

$$(1 + \kappa) \frac{D a_0}{4\pi} \int_L [\vartheta_y]'(\xi) \frac{d\xi}{\xi - x} = m, \quad x \in L; \quad [\vartheta_y](\partial L) = 0, \quad (2)$$

де $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, $a_0 = (3+\nu)(1-\nu)$, $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$, E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

За розв'язками (2) підраховуються коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів в околі вершин незалікованих ділянок тріщин

$$K_N = \mp \frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow \partial L^\pm} \sqrt{2|x - \partial L^\pm|} [u_y]'(x), \quad K_M = \pm \frac{Da_0}{4} \lim_{x \rightarrow \partial L^\pm} \sqrt{2|x - \partial L^\pm|} [\vartheta_y]'(x).$$

Граничне значення зовнішнього навантаження, яке призводить до розповсюдження контактної тріщини визначається із енергетичного критерію механіки крихкого руйнування за комбінованого розтягу та згину [3]

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma_*,$$

де $\gamma_* = \gamma_0$ або $\gamma_* = \gamma_h$ – питома ефективна поверхнева енергія неушкодженого або залікованого матеріалу.

Ступінь заліковування тріщини будемо описувати двома параметрами: $\eta = \sqrt{\gamma_h / \gamma_0}$ – характеризує якість заліковування, $\psi = \text{mes} L_h / \text{mes} L_0 \in [0, 1]$ – характеризує кількісну міру відновленої області. Ефективність заліковування опишемо відношенням граничних значень навантаження для залікованої та первинної тріщини: $\chi = |m_h| / |m_0|$.

Аналіз. Знайдемо $\chi(\eta, \psi)$ для різних варіантів заліковування.

1. Нехай $L_h = \emptyset$, $L = L_0$. Для незалікованої тріщини [6, 7]

$$K_N = \frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{|m| \sqrt{l_0}}{h}, \quad K_M = \frac{m \sqrt{l_0}}{1+\kappa}; \quad |m_0| = 2h^2 \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{2E\gamma_0}{\pi l_0}}.$$

2. Нехай тріщина залікована поблизу вершин: $L_h = (-l_0, -l) \cup (l, l_0)$, $L = (-l, l)$, $\psi = 1 - l / l_0$. Для укороченої тріщини

$$K_N = \frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{|m| \sqrt{l}}{h}, \quad K_M = \frac{m \sqrt{l}}{1+\kappa}; \quad |m_h| = 2h^2 \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{2E\gamma_h}{\pi l}}.$$

Тоді

$$\chi = \eta / \sqrt{1 - \psi}. \quad (3)$$

3. Нехай тріщина залікована посередині відрізка: $L_h = (-l, l)$, $L = (-l_0, -l) \cup (l, l_0)$, $\psi = l / l_0$. Тоді для незалікованої ділянки справа [8, 9]

$$K_N^\pm = \frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{|m|}{h} \sqrt{\frac{l_0 - l}{2}} F^\pm(\lambda), \quad K_M^\pm = \frac{m}{1+\kappa} \sqrt{\frac{l_0 - l}{2}} F^\pm(\lambda);$$

$$|m_h| = 2h^2 \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{2E\gamma_h}{\pi(l_0 - l)}} \frac{\sqrt{2}}{F^-(\lambda)}; \quad F^\pm(\lambda) = \frac{\pm 1}{\lambda \sqrt{1 \pm \lambda}} \left(1 \pm \lambda - \frac{E(\lambda)}{K(\lambda)} \right), \quad \lambda = \frac{l_0 - l}{l_0 + l},$$

$K(\lambda), E(\lambda)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду.

$$\chi = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \psi}} \frac{\sqrt{2}}{F^-\left(\frac{1 - \psi}{1 + \psi}\right)}. \quad (4)$$

4. Нехай тріщина залікована на багатьох дрібних ділянках завдовжки $d - 2l$ з кроком $d = 2l_0 / N$ (N – число ділянок). Тоді $\psi = 1 - 2l / d$. Приймаючи при великих N справедливими результати періодичної задачі [8, 9], отримаємо

$$K_N \approx \frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{|m|}{h} \sqrt{\frac{d}{\pi} \text{tg} \frac{\pi l}{d}}, \quad K_M \approx \frac{m}{1+\kappa} \sqrt{\frac{d}{\pi} \text{tg} \frac{\pi l}{d}};$$

$$|m_h| \approx 2h^2 \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa} \frac{2E\gamma_h}{d} \text{ctg} \frac{\pi l}{d}}, \quad \chi \approx \eta \sqrt{\frac{\pi N}{2} \text{tg} \frac{\pi \psi}{2}}. \quad (5)$$

Результати підрахунку ефективності відновлення несучої здатності дефектної пластини за різних тактик заліковування подано на рис. 1. Лінії 1, 2, 3 відповідають формулам (3), (4) та (5) при $N = 10$. Вочевидь інтерес викликають значення $\chi > 1$.

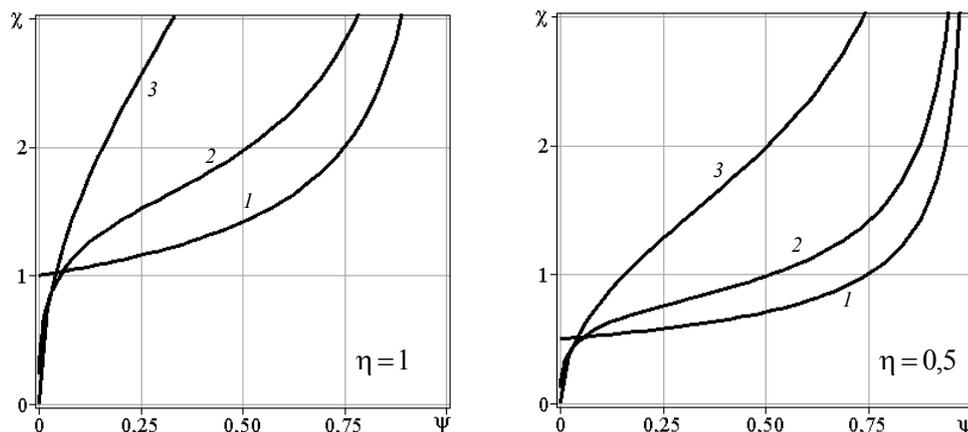


Рис. 1

Висновки. Заліковування тріщини посередині при не надто малих ψ є ефективнішим, ніж заліковування поблизу вершин. Зі зменшенням параметра η успіх заліковування істотно знижується. Здобуті результати заміною граничних навантажень $|m|$ на

$$c(n, m) = \begin{cases} \sqrt{(1+\kappa)/\kappa} \sqrt{n^2 + \kappa(m/h)^2}, & n \geq \kappa|m/h \\ n + |m/h|, & n \leq \kappa|m/h \end{cases}$$

[10] переносяться на загальний випадок комбінованого розтягу зусиллями n та згину моментами m пластини з частково залікованою тріщиною. Значення $\chi(\eta, \psi)$ при цьому не змінюються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Маруха В. І. Механіка руйнування та міцність матеріалів. Т. 12: Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації / В. І. Маруха, В. В. Панасюк, В. П. Силованюк; Ред. В. В. Панасюк. – Львів: Сполом, 2009. – 262 с.
2. Khludnev A. M. Analysis of cracks in solids. / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenکو. – Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. – 408 p.
3. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів: Камінь, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.
4. Zehnder A. T. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending and twisting loads / A. T. Zehnder, M. J. Viz // Applied mechanics reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37–48.
5. Хлуднев А. М. Теория трещин с возможным контактом берегов / А. М. Хлуднев // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 4. – С. 41–82.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
7. Young M. J. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution / M. J. Young, C. T. Sun // Int. J. Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.
8. Шацький І. П. Взаємодія колінеарних розрізів з контактуючими кромками в изгибаемой пластині / І. П. Шацький // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – Т. 26, № 3. – С. 70–75.
9. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
10. Шацький І. П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині / І. П. Шацький // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.

Надійшло до редакції 23.09.2013 р.

РЕЗЮМЕ

Предложена модель частично залеченной трещины в изгибаемой пластине. В области восстановления сплошности поверхностная энергия отличается от таковой для неповрежденного материала. Учитывается эффект закрытия трещины от изгиба.

Ключевые слова: пластина, залеченная трещина, изгиб.

SUMMARY

The model of partially healed crack in bending plate is proposed. On the recovered area of crack continuity takes place while surface energy differs from that in undamaged body. The crack closure effect under bending is considered.

Keywords: plate, healed crack, bending.

УДК 539.3

В. П. Шевченко, А. Ю. Удовиченко

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ ПО УТОЧНЕННЫМ ТЕОРИЯМ

Методом интегральных преобразований Фурье получено фундаментальное решение уравнений статики пологих трансверсально-изотропных оболочек. Исследовано напряженно-деформированное состояние оболочек положительной кривизны при локально силовых воздействиях. Выполнены численные исследования поведения прогиба оболочки при воздействии на нее локальной нагрузки. На основе полученных результатов исследовано влияние размера площади круга загрузки на поведение прогиба трансверсально-изотропной оболочки в зависимости от ее геометрических и упругих параметров. Полученные решения сопоставлены с решениями, полученными по теории Кирхгофа–Лява.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная оболочка, прогиб оболочки, локальная нагрузка, фундаментальное решение, интегральное преобразование Фурье, положительная кривизна, модель Кирхгофа–Лява, модель Тимошенко.

Введение. Рассматривая задачи концентрации напряжений в тонкостенных конструкциях большой интерес вызывают уточненные теории оболочек [1–3]. Решения задач о действии локальных воздействий на изотропные оболочки по теории Кирхгофа–Лява рассмотрены многими авторами [4, 5]. Однако в современном машиностроении, авиастроении и других отраслях промышленности широко применяются новые листовые типы материалов, которые имеют трансверсально-изотропные свойства. Для исследования прочности таких конструкций в местах концентрации напряжений требуются более современные подходы, основанные не на классической теории Кирхгофа–Лява, а на теории трансверсально-изотропных пластин и оболочек. В отличие от уравнений классической теории, разрешающие уравнения теории оболочек, учитывающих деформацию поперечного сдвига, имеют десятый порядок [6].

Целью этой работы является не только построение системы фундаментальных решений, но и последующее исследование напряженного состояния оболочек при локальных нагрузках.

Постановка задачи. Для исследования прочности оболочек при наличии различного рода концентраторов напряжений (локальные нагрузки, трещины, отверстия и т.д.), как правило используются разрешающие уравнения типа Кирхгофа–Лява [7]. Установлено, что вблизи зон концентрации напряжений эти уравнения дают не всегда корректные результаты. Поэтому в последнее время для решения подобных задач применяются другие приближенные теории. В частности это уравнения теории тонких оболочек, основанных на гипотезах С. П. Тимошенко [8]. Этот подход не только дает более уточненные решения в окрестности локальных воздействий, но и применим для исследования напряженного состояния оболочек, изготовленных из трансверсально-изотропных материалов.

Рассмотрим оболочку постоянной толщины h , изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Система разрешающих дифференциальных уравнений, записанная в перемещениях имеет вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda+\nu}{R_2} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} X, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1+\lambda\nu}{R_2} \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} Y, \\ -\frac{k'G_z h}{B} (\nabla^2 w + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y}) + \frac{\lambda+\nu}{R_2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1+\lambda\nu}{R_2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1+2\lambda\nu+\lambda^2}{R_2^2} w &= \frac{Z}{B}, \\ \nabla^2 \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right) - \frac{k'G_z h}{D} \left(\nabla^2 w + \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} \right) &= 0, \quad (\nabla^2 - \chi^2) \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad 2\omega = \frac{E}{k'G_z h}, \quad \chi^2 = \frac{2k'G_z h}{D(1-\nu)}.$$

Для определения напряженно-деформированного состояния оболочки при действии локальной нагрузки, распределенной по некоторой области S , сначала получим фундаментальное решение этой системы. Одним из эффективных методов построения фундаментальных решений системы дифференци-

альных уравнений с постоянными коэффициентами (1) является метод интегральных преобразований Фурье [7].

Применим к системе (1) двумерное преобразование Фурье [7]:

$$\bar{u}^{0k}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int u^{0k}(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (k=1, 2, 3).$$

Математической моделью сосредоточенной силы является обобщенная дельта функция Дирака [9]. Например, если на оболочку действует сосредоточенная сила P , то её можно представить в виде:

$$X = P \delta(x, y); \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Компоненты перемещений и других искомым функций, обозначим следующим образом $u^{01}, v^{01}, w^{01}, \gamma_1^{01}, \gamma_2^{01}$. Аналогично для сил действующих по оси Y обозначим индексом $u^{02}, \dots, \gamma_2^{02}$, а по оси Z – индексом $u^{03}, \dots, \gamma_2^{03}$. Набор этих функций называются фундаментальным решением системы (1). Применяя к системе уравнений (1) двумерное интегральное преобразование Фурье, получим систему уравнений относительно трансформант $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}^{-01} &= \frac{\bar{X}}{DR_2^2} \frac{\xi^2 \Delta_1^2 \Delta_\omega}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta} + \frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\bar{X}}{\Delta} \frac{\eta^2 + (1-\nu)\xi^2/2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{v}^{-01} &= \frac{\bar{X}}{DR_2^2} \frac{\xi \eta \Delta_1 \Delta_2 \Delta_\omega}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta} - \frac{(1+\nu)}{Eh} \frac{\bar{X}}{\Delta} \frac{\xi \eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \quad \bar{w}^{-01} = \frac{\bar{X}}{DR_2} \frac{i \xi \Delta_1 \Delta_\omega}{\Delta}, \\ \bar{\gamma}_1^{-01} &= \frac{i \xi}{\Delta_\omega} \bar{w}^{-01}, \quad \bar{\gamma}_2^{-01} = \frac{i \eta}{\Delta_\omega} \bar{w}^{-01}, \quad 2\omega = \frac{D}{k' G_z h}, \quad k^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{R_2^2 h^2}, \\ \Delta &= (\xi + \eta) + k(\xi + \lambda \eta) \Delta, \quad \Delta_\omega = 1 + 2\omega(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Трансформанты перемещений (2) и соответствующие трансформанты для изотропных оболочек [7] отличаются друг от друга лишь множителем Δ_ω . Для сосредоточенных сил Y и Z решение системы (1) в пространстве трансформант имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u}^{-02} = \bar{v}^{-01}, \quad \bar{w}^{-02} &= -\frac{\bar{Y}}{DR_2^2} \frac{i \eta \Delta_2 \Delta_\omega}{\Delta}, \quad \bar{v}^{-02} = \frac{\bar{Y}}{DR_2^2} \frac{\eta^2 \Delta_2^2 \Delta_\omega}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta} + \frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\bar{Y}}{\Delta} \frac{\xi^2 + (1-\nu)\eta^2/2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{u}^{-03} = -\bar{w}^{-01}, \quad \bar{w}^{-03} &= \frac{\bar{Z}}{D} \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 \Delta_\omega}{\Delta}, \quad \bar{\gamma}^{-03} = -\bar{w}^{-02}. \end{aligned}$$

Оригиналы компонент перемещений, например, u^{03} найдем с помощью формулы обращения

$$u^{03} = -\frac{1}{4\pi^2 DR_2} \iint \frac{i \xi (1 + 2\omega(\xi^2 + \eta^2)) ((1+\nu)(\xi^2 + \lambda \eta^2) - (1-\lambda)(\xi^2 + \eta^2)) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^4 + k^4 (\xi^2 + \lambda \eta^2)^2 (1 + 2\omega(\xi^2 + \eta^2))};$$

Для разделения переменных в подынтегральном выражении применим формулу Якоби-Ангера [7]

$$\begin{aligned} u^{03} &= -\frac{2}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(2n+1)\varphi \int_0^{\pi/2} \cos(2n+1)\theta \cos\theta ((1+\nu)(\cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta) - (1-\lambda)) d\theta \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{(1 + 2\omega R^2) J_{2n+1}(rR) dR}{R^4 + k^4 (\cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta)^2 (1 + \omega R^2)}. \end{aligned}$$

В последнем выражении сменим порядок индексов и после преобразований получим

$$\begin{aligned} u^{03} &= -\frac{2}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos(2n-1)\varphi \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)\theta \cos\theta ((1+\nu)(\cos^2\theta + \lambda \sin^2\theta) - \\ &\quad - (1-\lambda)) \sum_{j=1}^2 b_j \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-1}(rR) dR}{p^2 + ik^2 d_j^2}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$d_j^2 = t^2(\theta) [-i\omega k^2 t^2(\theta) \mp \sqrt{1 - \omega^2 k^4 t^4(\theta)}] \quad (\operatorname{Re} \sqrt{i} d_j > 0),$$

$$t^2(\theta) = \cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta, \quad b_j = \pm \left(1 - 2\omega i k^2 d_j^2 \right) / \left(i k^2 (d_2^2 - d_1^2) \right), \quad \zeta = kr.$$

Окончательное выражение для компоненты u^{03} получим, используя функцию $G_{n,\nu}(z)$ [7]

$$u^{03} = \frac{r}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m-1}(\zeta \sqrt{i}) \cos(2n-1)\varphi, \quad \zeta = k\sqrt{i}.$$

Здесь

$$u_{nm}^{03} = \int_0^{\pi/2} [\cos(2n-1)\theta \cos \theta ((1+\nu)(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) - (1-\lambda)) \sum_{j=1}^2 b_j d_j^{2n-2} (1-d_j^2)^m] d\theta.$$

Аналогичным образом получим представления для \bar{v}^{03} и w^{03}

$$v^{03} = \frac{r}{\pi^2 DR_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m-1}(\zeta \sqrt{i}) \sin(2n-1)\varphi,$$

$$v_{nm}^{03} = \int_0^{\pi/2} [\sin(2n-1)\theta \sin \theta ((1+\nu)(\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) - (1-\lambda)) \sum_{j=1}^2 b_j d_j^{2n-2} (1-d_j^2)^m] d\theta;$$

$$w^{03} = \frac{r}{2\pi k^2 D} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{w_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \cos 2n\varphi, \quad w_{nm}^{03} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 i b_j d_j (1-d_j^2)^m \cos 2n\theta d\theta.$$

Компоненты усилий и моментов определяются аналогично и имеют вид

$$T_{1,2}^{03} = \frac{k^2 R_2}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{(t_{1,2}^{03})_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \cos 2n\varphi, \quad S^{03} = \frac{k^2 R_2}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s_{mn}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \sin 2n\varphi,$$

$$M_{1,2}^{03} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{(m_{1,2}^{03})_{mn}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \cos 2n\varphi, \quad H^{03} = -\frac{1-\nu}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_{mn}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta \sqrt{i}) \sin 2n\varphi. \quad (3)$$

Здесь

$$(t_{1,2}^{03})_{mn} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\pi/2} b_j i^{-1} (1 \mp \cos 2\theta) t^2 d_j^{2n} (1-d_j^2)^m \cos 2n\theta d\theta,$$

$$s_{mn}^{03} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^{\pi/2} b_j i^{-1} d_j^{2n} (1-d_j^2)^m t^2(\theta) (\cos 2(n-1)\theta - \cos 2(n+1)\theta) d\theta,$$

$$(m_{1,2}^{03})_{mn} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_0^{\pi/2} \frac{(1-d_j^2)^m d_j^{2n}}{d_2^2 - d_1^2} (1+\nu \pm (1-\nu) \cos 2\theta) \cos 2n\theta d\theta,$$

$$h_{mn}^{03} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \int_0^{\pi/2} \frac{(1-d_j^2)^m d_j^{2n}}{d_2^2 - d_1^2} (\cos 2(n-1)\theta - \cos 2(n+1)\theta) d\theta.$$

Полученные решения u^{0j} , $T_{1,2}^{0j}$, $M_{1,2}^{0j}$ ($j=1,2,3$) называются фундаментальными и являются основой для решения различных граничных задач теории трансверсально-изотропных оболочек.

В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную оболочку, находящуюся под действием локальной силовой нагрузки распределенной по площади круга радиуса R_0 . Закон распределения локальной нагрузки в указанной области запишем в виде

$$q(x, y, x_0, y_0) = \begin{cases} q_0, & r \leq R_0 \\ 0, & r > R_0 \end{cases}, \quad x, y \in S^\infty, x_0, y_0 \in D,$$

где q_0 – интенсивность распределенной нагрузки. Её главный вектор равен $P = q_0 \pi R_0^2$.

Тогда решение задачи о напряженно-деформированном состоянии трансверсально-изотропной оболочки под действием этой нагрузки можно записать в виде

$$\Phi(x, y) = \iint_S q(x, y, x_0, y_0) E(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0.$$

Здесь $E(x - x_0, y - y_0)$ – фундаментальное решение системы уравнений (1); $\Phi(x, y)$ – любая из компонент перемещений или внутренних силовых величин.

Исследуем изменение прогиба оболочки в центре нагружаемой площадки при изменении радиуса круга площадки загрузки для трансверсально-изотропной оболочки и сопоставим его с решением по теории Кирхгофа–Лява.

Методику построения искомых функций рассмотрим на примере нормального перемещения $w^{03}(x, y)$, соответствующего оболочке неотрицательной кривизны

$$w^{03} = \frac{1}{2\pi k^2 D} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{w_{nm}^{03}}{m!} G_{n,n+m}(\zeta\sqrt{i}) \cos 2n\varphi \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G_{0,m}(r\sqrt{i}) r dr d\varphi,$$

$$w(r, \varphi) = -\frac{q_0}{2\pi k^2 D} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{w_{nm}^{03}}{m!} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} G_{n,n+m}(r\sqrt{i}) \cos(2n \arctg(\frac{r_0 \sin \varphi_0 + r \sin \varphi}{r_0 \cos \varphi_0 + r \cos \varphi})) R_0 d\varphi_0 dR_0.$$

Интегралы, входящие в выражение (3), в общем случае считаются численно. Рассмотрим значения прогиба оболочки в центре нагруженной площадки:

$$w(0, 0) = -\frac{q_0}{2\pi k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{0m}^{03}}{m!} 2\pi \int_0^{R_0} G_{0,m}(r_0\sqrt{ik}) r_0 dr_0.$$

Для интеграла в последнем выражении справедлива формула

$$\int_0^{R_0} G_{0,m}(r_0\sqrt{ik}) r_0 dr_0 = -\frac{2}{k^2 i} (G_{0,m+1}(R_0\sqrt{ik}) - \frac{m!}{2}).$$

Тогда, окончательно для трансверсально-изотропной оболочки получим:

$$w_T(0, 0) = -\frac{q_0}{k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{0m}^{03}}{m!} [-2i(G_{0,m+1}(R_0\sqrt{ik}) - \frac{m!}{2})] = \frac{2q_0 i}{k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_{0m}^{03}}{m!} [G_{0,m+1}(R_0\sqrt{ik}) - \frac{m!}{2}]. \quad (4)$$

Полагая в формуле (4) $\omega = 0$ получим значение прогиба для изотропной оболочки по теории Кирхгофа–Лява.

$$w_H(0, 0) = -\frac{2P}{\pi^2 k^2 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_0^2} \frac{w_{m0}^{03}}{m!} \left(G_{0,m+1}(\alpha_0\sqrt{i}) - \frac{m!}{2} \right).$$

На основе полученных результатов исследуем поведение прогиба $w^*(0, 0)$ сферической оболочки в зависимости от радиуса площадки загрузки. Результаты расчетов представлены на рис. 1. На нем представлены графики изменения безразмерного прогиба для трансверсально-изотропной w_T и изотропной w_H оболочек при следующих значениях параметров: $R_2/h = 10$, $R_0/h = 0...1$.

Выводы. Из представленного рисунка видно, что в случае трансверсально-изотропной оболочки прогиб в окрестности точки приложения сосредоточенной силы имеет логарифмическую особенность и примерно на расстоянии толщины оболочки совпадает со значением прогиба изотропной оболочки. Следовательно, исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при загрузке локальной нагрузкой, распределенной по площадке $R_0/h \geq 1$ можно проводить по более простой модели Кирхгофа–Лява.

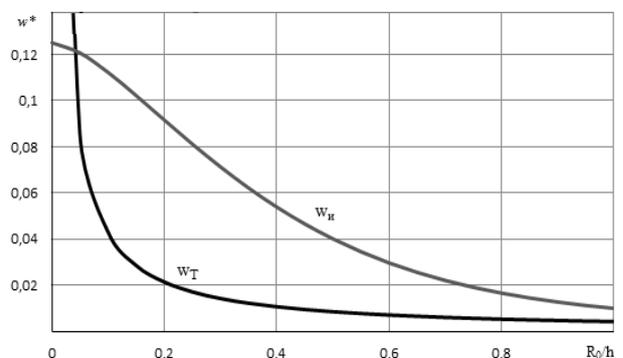


Рис. 1

Следуя результатам, приведенным в [10], размер площадки загрузки, позволяющий использовать теорию Кирхгофа–Лява при исследовании прочности оболочек при локальном нагружении составляет $R_0 \geq 0,68h$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б. Л. Пелех. – К.: Наук. думка, 1973. – 248 с.
2. Sih G. C. On crack in shells with shear deformation / G. C. Sih, H. C. Hagedorf // *Mechanics of fracture*. – 1977. – Vol. 3. – P. 201–229.
3. Семькина Т. Д. Расчет трансверсально-изотропных оболочек / Т. Д. Семькина // *Теоретическая и прикладная механика*. – Минск: БИТУ, 2006. – Вып. 21. – С. 134–136.
4. Величко П. М. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны / П. М. Величко, В. П. Шевченко // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. – 1969. – № 2. – С. 147–151.
5. Шевляков Ю. А. К вопросу о действии сосредоточенных воздействий на пологие оболочки / Ю. А. Шевляков, В. П. Шевченко // *Концентрация напряжений*. – К.: «Наукова думка», 1965. – Вып. 1. – С. 326–327.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
7. Хижняк В. К. Напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропных оболочек при локальных нагрузках / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // *Прикл. механика*. – 1972. – № 11. – С. 21–27.
8. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
9. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
10. Шевляков Ю. А. Изгиб пластин и оболочек при локальных нагрузках / Ю. А. Шевляков, В. П. Шевченко // *Гидроаэромеханика и теория упругости*. – Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1968. – № 8. – С. 17–23.

Поступила в редакцию 09.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Методом інтегральних перетворень Фур'є отримано фундаментальне розв'язання рівнянь статички похилих трансверсально-ізотропних оболонок. Досліджено напружено-деформований стан оболонок позитивної кривизни за локально силових впливів. Виконано численні дослідження поведінки прогину оболонки при впливові на неї локального навантаження. На основі отриманих результатів досліджено вплив розміру площі кола завантаження на поведінку прогину трансверсально-ізотропної оболонки в залежності від її геометричних і пружних параметрів. Отримане розв'язання співставлене з розв'язанням, отриманим по теорії Кірхгофа–Лява.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна оболонка, прогин оболонки, локальне навантаження, фундаментальне рішення, інтегральне перетворення Фур'є, позитивна кривизна, модель Кіргофа–Лява, модель Тимошенко.

SUMMARY

The fundamental solution of the equations of statics of shallow transversely isotropic shells was obtained using Fourier integral method. The stress-strain state of shells of positive curvature with local power impacts was researched. The numerical study of the behavior of shell deflection when exposed to a local load was accomplished. The influence of the size of a loading area of a circle on the behavior of the deflection of the transversely isotropic shell depending on its geometrical and elastic parameters on the basis of the obtained results was studied. The obtained solutions were compared with the solutions obtained using Kirchhoff – Lyav theory.

Keywords: transversely isotropic shell, shell deflection, local load, fundamental solution, integral Fourier transformation, positive curvature, Kirchhoff-Love model, Tymoshenko model.

УДК 002:004.64

У. Г. Богомаз, Т. В. Белик, В. В. Белоусов

**ОПТОЭЛЕКТРОННЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ.
ВРЕМЕННОЕ УПЛОТНЕНИЕ–РАЗУПЛОТНЕНИЕ ПОТОКОВ ДАННЫХ**

Рассматриваются физические основы создания систем технической защиты информации, в частности, построение физической и математической моделей оптоэлектронных устройств временного уплотнения–разуплотнения потоков данных для волоконно-оптических информационно-коммуникационных систем и сетей, на основе акустооптического взаимодействия.

Ключевые слова: акустооптическое взаимодействие, волоконно-оптическая линия передачи, поляризация, лазерный пучок.

Введение. Одной из важнейших технических характеристик любой информационно-коммуникационной системы (ИКС) является ее пропускная способность (ПС). Наибольшей ПС обладают ИКС на основе волоконно-оптических линии передачи [1]. Вместе с тем, из-за дисперсионных свойств волоконного световода (ВСв) реализовать соответствующие каналы связи в ИКС без уплотнения - разуплотнения весьма проблематично [2]. Проведенные исследования показывают, что спектральная полоса пропускания кварцевого одномодового километрового отрезка волоконного световода лежит в области 0,8 ... 1,8 мкм, что соответствует $\Delta f \approx 2 \cdot 10^5$ ГГц. Временное уплотнение (укорачивание длительности оптических импульсов с одновременным ростом их частоты следования) предъявляет высокие требования к быстродействию лазеров, модуляторов и приемников излучения и все равно не может исчерпать пропускной способности ВСв. Известно, что возможности временного уплотнения ограничены дисперсионными характеристиками волоконного световода [1, 2]. Для обработки сложных быстропеременных последовательностей потребуется применение электронно-оптических способов временного уплотнения. Уровень развития быстродействующих интегральных микросхем и полупроводниковых фотоприемников, позволяет вести сегодня обработку со скоростью порядка 1 Гбит/с [3, 4]. Схемы уплотнения (разуплотнения), позволяют повысить ее до 10–15 Гбит/с [5].

В настоящей работе предложены математическое описание и математические модели акустооптических (оптоэлектронных) элементов временного уплотнения-разуплотнения (У-Р) потоков данных (оптических) и физико-технические аспекты реализации их физической модели.

Постановка и решение задачи. Проблему временного уплотнения-разуплотнения оптических каналов ИКС предлагается решить путем использования известного в радиофизике, акустооптического взаимодействия (АОВ) которое может быть реализовано в акустооптической ячейке (АОЯ), в режиме дифракции Брэгга, при отсутствии акустической нагрузки [6]. В этом случае, в светозвукопроводе АОЯ создается стоячая акустическая волна и лазерный пучок (ЛП) модулируется акустической волной со скоростью превышающей частоту акустической волны. Доказательство отмеченного свойства АОЯ, проведем в предположении, что в качестве его светозвукопровода (СЗП) используется изотропная среда, в которой отсутствуют потери энергии лазерного и акустических пучков [7]. В такой среде, в условиях стоячей волны происходит модуляция показателя преломления, обусловленная фотоупругим эффектом, в соответствии:

$$n^2 = n_0^2 + 2n_0n_1 \cos(\Omega t) \cos(Ky), \quad (1)$$

где n_0 – невозмущенный показатель преломления, n_1 – пиковое значение возмущенного показателя преломления, Ω и K – частота и волновое число акустической волны. Уравнение движения для компонент электрического поля оптических волн в среде взаимодействия, запишем в форме

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (n^2 \vec{E}), \quad (2) \quad \nabla^2 \vec{E} = k^2 [1 + 2(n_1 / n_0) \cos(\Omega t) \cos(Ky)] \vec{E}, \quad (3)$$

где $k = \omega_0 / (c / n_0)$, c – скорость света в свободном пространстве. Уравнение (3) решается методом разделения переменных [8]. В результате амплитуды недифрагированного (0-й порядок) и дифрагированного лазерного пучка (1-й порядок) можно записать в виде:

$$E_{0t} = E_0 \cos\left[\frac{\pi n_1 L \cos(\Omega t)}{\lambda \cos \Theta_B}\right], \quad (4) \quad E_{1s} = E_0 j \sin\left[\frac{\pi n_1 L \cos(\Omega t)}{\lambda \cos \Theta_B}\right], \quad (5)$$

где L – ширина акустического столба, λ и E_0 – длина волны и амплитуда поля входного лазерного пучка, Θ_B – угол Брэгга. Зависимость интенсивности в нулевом и первом порядке дифракции соответственно определяются:

$$I_{0t}(t) = I_0 \cos^2 \left[\frac{\pi n_1 L \cos(\Omega t)}{\lambda \cos \Theta_B} \right], \quad (6) \quad I_{1s}(t) = I_0 \sin^2 \left[\frac{\pi n_1 L \cos(\Omega t)}{\lambda \cos \Theta_B} \right]. \quad (7)$$

Анализируя уравнения (4)–(7), отметим, что аргументы их модулируются с частотой акустической волны Ω , при этом интенсивности световых лучей $I_{0t}(t)$ и $I_{1s}(t)$ модулируются с удвоенной частотой акустической волны, что видно из результата разложения уравнений (6), (7) по частотным компонентам:

$$I_{0t} = \frac{I_0}{2} \left[1 + J_0 \left(\frac{2\pi n_1 L}{\lambda \cos \Theta_B} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n} \left(\frac{2\pi n_1 L}{\lambda \cos \Theta_B} \right) \cos 2n\Omega t \right], \quad (8)$$

$$I_{1s} = \frac{I_0}{2} \left[1 + J_0 \left(\frac{2\pi n_1 L}{\lambda \cos \Theta_B} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n} \left(\frac{2\pi n_1 L}{\lambda \cos \Theta_B} \right) \cos 2n\Omega t \right]. \quad (9)$$

Практическая значимость модуляции на удвоенной частоте, заключается в том, что скорость модуляции оказывается не зависящей от времени пересечения оптической апертуры акустической волной. Исходя из приведенного описания АОВ следует практический вывод о возможности реализации высокоскоростной последовательной модуляции света, пользуясь коллимированным световым пучком и акустической волной большой апертуры. Предлагается величины I_{0t}/I_0 и I_{1s}/I_0 , уравнения (6), (7), назвать модуляционными функциями $M_0(t)$ и $M_1(t)$ соответственно. Таким образом, с помощью акустооптической ячейки на стоячей акустической волне можно решить задачу оптического переключения для последовательности световых импульсов, которое со скоростью вдвое превышающей частоту акустической волны направляет падающий луч света попеременно в различные, пространственно разнесенные направления, разделенные на двойной угол Брэгга. Для определенности, устройство, принцип действия которого основан на фотоупругом эффекте, основным структурным элементом которого является АОЯ на стоячей акустической волне, обладающее отмеченными функциональными признаками, назовем акустооптическим временным разуплотнителем (АОВР).

Учитывая временную зависимость модуляционной функции M (рис. 1), можно выделить два типа рабочих мод АОВР. Рабочая мода, показанная на рис. 1, б, характеризуется частотой акустической волны, равной четверти частоты следования оптической последовательности импульсов или любой нечетной гармонике. Таким образом, последовательность оптических импульсов может быть расщеплена в две серии импульсов, каждая из которых характеризуется частотой следования, равной половине исходной частоты следования.

Второй тип рабочей моды АОВР показан на рис. 1, в. В этом случае частота акустической волны равна $1/6$ частоты следования оптических импульсов или частоте, кратной произведению $(3n + 1)$ или $(3n + 2)$ на частоту следования, где n – целое число.

Применяя двухполяризационную систему уплотнения и пользуясь режимами 2-х и 3-х канальной обработки, можно реализовать одновременно обработку информации в 4 и 6 каналах, соответственно (рис. 2).

Структура экспериментального макета акустооптического элемента временного разуплотнения оптических каналов, показана на рис. 3, где 1 – лазер на ионах аргона; 2 – компенсатор Бобине; 3 – $p-i-n$ фотодиод; 4 – смеситель; 5 – усилитель ВЧ; 6 – элемент развязки и подстройки; 7 – датчик температуры акустооптического разуплотнителя, 8 – стабилизатор температуры; 9 – нагреватель; 10 – светоделительная призма; 11 – лавинный фотодиод; 12 – $p-i-n$ фотодиод; 13 – триггер; 14 – стробоскопический осциллограф.

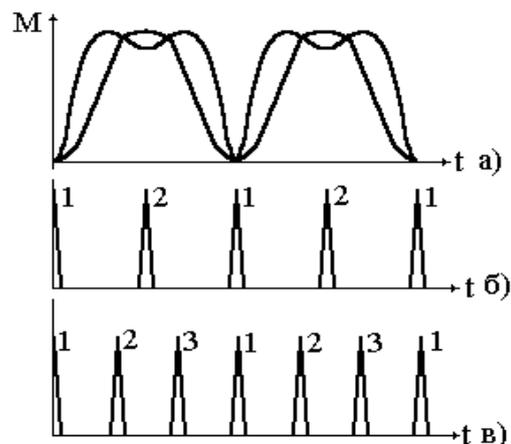


Рис. 1. Типы рабочих мод акустооптического разуплотнителя

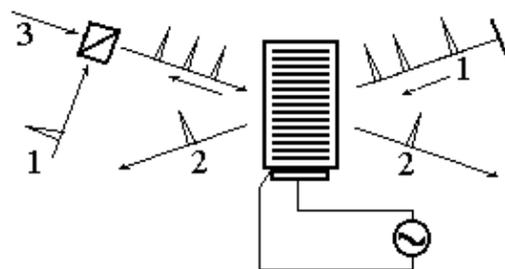


Рис. 2. Схема регистрации временного разуплотнения в режиме трехканальной обработки

В качестве СЗП АОВР использовался молибдат свинца ($PbMoO_4$). Пьезопреобразователь (ППр) на основе пластины ниобата лития ($LiNbO_3$), прикреплялся к СЗП методом термокомпрессионной сварки. Центральная частота АОВР – 110 МГц, при полосе ± 40 МГц. Возбуждая акустическую волну в ППр на частоте 5 гармоники, удалось реализовать режим переключения оптических последовательностей со скоростью 3,9 Гбит/с при двухполяризованном уплотнении.

В шестиканальном разуплотнителе на АОВР, структурная схема которого для одной поляризации показана на рис. 4, под углом Брэгга направлены 2 различных световых пучка с 2-мя поляризациями симметрично относительно распространения акустической волны. В исследованиях использовался импульсный аргонный лазер с частотой следования импульсов 75 Мбит/с, работающий в режиме синхронизации мод. Длительность импульсов составляла 0,5 нс (по уровню интенсивности $1/e^2$) и 0,3 нс (по уровню половинной интенсивности). С целью повышения частоты следования импульсов, выходной пучок лазера делился светоделительной пластиной, а затем вновь собирался в один пучок, чтобы задержка (обусловленная оптической разностью хода) равнялась обратной величине требуемой скорости следования. Таким образом, для луча одной поляризации удавалось получить скорость следования оптических импульсов до 2 Гбит/с. Уровень перекрестных искажений оценивался по формуле:

$$n = 10 \lg P_0 / P_1,$$

где P_0 – импульсная мощность в возмущающем канале, P_1 – импульсная мощность в возмущенном канале. Величина n составила для первого и нулевого дифракционных каналов, соответственно, -9 и -12 дБ. При этом для реализации 100% эффективности в АОВР, потребовалась мощность управляющего радиосигнала в 3,5 Вт. Экспериментальные исследования позволили разобраться с механизмом АОВ на стоячей акустической волне и узнать потенциальные возможности быстродействующих акустооптических переключателей оптических кодированных последовательностей.

Исследованы факторы, определяющие перекрестные искажения, это: недостаточный по длительности временной интервал между смежными оптическими импульсами; не оптимальная мощность акустической волны, обусловленная отсутствием методов ее расчета и моделирования; ошибки во временной синхронизации серии оптических импульсов в стоячей акустической волне [7].

Вариант обработки 4-х каналов на одном АОВР показан на рис. 5. Представляется целесообразным использование такой структуры для систем временного уплотнения, где все отдельные каналы имеют одинаковую поляризацию, на второй и последующих стадиях каскадного мультиплексора-демультиплексора. Пусть скорость прохождения информации $4/T$ (рис. 5, а). Полагая, что частота аку-

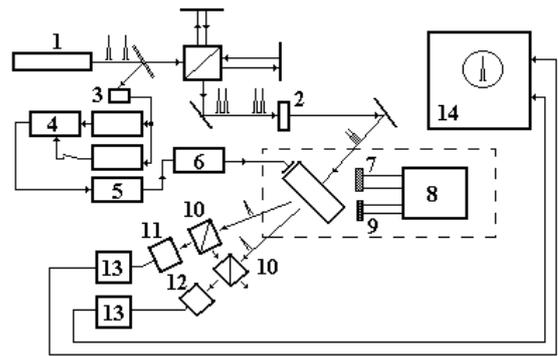


Рис. 3

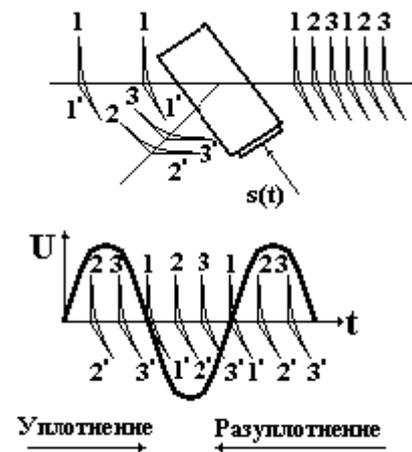


Рис. 4. Временная диаграмма 6-ти канальной структуры АОВР для разуплотнения последовательности оптических импульсов

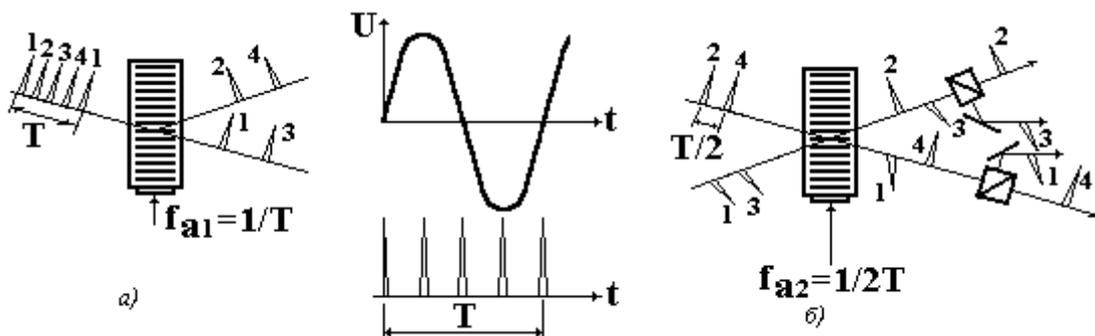


Рис. 5. Структура акустооптического разуплотнителя составной серии оптических импульсов одинаковой поляризации: два оптических канала на один АОВР (а) и четыре оптических канала на один АОВР (б)

стической волны в АОВР – f_{a1} , равна $1/4$ полной скорости прохождения информации, т.е. $f_{a1} = 1/T$, на выходе его будет две серии сложных двухканальных импульсов, разделенных в пространстве. Таким образом, данная структура является 4-х канальным устройством, позволяющим производить обработку 2-х серий двухканальных оптических импульсов с помощью одного АОВР.

Поместив на пути одного из двухканальных оптических пучков полуволновую пластину и оптическую линию задержки, можно повернуть поляризацию этого составного сигнала на $\pi/2$ и при этом обеспечить надлежащую задержку между двумя сериями импульсов. Обе серии составных импульсов посылаются под двойным углом Брэгга на акустический пучок СЗП для повторного АОВ в тот же момент времени. В результате, возникают две новые серии сложных оптических импульсов (рис. 5, б). Теперь, уже каждая составная серия содержит два различных оптических канала, отличающихся один от другого ортогональной поляризацией. Окончательное разделение 4 каналов осуществляется с помощью призмы Глана-Томсона. Предложенное 4-х канальное устройство с каскадным включением элементов для обработки N – кратно уплотненных оптических каналов, где N – четное число, нуждается в $N/2$ акустооптических переключателях.

Выводы. На основе известного в радиофизике акустооптического взаимодействия, показана возможность реализации временного уплотнения (разуплотнения) информации, представленной в виде оптических сигналов (данных). В соответствии с приведенным математическим описанием процесса У-Р, акустооптическая ячейка, физическая модель демонстрации АОВ, имеет две рабочие моды. Первая мода (рис. 1, б) характеризуется частотой акустической волны, равной четверти частоты следования оптической последовательности импульсов или любой нечетной гармонике. При этом последовательность оптических импульсов может быть расщеплена в две серии импульсов, каждая из которых характеризуется частотой следования, равной половине исходной частоты следования. Второй тип рабочей моды АОВР (рис. 1, в) характеризуется частотой акустической волны равной $1/6$ частоты следования оптических импульсов или частоте, кратной произведению $(3n + 1)$ или $(3n + 2)$ на частоту следования, где n – целое число. Для экспериментальной проверки математической модели взаимодействия в АОВР создана установка, структура аппаратных средств которой показана на рис. 3. Показаны диаграммы, иллюстрирующие шести (рис. 4) и четырех (рис. 5) канальную обработку по уплотнению-разуплотнению временных последовательностей информации (данных). Экспериментальное исследование АОВР в качестве АОВР показало возможность достижения пропускной способности разуплотнения оптических последовательностей со скоростью 3,9 Гбит/с при двухполяризационном уплотнении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Элементы и устройства на основе одномодовых волоконных световодов / В. В. Данилов, А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова др. // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Ч. 2, № 2. – С. 175–189.
2. Данилов В. В. Оптикоэлектронные вычислительные сети / В. В. Данилов, М. В. Плыс, А. Н. Крищенко // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 176–197.
3. Whitman M. Principles of Information Security / M. Whitman, H. Mattord. – Boston: 20 Channel Center, 2013. – 601 p.
4. Pfleeger C. P. Security in Computing / C. P. Pfleeger. – Colorado: HMG Press, 2012. – 812 p.
5. Шереметьев А. Г. Когерентная оптическая связь / А. Г. Шереметьев. – М.: Радио и связь. – 1991. – 192 с.
6. Данилов В. В. Преобразование информации при акустооптическом взаимодействии / В. В. Данилов // Радиофизика и электроника: сб. научн. тр. ИРЭ НАН Украины. – 2002. – Т. 7, № 2. – С. 365–378.
7. Данилов В. В. Физические основы построения акустооптических устройств селекции оптических сигналов / В. В. Данилов // Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб. – 2001. – № 117. – С. 65–70.
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго; Пер. с франц. под ред. К. С. Шифрина. – М.: Наука. – 1965. – 780 с.

Поступила в редакцию 18.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Розглядаються фізичні основи створення систем технічного захисту інформації, зокрема, побудова фізичної та математичної моделей оптикоелектронних пристроїв тимчасового ущільнення - розуцільнення потоків даних для волоконно-оптичних інформаційно-комунікаційних систем і мереж, на основі акустооптичної взаємодії.

Ключові слова: акустооптична взаємодія, волоконно-оптична лінія передачі, поляризація, лазерний пучок.

SUMMARY

The physical basis for the creation of technical protection of information, in particular, the construction of the physical and mathematical models of optoelectronic devices temporary seal - decompression data streams for fiber optic communication and information systems and networks based on acousto-optic interaction.

Keywords: acousto-optic interaction, fiber-optic transmission, polarization, the laser beam.

УДК 004.942

С. М. Романчук

АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ РЕЖИМАМИ ВОДОСНАБЖЕНИЯ ГОРОДОВ

Предложены алгоритмы автоматического управления режимами работы оборудования водопроводных узлов, подкачивающих насосных станций и участков водопроводных сетей. Определены оптимальные параметры функций временной модуляции давлений и расходов воды для 117 объектов управления процессом водоснабжения города Донецка.

Ключевые слова: водораспределение, гидравлический расчет, мониторинг, информационная модель.

Введение. Современное развитие коммунального хозяйства больших городов предусматривает ускоренную реконструкцию объектов водоснабжения. Практика работы крупных предприятий водоснабжения показывает, что наилучший результат может быть получен при использовании комплексного подхода, который включает модернизацию оборудования и применение средств автоматизации на всех уровнях системы водоснабжения, в том числе диспетчерского управления и учета энергоресурсов. Обычно внедрение комплексных систем автоматизации на базе современных программно-технических комплексов осуществляется предприятиями водоснабжения поэтапно с постепенным увеличением сложности систем [1–5]. АСУ ТП водоснабжения и водоотведения призваны обеспечивать оптимальное ведение технологических процессов.

Обычно развитые АСУ ТП предприятий водоснабжения и водоотведения могут обрабатывать до 4000–5000 каналов физических сигналов и выдавать управляющие сигналы по каналам управления, количество которых может достигать до 500–1000. Сегодня уже можно говорить о существовании систем водоснабжения городов с множественными элементами регулирования.

Анализ и обзор литературных источников показал, что развитие АСУ ТП предприятий водоснабжения и водоотведения идет по пути совершенствования технических средств мониторинга и передачи данных, а также модернизации локальных систем автоматического управления работой оборудования на объектах. Диспетчеризация технологических процессов в основном осуществляется по пути сбора и представления данных и сигнализации о возникновении нерасчетных режимов, при этом диспетчерское управление объектами направлено на корректировку допустимых параметров технологических процессов. На удаленных локальных объектах преобладает микропроцессорное управление режимами работы оборудования и водораспределения. Сбор и обработка информации в АСУ ТП ведется путем измерения, контроля и учета текущих значений параметров способом периодического циклического опроса датчиков и приборов или способом целенаправленного опроса в случае изменения режима работы оборудования. В этом случае регулирование работы оборудования осуществляется преимущественно локально на основе микропроцессорных систем, позволяющих автоматизировано обеспечить поддержание заданных режимных показателей.

Технологический режим любого объекта водоподачи и водораспределения при автоматическом регулировании будет существенно зависеть от принятых алгоритмов управления водоснабжением. Как показано в работах [6], закономерности формирования технологических режимов в системах водоснабжения с развитыми элементами автоматического регулирования имеют существенные отличия по сравнению системами водоснабжения без регулирования. Это объясняется исключительно влиянием системы управления на текущую работу средств водоподачи и водораспределения.

Обычно алгоритмы оперативного управления оборудованием длительно отрабатываются опытным путем в натуральных условиях и после апробации начинают внедряться на объектах управления водоснабжением городов. Целью данной работы является формулировка задач оперативного управления технологическими режимами и задач распознавания внештатных режимов и аварийных ситуаций, а также эффективных алгоритмов решения этих задач.

Оперативное управление городскими системами водоподачи и водораспределения. Структура городской системы водоснабжения зависит от планировки города, рельефа местности, расположения водопроводных узлов (ВУ) и подкачивающих насосных станций (НПС), разветвленности водораспределительных сетей и особенностей объектов водоснабжения. Несмотря на разнообразие схем водоснабжения, можно выделить несколько основных типовых подсистем, из которых состоит большинство городских систем водоснабжения:

- *варіант 1* – водопроводний вузол, працюючий на протяжений ділянку водорозподільної мережі, яка, в свою чергу, забезпечує подачу води до різних ПНС і ділянкам водорозподільної мережі;
- *варіант 2* – підкачуюча насосна станція, працююча спільно з ділянкою водорозподільної мережі, яка забезпечує водою багатоквартирні будинки різної поверхності або одноповерховий приватний сектор;
- *варіант 3* – протяжені ділянки водорозподільної мережі між контрольними точками, де відсутні ПНС, але є окремі споживачі.

Системи автоматичного управління технологічними режимами для вказаних підсистем будуються на основі поєднання різних алгоритмів управління типовими елементами, що входять до складу даного технічного об'єкта.

Аналіз АСУ ТП великих підприємств водного господарства показав, що архітектура систем частіше всього має три рівні і включає: центральний диспетчерський пункт; середній рівень, який може бути прив'язаний до ряду великих об'єктів; і нижній рівень, на якому забезпечується моніторинг і управління на місцевих об'єктах. На рис. 1 наведено типову схему технічного рішення автоматизації сучасного підприємства водного господарства.

На центральному рівні зазвичай реалізуються функції контролю показників роботи найбільш важливого обладнання і параметрів технологічних процесів, візуалізація, архівування і документування інформації, урахунок витрат ресурсів по всіх об'єктах і статистичне узагальнення даних, координація управління підсистемами, розрахунок техніко-економічних показників, прогнозування ходу технологічних процесів і визначення їх раціональних режимів.

На середньому рівні реалізуються функції моніторингу показників роботи обладнання і параметрів технологічних процесів групи об'єктів, архівування і документування інформації, урахунок витрат ресурсів, управління обладнанням, функції оперативного урахунок параметрів, деякі прогнозні, діагностичні і розрахункові завдання.

На нижньому рівні реалізуються функції діагностики обладнання і моніторингу технологічних процесів місцевих об'єктів, програмно-логічного управління агрегатами і запірною апаратурою, протипожевної захисту і блокування, урахунок спожитих ресурсів, передачі необхідної інформації на верхні рівні і т.д. Для вирішення цих завдань зазвичай використовується звичайно програмований контролер, який реалізує систему автоматизації місцевого об'єкта в автоматичному або дистанційному режимі управління і організує передачу даних по телефонній або оптичній лінії, по радіоканалу або GSM-каналі.

Найбільш важливими є завдання оперативного управління підсистемами по факту підтримання ефективних і оптимальних режимів, що дозволяють забезпечити економію електроенергії і води, а також завдання розпізнавання виняткових режимів і аварійних ситуацій. В даний час при створенні алгоритмів оперативного управління і підтримання ефективних і оптимальних режимів роботи ВУ і ПНС в більшості випадків не проводяться гідравлічні розрахунки водопровідних мереж і не використовуються прийняті при проектуванні традиційні моделі водорозподілення – розрахункові схеми водопровідних мереж. Це пов'язано з складністю отримання даних про фактичні і необхідні значення вузлових витрат для кожного часу передбачуваних суток, надто великими для оперативного управління витратами машинного часу на проведення розрахунків навіть при використанні потужних сучасних ЕВМ, а також великою кількістю необхідних вихідних даних, дуже високою їх невизначеністю і низькою надійністю.

Зазвичай для підтримання ефективних і оптимальних режимів роботи ВУ і ПНС використовуються тільки дані про напори на насосних станціях і значення тисків в диктуючих точках водопровідних

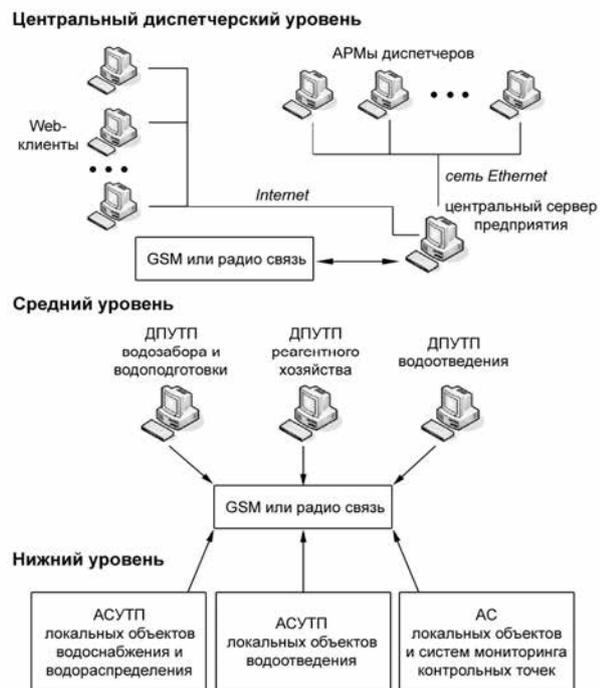


Рис. 1. Типовое решение автоматизации предприятия водного хозяйства

сетей. При этом для расчета режимов работы насосных станций используют обобщенные математические модели, выражающие взаимосвязь напора Δh с расходом воды Q , который обеспечивается насосной станцией, и давлением P_d в диктующей точке сети:

$$\Delta h = P_d + a + b \cdot Q + c \cdot Q^2, \quad (1)$$

где a, b, c – коэффициенты, полученные в результате статистической обработки данных о параметрах работы насосных станций и участков водопроводной сети. Считается, что использование математических моделей (1) существенно облегчает расчет режимов насосных станций при достаточной для практических целей точности решения. В целях повышения точности обычно производят периодическое уточнение моделей, т.е. программа расчета включает блок идентификации параметров модели.

Существенным недостатком данного подхода является факт того, что гидравлические модели, принятые при расчетах водопроводных сетей без элементов регулирования, априори переносятся на водопроводные сети с элементами автоматического управления технологическими режимами. При использовании современных АСУ ТП данный подход не является правомерным. В связи с тем, что для регулирования используются различные алгоритмы поддержания технологических режимов, колебания водопотребления могут иметь специфический характер. Например, в случае, когда АСУ за счет систем частотного регулирования насосами ПНС обеспечивает поддержание заданного давления на линии подачи воды в сеть, энергопотребление ПНС уже в меньшей степени будет определяться водопотреблением сети, а в большей степени будет зависеть от давления воды на линии входа в ПНС. При этом давление на линии подачи обычно задается на основе данных, полученных при длительной эксплуатации конкретного участка водораспределительной сети, особенностей данного участка и экспертной оценки отзывов местного населения о качестве процесса водоснабжения.

Оперативное управление технологическими режимами работы ВУ и ПНС следует осуществлять путем декомпозиции этой задачи на ряд последовательно решаемых подзадач. Целевой функцией оптимизации технологических режимов насосной станции будет являться минимизация ее энергетических затрат при обеспечении бесперебойной подачи воды потребителю и при соблюдении заданного напора в контрольных точках водопроводной сети в соответствии с реальным режимом водопотребления. Оперативное управление для приведенных ранее типовых подсистем городских систем водоснабжения производится в такой последовательности.

Вариант 1. Водопроводный узел, обеспечивающий водой определенную территорию города, является наиболее сложным типовым объектом городской системы водоснабжения. Оперативное управление ВУ с целью поддержания эффективных и оптимальных режимов, позволяющих дать экономию электроэнергии и воды, осуществляется по трем направлениям:

- обеспечение необходимых объемов воды в резервуарах ВУ;
- поддержание эффективных режимов работы насосных станций, позволяющих обеспечить экономию электроэнергии;
- обеспечение требуемых расходов на линиях подачи воды потребителям.

В первом случае путем непрерывного синусоидального изменения расхода воды на приходе в течение суток обеспечивается повышенное накопление воды в резервуарах. Ночью поступление воды в резервуары увеличивается по сравнению с дневным периодом, чем обеспечивается к утру требуемый объем воды в резервуарах ВУ. Увеличение расходов позволяет за ночь сделать необходимый запас воды на период дневного водоснабжения, когда расходы воды на потребление увеличиваются. Для этого система автоматического регулирования настраивается на поддержание заданных максимальных и минимальных уровней воды в резервуарах. Регулирование осуществляется изменением проходного сечения автоматизированной задвижки на приходе. Параметры функции управления расходами воды определяются эмпирически путем длительной эксплуатации оборудования ВУ.

Поддержание эффективных режимов работы насосных станций ВУ осуществляется путем ступенчатого изменения давления воды – ночью давление на выходе ВУ поддерживается существенно меньше, чем днем. Кроме того, система автоматического регулирования насосных агрегатов настроена на поддержание на гребенке ВУ постоянного давления воды при ее подаче в общую сеть. Регулирование осуществляется изменением скорости вращения рабочих колес насосов путем микропроцессорного управления частотными преобразователями, позволяющими изменять скорость вращения электродвигателей.

Обеспечение требуемых расходов на линиях подачи воды потребителям также осуществляется автоматически за счет перераспределения гидравлического сопротивления на различных линиях подачи воды. Регулирование осуществляется изменением проходного сечения автоматизированных задвижек на линии подачи воды потребителям. Это позволяет автоматически поддерживать заданный расход на каждой линии подачи воды потребителям.

Вариант 2. Типовая подсистема, которая включает подкачивающую насосную станцию и участок водораспределительной сети многоэтажных или одноэтажных домов является наиболее распространенным объектом водоснабжения, требующим регулирования. Оперативное управление подсистемой с целью поддержания режимов, позволяющих обеспечить экономию электроэнергии и воды, осуществляется с помощью регулирования подачи воды потребителям. В этом случае обеспечивается ступенчатое изменение давления воды – ночью на выходе ПНС, подающих воду на многоэтажные дома, поддерживается давление воды на 0,7–0,8 атм ниже, чем днем. Снижение давления воды в течении суток позволяет уменьшить мощности насосов при обеспечении различных расходов воды днем и ночью. Кроме этого системы автоматики большинства насосных агрегатов настроены на поддержание на выходе ПНС постоянного давления воды при ее подаче в сеть. Регулирование осуществляется изменением скорости вращения рабочего колеса насоса путем микропроцессорного управления частотными преобразователями. Параметры функций управления устанавливаются для каждой ПНС эмпирически.

Аналогично осуществляется управление водоснабжением одноэтажного частного сектора. Однако на линиях подачи воды в частный сектор устанавливаются автоматические задвижки, настроенные на поддержание заданного (более низкого) давления. Это позволяет исключить порывы трубопроводов, которые могут быть связаны с высоким давлением, создаваемым насосами ПНС, а также гидростатическими напорами, возникающими при перепаде высот. Давление воды для каждого участка при ее подаче в сеть устанавливается эмпирическим по качеству водоснабжения населения при длительной эксплуатации объекта водоснабжения.

Вариант 3. Протяженные участки водораспределительной сети между контрольными точками, где отсутствуют ПНС, но есть потребители, регулируются по давлению в диктующих или контрольных точках. Обычно в таких точках устанавливаются автоматические задвижки, поддерживающие заданное давление, и информация с данной контрольной точки передается диспетчеру для принятия управляющего решения.

Наиболее важным элементом управления водоснабжением является установление оптимальных эксплуатационных режимов по каждому объекту водоподдачи и водоснабжения. Для эффективного регулирования режимов работы на каждой станции разрабатывается организационное и технологическое обеспечение – режимные карты и типовые графики, регламентирующие условия различных способов регулирования в зависимости от реальных режимов водопотребления.

Методика отработки алгоритмов автоматического управления объектами предполагала на основе изучения и обобщения опыта эксплуатации объекта и анализа данных технологического мониторинга подготовку предложений по оптимизации режимов работы объекта и выбору способов и параметров автоматического регулирования. После этого по результатам анализа разрабатывались режимные карты, графики водоснабжения и технологические инструкции, которые передавались на объекты на которых предполагалась реализация систем автоматического регулирования. Далее проводилась модернизация объектов водоснабжения, объекты оборудовались средствами автоматического регулирования и управления, вносились изменения в программы систем автоматизированного управления (САУ) и проводились длительные режимно-наладочные испытания по отработке параметров алгоритмов автоматического регулирования. В процессе режимно-наладочных испытаний по каждому объекту выполнялось:

- ознакомление с работой и с проектными данными объекта водоподдачи;
- составление программы и методики испытаний средств автоматического регулирования;
- проведение подготовительных и пробных работ для проверки работы оборудования, контрольно-измерительных приборов и средств управления;
- проведение основных программных работ, обработка результатов измерений и составление сводных таблиц и графиков;
- составление технического отчета, режимных карт и мероприятий, направленных на отработку оптимальных алгоритмов управления объектами.

Разработка алгоритмов автоматического управления предусматривала также распознавание внештатных технологических ситуаций и аварийных режимов, которые могут возникнуть при эксплуатации системы водоснабжения. С этой целью проводился опрос диспетчеров, механиков и работников инженерных служб различных предприятий водоснабжения по выявлению внештатных ситуаций, и устанавливались закономерности в работе системы, которые позволяют распознать внештатные режимы и аварийные ситуации.

Распознавание внештатных режимов и аварийных ситуаций для каждой из выделенных типовых подсистем городской системы водоснабжения проводится применительно к определенному событию в отдельности. Перечень внештатных режимов и аварийных ситуаций для различных объектов водоподдачи и водораспределения приведен в табл. 1.

Перечень внештатных и аварийных ситуаций возникающих при эксплуатации городских систем водоснабжения

№	Внештатная или аварийная ситуация	Характеристика ситуации и условия ее распознавания
Водопроводные узлы		
1	Резкий рост расхода воды на гребенке линий подачи	Возможны аварии, порывы на трубопроводах, резкие отборы воды и т.д. Распознается по резкому увеличению расхода на гребенке и подающих трубопроводах ВУ
2	Отсутствие расхода воды на приходе ВУ	Возможен порыв подающего магистрального трубопровода, прекращение подачи воды от поставщика Распознается по резкому снижению расхода на приходе
Подкачивающие насосные станции		
3	Прекращение подачи электроэнергии на ПНС	Возможен обрыв фазы, обесточивание района электроснабжения и т.д. Распознается по исчезновению напряжения на вводе
4	Отсутствие расхода воды на линии входа в ПНС	Возможен порыв подающего трубопровода, неправильное регулирование подачи воды на ВУ Распознается по падению давления на линии входа
Участки водопроводной сети		
5	Неисправность задвижек	Возможен разрыв корпуса, аварийное закрытие (опускание дисков) и т.д. Распознается по резкому повышению или падению давления в контрольной точке
6	Резкое увеличение или уменьшение расхода	Возможен несанкционированный отбор воды, рост потребления в жаркую погоду, порывы водоводов и т.д. Распознается по резкому изменению расхода воды по сравнению с предыдущим периодом на контрольной точке

Каждая ситуация, должна предусматривать определенный алгоритм распознавания, который дает возможность выявить характерные неблагоприятные события, обеспечить представление оперативной информации диспетчеру и реализовать функции управления или функции защиты, позволяющие предотвратить развитие этой ситуации.

Всего в процессе работы были разработаны режимные карты и графики водоснабжения, а также отработаны параметры алгоритмов автоматического регулирования для 117 объектов управления системы водоснабжения города Донецка (30 % каналов по регулируемым задвижкам, 50 % каналов по частотным регуляторам электродвигателей и 20 % других каналов управления).

Формулировка задач оперативного управления по поддержанию эффективных и оптимальных режимов, позволяющих обеспечить экономию электроэнергии и воды, а также задач распознавания внештатных режимов и аварийных ситуаций позволила разработать алгоритмы управления технологическими режимами систем водоснабжения с множественными элементами автоматического регулирования.

Алгоритмы управления технологическими режимами системы водоснабжения города. Для решения задач оперативного управления подсистемами по факту поддержания эффективных режимов, а также задач распознавания внештатных режимов и аварийных ситуаций, необходимо иметь формализованное представление объектов автоматизации в виде гидравлических моделей с сосредоточенными параметрами или в виде статистических моделей. При отработке алгоритмов построение моделей объекта управления является первоочередной задачей, которую следует решать при разработке систем управления. Это является определяющим условием, при котором обычные математические модели объектов управления заменяют информационными моделями, позволяющими опытным путем подобрать функции временной модуляции давления или расхода и определить их параметры.

Под информационной моделью территориально-распределенной системы водоснабжения с множественными элементами регулирования будем понимать взаимосвязанный комплекс объектов управления водоподачей и водораспределением, который включает в себя:

- статистические модели объектов водоподачи и водораспределения вида [6], адекватно отражающие закономерности водоснабжения;
- информационные базы данных ретроспективной и текущей технологической информации, собранной системой мониторинга;
- алгоритмы и программное обеспечение управления работой оборудования и средствами регулирования, которые реализуют эффективные технологические режимы, позволяющие экономить электро-

енергію і воду і рекомендовані до застосування по результатам тривалої експлуатації системи водопостачання;

- алгоритми розпізнавання зовнішніх технологічних режимів і алгоритми захисту від виникнення аварійних ситуацій.

Найбільш важливою задачею при створенні інформаційних моделей систем водопостачання і водорозподілу є встановлення оптимальних функцій модуляції для управління об'єктами водопостачання. Часова функція модуляції дозволяє з певною періодичністю змінювати в теченні сутки тиск або витрати води в диктуючих точках мережі. Це здійснюється шляхом реалізації алгоритмів регулювання і управління об'єктом через мікропроцесорну систему управління. Вважається, що управління тиском за рахунок часової модуляції дає більший ефект при економії енергії.

Часові функції модуляції визначалися досвідченим шляхом з допомогою зміни режимів водопостачання об'єктів Київського району м. Донецька. Дані функції дозволили розробити алгоритми управління об'єктами, які включені в режимні карти, графіки водопостачання і технологічні інструкції експлуатації об'єктів міських систем водопостачання.

Управління водопровідними вузлами. В процесі тривалої експлуатації системи водопостачання був опрацьований алгоритм управління роботою обладнання ВУ, який реалізує ефективний технологічний режим, забезпечуючий економію електроенергії і води. Часові функції модуляції для тиску і витрати води визначалися досвідченим шляхом за рахунок реалізації різних варіантів графіків управління обладнанням.

Даний алгоритм регулювання подачі води споживачам в м. Донецьку передбачає ступінчасте збільшення тиску води за рахунок автоматичного регулювання насосного агрегату шляхом підтримання на гребені постійного тиску води:

- вночі з 23⁰⁰ до 6⁰⁰ тиск води на гребені підтримується рівним 1,0 атм;
- вранці з 6⁰⁰ до 10⁰⁰ – 2,8 атм;
- вдень з 10⁰⁰ до 18⁰⁰ – 2,3 атм;
- ввечері з 18⁰⁰ до 23⁰⁰ – 2,8 атм.

Регулювання по підтриманню ефективних режимів роботи насосної станції здійснюється шляхом мікропроцесорного управління частотними перетворювачами, що дозволяють змінювати швидкість обертання електродвигунів для забезпечення заданого тиску на гребені ВУ.

Алгоритм управління частотними перетворювачами забезпечує плавний перехід в теченні 20 хв від одного приведеного вище режиму до іншого. Це робиться для виключення гідравлічних ударів в трубопроводах водорозподільної мережі при різкому зміні тиску, створюваному насосною станцією.

Прийнятий алгоритм управління накопленням об'ємів води на приході ВУ передбачає забезпечення заданих рівнів води в накопительних резервуарах, рівних 4,2–4,6 метра, ко вранці 6⁰⁰ для кожного нового сутки. Контроль штатного режиму ведеться по зміні витрати на налив, а управління водопитоком здійснюється по зміні рівня води в накопительних резервуарах. Витрати води на приході в теченні сутки змінюються синусоїдально. За рахунок застосування автоматизованої задвижки на приході вночі з 23⁰⁰ до 6⁰⁰ надходження в води в резервуари збільшується приблизно в 1,2–1,3 рази порівняно з денним періодом, що забезпечується необхідним об'ємом води в резервуарах ВУ. Дані параметри функції модуляції витрат води на приході також визначені емпірично шляхом тривалої експлуатації обладнання ВУ.

Для захисту насосного обладнання ВУ від аварійних режимів був розроблений алгоритм управління по контролю витрати на гребені ВУ. Якщо витрати води на гребені різко зростають, спрацьовує система захисту. Це дає можливість виключити аварійні ситуації, пов'язані з поривом магістральних трубопроводів, які йдуть від ВУ споживачам. Аналогічним чином спрацьовує захист, якщо різко зростає тиск на гребені, що є причиною аварійної роботи головних задвижок на подачу.

Захист насосного обладнання ВУ від аварійних режимів, пов'язаних з виникненням кавітації, забезпечується за рахунок забезпечення обов'язкового аварійного рівня води в резервуарах, який не може бути нижче 2,0 метрів.

При виникненні аварійної ситуації, пов'язаної з припиненням подачі електроенергії на ВУ, силове обладнання автоматично перемикається на обов'язкову резервну лінію живлення при одночасній видачі повідомлення диспетчеру.

Алгоритми управління роботою водопровідних вузлів реалізовані в технологічній системі управління режимами водопостачання ряду районів м. Донецька.

Управління підкачуючими насосними станціями. В процесі тривалої експлуатації системи водопостачання досвідченим шляхом був опрацьований алгоритм управління роботою обладнання ПНС, при

этом в процессе исследований были определены оптимальные параметры функции временной модуляции давления для ПНС.

Данный алгоритм регулирования подачи воды потребителям в г.Донецке предполагает ступенчатое изменение давления воды во времени: ночью с 0^{00} до 6^{00} на выходе ПНС, обеспечивающих водой 9-ти этажные дома, поддерживается давление воды равное 3,5 атм; утром, днем и вечером с 6^{00} до 24^{00} – поддерживается давление равное 4,2 атм. В свою очередь на ПНС, обеспечивающих водой 12-ти этажные дома, ночью поддерживается давление воды равное 4,2 атм, а утром, днем и вечером – давление равное 5,0 атм. Уменьшение давления воды на 0,7 – 0,8 атм в течении суток позволяет снизить мощности насосов при обеспечении различных расходов воды днем и ночью без ухудшения качества водоснабжения. Система автоматического регулирования насосного агрегата каждой ПНС настроена на поддержание на выходе ПНС постоянного давления воды при ее подачи в сеть – для 9-ти этажных домов 3,5(4,0) атм, для 12-ти этажных домов 4,2(5,0) атм. Регулирование осуществляется путем микропроцессорного управления частотными преобразователями.

Для защиты оборудования отработан алгоритм предотвращения аварийных режимов на ПНС. Если давление на линии входа воды в ПНС падает ниже 1,0 атм, то для исключения возникновения кавитации в рабочей области насоса, ПНС обесточивается. Это дает возможность исключить аварийные ситуации, связанные порывом трубопроводов на участках до ПНС или неправильным регулированием подачи воды на ВУ. При возникновении аварийной ситуации, связанной с прекращением подачи электроэнергии на ПНС, силовое оборудование отключается и одновременно АСУ ТП выдает сообщение диспетчеру, используя независимый источник питания.

Предложенные алгоритмы работы ПНС, позволяют локализовать значительную часть управляющих сигналов на объектах управления ПНС, обеспечив при этом централизованное регулирование только давлений в диктующих точках сети и текущий мониторинг режимов работы оборудования ПНС.

Управление и мониторинг технологическими режимами водораспределительных сетей. Система мониторинга водопроводных сетей ведет непрерывный сбор данных о параметрах режима работы участка сети между контрольными точками или между ПНС и контрольной точкой. Блок идентификации параметров модели периодически определяет коэффициенты напорной характеристики сети по контролируемым параметрам, которые поступают от средств измерений давления и расхода воды. Осреднение осуществляется по предыдущим данным, получаемым за период времени с 2400 до 600 и за период с 600 до 2400.

Если значение коэффициентов попадают в допустимый интервал, то считается, что технологический режим работы водораспределительной сети не меняется, иначе АСУ ТП выдает сообщение диспетчеру для оценки ситуации и принятия решения. Диспетчер может принять решение об изменении режима работы ближайшей ПНС или выдать команду на обследование участка водораспределительной сети.

Кроме этого разработан алгоритм, обеспечивающий защиту трубопроводов от аварийных режимов. Для каждой контрольной точки установлены допустимые интервалы изменения давления и расхода воды, которые определяются на основе оценок для математических ожиданий наблюдаемых величин. Если давление или расход воды в контрольной точке резко повысились или снизились и при этом их значения вышли за доверительный интервал, то алгоритм анализа технологического режима выдает сообщение диспетчеру. Это дает возможность исключить аварийные ситуации, связанные порывом трубопроводов на участке или неисправностью задвижек.

Все приведенные выше алгоритмы управления были организованы в виде модуля экспертной системы, которая при контроле диспетчера управляет работой городской системы водоснабжения. Разработанные алгоритмы управления технологическими режимами водоснабжения апробированы на предприятиях КП «Донецкгорводоканал», КП «Сумыгорводоканал», КП «Харьковгорводоканал». Предложенная технология организации водоснабжения города с элементами автоматического управления энергоемким оборудованием позволяет обеспечить экономию электроэнергии от 15 до 20 % и воды от 6 до 10 %.

Выводы. Наличие информационной модели территориально-распределенной системы водоснабжения позволяет решать задачу оптимального управления технологическими процессами для эффективного использования водных и энергетических ресурсов. Предложенные алгоритмы позволяют обеспечить экономию электроэнергии от 15 до 20 % и воды от 6 до 10 % за счет автоматического управления режимами работы энергоемкого оборудования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рульнов А. Автоматизация систем водоснабжения и водоотведения / А. Рульнов, К. Евстафьев. – М.: Изд. дом Инфра-М, 2007. – 205 с.
2. Возможности эффективного использования энергии и воды в муниципальных водохозяйственных системах / Alliance to Save Energy, под общ. ред. Д. Е. Немцова. – Washington: Alliance to Save Energy, 2002. – 144 с.

3. Система автоматизации и диспетчеризации объектов водоканала [Электронный ресурс] / мат. сайта ЗАО Технолинк, 1999–2010. – Режим доступа: <http://www.technolink.spb.ru/index.php?pid=360>.
4. Системы диспетчерского управления и сбора данных (SCADA) систем муниципального водоснабжения [Электронный ресурс] / мат. сайта EERE, 2010. – Режим доступа: http://www.eren.doe.gov/cities_countries/watersy.html
5. Автоматизация водоснабжения городов [Электронный ресурс] / мат. сайта комп. ООО Ролсиб, 2010. – Режим доступа: <http://privod.tomsk.ru/gorod-vodosnabzhenie>.
6. Романчук С. М. Мониторинг и анализ данных в процессе управления водоснабжением города Донецка / С. М. Романчук // Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе. – 2011. – № 1. – С. 133–141.

Поступила в редакцию 16.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано алгоритми автоматичного управління режимами роботи обладнання водопровідних вузлів, підкачувальних насосних станцій і ділянок водопровідних мереж. Визначено оптимальні параметри функцій тимчасовій модуляції тисків і витрат води для 117 об'єктів управління процесом водопостачання міста Донецька.

Ключові слова: водорозподілення, гідравлічний розрахунок, моніторинг, інформаційна модель.

SUMMARY

Algorithms of automatic control are offered by operating modes of the equipment of the water – pipe's knots, pumping-up pump stations and sites of water supply systems. optimal parameters of functions of temporary modulation of pressure and water expenses for 117 objects of management are determined by process of water supply of the city of Donetsk.

Keywords: water distribution, hydraulic calculation, monitoring, information model.

УДК 510.2:519.7

С. В. Сторожев

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДИК ОЦЕНКИ СТРАТЕГИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Реализовано построение нечетко-интервальной модификации обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица и нечетко-интервальной модификации критерия Шеремета, представляющих собой возможные инструменты решения задач селективного отбора оптимизированных локальных стратегий в условиях полной неопределенности реакции среды их реализации, а также нечеткости исходных статистических и экспертных данных. Представлены примеры численной реализации построенных нечетко-интервальных подходов к определению оптимизированных локальных стратегий. Описанные методики применимы для оценки стратегий в моделях технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов с нечеткими данными.

Ключевые слова: обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица, критерий Шеремета, нечетко-интервальные модификации, селективный отбор оптимизированных нечетких стратегий, модели технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов.

Введение и формулировка целей исследования. Вопросы разработки методов для оценивания эффективности стратегий реализации социально-экономических и технологических проектов, описываемых многокритериальными разветвленными иерархическими моделями, сохраняют актуальность в связи с необходимостью максимально полного учета специфики моделируемых процессов [1–9]. В этом контексте, одним из важных заданий является построение нечетких версий разработанных ранее критериев оценивания стратегий с целью достижения более корректного учета факторов неопределенности в описаниях параметров моделей и в реакции среды реализации оцениваемых стратегий. В частности, к ряду эффективных приемов формирования обобщенных оценок для множества сопоставляемых многофакторных локальных стратегий относятся критерии Гурвица [10–14] и Шеремета [15–18], применяемые в указанных публикациях к моделям с частными критериями четкой количественной природы. В данном контексте, цель представляемого в данной работе исследования заключается в построении нечетко-множественных аналогов вышеуказанных критериев и иллюстрации методики их применения на конкретных примерах.

Построение нечетко-интервальной версии обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица. При получении основных соотношений нечетко-интервальной версии обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица [10–14] полагается, что для нескольких вариантов сопоставляемых локальных стратегий S_i ($i = \overline{1, m}$) имеются нечеткие количественные оценки экспертной либо статистической природы в виде обобщенных показателей A_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) эффективности применения S_i в течение ряда одинаковых последовательных промежутков времени T_j ($j = \overline{1, n}$).

Указанные оценки представлены нечеткими интервалами – нормальными нечеткими множествами A_{ij} с трапецеидальными функциями принадлежности $\mu_{A_{ij}}(x)$. Реперные точки нечетких интервалов A_{ij} представлены кортежами $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$. Из оценок A_{ij} формируется матрица $\|A_{ij}\|$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) нечетких выигрышей от применения стратегии S_i за период T_j .

Алгоритм выбора из множества S_i ($i = \overline{1, m}$) наиболее эффективной стратегии, предпочтительной для использования в последующий период T_{n+1} с учетом неопределенности среды реализации, предполагает на первом этапе перестановку в порядке неубывания нечетко-интервальных оценок A_{ij} , размещенных в каждой i -й строке матрицы $\|A_{ij}\|$.

Данное упорядочивание может быть выполнено на основе операций сравнения нечетких интервалов [19] с использованием характеристики $R(A_{ij})$, рассчитываемой по формулам:

$$\begin{aligned} & (\Delta_{1A_{ij}} / 3 + \Delta_{2A_{ij}} / 2 + \Delta_{3A_{ij}} / 3) / (\Delta_{1A_{ij}} + \Delta_{2A_{ij}} + \Delta_{3A_{ij}})^2, \\ \Delta_{1A_{ij}} &= ((c_{ij} - 3b_{ij} + 2d_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 6, \quad \Delta_{2A_{ij}} = ((2c_{ij} + d_{ij} - a_{ij} - 2b_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 3, \\ \Delta_{3A_{ij}} &= ((3c_{ij} - 2a_{ij} - b_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 6. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом случае $A_{ij} > A_{kl}$ если $R(A_{ij}) > R(A_{kl})$ и $A_{ij} < A_{kl}$ если $R(A_{ij}) < R(A_{kl})$. Для получаемой таким образом модифицированной матрицы нечетких интервалов вводится обозначение $\|B_{ij}\|$.

В рамках предлагаемого обобщения нечетко-интервальная модификация критерия пессимизма-оптимизма Гурвица определяется как принцип выбора в качестве оптимальной той стратегии S_{i_0} из множества анализируемых, которая минимизирует нечетко-интервальную функцию вида

$$H_{i_0}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j B_{i_0 j}. \quad (2)$$

Здесь λ_j – нечетко-интервальные коэффициенты, обладающие обобщенным свойством положительной определенности $\lambda_j \geq Z$ и удовлетворяющие условию нормальности

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = E; \quad (3)$$

Z, E – соответственно нулевая и единичная нечетко-интервальные величины.

Для определения коэффициентов λ_j вводятся в рассмотрение нечетко-интервальные характеристики

$$B_j = \sum_{i=1}^m B_{ij} \quad (j = \overline{1, n}); \quad (4) \quad \bar{B}_j = B_j / m = \left(\sum_{i=1}^m b_{ij} \right) / m \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5)$$

$$B = \sum_{j=1}^n B_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (6)$$

обладающие свойством $\bar{B}_1 \leq \bar{B}_2 \leq \dots \leq \bar{B}_n$.

На следующем этапе построения критерия постулируются два варианта соотношений, характеризующих неопределенность реакции среды реализации рассматриваемых стратегий

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = \bar{B}_n : \bar{B}_{n-1} : \dots : \bar{B}_1, \quad (7)$$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_n = \bar{B}_1 : \bar{B}_2 : \dots : \bar{B}_n, \quad (8)$$

и отражающих гипотезы о ситуации, диктующей осторожность, пессимизм в выборе стратегий либо о ситуации, которая характеризуется как благополучная, безопасная, оптимистичная.

Соотношение (7) согласно исходной концепции построения обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица [10–14] предписывает в диктующей осторожность ситуации использование принципа «невозрастания средних выигрышей». Соотношение (8) в ситуации, оцениваемой как безопасная, рекомендует использование принципа «неубывания средних выигрышей».

Таким образом, в случае ситуации осторожного выбора наилучшей стратегии с учетом соотношений (3), (7) представления для нечетко-интервальных коэффициентов λ_j принимают вид

$$\lambda_j = E \cdot \bar{B}_{n-j+1} / \bar{B} \quad (j = \overline{1, n}), \quad (9)$$

а в случае благоприятной для реализации стратегий ситуации коэффициенты λ_j имеют представления

$$\lambda_j = E \cdot \bar{B}_j / \bar{B} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (10)$$

Расчеты в соотношениях (2)–(10) осуществляются с использованием соотношений алгебры нечетких интервалов [2, 3, 7]. В частности, арифметические операции с нормальными нечеткими интервалами A_i , описываемыми кортежами реперных точек (a_i, b_i, c_i, d_i) ($i = \overline{1, 2}$), соответственно представляют собой: процедуры получения нормальных нечетких интервалов $A_1 + A_2$ с кортежами реперных точек $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$; нормальных нечетких интервалов $A_1 - A_2$ с кортежами реперных точек $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2)$; нормальных нечетких интервалов $A_1 \cdot A_2$ с кортежами реперных точек $(a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2, d_1 \cdot d_2)$; нормальных нечетких интервалов A_1 / A_2 с кортежами реперных точек $(a_1 / a_2, b_1 / b_2, c_1 / c_2, d_1 / d_2)$. Результатом возведения нечеткого интервала A_1 в четкую степень n является нечеткий интервал с кортежем реперных точек $(a_1^n, b_1^n, c_1^n, d_1^n)$.

На заключительном этапе построения нечетко-интервальной модификации обобщенного критерия Гурвица для каждой из сопоставляемых стратегий S_i рассчитываются определяемые соотношением (2) нечетко-интервальные показатели оцениваемых стратегий $H_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Оптимальной является стратегия с максимальной характеристикой H_i и для ее выбора производится сопоставительное оценивание этих нечетко-интервальных величин с использованием определяемой соотношением (1) характеристики $R(H_i)$.

Построение нечетко-интервальной версии обобщенного критерия Шеремета. В соответствии с концепцией применения данного критерия, имеющего позитивный опыт использования в финансово-экономическом математическом моделировании [15–18], полагается, что для нескольких вариантов сопоставляемых локальных стратегий S_i ($i = \overline{1, m}$) имеются экспертные либо статистические нечеткие количественные оценки эффективности реализации каждой из них в условиях неопределенности по n факторам в виде обобщенных нечетко-интервальных показателей A_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Имеются также определяемые на основе анализа матриц экспертных парных сравнений нормализованные нечетко-интервальные характеристики для весовых коэффициентов λ_{ij} – нечетких рангов сопоставительного оценивания значимости для n факторов, включаемых в анализ стратегий S_i .

Алгоритм оценивания стратегий на исходном этапе предполагает переход к нормированным нечетко-интервальным показателям

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} / A_i, \quad A_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}, \quad (11) \quad \bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij} / \lambda_i, \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (12)$$

и получение для каждой из альтернативных стратегий нечетко-интервальной характеристики R_i с кортежем реперных точек (a_i, b_i, c_i, d_i) , рассчитываемой по формуле

$$R_i = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{ij} (E - \bar{A}_{ij})^2, \quad (13)$$

в которой E – единичная нечетко-интервальная величина.

Конечные оценочные показатели для стратегий S_i определяются как нечетко-множественные характеристики $\hat{R}_i = [R_i]^{1/2}$ с функциями принадлежности $\mu_{\hat{R}_i}(x)$ вида

$$\mu_{\hat{R}_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_i); \\ ((x - a_i)/(b_i - a_i))^{1/2}, & x \in (a_i, b_i); \\ 1, & x \in (b_i, c_i); \\ ((d_i - x)/(d_i - c_i))^{1/2}, & x \in (c_i, d_i); \\ 0, & x \in (d, \infty). \end{cases} \quad (14)$$

В процессе выбора наилучшей из анализируемых локальных стратегий S_i сопоставляются показатели ξ_i дефазификации для их нечетких характеристик \hat{R}_i , рассчитываемые по формулам

$$\xi_i = \left(\int_{a_i}^{d_i} x \cdot \mu_{\hat{R}_i}(x) \cdot dx \right) / \left(\int_{a_i}^{d_i} \mu_{\hat{R}_i}(x) \cdot dx \right). \quad (15)$$

Примеры численной реализации методик определения оптимизированных стратегий на основе нечетких вариантов обобщенных критериев Гурвица и Шеремета. Представленный пример реализации описанного выше варианта обобщенного критерия Гурвица, наряду с иллюстрацией методики получения конкретных нечетко-интервальных оценок $H_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ для определения оптимальной стратегии, дает также основания для заключения о корректности предложенного нечетко-интервального обобщения. В нем рассматривается вариант задания массива A_{ij} ($i = 1, 3; j = 1, 4$) нечетких количественных оценок эффективности трех стратегий, применяющихся в течение четырех последовательных периодов времени и являющихся в количественном отношении малыми нечеткими возмущениями для исходных параметров, использовавшихся при реализации четкого варианта критерия в работах [10, 11].

Рассматриваемая матрица нечетких интервалов, заданных кортежами реперных точек, состоит из элементов, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Нечеткие оценки A_{ij} эффективности локальных стратегий S_i за период T_j

T_j	S_1	S_2	S_3
T_1	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)
T_2	(3.9, 3.95, 4.05, 4.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(11.9, 11.95, 12.05, 12.1)
T_3	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)
T_4	(19.9, 19.95, 20.05, 20.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(9.9, 9.95, 10.05, 10.1)

Применение разработанной методики приводит к следующим оценкам H_i и $R(H_i)$ для анализируемых стратегий в предположении о неблагоприятной реакции среды реализации

$$H_1 = (7.68, 7.83, 8.13, 8.29), \quad H_2 = (6.74, 6.87, 7.13, 7.26), \quad H_3 = (8.02, 8.16, 8.47, 8.62);$$

$$R(H_1) = 3.326, \quad R(H_2) = 2.917, \quad R(H_3) = 3.465,$$

что соответствует оптимальности дальнейшего использования локальной стратегии S_3 и оценкам

$$H_1 = (11.17, 11.39, 11.69, 11.86), \quad H_2 = (6.74, 6.87, 7.13, 7.26), \quad H_3 = (9.37, 9.53, 9.85, 10.01);$$

$$R(H_1) = 4.796, \quad R(H_2) = 2.917, \quad R(H_3) = 4.037$$

в предположении о благоприятной реакции среды реализации, что в этом случае соответствует выводу об оптимальности для дальнейшего использования локальной стратегии S_1 . Представленные результаты и выводы согласуются с полученными в работах [10, 11].

В качестве примера реализации разработанного нечетко-множественного обобщения критерия Шеремета рассматривается случай задания трех альтернативных вариантов локальных стратегий с четырьмя оцениваемыми факторами (табл. 2).

Таблица 2

Нечеткие оценки A_{ij} эффективности локальных стратегий S_i по четырем рассматриваемым факторам

Оценки A_{ij}	S_1	S_2	S_3
A_{i1}	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)
A_{i2}	(3.9, 3.95, 4.05, 4.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(11.9, 11.95, 12.05, 12.1)
A_{i3}	(5.9, 5.95, 6.05, 6.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(7.9, 7.95, 8.05, 8.1)
A_{i4}	(19.9, 19.95, 20.05, 20.1)	(6.9, 6.95, 7.05, 7.1)	(9.9, 9.95, 10.05, 10.1)

Нечеткие рейтинги для оцениваемых факторов во всех анализируемых стратегиях полагаются одинаковыми, задаются нечеткими интервалами с реперными точками

$$\lambda_{i1} = (0.19, 0.195, 0.205, 0.21), \quad \lambda_{i2} = (0.39, 0.395, 0.405, 0.41),$$

$$\lambda_{i3} = (0.09, 0.095, 0.105, 0.11), \quad \lambda_{i4} = (0.29, 0.295, 0.305, 0.31),$$

и имеют нормализованные значения

$$\bar{\lambda}_{i1} = (0.183, 0.191, 0.209, 0.218), \quad \bar{\lambda}_{i2} = (0.375, 0.387, 0.413, 0.427),$$

$$\bar{\lambda}_{i3} = (0.086, 0.093, 0.107, 0.114), \quad \bar{\lambda}_{i4} = (0.279, 0.289, 0.311, 0.323).$$

В соответствии с описанным алгоритмом, последовательно находятся оценки

$$R_1 = (0.375, 0.387, 0.413, 0.427), \quad R_2 = (0.086, 0.093, 0.107, 0.114),$$

$$R_3 = (0.278, 0.289, 0.311, 0.323); \quad \xi_1 = 0.402, \quad \xi_2 = 0.101, \quad \xi_3 = 0.301,$$

на основании которых в качестве оптимальной определяется стратегия S_1 .

Выводы. Результатом проведенных исследований является построение нечетко-интервальной модификации обобщенного критерия пессимизма-оптимизма Гурвица и нечетко-интервальной модификации критерия Шеремета. Они представляют собой один из возможных инструментов решения задачи селективного отбора оптимизированных локальных стратегий в условиях полной неопределенности реакции среды их реализации, а также нечеткости исходных статистических и экспертных данных. Описанные методики применимы для оценки стратегий в моделях технологических, финансово-инвестиционных и социально-экономических процессов с нечеткими данными.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисов В. В. Нечеткие модели и сети / В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. С. Федулов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
2. Герасимов Б. М. Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка эффективности / Б. М. Герасимов, М. М. Дивизинюк, И. Ю. Субач. – Севастополь: СНИЯЭиП, 2004. – 318 с.
3. Дилигенский Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М.: Из-во Машиностроение-1, 2004. – 397 с.
4. Дымова Л. Г. Применение методов теории нечетких множеств для оценки эффективности инвестиций / Л. Г. Дымова, Д. В. Севастьянов // Финансы, учет, аудит. – 1997. – № 3. – С. 34–38.
5. Дымова Л. Г. Многокритериальная оценка уровня социально-экономического развития регионов / Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов, Л. И. Шейграцева // Белорусский экономический журнал. – 1999. – № 2. – С. 112–118.
6. Матвійчук А. В. Аналіз та прогнозування розвитку фінансово-економічних систем із використанням теорії нечіткої логіки / А. В. Матвійчук – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 205 с.
7. Рыжов А. П. Модели поиска решений в нечеткой среде / А. П. Рыжов. – М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004. – 96 с.
8. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
9. Методика многокритериальной иерархической оценки качества в условиях неопределенности / П. В. Севастьянов, Л. Г. Дымова, М. Каптур, А. В. Зенькова // Информационные технологии. – 2001. – № 9. – С. 84–87.
10. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица / Л. Г. Лабскер // Качество информационных услуг: сб. научн. трудов. – Тамбов: ТГТУ, 2000. – Вып. III. – С. 34–43.
11. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица / Л. Г. Лабскер // Финансовая математика. – М.: МГУ, 2001. – С. 401–414.
12. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков. Часть I. / Л. Г. Лабскер // Управление риском. – 2001. – № 2. – С. 35–37.
13. Лабскер Л. Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков. Часть II. / Л. Г. Лабскер // Управление риском. – 2001. – № 3. – С. 28–36.
14. Лабскер Л. Г. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом / Л. Г. Лабскер, Л. О. Бабешко. – М.: Дело, 2001. – 464 с.
15. Шеремет А. Д. Финансы предприятий / А. Д. Шеремет, Р. С. Сайфулин. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 512 с.
16. Шеремет А. Д. Теория экономического анализа / А. Д. Шеремет. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 333 с.
17. Шеремет А. Д. Комплексный анализ хозяйственной деятельности / А. Д. Шеремет. – М.: ИНФРА-М, 2006. – 416 с.
18. Шеремет А. Д. Методика финансового анализа деятельности коммерческих организаций / А. Д. Шеремет, Е. В. Негашов. – М.: Экономика, 2008. – 371 с.
19. Thorani Y. L. P. Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers / Y. L. P. Thorani, P. P. V. Rao, N. R. Shankar // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2012. – Vol. 7, No 12. – P. 555–573.

Поступила в редакцию 28.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Реалізовано побудову нечітко-інтервальної модифікації узагальненого критерію песимізму-оптимізму Гурвіца і нечітко-інтервальної модифікації критерію Шеремета, що представляють собою можливі інструменти вирішення завдань селективного відбору оптимізованих локальних стратегій в умовах повної невизначеності реакції середовища їх реалізації, а також нечіткості вихідних статистичних та експертних даних. Представлені приклади чисельної реалізації побудованих нечітко-інтервальних підходів до визначення оптимізованих локальних стратегій. Описані методики можуть бути застосовані в моделях технологічних, фінансово-інвестиційних та соціально-економічних процесів.

Ключові слова: узагальнений критерій песимізму-оптимізму Гурвіца, критерій Шеремета, нечітко-інтервальні модифікації, селективний відбір оптимізованих нечітких стратегій, моделі технологічних, фінансово-інвестиційних та соціально-економічних процесів.

SUMMARY

Fuzzy interval modification of the generalized of criterion of pessimism-optimism Hurwitz and fuzzy-interval modification of criterion Sheremet are generated. It is one of possible tools for solving of problems of selection of optimized local strategies in total uncertainty the reactions of medium of their realization and the fuzzy basic statistical and expert data. The examples of numerical realization of fuzzy interval approaches to determining the optimized local strategies are constructed. The described approaches are useful for evaluating strategies in models of technological, financial, investment and socio-economic processes with fuzzy data.

Keywords: generalized criterion of pessimism-optimism Hurwitz criterion Sheremet, fuzzy interval modification, selective choice of optimized fuzzy strategies, models of technological, financial, investment and socio-economic processes.

УДК 539.213; 530.1

В. С. Абрамов*Донецький фізико-технічний інститут ім. А. А. Галкіна НАН України, г. Донецьк***ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МОДЕЛЬНОЙ НАНОСИСТЕМЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКОЙ**

В рамках двухточечной модели исследованы сжатые и растянутые состояния полей деформации и напряжения фрактальной квантовой точки в модельной наносистеме. При этом используется теория дробного исчисления и концепция фрактала. Учет эффекта бифуркации решений нелинейного уравнения приводит к появлению четырех ветвей у функции смещения узлов решетки в модельной наносистеме. Выполнено численное моделирование поведения комплексного поля деформации на прямоугольной дискретной решетке. Показано, что для инверсных (с отрицательным фрактальным индексом) структурных состояний фрактальной квантовой точки существует интервал изменения этого индекса с аномальным поведением поля деформации: внутри интервала отсутствует эффективное затухание. Показана возможность появления переходных эффектов типа индукции, лавины, сверхнутаии, эхо в модельной наносистеме с фрактальной квантовой точкой.

Ключевые слова: фрактальная квантовая точка, поля деформации и напряжения, сжатые и растянутые состояния, инверсные структурные состояния, модельная наносистема.

Введение. В теории квантовой информации одной из важных является проблема создания квантового компьютера [1, 2]. При этом операции квантовой логики предполагают реализовывать с помощью оптических процессоров. Одним из таких процессоров является твердотельный квантовый эхо-процессор, основанный на явлении стимулированного фотонного эха [2–4]. Актуальность фундаментальных исследований различных наноструктурных элементов [5] связана с возможным использованием их при создании новых приборов и материалов: новой элементной базы, средств записи, переработки, отображения, сохранения квантовой информации. В квантовых информационных технологиях [6–9] в качестве носителя информации (единиц, битов) используются кванты света – фотоны. Используя принципы квантовой оптики [10], запись и последующее считывание квантовой информации (кодированной в состояниях поляризации фотонов) осуществляется на квантовых состояниях одиночных атомов или на коллективных квантовых состояниях атомного ансамбля. При теоретическом описании основным модельным объектом является кубит [8, 9] – двухуровневая квантовая система. При исследовании спонтанного параметрического рассеяния света, корреляций и перепутывания состояний в квантовой системе были использованы другие модельные объекты типа кутрита и кукварта [8] – квантовые системы с числом уровней больше двух. Отмечена основная трудность при обработке квантовой информации: результаты фотодетектирования являются случайными. В качестве другого носителя информации можно использовать кванты колебательных возбуждений решетки – фононы. Возможны различные механизмы связей и взаимных преобразований одних носителей информации (фотонов) в другие (фононы) на активных наноструктурных элементах.

Необходимость фундаментальных исследований отдельных квантовых систем [11–19] связана с возможным использованием их в квантовых информационных технологиях. В работе [11] предложена экспериментальная схема для моделирования и наблюдения релятивистских фермионов Дирака в гексагональной оптической решетке, создаваемой лазерами. Управляя параметрами анизотропии решетки можно реализовать как массовые, так и безмассовые фермионы Дирака, а также наблюдать фазовый переход между ними. В работе [12] изучалось поведение ультрохолодного Ферми газа из атомов ^{40}K , захваченных в оптическую ловушку. Показано существование Дираковских точек при изменении параметров анизотропии решетки и минимума энергетической щели внутри зоны Брюиллена. Дираковские фермионы и топологические фазы в молекулярном графене исследовались в работе [13]. Вблизи особых точек фермионы Дирака в молекулярном графене обнаруживают квантовые и статистические особенности поведения. Вихреподобные топологические дефекты с дробными зарядами в рамках модели с обращением времени (time-reversal-invariant model) исследовались в работах [14, 15]. Статистика дробного обмена таких топологических дефектов изучалась в работах [15, 16]. Распространение лазерного импульса в объемной нелинейной диспергирующей среде может привести к формированию структуры поля, ограниченной по всем трем пространственным координатам, как результата взаимной компенсации действия дисперсии, дифракции и самофокусировки. Такой ограниченный волновой пакет получил название световой пули («light bullet»). Необычные свойства квазичастиц типа левитонов исследовались в работе [17]. Взаимодействие отдельного локализованного электрона с конденсатом Бозе-Эйнштейна изучалось в [18]. Было показано, что этот электрон может

возбудить фононы и коллективные осцилляции всего конденсата. Отдельные квантовые системы также интенсивно изучаются на основе органических полупроводников с целью применения их в квантовой электронике, оптике, спиновых информационных технологиях (спинтронике). Так в работе [19] методом спинового эхо исследована система спиновых квантовых кубитов на основе меди (CuPc – copper phthalocyanine) в органических пленках. Изучены физические свойства возникающих переходных процессов типа спиновых индукции, эхо. В работе [20] предложено использовать фрактальные наноловушки для захвата отдельных частиц или групп частиц с целью исследования их физических свойств. При этом возникает необходимость теоретического и экспериментального изучения свойств фрактальных квазидвумерных и объемных структур в модельных наносистемах.

В работах [20–29] в качестве активных элементов в наносистемах были рассмотрены модели фрактальной дислокации и квазидвумерных фрактальных структур. Для описания корреляционных эффектов и статистических свойств поля деформации фрактальной дислокации была предложена двухточечная модель [21]. При превышении критических значений параметров возможны эффекты бифуркации решений – появление нескольких ветвей в энергетическом спектре. В рамках двухточечной модели было исследовано поле деформации фрактальной линейной дислокации в модельном образце конечных наноразмеров с объемной дискретной решеткой. Введены эффективные составные операторы смещений для сжатых и растянутых состояний поля деформации [25, 28]. Из анализа поведения корреляционных функций первого и второго порядка от безразмерного времени j' показана возможность появления переходных эффектов типа индукции, лавины, самоиндуцированной прозрачности, эхо, эффектов сверхнутаии [25] и распространения фрактальной линейной дислокации.

Целью данной работы является исследование переходных эффектов, сжатых и растянутых состояний полей деформации и напряжения (после бифуркации решений) в модельной наносистеме с фрактальной квантовой точкой.

Поведение поля деформации фрактальной квантовой точки после бифуркации решений. В рамках двухточечной модели [24] исследуются поля деформации и напряжения фрактальной квантовой точки [29] в модельном образце конечных наноразмеров с объемной дискретной решеткой $N_1 \times N_2 \times N_3$. Отклонения узлов решетки от состояния равновесия в отдельной плоскости $N_1 \times N_2$ для двух различных точек $z_1(j')$, $z_2(j')$ описываются не эрмитовыми операторами смещений $\hat{u}(z_1)$, $\hat{u}(z_2)$, которым соответствуют прямоугольные матрицы с размерами $N_1 \times N_2$. Переменная j' выполняет роль безразмерного времени.

Исходные прямоугольные матрицы смещений $\hat{u}(z_1)$ и $\hat{u}(z_2)$ с элементами $u_{nm}(z_1)$, $u_{nm}(z_2)$ внутри объемной решетки $N_1 \times N_2 \times N_3 = 30 \times 40 \times 67$ были получены методом итераций по индексу m для четырех ветвей (после бифуркации решений) безразмерной комплексной функции смещения $u(z) = u_{\varepsilon_1}(z)$, $u(z) = u_{\varepsilon_2}(z)$, $u(z) = u_{\varepsilon_3}(z)$, $u(z) = u_{\varepsilon_4}(z)$ соответственно, по формулам из работ [26, 27]

$$\begin{aligned} u(z) = u_{\varepsilon_1}(z) &= (g_1 - g_2 + g_4) / 2; & u(z) = u_{\varepsilon_2}(z) &= (g_1 - g_2 - g_4) / 2; \\ u(z) = u_{\varepsilon_3}(z) &= (-g_1 - g_2 + g_5) / 2; & u(z) = u_{\varepsilon_4}(z) &= (-g_1 - g_2 - g_5) / 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Функции g_1, g_2, g_3 моделируем выражениями

$$g_1(u, \alpha) = (1 - \alpha)(1 - 2\text{sn}^2(u - u_0, k)) / Q; \quad (2)$$

$$g_2(z, \alpha) = 2^{-2\alpha} 3^{3\alpha-1/2} |z - z_c|^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1/3) \Gamma(\alpha + 2/3) / \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1/2); \quad (3)$$

$$g_3(z, \alpha) = 3^{3\alpha-1/2} 2 |z - z_c|^{-2\alpha} \Gamma(\alpha + 1/3) \Gamma(\alpha + 2/3) / \pi; \quad g_4 = [(g_1 + g_2)^2 - g_3^2]^{1/2}; \quad g_5 = [(-g_1 + g_2)^2 - g_3^2]^{1/2}; \quad (4)$$

$$Q = p_0 - b_1(n' - n_0)^2 / n_c^2 - b_2(m' - m_0)^2 / m_c^2; \quad (5)$$

$$n' = n \cdot \cos \varphi - m \cdot \sin \varphi; \quad m' = n \cdot \sin \varphi + m \cdot \cos \varphi. \quad (6)$$

Здесь α – фрактальный индекс; k – модуль эллиптического синуса; z_c – критическое значение координаты; Γ – гамма функция; $p_0, b_1, b_2, n_0, n_c, m_0, m_c, \varphi$ – некоторые управляющие параметры. Выражение для функции Q взято из работы [20]. Исходные данные: $k = 0.5$; $u_0 = 29.537$; $z_c = 2.813$. Управляющие параметры для квантовой точки были следующими: $p_0 = -3.457 \cdot 10^{-11}$; $b_1 = b_2 = 1$; $n_0 = 14,3267$; $n_c = 9,4793$; $m_0 = 19,1471$; $m_c = 14,7295$. Выбор параметров $b_1 = b_2 = 1$ соответствует расположению особых точек поля деформации на фрактальном мнимом эллиптическом цилиндре с образующими параллельными оси Oj' . При вычислениях полагалось: $z_1 = 0.053 + h_z(j' + 33)$; $z_2 = 6.653 - h_z(j' + 33)$;

$h_z = 0.1$; $j' \in [-33; 33]$ – безразмерное время, что соответствует прямой $u_{nm}(z_1)$ и обратной $u_{nm}(z_2)$ волнам смещений, $n = \overline{1, 30}$; $m = \overline{1, 40}$. Поведение четырех ветвей (1) безразмерной комплексной функции смещения в момент времени $j' = 0$ при $\alpha = 0.5$ для прямой волны приведено на рис. 1. Для всех ветвей характерно наличие как реальной, так и мнимой частей функции смещения. Ядро квантовой точки локализовано вблизи узла $(n, m) = (n_0, m_0)$ и захватывает некоторую область. Вне ядра поведение поля деформации для всех ветвей является стохастическим (рис. 1, в, е, и, м). Для первой ветви (рис. 1, а) у $\text{Re}u_{\varepsilon 1}$ на фоне стохастического поведения всей решетки наблюдается сложная структура с несколькими пиками вверх. Для второй и третьей ветвей наблюдается основной пик вверх (рис. 1, г) и вниз (рис. 1, ж). Для четвертой ветви характерно образование структуры с существенно меньшими амплитудами сложной формы типа «ямы» (рис. 1, к). Мнимые части каждой из ветвей имеют свои характерные структурные особенности (рис. 1, б, д, з, л), при этом особенности у $\text{Im}u_{\varepsilon 4}$ имеют вид «ступеней» (рис. 1, л).

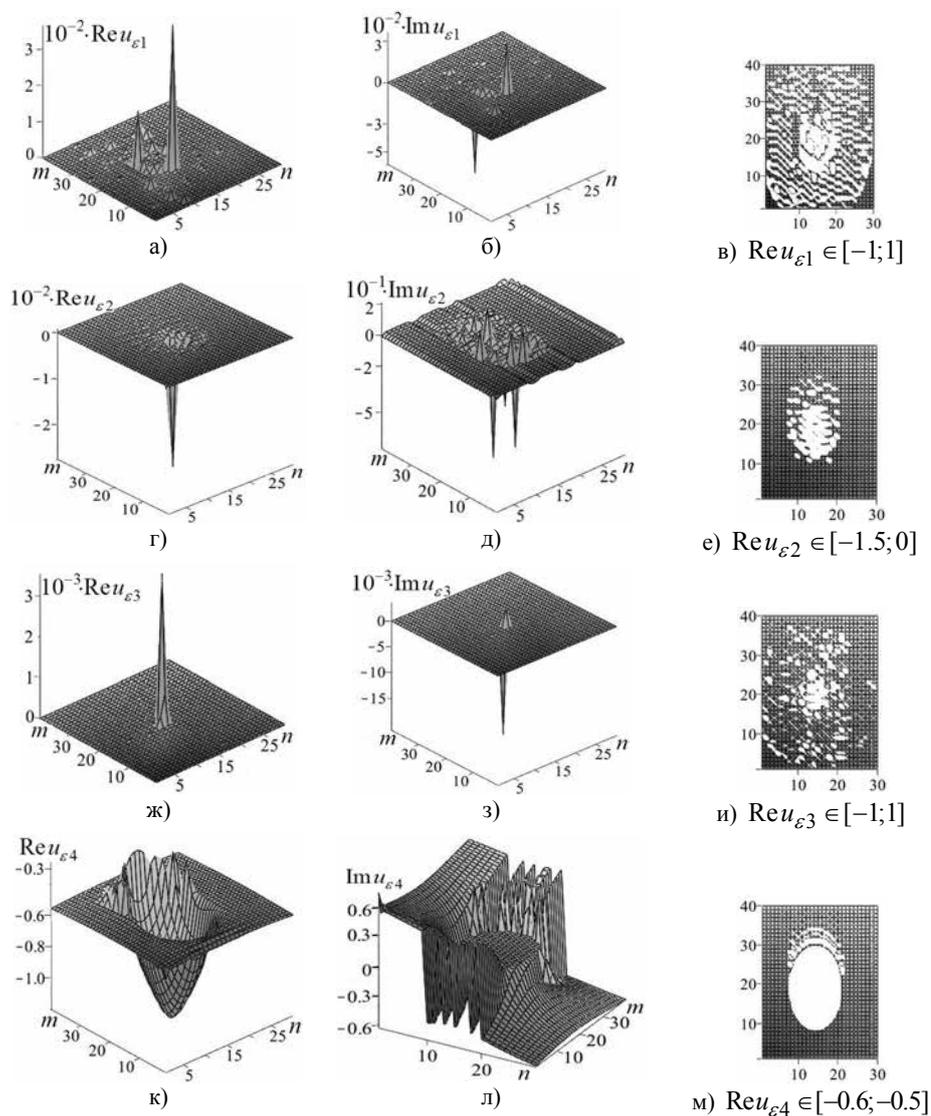


Рис. 1. Зависимости реальных и мнимых частей, сечений реальных частей (вид сверху) ветвей функции смещения от n, m при $j' = 0$, $\alpha = 0.5$: 1 ветвь (а, б, в); 2 ветвь (г, д, е); 3 ветвь (ж, з, и); 4 ветвь (к, л, м)

Для инверсных [26, 27] структурных состояний квантовой точки ($\alpha = -0.5$) поведение четырех ветвей (1) безразмерной комплексной функции смещения при $j' = 0$, для прямой волны дано на рис. 2. В этом случае мнимая часть функции смещения равна нулю, что свидетельствует об отсутствии эффективного затухания. Существует интервал изменения фрактального индекса $\alpha \in (-2/3; -1/3)$, внутри

котрого мнимая часть функции смещения будет равна нулю для всех четырех ветвей. Для первой ветви (рис. 2, а) характерно наличие пика вверх, локализованного вблизи узла (n_0, m_0) , с большой амплитудой и стохастическим поведением в области квантовой точки (рис. 2, б). Для второй ветви (рис. 2, в) наблюдается пик вниз, локализованного вблизи узла (n_0, m_0) , с большой амплитудой и стохастическим поведением в области квантовой точки (рис. 2, г). Для третьей ветви (рис. 2, д, е) наблюдается практически регулярное поведение с малыми положительными амплитудами и минимумом вблизи узла (n_0, m_0) . Для четвертой ветви (рис. 2, ж, з) наблюдается практически регулярное поведение с малыми отрицательными амплитудами и максимумом вблизи узла (n_0, m_0) .

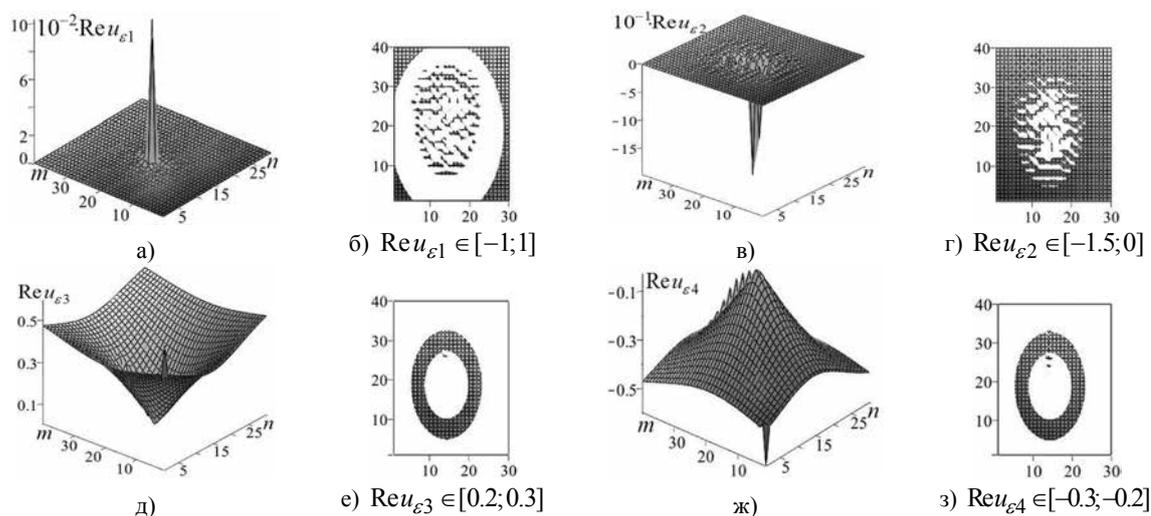


Рис. 2. Зависимости ветвей функции смещения и их сечений (вид сверху) от n, m при $j' = 0$, $\alpha = -0.5 : 1$ ветвь (а, б); 2 ветвь (в, г); 3 ветвь (д, е); 4 ветвь (ж, з)

Пример переходных процессов с течением безразмерного времени j' четырех ветвей функции смещения (прямая волна) для инверсных структурных состояний ($\alpha = -0.5$) дан на рис. 3.

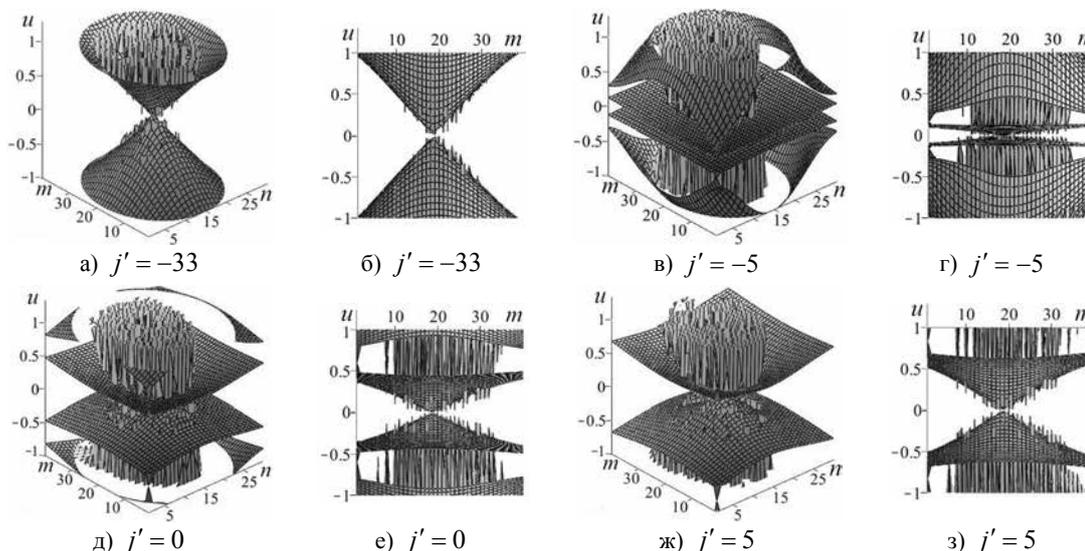


Рис. 3. Совместные зависимости четырех ветвей функции смещения от n, m и проекций на плоскость mOu для $\alpha = -0.5$

На каждом рисунке представлены все четыре ветви функции смещения в сечении по $u \in [-1, 1]$. Первая и третья ветвь, как правило, имеют положительные значения, вторая и четвертая – отрицательные. Имеет место пересечение четырех ветвей функции смещения в отдельных точках. Наблюдаются

щели между ветвями решений. При увеличении $j' \in [-33; 33]$ характер поведения каждой из четырех ветвей функции смещения изменяется. Это связано с изменением параметра $|z(j') - z_c|$, входящего в выражения (3), (4) для четырех ветвей функции смещения (1). При этом также наблюдается изменения величин щелей между ветвями решений. Значению $j' = -5$ (рис. 3, в, з) соответствует минимальное отклонение параметра $|z_1 - z_c| = 0.04$ для прямой волны. При $j' = 0$ (рис. 3, д, е) для прямой и обратной волны значения параметров $|z - z_c|$ совпадают $|z_1 - z_c| = |z_2 - z_c| = 0.54$. При $j' = 5$ (рис. 3, ж, з) для прямой волны параметр $|z_1 - z_c| = 1.04$, а для обратной волны наблюдается минимальное отклонение параметра $|z_2 - z_c| = 0.04$. Отметим, что поведение четырех ветвей функции смещения, щелей между ветвями, расположения особых точек качественно похоже на поведение физических параметров вблизи Дираковских точек (Dirac points) [11–16]. При этом также допустима физическая интерпретация функций смещения как функций от безразмерного волнового числа $q_z = (z - z_c) / z_c$.

Сжатые и растянутые состояния фрактальной квантовой точки. В работах [25, 28] для описания смешанных состояний вводятся эффективные составные операторы смещений \hat{u}_p, \hat{u}_q (для сжатых $p = 1, 3, 5, 7$ и растянутых $p = 2, 4, 6, 8$ состояний, которым соответствуют матрицы с размерами $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$) и корреляционные функции первого порядка K_{pq}, H_{pq}, S_{pq} для $p, q = \overline{1, 8}$.

Для смешанных состояний получены функции распределения типа Бозе-Эйнштейна f_{pp} (основное состояние) и f'_{pp} (возбужденное состояние), Ферми-Дирака F_{pp} (основное состояние) и F'_{pp} (возбужденное состояние), параметров инверсии d_{pp} в виде

$$f'_{pp} - f_{pp} = 1; \quad f'_{pp} = S_{pp} / H_{pp}; \quad f_{pp} = K_{pp} / H_{pp}; \quad (7)$$

$$F'_{pp} + F_{pp} = 1; \quad F_{pp} = H_{pp} / S_{pp}; \quad F'_{pp} = K_{pp} / S_{pp}; \quad d_{pp} = 1 - 2F_{pp}. \quad (8)$$

Функции распределения типа Ферми-Дирака и типа Бозе-Эйнштейна несут информацию о поле деформаций и напряжений, соответственно (рис. 4, 5).

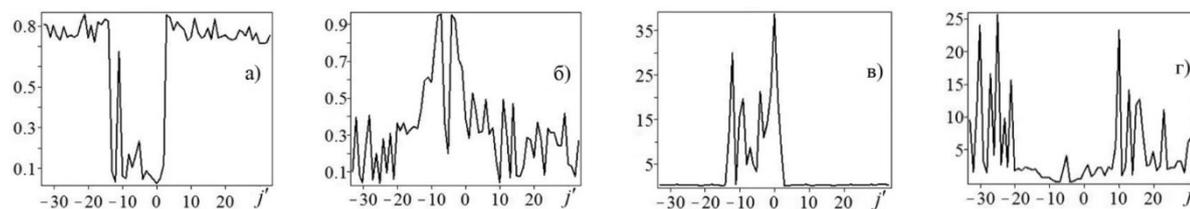


Рис. 4. Зависимости функций F_{11} (а, б), f_{11} (в, г) от j' для сжатых состояний $(p, p) = (1, 1)$ ветвей $u_{\varepsilon 1}$ (а, в), $u_{\varepsilon 2}$ (б, г) при $\varphi = 0$

На рис. 4, 5 приведены результаты для сжатых и растянутых состояний фрактальной квантовой точки при $\varphi = 0$. Для ветви $u_{\varepsilon 1}$ при $j' = -33$ квантовая точка находится в инверсных состояниях с $d_{11} = -0.62$ для сжатого (рис. 4, а) и $d_{22} = -0.85$ для растянутого (рис. 5, а) состояний. При этом число квантов поля напряжений практически мало $f_{11} = 0.3$ (рис. 4, в), $f_{22} = 0.05$ (рис. 5, в).

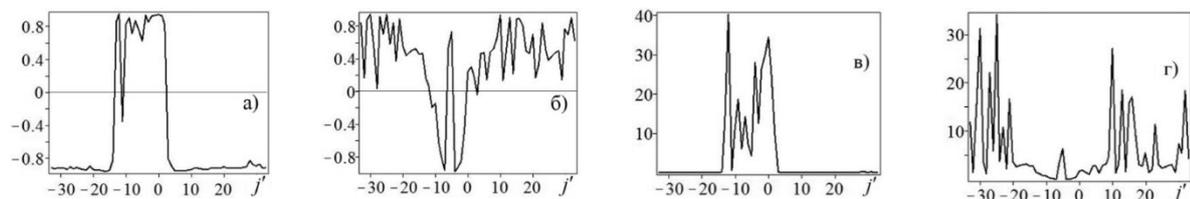


Рис. 5. Зависимости d_{22} (а, б), f_{22} (в, г) от j' для растянутых состояний $(p, p) = (2, 2)$ ветвей $u_{\varepsilon 1}$ (а, в), $u_{\varepsilon 2}$ (б, г) при $\varphi = 0$

При увеличении j' параметры инверсии и число квантов для этих состояний стохастически колеблются вблизи указанных значений. При $j' = -13$ для сжатого и $j' = -14$ для растянутого состояний происхо-

дят переходы из инверсных состояний в равновесные с параметрами инверсии больше нуля. Затем идет возврат в инверсные состояния и далее в равновесные состояния внутри интервалов $j' \in [-10, 0]$. При этом наблюдается появление числа квантов поля напряжений значительно больших единицы. При $j' > 2$ для сжатого состояния, $j' > 3$ для растянутого состояния снова происходит возврат в инверсное состояние и значительное уменьшение числа квантов поля напряжений.

Для ветви $u_{\varepsilon 2}$ при $j' = -33$ квантовая точка находится в основных состояниях с $d_{11} = 0.81$ для сжатого (рис. 4, б) и $d_{22} = 0.85$ для растянутого (рис. 5, б) состояний. При этом число квантов поля напряжений значительно больше единицы $f_{11} = 9.5$ (рис. 4, з), $f_{22} = 11.9$ (рис. 5, з). При увеличении j' параметры инверсии и число квантов для этих состояний стохастически колеблются. При $j' = -13$ для сжатого и $j' = -14$ для растянутого состояний происходят переходы из основных состояний в инверсные с параметрами инверсии меньше нуля. Затем идет возврат в основные состояния и далее в инверсные состояния внутри интервалов $j' \in [-12, -2]$. При этом наблюдается уменьшение числа квантов поля напряжений (рис. 4, з, 5, з). При $j' > -2$ для сжатого и растянутого состояний снова происходит возврат в основное состояние. При дальнейшем увеличении j' наблюдаются значительные стохастические колебания параметров инверсии (рис. 4, б, 5, б) и образование отдельных сигналов сложной формы с числами заполнения поля напряжений значительно больших единицы (рис. 4, з, 5, з). Появление таких импульсов сложной формы из равновесных состояний при изменении $j' > -2$ для сжатых и растянутых состояний ветви $u_{\varepsilon 2}$ является необычным.

Похожие явления наблюдаются в квантовой оптике для трехуровневой атомной системы, где возможна лазерная генерация сигналов без инверсии, эффект Ханле, фотонное эхо, самоиндуцированная прозрачность [2, 3, 10]. Влияние угла поворота $\varphi = \pi/8$ из выражения (6) на состояние фрактальной квантовой точки отражено на рис. 6, 7.

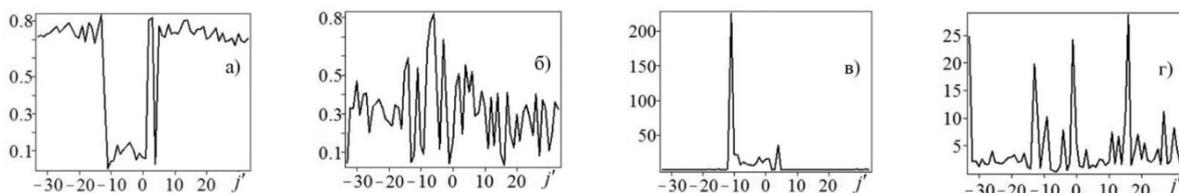


Рис. 6. Зависимости функций F_{11} (а, б), f_{11} (в, г) от j' для сжатых состояний $(p, p) = (1, 1)$ ветвей $u_{\varepsilon 1}$ (а, в), $u_{\varepsilon 2}$ (б, г) при $\varphi = \pi/8$

Для ветви $u_{\varepsilon 1}$ в области изменения $j' \in [-13, 5]$ наблюдаются образование ярко выраженных пиков при $j' = -11$ и $j' = 4$ с большими числами заполнения (по сравнению с рис. 4, в, 5, в) $f_{11} = 225.2$ и $f_{11} = 35.2$ для сжатых состояний (рис. 6, в), с числами заполнения $f_{11} = 207.7$ и $f_{11} = 44$ для растянутых состояний (рис. 7, в), что связано с влиянием угла поворота φ .

Для ветви $u_{\varepsilon 2}$ поворот на угол $\varphi = \pi/8$ приводит к изменению структуры сигналов сложной формы при $j' > 0$ (рис. 6, з, 7, з) по сравнению с аналогичными сигналами (рис. 4, з, 5, з).

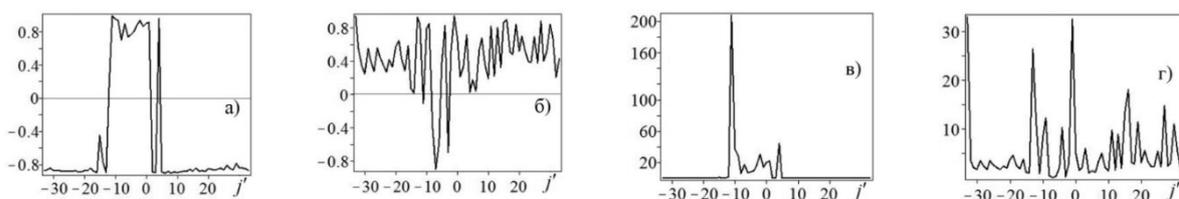


Рис. 7. Зависимости d_{22} (а, б), f_{22} (в, г) от j' для растянутых состояний $(p, p) = (2, 2)$ ветвей $u_{\varepsilon 1}$ (а, в), $u_{\varepsilon 2}$ (б, г) при $\varphi = \pi/8$

Поведения функций распределения типа Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна, параметров инверсии от безразмерного времени j' (рис. 4, 5) при $\varphi = 0$ и (рис. 6, 7) при $\varphi = \pi/8$ указывают на возможность по-

явления переходных эффектов типа индукции, лавины, сверхнутаии, эхо в модельной наносистеме с фрактальной квантовой точкой. При этом для начального угла поворота φ допустима интерпретация в терминах эффективной площади возбуждающих импульсов сложной формы, что и определяет конкретный тип переходного эффекта. С другой стороны, угол поворота φ можно рассматривать как функцию от безразмерных волновых чисел $q_x = (x - x_c) / x_c$, $q_y = (y - y_c) / y_c$, где x зависит от n , y зависит от m , x_c, y_c – характерные параметры вдоль осей On, Om . Это дает возможность сравнить поведение и провести аналогии, полученных функций распределения и параметров инверсии с физическими параметрами вблизи Дираковских точек из работ [11–16].

Выводы. Исследовано поведение четырех ветвей комплексной функции смещения для фрактальной квантовой точки в модельной наносистеме. Появление четырех ветвей связано с учетом эффекта бифуркации решения нелинейного уравнения. Для значений фрактального индекса $\alpha \in (-1; -2/3)$ и $\alpha \in (-1/3; 1)$ для всех ветвей характерно наличие как реальной, так и мнимой ветвей функции смещения. Ядро квантовой точки локализовано вблизи узла $(n, m) = (n_0, m_0)$ и захватывает некоторую область. Вне ядра поведение поля деформации для всех ветвей является стохастическим.

Внутри интервала изменения фрактального индекса $\alpha \in (-2/3; -1/3)$ мнимая часть функции смещения равна нулю для всех четырех ветвей, что свидетельствует об аномальном поведении поля деформации инверсных структурных состояний фрактальной квантовой точки (отсутствует эффективное затухание). При увеличении безразмерного времени $j' \in [-33; 33]$ происходит перестройка структуры поля смещения каждой из четырех ветвей, изменение щелей между ветвями, пересечение ветвей в отдельных областях (переходные процессы типа структурной перестройки).

Поведения сжатых и растянутых состояний фрактальной квантовой точки в модельной наносистеме качественно похожи, но различаются количественно. Зависимости исследуемых функций распределения и параметров инверсии от безразмерного времени j' для разных ветвей $u_{\varepsilon 1}$ и $u_{\varepsilon 2}$ качественно отличаются. При этом в начальный момент времени $j' = -33$ для ветви $u_{\varepsilon 1}$ реализуется инверсное состояние, а для ветви $u_{\varepsilon 2}$ – равновесное состояние. Для ветви $u_{\varepsilon 2}$ возможно образование дополнительных сигналов сложной формы (эффекты типа эхо, лавины, самоиндуцированной прозрачности).

Начальное состояние и поведение во времени j' фрактальной квантовой точки можно изменять за счет изменения начального угла поворота φ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валиев К. А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Регулярная и хаотическая динамика / К. А. Валиев, А. А. Кокин. – Ижевск, 2001. – 352 с.
2. Петрушкин С. В. Лазерное охлаждение твердых тел / С. В. Петрушкин, В. В. Самарцев. – М.: Физматлит, 2005. – 224 с.
3. Копвиллем У. Х. Световое эхо и перспективы его применения в науке и технике / У. Х. Копвиллем // Известия АН СССР. Сер. Физика. – 1973. – Т. 37, № 10. – С. 2010–2021.
4. Копвиллем У. Х. Поляризаационное эхо / У. Х. Копвиллем, С. В. Пранц. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
5. Шпак А. Н. Кластерные и наноструктурные материалы. Т. 1 / А. Н. Шпак, Ю. А. Куницкий, В. Л. Карбовский. – К.: Академперіодика, 2001. – 588 с.
6. Башаров А. М. Когерентный контроль квантовых корреляций в атомных системах / А. М. Башаров, А. А. Башкеев, Э. А. Манькин // Журнал эксперимент. и теорет. физики. – 2005. – Т. 127, вып. 3. – С. 536–550.
7. Мирошниченко Г. Г. Дискретное фотодетектирование для протоколов линейных оптических квантовых вычислений и коммуникаций / Г. Г. Мирошниченко // Журнал эксперимент. и теорет. физики. – 2011. – Т. 139, вып. 6. – С. 1055–1065.
8. Федоров М. Н. Кутриты и кукварты в спонтанном параметрическом рассеянии света, корреляции и перепутывание состояний / М. Н. Федоров, И. А. Волков, Ю. М. Михайлова // Журнал эксперимент. и теорет. физики. – 2012. – Т. 142, вып. 1(7). – С. 20–43.
9. Омелянчук А. Н. Квантовые когерентные явления в джозефсоновских кубитах / А. Н. Омелянчук, Е. В. Ильичев, С. Н. Шевченко. – К.: Наукова думка, 2013. – 168 с.
10. Скалли М. О. Квантовая оптика / М. О. Скалли, М. С. Зубайри. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
11. Zhu S-L. Simulation and detection of Dirac fermions with cold atoms in an optical lattice / S.-L. Zhu, B. Wang, L. M. Duan // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 98, 260402. – P. 1–4.
12. Greating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice / L. Tarruell, D. Greif, T. Uehlinger et. all. // Nature. – 2012. – Vol. 483, No 7389. – P. 302–305.
13. Designer Dirac fermions and topological phases in molecular grapheme / K.K. Gomes, W. Mar, W. Ko et. al. // Nature. – 2012. – Vol. 483, No 7389. – P. 306–310.
14. Seradjeh B. Fractionalization in a square-lattice model with time-reversal symmetry / B. Seradjeh, C. Weeks, M. Franz // Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 77, 033104. – P. 1–4.

15. Seradjeh B. Fractional statistics of topological defects in graphene and related structures / B. Seradjeh, M. Franz // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101, 146401. – P. 1–4.
16. Ryu S. Masses in graphene-like two-dimensional electronic systems: Topological defects in order parameters and their fractional exchange statistics / S. Ryu, C. Mudry, C.-Yu Hou, C. Chamon // Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 80, 205319. – P. 1–34.
17. Minimal-excitation states for electron quantum optics using levitons / J. Dubois, T. Jullien, F. Portier et al. // Nature. – 2013. – Vol. 502, No 7473. – P. 659–663.
18. Coupling a single electron to a Bose-Einstein condensate / J. Balewski, A. Krupp, A. Gaj et al. // Nature. – 2013. – Vol. 502, No 7473. – P. 664–667.
19. Potential for spin-based information processing in a thin-film molecular semiconductor / M. Warner, S. Din, I. Tupitsyn et al. // Nature. – 2013. – Vol. 503, No 7477. – P. 504–508.
20. Abramova O. P. Fractal nanotraps based on quasi-two-dimensional fractal structures / O. P. Abramova, S. V. Abramov // Dynamical Systems Theory (Editors J. Awrejcewicz et al.) DSTA 2013, Poland, Lodz, December 2–5, 2013. – P. 71–80.
21. Абрамов В. С. Фрактальная дислокация как один из неклассических структурных объектов в наноразмерных системах / В. С. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 2. – С. 247–251.
22. Абрамова О. П. Перестройка структуры стохастического поля деформации дислокации при изменении управляющих параметров / О. П. Абрамова, С. В. Абрамов // Металлофизика и новейшие технологии. – 2011. – Т. 33, № 4. – С. 519–524.
23. Абрамова О. П. Особенности поведения поля деформации фрактальных квазидвумерных структур / О. П. Абрамова, С. В. Абрамов // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 9–17.
24. Абрамов В. С. Упорядочение и статистические свойства поля деформации фрактальной дислокации в модельной наносистеме / В. С. Абрамов // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2013. – № 1. – С. 90–96.
25. Абрамов В. С. Фрактальная индукция, лавина, самоиндуцированная прозрачность, эхо в модельной наносистеме / В. С. Абрамов // Материалы X международного симпозиума по фотонному эхо и когерентной спектроскопии (ФЭКС'2013) (Йошкар-Ола, 30 июня–6 июля 2013 г.). – Йошкар-Ола: ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный технологический университет», 2013. – С. 78–86.
26. Abramov V. S. Inverse structural states of the stochastic deformation field of fractal dislocation / V. S. Abramov // Физика и техника высоких давлений. – 2013. – Т. 23, № 3. – С. 54–62.
27. Абрамов В. С. Поведение типа мягкой моды для инверсных структурных состояний фрактальной дислокации в модельной наносистеме / В. С. Абрамов // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Международ. науч. конф. (п. Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Т. 1. – Донецк: ДонНУ, 2013. – С. 13–17.
28. Abramov V. S. Correlation Relations and Statistical Properties of the Deformation Field of Fractal Dislocation in a Model Nanosystem / V. S. Abramov // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2013. – № 3. – P. 357–365.
29. Abramova O. P. Governance of Alteration of the Deformation Field of Fractal Quasi-two-dimensional Structures in Nanosystems / O. P. Abramova, S. V. Abramov // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal. – 2013. – № 3. – P. 367–375.

Поступила в редакцию 24.01.2014 г.

РЕЗЮМЕ

У рамках двухточечної моделі досліджені стислі і розтягнуті стани полів деформації і напруги фрактальної квантової точки в модельній наносистемі. При цьому використовується теорія дробового числення і концепція фрактала. Облік ефекту біфуркації рішень нелінійного рівняння призводить до появи чотирьох гілок у функції зміщення вузлів решітки в модельній наносистемі. Виконано чисельне моделювання поведінки комплексного поля деформації на прямокутній дискретній решітці. Показано, що для інверсних (з негативним фрактальним індексом) структурних станів фрактальної квантової точки існує інтервал зміни цього індексу з аномальною поведінкою поля деформації: усередині інтервалу відсутнє ефективне затухання. Показана можливість появи перехідних ефектів типу індукції, лавини, свержнутатції, ехо в модельній наносистемі з фрактальної квантової точкою.

Ключові слова: фрактальна квантова точка, поля деформації і напруги, стислі і розтягнуті стани, інверсні структурні стани, модельна наносистема.

SUMMARY

Within the framework of the two-point model squeezed and stretched states of the deformation and stress fields of fractal quantum dot in a model nanosystem are investigated. This uses the theory of fractional calculus and the concept of fractal. Accounting for the effect of bifurcation of solutions of nonlinear equations leads to the appearance of four branches of the lattice nodes displacement function in the model nanosystem. The numerical modelling of the complex deformation field behaviour is fulfilled on a rectangular discrete lattice. It is shown that for inverse (with a negative fractal index) states of fractal quantum dot there is an interval of change of this index with anomalous behaviour of the deformation field: there is no effective attenuation within the interval. The possibility of appearance of different transition effects such as induction, avalanches, supermutation, echo in the model nanosystem with fractal quantum dot is shown.

Keywords: fractal quantum dot, deformation and stress fields, squeezed and stretched states, inverse structural states, model nanosystem.

УДК 537.6, 538.9

В. В. Куліш

Національний технічний університет України «Київський Політехнічний Інститут», м. Київ

СПІНОВІ ХВИЛІ У ФЕРОМАГНІТНІЙ НАНООБОЛОНЦІ. ВРАХУВАННЯ ЕФЕКТІВ ДИСИПАЦІЇ У КОРОТКОХВИЛЬОВОМУ НАБЛИЖЕННІ

У роботі теоретично досліджено спінові збудження у нанооболонці з одновісного феромагнетика типу «легка вісь». Для дипольно-обмінних збуджень у магнітостатичному наближенні отримано рівняння для магнітного потенціалу з урахуванням дисипативних ефектів та анізотропії. Для короткохвильових спінових збуджень отримано дисперсійне рівняння, характерний час згасання та спектр радіальних хвильових чисел. Отримані обмеження на кількість можливих радіальних та азимутальних мод спінових збуджень. За допомогою числових оцінок показано, що короткохвильове наближення є застосовним для типових нанооболонок.

Ключові слова: феромагнітна нанооболонка, спінове збудження, дипольно-обмінна теорія.

Вступ. Останнім часом спінові хвилі у нанорозмірних системах – тонких феромагнітних плітках, квантових точках, нанодротах та інших наносистемах – інтенсивно досліджуються як теоретично, так і експериментально [1–4]. Актуальність досліджень спінових збуджень у наноструктурах обумовлена, зокрема, перспективами їх застосувань у техніці – для створення нових пристроїв зберігання та передачі інформації [5, 6], нових обчислювальних пристроїв [7], у біології [8] тощо. Відомо, що картина спінових хвиль у наносистемі сильно залежить від її форми та розмірів, тому спінові збудження досліджуються окремо в різних типах наносистем.

Особливий інтерес для вивчення представляють собою спінові хвилі у композитних наносистемах, зокрема, спінові збудження у феромагнітних нанооболонках – композитних наночастинках, що складаються з діелектричного ядра та тонкої металеві оболонки. Перші металеві нанооболонки, синтезовані в кінці 1990-х, складались з немагнітних матеріалів і тому представляли інтерес для вивчення переважно через їх оптичні властивості, зокрема, досліджувався плазмонний резонанс у таких системах [9, 10]. Проте, в останні роки були синтезовані нанооболонки з феромагнітного матеріалу [11], що робить дослідження спінових збуджень у таких системах актуальним.

Відомо, що ефекти, пов'язані з дисипацією енергії, можуть як суттєво впливати на картину спінових хвиль у системі, так і бути нехтовно малими (в залежності від частоти хвилі, розмірів, форми та матеріалу системи та інших факторів), див., наприклад, [12]. Тому при дослідженні спінових хвиль у наносистемах, взагалі, необхідно враховувати дисипативні ефекти.

Дана робота присвячена теоретичному дослідженню спінових хвиль у сферичній феромагнітній нанооболонці. Для спінової хвилі у такій структурі знайдено диференційне рівняння для магнітного потенціалу з урахуванням ефектів поглинання, магнітної диполь-дипольної взаємодії, обмінної взаємодії та анізотропії, а також спектр радіальних хвильових чисел. Для випадку короткохвильових спінових збуджень знайдено дисперсійне відношення, характерний час згасання спінового збудження та спектр радіальних хвильових чисел. Застосовність наближення короткохвильових спінових збуджень для типових нанооболонок підтверджено числовими оцінками.

Постановка задачі. Розглянемо сферичну нанооболонку, що складається з немагнітної серцевини та феромагнітної металеві оболонки. Внутрішній радіус оболонки позначимо a , зовнішній – b .

Нехай феромагнетик, з якого складається оболонка, має локально тип «легка вісь», так що рівноважна намагніченість M_0 всюди у оболонці спрямована радіально та є також постійною за модулем. Будемо вважати, що феромагнетик характеризується наступними параметрами: константа одновісної анізотропії β (вважається постійною), константа обмінної енергії a . Гіромагнітне відношення феромагнетика γ будемо вважати фіксованим і відомим. Згасання для спінових хвиль у оболонці вважаємо суттєвим, залишаючи релаксаційний доданок у рівнянні Ландау-Ліфшица. Оскільки типові нанооболонки мають товщину порядку кількох нанометрів та розміри порядку десятків нанометрів, хвильові числа для спінових збуджень лежать в інтервалі, в якому ми маємо застосовувати дипольно-обмінне наближення, враховуючи як магнітну диполь-дипольну взаємодію, так і обмінні ефекти.

Нехай у описаній вище феромагнітній оболонці розповсюджуються у азимутально-полярних напрямках спінові коливання (стоячі хвилі) з малими збуреннями густини магнітного моменту та, відповідно, магнітного поля. Таким чином, для збурення m густини магнітного моменту ($M = M_0 + m$, де M – загальна густина магнітного моменту) виконується $|m| \ll |M_0|$, для збурення h напруженості магнітного поля $|h| \ll |H_0^{(i)}|$, де $H_0^{(i)}$ – рівноважне значення напруженості магнітного поля всередині феромагнетика.

Задача даної роботи полягає у знаходженні дисперсійного відношення та спектру радіальних хвильових чисел для таких коливань.

Теоретичне підґрунтя. Рівняння для магнітного потенціалу. Запишемо рівняння Ландау-Ліфшица для нашої системи, використовуючи релаксаційний член у формі Гільберта: $T_G = \frac{\alpha_G}{M} \left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right]$, де α_G – параметр дисипації. Тоді лінеаризоване рівняння Ландау-Ліфшица має вигляд [13]

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \gamma \left(\mathbf{M}_0 \times \left(\mathbf{h} + \alpha \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i^2} + \beta \mathbf{n}(\mathbf{m}\mathbf{n}) - \frac{1}{M_0^2} \left(\mathbf{M}_0 \mathbf{H}_0^{(i)} + \beta (\mathbf{M}_0 \mathbf{n})^2 \right) \mathbf{m} + \frac{\alpha_G}{\gamma M_0} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \right) \right), \quad (1)$$

тут \mathbf{n} – одиничний вектор у напрямку осі анізотропії системи. У сферичних координатах (r, θ, φ) та для величин \mathbf{m} та \mathbf{h} у вигляді періодичних коливань $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}_0(r, \theta, \varphi) \exp(i\omega t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}_0(r, \theta, \varphi) \exp(i\omega t)$ з міркувань симетрії, враховуючи також $\mathbf{M}_0 \parallel \mathbf{H}_0^{(i)} \parallel \mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_r$, $\mathbf{m}_0 \perp \mathbf{e}_r$, де \mathbf{e}_r – радіальний орт, вираз (1) можна переписати наступним чином:

$$i\omega \mathbf{m}_0 = \gamma \left(M_0 \mathbf{e}_r \times \left(\mathbf{h}_0 + \alpha \sum_i \frac{\partial^2 \mathbf{m}_0}{\partial x_i^2} - \left(\beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} \right) \mathbf{m}_0 \right) \right). \quad (2)$$

Для отримання повної системи рівнянь, що пов'язують магнітне поле та густину магнітного моменту, використаємо магнітостатичне наближення [13]: $\mathbf{h} = -\nabla \Phi$, $\mathbf{h}_0 = -\nabla \Phi_0$, де Φ – магнітний потенціал, Φ_0 – потенціал амплітуди збурення поля \mathbf{h}_0 ($\Phi = \Phi_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$). Тоді з рівняння Максвелла $\text{div } \mathbf{h} = -4\pi \cdot \text{div } \mathbf{m}$ отримуємо шукане співвідношення:

$$\text{div } \mathbf{m}_0 = \Delta \Phi_0 / (4\pi). \quad (3)$$

Виключимо з системи рівнянь (2), (3) збурення густини магнітного моменту \mathbf{m}_0 . Для цього переписемо (2) у вигляді

$$-\frac{i\omega}{\gamma M_0} \mathbf{e}_r \times \mathbf{m}_0 = -\nabla \Phi_0 + \alpha \Delta \mathbf{m}_0 - \left(\beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} \right) \mathbf{m}_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \mathbf{e}_r. \quad (4)$$

Візьмемо дивергенцію від обох частин рівняння. Використовуючи (3), після деяких перетворень ми отримаємо

$$\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 M_0^2} - \left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} - \alpha \Delta \right) \left(\left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} \right) + 4\pi - \alpha \Delta \right) \right) \Delta \Phi_0 + 4\pi \left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} - \alpha \Delta \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) = 0. \quad (5)$$

Аналогічне рівняння можна отримати для системи з циліндричною симетрією, див., наприклад [14, 15]. Розв'язок такого рівняння шукається у вигляді лінійної комбінації циліндричних функцій. Яки ми побачимо далі, ми можемо розв'язати задачу аналогічним чином у випадку, коли спінові збудження є короткохвильовими, так що $ka \gg l$.

Дисперсійне рівняння. Використовуючи рівняння (5), знайдемо дисперсійне рівняння для спінових збуджень у системі, яку ми моделюємо. Підставимо спочатку розв'язок рівняння (5) у вигляді

$$\Phi_0(r, \theta, \varphi) = (A_1 j_l(kr) + A_2 n_l(kr)) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (6)$$

тут j_l, n_l – сферичні функції Бесселя та Неймана порядку l , відповідно, Y_{lm} – сферичні поліноми, k – радіальне хвильове число, A_1, A_2 – константи. Ми отримаємо

$$-\left(\frac{\omega^2}{\gamma^2 M_0^2} - \left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta + \alpha k^2 - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} \right) \left(\left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} \right) + 4\pi + \alpha k^2 \right) \right) k^2 + 4\pi \left(\frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \beta + \alpha k^2 - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0} \right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right) = 0 \quad (7)$$

Рівняння (7) не можна вважати дисперсійним відношенням, оскільки воно містить змінний доданок $l(l+1)/r^2$. Проте, якщо коливання є короткохвильовими, так що $ka \gg l$, ми можемо знехтувати у рівнянні (7) змінним доданком $l(l+1)/r^2$ порівняно з k^2 . Справді, за умови $ka \gg l$ виконується також $k^2 r^2 \gg l(l+1)$ для всіх $r \in [a, b]$. Таким чином, в цьому наближенні ми можемо переписати рівняння (7) у вигляді

$$-\left(\omega^2/(\gamma^2 M_0^2) - \left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta + \alpha k^2 - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right) \left(\left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right) + 4\pi + \alpha k^2\right)\right) k^2 + 4\pi \left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta + \alpha k^2 - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right) (-k^2) = 0 \quad (8)$$

або, оскільки за $ka \gg l$ виконується $k \neq 0$,

$$\omega^2/(\gamma^2 M_0^2) - \left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta + \alpha k^2 - \frac{i\alpha_G \omega}{\gamma M_0}\right) \left(\left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right) + 4\pi + \alpha k^2\right) + 4\pi \left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta + \alpha k^2 - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right) = 0 \quad (9)$$

Звідси (з урахуванням $\gamma < 0$) ми отримуємо для частоти

$$\omega = -\gamma M_0 \sqrt{\left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right)^2 + 2\alpha \left(H_0^{(i)}/M_0 + \beta - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0)\right) k^2 + \alpha^2 k^4} = -\gamma M_0 \left(\beta + H_0^{(i)}/M_0 - i\alpha_G \omega/(\gamma M_0) + \alpha k^2\right) \quad (10)$$

або після групування доданків, що містять частоту, у обох частинах цього рівняння, отримуємо

$$\omega = \frac{|\gamma| M_0}{1 + \alpha_G^2} (1 + i\alpha_G) \left(\beta + \frac{H_0^{(i)}}{M_0} + \alpha k^2\right) \quad (11)$$

для частоти, або

$$k = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\omega}{|\gamma| M_0} (1 - i\alpha_G) - \beta - \frac{H_0^{(i)}}{M_0}\right)} \quad (12)$$

для хвильового числа. Відповідно, характерний час згасання хвилі за умови дійсного хвильового числа запишеться

$$\tau = \frac{2\pi}{\text{Im } \omega} = \frac{2\pi(1 + \alpha_G^2)}{|\gamma| M_0 \alpha_G \left(\beta + H_0^{(i)}/M_0 + \alpha k^2\right)} \quad (13)$$

Зауважимо, що дисперсійне рівняння (12) співпадає з отриманим для для спінових хвиль у тонкому циліндричному нанодроті [14, 15] та – за умови нехтування дисипацією – з відомими дисперсійним рівнянням для спінових хвиль у тонкій плівці [16]. Отже, ми можемо зробити висновок, що для досить малої (принаймні по одному виміру) наносистеми картина спінових хвиль стає квазіодновимірною, причому критерієм переходу для нанооболонки є умова $ka \gg l$, тобто умова досить коротких хвиль, великого розміру оболонки або малого номеру азимутальної моди.

Спектр хвильових чисел. Знайдемо спектр радіальних хвильових чисел k у системі, яку ми розглядаємо. Ця задача, взагалі, потребує розв'язку рівняння для магнітного потенціалу разом з граничними умовами для магнітного поля для обох векторів \mathbf{B} і \mathbf{H} як всередині, так і ззовні оболонки. Таким чином, ми можемо отримати ще одне (крім отриманого дисперсійного рівняння) відношення між частотою ω спінової хвилі та хвильовим числом k , що і задасть шуканий спектр. Цей метод вимагає чисельних розрахунків, проте, для нанооболонки з немагнітним зовнішнім матеріалом ми можемо вибрати граничні умови, які дозволяють отримати шуканий спектр в аналітичному вигляді. Для нашої задачі має сенс використовувати «закріплені» граничні умови разом з умовою неперервності нормальної компоненти потоку енергії. Оскільки густина магнітного моменту ззовні оболонки дорівнює нулю, ми отримуємо $\mathbf{m}|_{r=a,b} = 0$, $\partial \mathbf{m} / \partial \rho|_{r=a,b} = 0$.

Використаємо рівняння Максвелла (4) для перетворення цих граничних умов на граничні умови для магнітного потенціалу. Ми отримаємо $\Delta \Phi|_{r=a,b} = 0$, або з (8) $k^2 \Phi = 0$. Звідси, зауваживши, що

у короткохвильовому наближенні $k \neq 0$, отримуємо $\Phi_0|_{a,b} = 0$, тобто

$$A_1 j_l(ka) + A_2 n_l(ka) = A_1 j_l(kb) + A_2 n_l(kb) = 0. \quad (19)$$

На даному етапі ми, взагалі, маємо розв'язати рівняння для магнітного потенціалу разом з граничними умовами на поверхні оболонки для отримання іншого зв'язку між A_1 , A_2 та k . Проте, оскільки ми шукаємо спектр хвильових чисел, а не значення амплітуд хвилі, ми можемо зробити систему (20) повною, розділивши на одну з амплітуд, наприклад, A_1 :

$$j_l(ka) + A_2/A_1 \cdot n_l(ka) = j_l(kb) + A_2/A_1 \cdot n_l(kb) = 0. \quad (21)$$

Система (21) задає шуканий спектр в неявному вигляді. Для випадку короткохвильових спінових збуджень ми можемо значно спростити цей вираз і отримати спектр в явному вигляді. Справді, за умови $ka \gg l > 1$, ми можемо використати асимптотику функцій Бесселя. Записавши магнітний потенціал у вигляді $\Phi_0(r) = Dr^{-1} \sin(kr + \delta) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, де D – константа нормування, а δ – початкова фаза, отримуємо з (21)

$$k = \pi n / (b - a). \quad (22)$$

Зауважимо, що спектр хвильових чисел (22) є аналогічним до спектру хвильових чисел частинки у одновимірній потенційній ямі, таким чином, в даному наближенні задача стає квазіодновимірною.

Числові оцінки. Зауважимо, що у нанооболонці, яку ми розглядаємо, не можуть бути збуджені моди з довільним значенням квантових чисел n , l через наявність обмежень на значення цих чисел. Зробимо оцінки кількості мод, що можуть бути збуджені такої системи.

Обмеження на n пов'язано з тим, що радіальна довжина півхвилі спінового збудження, з одного боку, не може перевищувати товщину оболонки (яка складає одиниці нанометрів для типових нанооболонок), з іншого боку, не може бути менша за обмінну довжину l_{ex} , яка складає одиниці нанометрів для типових феромагнетиків. Це означає, що для типових нанооболонок може бути збуджена тільки перша мода зі значенням хвильового числа $k = \pi / (b - a)$ (або нульова, яку ми не розглядаємо, оскільки у наближенні $ka \gg l$, $k \neq 0$).

Обмеження на число l можна отримати з аналогічних міркувань: оскільки максимальна азимутальна довжина хвилі має порядок $2\pi r_0 / l$, де середній радіус оболонки $r_0 = (a + b) / 2$ складає одиниці або десятки нанометрів для типових нанооболонок, а мінімальна також обмежена обмінною довжиною, для типових феромагнітних нанооболонок можна збудити тільки перші $N \sim 2\pi r_0 / l_{ex} \sim 10$ азимутальних мод.

Зробимо числові оцінки для частот спінового збудження. З наведених вище обмежень на довжину хвилі ми можемо сказати, що хвильове число k для типової нанооболонки має порядок величини $10^6 - 10^7 \text{ см}^{-1}$. Для типових феромагнетиків $\beta \sim 1$, $\alpha \sim 10^{-12} \text{ см}^{-2}$, $\alpha_G \ll 1$, так що для типових значень гіромагнітного відношення та рівноважної намагніченості $\gamma = 10^7 \text{ Гц/Гс}$, $M_0 = 10^3 \text{ Гс}$ частота спінового збудження, згідно (11), має порядок 10^{10} Гц на всьому інтервалі хвильових чисел. Характерний час згасання спінової хвилі, обрахований з умови (13), складає $10^{-5} - 10^{-9} \text{ с}$ (оскільки для типових феромагнетиків α_G лежить в діапазоні $10^{-1} - 10^{-5}$).

Нарешті, проаналізуємо застосовність короткохвильового наближення $ka \gg l$ для типових нанооболонок. У відповідності з наведеними вище міркуваннями $ka = \pi a / (b - a) \sim 10^2$ для типових нанооболонок, у той час як $l \leq N \sim 10$ для типових нанооболонок. Отже, ми можемо стверджувати, що для типових феромагнітних нанооболонок короткохвильове наближення, в якому ми працюємо, виконується.

Підсумки і зауваження. Таким чином, нами досліджені дипольно-обмінні спінові коливання у сферичній нанооболонці з феромагнетиком, що має тип «легка вісь». Отримано рівняння для магнітного потенціалу малих спінових збуджень у такій системі з урахуванням ефектів, пов'язаних з дисипацією енергії. Для коротких спінових збуджень (або великого розміру оболонки чи малого номеру азимутальної моди, так що виконується $ka \gg l$, де k – радіальне хвильове число, a – внутрішній радіус оболонки, l – номер азимутальної моди) отримане дисперсійне відношення та характерний час згасання спінового збудження (за умови дійсного хвильового числа). Крім того, отримано спектр радіальних хвильових чисел для таких спінових збуджень. З обмежень на довжину хвилі спінового збудження отримано обмеження на кількість радіальних та азимутальних мод коливань. Застосовність короткохвильового наближення для типових нанооболонок підтверджено числовими оцінками.

Можливі подальші дослідження в даному напрямку включають в себе:

- отримання точного зв'язку рівняння для магнітного потенціалу (5) та, відповідно, точного дисперсійного відношення;
- проведення подібних розрахунків для іншої конфігурації намагніченості нанооболонки та іншого типу феромагнетиком.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Stapele R. P. The spin-wave spectrum of layered magnetic thin films / R. P. van Stapele, F. J. A. M. Greidanus, J. W. Smits // *J. Appl. Phys.* – 1985. – Vol. 57. – P. 1282–1290.
2. Kalinikos B. A. Envelope solitons of highly dispersive and low dispersive spin waves in magnetic films / B. A. Kalinikos, N. G. Kovshikov, A. N. Slavin // *J. Appl. Phys.* – 1991. – Vol. 69. – P. 5712–5717.
3. Brillouin light scattering from quantized spin waves in micron-size magnetic wires / J. Jorzick, S. O. Demokritov, C. Mathieu et al. // *Phys. Rev. B.* – 1999. – Vol. 60. – P. 15194.
4. Spin waves in magnetic wires: a Brillouin study / S.M. Chérif, Y. Roussigné, C. Dugautier, P. Moch // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2000. – Vol. 222. – P. 337–346.
5. Neusser S. Magnonics: spin waves on the nanoscale / S. Neusser, D. Grundler // *Advanced Materials.* – 2009. – Vol. 21. – P. 2927–2932.
6. Chappert C. The emergence of spin electronics in data storage / C. Chappert, A. Fert, F.N. Van Dau // *Nature Materials.* – 2007. – Vol. 6. – P. 813–823.
7. Realization of spin-wave logic gates / T. Schneider, A. A. Serga, B. Leven et al. // *Appl. Phys. Lett.* – 2008. – Vol. 92, Iss. 2. – 022505.
8. Micro-engineered local field control for high-sensitivity multispectral MRI / G. Zabow, S. Dodd, J. Moreland, A. Koretsky // *Nature.* – 2008. – Vol. 453. – P. 1058–1063.
9. Averitt R. D. Plasmon Resonance Shifts of Au-Coated Au₂S Nanoshells: Insight into Multicomponent Nanoparticle Growth / R. D. Averitt, D. Sarkar, N. J. Halas // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 78. – P. 4217–4220.
10. Hybridization Model for the Plasmon Response of Complex Nanostructures / E. Prodan, C. Radloff, N. J. Halas, P. Nordlander // *Science.* – 2003. – Vol. 302. – P. 419–422.
11. Sonochemical synthesis of ferromagnetic core-shell Fe₃O₄-FeP nanoparticles and FeP nanoshells / C. G. Hu, Y. Lic, J. P. Liu et al. // *Chem. Phys. Lett.* – 2006. – Vol. 428. – P. 343–347.
12. Wu C. Spin Wave Resonance and Relaxation in Microwave Magnetic Multilayer Structures and Devices: Thesis of Dissert. for Ph.D. / Wu Cheng. – New York, 2008. – 104 p.
13. Ахиезер А. И. Спиновые волны / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
14. Arias R. Theory of spin excitations and the microwave response of cylindrical ferromagnetic nanowires / R. Arias, D.L. Mills // *Phys. Rev. B.* – 2001. – Vol. 63. – 134439.
15. Spin waves in a periodically layered magnetic nanowire / V. V. Kruglyak, R. J. Hicken, A. N. Kuchko, V. Yu Gorobets // *J. Appl. Phys.* – 2005. – Vol. 98. – P. 014304.
16. Kruglyak V. V. Spin-wave spectrum of an ideal multilayer magnet upon modulation of all parameters of the Landau-Lifshitz equation / V. V. Kruglyak, A. N. Kuchko, V. I. Finokhin // *Physics of the Solid State.* – 2004. – Vol. 46. – P. 867–871.

Надійшло до редакції 13.12.2013 р.

РЕЗЮМЕ

В работе теоретически исследованы спиновые возбуждения в наноболочке из одноосного ферромагнетика типа «легкая ось». Для дипольно-обменных возбуждений в магнитоэлектростатическом приближении получено уравнение для магнитного потенциала с учетом диссипативных эффектов и анизотропии. Для коротковолновых спиновых возбуждений получено дисперсионное уравнение, характерное время затухания и спектр радиальных волновых чисел. Получены ограничения на количество возможных радиальных и азимутальных мод спиновых возбуждений. С помощью числовых оценок показано, что используемое в работе коротковолновое приближение применимо для типичных наноболочек.

Ключевые слова: ферромагнитная наноболочка, спиновое возбуждение, дипольно-обменная теория.

SUMMARY

In the paper, spin excitations in a nanoshell comprised of an uniaxial ferromagnet of the "easy axis" type are investigated theoretically. For dipole-exchange excitations, an equation for the magnetic potential in magnetostatic approximation is obtained with accounting for the dissipative effects and the anisotropy. For short-wave spin excitations, a dispersion relation, a characteristic damping time and a radial wavenumber spectrum is obtained. Limitations on the number of possible radial and azimuthal modes of spin excitations are obtained. It is shown (via numerical evaluations) that the short-wave approximation used in the paper is applicable for typical nanoshells.

Keywords: ferromagnetic nanoshell, spin excitation, dipole-exchange theory.

УДК 622.621.928.8

Ю. А. Легенький, Ю. Н. Пименов, О. О. Тарасова

**ВЛИЯНИЕ ГРАДИЕНТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СКОРОСТЬ
ЦЕМЕНТАЦИОННОГО ОСАЖДЕНИЯ МЕДНЫХ ДЕНДРИТОВ**

Отработана весовая методика измерения скорости контактного (цементационного) осаждения медного дендритного покрытия на стальные ферромагнитные образцы (подложки) сферической и цилиндрической формы в магнитном поле. Исследовано влияние магнитофореза ионов в растворах электролитов на зависимости скорости цементационного осаждения дендритов меди от величины напряженности внешнего магнитного поля, его направления относительно оси цилиндрических подложек и их ориентации относительно направления силы тяжести.

Ключевые слова: градиентное магнитное поле, магнитофорез, цементационное осаждение, ферромагнитный шар, ферромагнитный цилиндр.

Введение. Влияние магнитного поля на явления, происходящие на границе металл–электролит, привлекают активное внимание и физиков и химиков [1–14]. При этом часто исследуемым параметром является скорость электрохимических реакций. Влияние магнитного поля на скорость цементационного осаждения является существенно не однозначным, так как цементационное осаждение представляет собой совокупность сопряженных процессов, проходящих вблизи границы металл–электролит. Эти процессы включают, кроме собственно процессов растворения металла цементатора и осаждения ионов цементуемого компонента, еще процессы отвода ионов растворенного металла и подвода ионов осаждающегося металла [15, 16]. Магнитное поле может влиять на каждый из этих процессов [14, 17]. На данный момент теорий, описывающих поведение цементационных систем в магнитном поле, нет. При этом необходимо отметить, что прохождение электрохимических реакций в градиентных магнитных полях имеет ряд особенностей, связанных с влиянием магнитных полей на конвективное движение электролитов, сопровождающее электрохимические реакции [1–14]. В частности в работах [2, 14, 17] показано, что ферромагнитное тело, помещенное в электролит, намагничиваясь во внешнем магнитном поле, формирует вблизи себя области раствора с измененной концентрацией ионов по отношению к объемной концентрации этих ионов. В работе [2] показано, что процесс формирования таких областей можно наблюдать, используя методику подкрашивания выбранного вида ионов. Так как при формировании таких областей происходит дополнительный, по отношению к естественному, массоперенос участников электрохимических реакций, то это должно отражаться на скорости цементационного осаждения. Поэтому весьма актуальны экспериментальные исследования, способствующие накоплению данных о влиянии градиентного магнитного поля на скорость цементационного осаждения. Учитывая вышесказанное, целью настоящей работы было исследование влияния напряженности намагничивающего поля и его ориентации на скорость цементационного осаждения меди.

Образцы и методы исследований. Согласно [15] скорость процесса цементации при отсутствии побочных реакций выражается массой вытесняемого металла, осевшего на поверхности вытесняющего металла в единицу времени, или массой вытесняющего металла, переходящего в ионное состояние. Поэтому весовой метод является одним из часто применяемых методов для измерения скорости цементационного осаждения [18, 20]. В настоящей работе для оценки скорости цементационного осаждения используется именно весовая методика, то есть определение количества осажденной меди за заданный промежуток времени определяется по измерению убыли массы стального образца (подложки), на который осуществляется осаждение [20].

Все исследования проводили на образцах сферической и цилиндрической формы, изготовленных из стали марки ШХ-15 (ГОСТ 801-78). Растворы для цементационного осаждения готовили из меди сернистой, 5-водной квалификации «Ч». Перед осаждением поверхность образцов подготавливалась в несколько этапов. Смазка и другие загрязнения удалялись механическим путем (протирание ветошью). Затем объекты обезжиривались в насыщенном растворе NaOH в течение 3 минут, затем извлекались из раствора щелочи и тщательно промывались в дистиллированной воде. После этого, объекты высушивались и декапировались в растворе азотной кислоты, с концентрацией 2,5 % в течении 1,5 минут. Затем объекты снова промывались дистиллированной водой и высушивались. После подготовки поверхности образца к цементационному осаждению производилось его взвешивание на аналитических весах. Взвешенный и подготовленный к исследованию образец закреплялся в центре кюветы с помощью специально изготовленных не магнитных, не проводящих держателей. После установки кюветы с образцом в магнитное поле в кювету заливалось необходимое количество раствора для цементационного осаждения. Начало процесса осаждения определялось визуально с помощью микроскопа. В ходе эксперимента про-

водилась цифровая фото- и видео съемка процесса осаждения. Установка для цементационного осаждения на ферромагнитные подложки в магнитном поле описана в работе [2].

По истечении заданного времени эксперимента, объект, вместе с кюветой, извлекался из междуплюсного зазора магнита без выключения магнитного поля. Реакционный раствор сливался в отдельный сосуд для последующего анализа, а образец прямо в кювете подвергался интенсивному промыванию дистиллированной водой. Затем объект исследования извлекался из кюветы, с него механически удалялись дендриты, объект высушивался и, после этого, определялся его вес. Разницу между начальным (до опыта) и конечным значением массы образца пересчитывали в массу меди, осажденной за заданный промежуток времени, и считали этот параметр скоростью цементационного осаждения. Измерения массы образцов до цементационного осаждения и после осаждения производили на аналитических весах с точностью до 0,0001 г.

Контроль и калибровку данной методики измерения скорости цементационного осаждения производили по параллельному измерению изменения концентрации меди и железа в рабочем растворе перед осаждением (контрольная проба) и после цементационного осаждения меди в течение заданного интервала времени.

Содержание железа в растворе определяли пламенным атомно-абсорбционным методом на атомно-абсорбционном спектрофотометре «Сатурн-3» по резонансной спектральной линии железа 248,3 нм и ширине щели монохроматора 0,1 нм. Использовали стехиометрическое пламя «ацетилен-воздух». Определение проводили по двухлучевой схеме. Пробы разбавляли дистиллированной водой в 100 раз. Градуировку прибора производили по методу градуировочного графика.

Содержание меди определяли методом окислительно-восстановительного титрования. Отбирали 10,00 мл исследуемого раствора в коническую колбу для титрования объемом 250 мл, упаривали, растворяли в 25 мл дистиллированной воды при нагревании. После охлаждения вносили 2 г KI и титровали 0,1 М раствором $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ до посветления раствора, затем вводили 2 мл 1 % раствора крахмала, при этом раствор окрашивался в синий цвет. Продолжали титрование до исчезновения синей окраски.

Влияние магнитного поля на временные зависимости массы осажденной меди. Из литературы известно, что процесс цементационного осаждения развивается в несколько этапов [15], которые отличаются в частности и скоростью цементационного осаждения. Магнитное поле может сдвигать во времени эти этапы. Поэтому были проведены измерения зависимостей массы меди M_{Cu} , осажденной за заданные образцы (шары и цилиндры), от времени осаждения t (т.е. получены зависимости $M_{\text{Cu}}(t)$) в магнитном поле и без магнитного поля. На рис. 1, а приведены эти зависимости $M_{\text{Cu}}(t)$, полученные при цементационном осаждении меди на стальные шары с диаметром $D=4$ мм без приложения магнитного поля (кривая 1) и с приложением магнитного поля с напряженностью $H=1000$ Э (кривая 2) в зависимости от времени. На рис. 1, а по оси ординат отложены значения массы осажденной меди в граммах. Каждая точка получена усреднением не менее 3 опытов. На рис. 1, а скорость осаждения меди характеризуется углом наклона зависимостей $M_{\text{Cu}}(t)$ к оси времени. Для анализа полученных данных введем параметр $Q = M_{\text{Cu}}(t)/t$, характеризующий среднюю скорость осаждения меди за время осаждения t . На рис. 1, б приведены зависимости параметра Q от времени осаждения t , пересчитанные из данных рис. 1, а. Обозначения кривых 1 и 2 на рис. 1, б соответствуют обозначениям рис. 1, а. На рис. 1, б по оси ординат отложены значения параметра Q в мкг/с. Из анализа рис. 1, б видно, что поведение во времени кривых 1 и 2 идентично, при этом на кривых 1 и 2 можно выделить 3 участка. На первом участке до 60 минут осаждения наблюдается рост параметра Q . На втором участке, от 60 до 90 минут осаждения, параметр Q стабилизируется и на третьем участке после 90 минут осаждения – падает. На рис. 1, а и рис. 1, б видно, что кривая 2 идет ниже кривой 1, что свидетельствует о снижении общей скорости осаждения в магнитном поле по сравнению с осаждением без магнитного поля. Уменьшение общей скорости осаждения в магнитном поле можно объяснить, тем, что при осаждении в магнитном поле магнитные полюса стального ферромагнитного шара блокируются от осаждения дендритного покрытия [14, 17]. Это явление хорошо видно при наблюдении за процессом осаждения в микроскоп. На рис. 2 приведены фотографии, полученные в процессе цементационного осаждения меди на стальной ферромагнитный шар без магнитного поля (рис. 2, а) и в магнитном поле (рис. 2, б). Направление магнитного поля обозначено на рисунке черной стрелкой. Из сопоставления рис. 2, а и 2, б видно, что при осаждении дендритов меди на стальной фер-

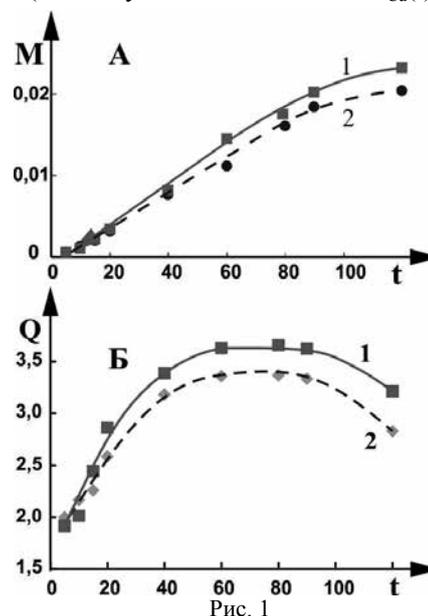


Рис. 1

ромагнитный шар в магнитном поле часть шара (область магнитных полюсов шара) заблокирована для осаждения дендритов. Осаждение происходит только в экваториальной области шара. Измерение площади заблокированной поверхности показывает, что она составляет примерно половину от всей поверхности шара, т.е. меньше на ~50 %. При этом из анализа данных, приведенных на рис. 1, а, видно, что масса меди, осажденной на шар в магнитном поле, меньше массы меди, осажденной без магнитного поля, примерно на 10 %. Поэтому можно сказать, что, несмотря на уменьшение общего количества меди, осажденной на шар в магнитном поле, скорость осаждения меди, осажденной на единицу поверхности в экваториальной части шара (рис. 2, б), превышает скорость осаждения меди, приходящуюся на единицу поверхности осаждения без магнитного поля.

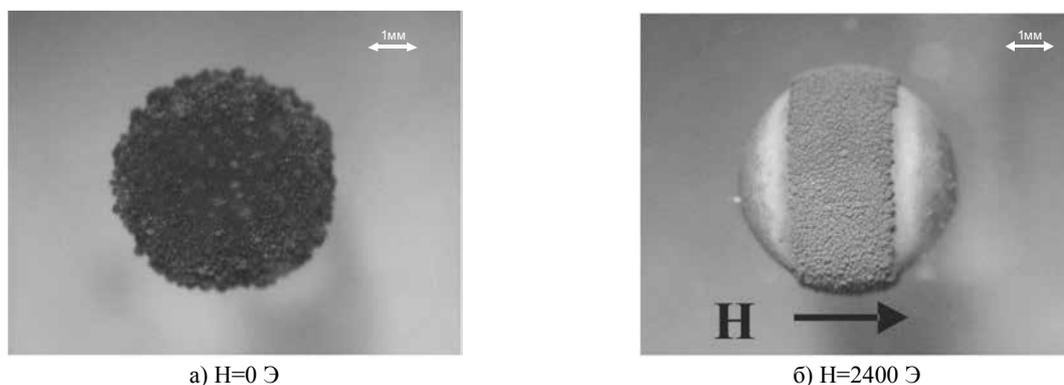


Рис. 2

Для дальнейших исследований влияния параметров эксперимента на скорость цементационного осаждения необходимо определить интервал времени, в течение которого будет производиться осаждение. Из анализа данных приведенных на рис. 1, б мы выбрали время осаждения $T_0 = 60$ минут. Из рис. 1, б видно, что T_0 это время осаждения, которое соответствует концу участка возрастания параметра Q , характеризующего среднюю скорость осаждения за время осаждения t .

Влияние напряженности внешнего поля на скорость цементационного осаждения медных дендритов. Установка для исследований особенностей цементационного осаждения на высокоградиентные ферромагнитные подложки (насадки) в магнитном поле описана в работах [2, 17]. Исследования проводились на сферических и цилиндрических образцах при изменении напряженности намагничивающего поля в диапазоне $H=0-4000$ Э. Внешнее магнитное поле было направлено горизонтально. Цилиндрические стальные образцы (стержни) закреплялись при измерениях так, что их продольная ось была параллельна направлению намагничивающего поля. Подготовка образцов к измерениям, и измерение скорости цементационного осаждения проводилось согласно методике, изложенной в начале статьи. В данной серии опытов концентрация меди в растворе была постоянной величиной и составляла $C_{Cu}=0,2$ моль/л. На рис. 3 представлены результаты измерений массы меди M_{Cu} , осажденной за $T_0 = 60$ минут, полученные на стальных ферромагнитных шарах диаметром $D_{ш}=4$ мм (квадраты на рис. 3) и стержнях с $D_c=1,5$ мм, длиной $L=13,8$ мм (кружки на рис. 3). На рис. 3 по оси ординат M отложена величина массы осажденной меди в миллиграммах, а по оси абсцисс величина напряженности магнитного поля H в эрстедах, в котором произведено осаждение. Каждая точка получена усреднением не менее чем 3 опытов.

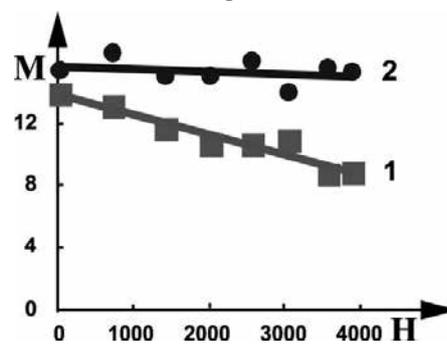


Рис. 3

Из анализа рис. 3 видно, что при увеличении напряженности внешнего намагничивающего поля скорость осаждения и для шаров и для стержней падает, характер падения близок к линейному, при этом степень падения для шаров больше. Полученные данные можно объяснить следующим образом. Для шаров конфигурация зоны осаждения (расположение экваториальной зоны осаждения и заблокированные для осаждения полюса см. рис. 2) формируется в первые минуты (не более 5-6 минут) и сохраняется в таком виде до конца эксперимента ($T_0=60$ мин). Изменяется только высота и ветвистость дендритов. Для стержней с форм-фактором $\lambda=9$, использованных в данных экспериментах, наблюдается другая картина. На рис. 4 показано изменение распределения дендритов, осажденных в магнитном поле на стальную стержню в зависимости от длительности осаждения (рис. 4, а – 15 минут осаждения, рис. 4, б – 60 минут осаждения). На первоначальном этапе наблюдается неоднородное распределение осажденных дендритов вдоль оси стержня (рис. 4, а), при этом формируются зоны ускоренного и замедленного осаждения. Расположение зон

ускоренного осаждения, представленное на рис. 4, а, коррелирует с распределением напряженности магнитного поля вблизи поверхности намагниченного стержня и распределением вихревых потоков формирующихся вокруг стержня при цементационном осаждении на него в магнитном поле. С течением времени в зоне замедленного осаждения процесс осаждения дендритов ускоряется, и распределение осажденных дендритов становится значительно более однородным (рис. 4, б). Так как распределение напряженности магнитного поля вблизи поверхности стержня с течением времени не изменяется, то, по-видимому, изменяется гидродинамическая картина конвективных потоков электролита. Возможно, это связано с увеличением количества осажденных дендритов, создающих гидродинамическое сопротивление конвективным потокам электролита, которые влияют на приток ионов меди и отвод ионов железа – участников реакции цементационного осаждения меди. Таким образом, для стержней с $\lambda=9$, исследуемых в данной серии экспериментов, и в магнитном поле и в его отсутствие в течение большей части времени в течение интервала осаждения наблюдается распределение осажденных дендритов близкое к однородному. То есть на стержнях, намагниченных вдоль поля, влияние магнитного поля, проявляющееся в наличии неоднородного (анизотропного, селективного) цементационного осаждения, видно намного меньше, чем на шариках (сравни рис. 2, б и рис. 4, б). Мы считаем, что это является одной из причин, почему зависимость скорости осаждения меди от напряженности магнитного поля H , измеренная на стержнях, убывает менее сильно, чем такая же зависимость, измеренная на шариках (рис. 3).

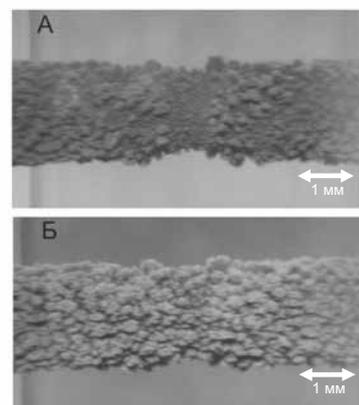


Рис.4.

Влияние ориентации цилиндра относительно направления намагничивающего поля и направления силы тяжести на скорость цементационного осаждения. В процессе цементационного осаждения, являющейся реакцией вытеснения, вблизи поверхности металла-осадителя возникают существенные градиенты концентрации вытесняющих и вытесняемых ионов, изменяется плотность раствора, возникают диффузионные и конвективные потоки электролита, которые влияют на подвод ионов меди и отвод ионов железа в зону реакции [15, 16]. С другой стороны наложение магнитного поля на цементационные системы приводит к появлению системы микро и макроскопических магнитогидродинамических потоков вблизи поверхности осаждения, зависящей от направления магнитного поля относительно поверхности осаждения (по аналогии с поведением коррозионных систем в магнитном поле [21–24]). В результате наложения этих процессов возникает картина со сложным взаимодействием потоков в электролите, влияющих на скорость цементационного осаждения. В дополнение к этому в цементационных системах, содержащих осесимметричные высокоградиентные ферромагнитные подложки, в магнитном поле формируются дополнительные вращательные потоки электролита вокруг направления магнитного поля [17, 21, 25]. Учитывая вышесказанное, теоретически предсказать влияние ориентации анизодиаметрического ферромагнитного образца, на который производится осаждение, относительно направления магнитного поля и направления силы тяжести, становится затруднительным. Поэтому в настоящей работе проведены экспериментальные измерения скорости цементационного осаждения на стальные ферромагнитные цилиндры (стержни) при изменении ориентации цилиндров относительно направления магнитного поля и направления силы тяжести при фиксировании остальных параметров эксперимента. Для проведения данной серии опытов был изготовлен специальный держатель для цилиндрических образцов, который позволял ориентировать ось этих образцов в рабочей кювете либо горизонтально, либо вертикально, сохраняя при этом одинаковые краевые условия в местах закрепления стержней. Изменение ориентации оси цилиндра относительно направления магнитного поля производили с помощью поворота кюветы с закрепленным образцом в магнитной системе. Цементационное осаждение проводили на стержни из стали ШХ-15 с диаметром $D_c=1,5$ мм и длиной $L=13,8$ мм в растворе сернокислой меди с концентрацией меди $C_{Cu}=0,2$ моль/л. Напряженность намагничивающего поля в данной серии опытов составляла $H=2200$ Э. Время осаждения $T_o=60$ минут. Подготовку поверхности стальных цилиндров к цементационному осаждению и измерение скорости цементационного осаждения меди проводили по методике, изложенной в начале статьи. Были исследованы четыре комбинации взаимной ориентации оси стержня, направления намагничивающего поля и направления силы тяжести. В табл. 1 представлены под соответствующими номерами описания исследованных комбинаций.

На рис. 5 представлены результаты измерений скорости цементационного осаждения меди на стальные ферромагнитные цилиндры в магнитном поле при изменении ориентации цилиндра относительно направления магнитного поля и направления силы тяжести для исследованных комбинаций, описанных в табл. 1. Номера столбиков по оси «X» на рис. 5 соответствуют табл. 1.

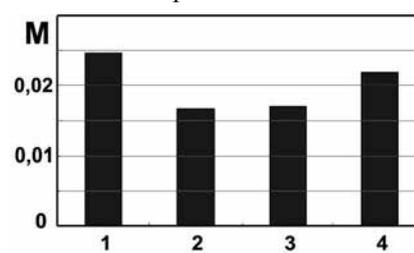


Рис. 5

По оси ординат отложены значения величин массы осажденной меди в миллиграммах. Каждое значение, приведенное на диаграмме, является средним не менее трех измерений.

Таблица 1

Комбинации взаимных ориентаций оси ферромагнитного стержня, направления магнитного поля и направления силы тяжести

№ п/п	Направление магнитного поля	Ориентация оси стержня относительно направления магнитного поля	Ориентация стержня относительно силы тяжести
1	горизонтальное	параллельно	горизонтально
2	горизонтальное	перпендикулярно	горизонтально
3	вертикальное	перпендикулярно	горизонтально
4	вертикальное	параллельно	вертикально

Из анализа рис. 5 видно, что скорость цементационного осаждения для комбинаций, в которых ферромагнитный стержень ориентирован вдоль направления магнитного поля (они в табл. 1 имеют номера 1 и 4), превышает таковую для комбинаций, в которых стержень ориентирован перпендикулярно направлению магнитного поля (номера 2 и 3). Это соотношение выполняется независимо от ориентации стержня относительно силы тяжести. То есть ориентация стержня относительно направления магнитного поля влияет на скорость цементационного осаждения значительно сильнее, чем его ориентация относительно направления силы тяжести. Более низкие значения скоростей цементационного осаждения при перпендикулярной ориентации стержней относительно направления магнитного поля можно объяснить наличием заблокированных для осаждения участков поверхности стержня на его магнитных полюсах, которые наблюдаются при перпендикулярной ориентации ферромагнитного стержня (рис. 6). На рис. 6 введены следующие обозначения: D_c – диаметр стержня, Z – ширина зоны осаждения дендритов меди на стержне. Из рис. 6 видно, что $Z < D_c$ и что полюсные зоны ферромагнитного стержня заблокированы для осаждения дендритов меди.

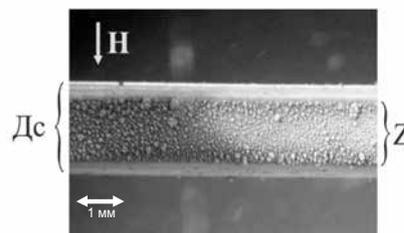


Рис. 6

Оценка площади поверхности стержня S_{Cu} , доступной для осаждения дендритов после блокировки магнитных полюсов стержня, показывает, что она составляет примерно половину от общей поверхности стержня, контактирующей с электролитом. Следовательно, если рассчитать скорость осаждения меди на единицу поверхности стержня, доступную для осаждения, M_{Cu}/S_{Cu} , то оказывается, что параметр M_{Cu}/S_{Cu} выше как раз для случая перпендикулярной ориентации стержней относительно направления магнитного поля.

Также необходимо отметить разницу в строении приповерхностных слоев электролита, сформированных после определенного времени цементационного осаждения, для случаев перпендикулярной и параллельной ориентации оси стержней относительно направления намагничивающего поля. На рис. 7 представлена фотография, на которой визуализировано формирование восходящих и ниспадающих конвективных потоков при горизонтальной ориентации стержня и горизонтальной ориентации направления намагничивающего поля, при цементационном осаждении дендритов меди.

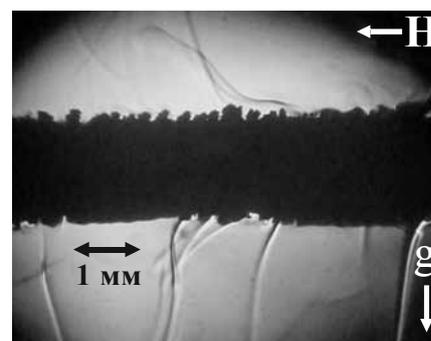


Рис. 7

В начальный период осаждения градиентное магнитное поле ферромагнитного стержня за счет магнитофореза ионов железа, вышедших в раствор электролита, успевают отводить слои, обогащенные ионами железа, к концам стержня в области с максимальной напряженностью магнитного поля. При этом вертикально направленные потоки не наблюдаются. Наблюдаются только вихревые потоки вокруг оси стержня, аналогичные потокам, описанным в работе [25]. Вихревые потоки обусловлены силой Лоренца, действующей на ионный ток в электролите, сформированный макроскопическим гальваническим элементом, возникающим при прохождении электрохимических реакций в короткозамкнутых системах в градиентном магнитном поле, аналогично модели, описанной в работе [21] для феррических образцов. Через некоторое время осаждения, по мере накопления продуктов реакции, которые не успевают отводиться за счет магнитофореза ионов железа, приповерхностные слои электролита изменяют свою плотность и в поле силы тяжести формируются вертикальные потоки, показанные на рис. 7.

При перпендикулярной ориентации оси стержня относительно направления намагничивающего поля картина строения приповерхностных слоев электролита, обогащенных ионами железа, существенно

иная (рис. 8). Рис. 8 визуализирует потоки и наличие приповерхностных областей электролита обогащенных ионами железа при цементационном осаждении дендритов меди на вертикально ориентированный стальной стержень в горизонтальном намагничивающем поле. Из рассмотрения рис. 8 видно, что при перпендикулярной ориентации стержня относительно магнитного поля слои электролита, обогащенные продуктами реакции, собираются на боковых сторонах стержня (на его магнитных полюсах) и блокируют осаждение медных дендритов в этих зонах.

Также из анализа рис. 7 и 8 видно, что в слоях электролита обогащенных продуктами реакции присутствуют как минимум две фазы раствора (всплывающая и тонущая), отличающиеся по плотности. Выяснение природы этих фаз и исследование их магнитных свойств требует дополнительных исследований, так как их поведение в магнитном поле может влиять на параметры цементационного осаждения в градиентных магнитных полях.

Выводы. Таким образом, в настоящей работе получены следующие результаты. Отработана весовая методика измерения скорости цементационного осаждения медного дендритного покрытия в магнитном поле на стальные ферромагнитные образцы сферической и цилиндрической формы. Исследовано влияние магнитофореза ионов в растворах электролитов на зависимости скорости цементационного осаждения дендритов меди от величины напряженности внешнего магнитного поля, его направления относительно оси цилиндрических образцов, от величины форм-фактора цилиндрических образцов и их ориентации относительно направления силы тяжести.

Показано, что при цементационном осаждении на стальные ферромагнитные градиентные подложки в магнитном поле скорость осаждения на не заблокированных участках поверхности увеличивается, но, за счет блокировки части поверхности осаждения, наблюдается уменьшение общей скорости осаждения. Показано, что при увеличении напряженности намагничивающего поля в диапазоне $H = 0 - 4000$ Э скорость цементационного осаждения уменьшается на сферических образцах более сильно чем на цилиндрических образцах. При исследовании влияния ориентации ферромагнитной цилиндрической подложки на картину и скорость осаждения дендритного покрытия показано, что при приложении намагничивающих полей с достаточной напряженностью магнитное поле изменяет анизотропию осаждения, накладываемую силой тяжести, и вызывает свою анизотропию осаждения, обусловленную магнитофорезом парамагнитных ионов раствора электролита в градиентном поле ферромагнитной цилиндрической подложки.

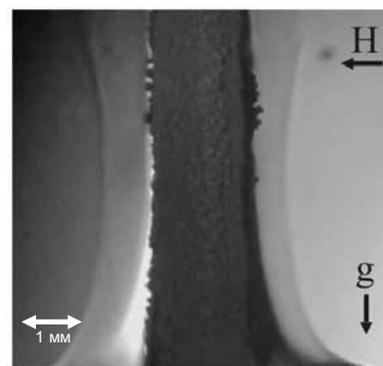


Рис. 8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Structured electrodeposition in magnetic gradient fields / M. Uhlemann, K. Tschulik, A. Gebert et al. // *Eur. Phys. J. Special Topics*. – 2013. – Vol. 220. – P. 287–302.
2. Quasi-stationary heterogeneous states of electrolyte at electrodeposition and etching process in a gradient magnetic field of a magnetized ferromagnetic ball / O. Yu. Gorobets, Yu. I. Gorobets, I. A. Bondar, Yu. A. Legenkiy // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2013. – Vol. 330. – P. 76–80.
3. Numerical simulation of the onset of mass transfer and convection in copper electrolysis subjected to a magnetic field / D. Koschichow, G. Mutschke, X. Yang et al. // *J. Electrochem.* – 2012. – Vol. 48. – P. 756–765.
4. In-situ analysis of the ion concentration distribution and the electrolyte convection evolving during electrodeposition in magnetic gradient fields / K. Tschulik, C. Cierpka, X. Yang et al. // *Magnetohydrodynamics*. – 2012. – Vol. 48, No 2. – P. 279–288.
5. Influence of Magnetostatic Fields of a Ferromagnetic Substrate on the Electrodeposition of Nickel Dendrites / S. V. Gorobets, O. Yu. Gorobets, O. K. Dvoinenko, G. L. Lebeda // *Physics of Metals and Metallography*. – 2012. – Vol. 113, No 2. – P. 129–134.
6. Magnetic structuring of linear copper electrodeposits / Peter Dunne, Rémy Soucaille, Karl Ackland, J. M. D. Coey // *J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 111. – P. 07B915
7. Electro deposition of separated 3D metallic structures by pulse reverse plating in magnetic gradient fields / K. Tschulik, R. Sueptitz, M. Uhlemann et al. // *Electrochimica Acta*. – 2011. – Vol. 56. – P. 5174–5177.
8. On the action of magnetic gradient forces in micro-structured copper deposition / G. Mutschke, K. Tschulik, T. Weier et al. // *Magnetohydrodynamics*. – 2012. – Vol. 48. – P. 299–304.
9. Muehlenhoff S. Lorentz-force-driven convection during copper magneto-electrolysis in the presence of a supporting buoyancy force / S. Muehlenhoff, G. Mutschke, K. Eckert et al. // *Electrochimica Acta*. – 2011. – Vol. 69. – P. 209–219.
10. Enrichment of paramagnetic ions from homogeneous solutions in inhomogeneous magnetic fields / X. Yang, K. Tschulik, M. Uhlemann et al. // *J. Physical Chemistry Letter*. – 2012. – Vol. 3. – P. 3559–3564.
11. In situ analysis of three-dimensional electrolyte convection evolving during the electrodeposition of copper in magnetic gradient fields / K. Tschulik, Ch. Cierpka, A. Gebert et al. // *Analytical Chem.* – 2011. – Vol. 83. – P. 3275–3281.
12. Electrodeposition of separated metallic structures in superimposed magnetic gradient fields / K. Tschulik, M. Uhlemann, A. Gebert, L. Schultz // *Transactions Electrochemical Society*. – 2011. – Vol. 41. – P. 9–16.E15C.

13. Clarifying the mechanism of reverse structuring during electrodeposition in magnetic gradient fields / K. Tschulik, C. Sierpka, G. Mutschke et al. // *Anal. Chem.* – 2012. – Vol. 84. – P. 2328–2334.
14. Формирование медных покрытий железных образцов в неоднородном магнитном поле / Ю. И. Горобец, С. В. Горобец, Ю. А. Легенький и др. // *Металлофизика и новейшие технологии.* – 2006. – Т. 28, № 12. – С. 1615–1621.
15. Антропов Л. И. Теоретическая электрохимия / Л. И. Антропов. – М.: Высшая школа, 1975. – 568 с.
16. Алкацев М. И. Процессы цементации в цветной металлургии / М.И. Алкацев. – Москва: Металлургия, 1981. – 245 с.
17. Анизотропное осаждение дендритных покрытий в градиентном магнитном поле из пара и диамагнитных растворов / Ю. И. Горобец, С. В. Горобец, Ю. А. Легенький, Ю. Н. Пименов // *Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки.* – 2009. – Вип. 1. – С. 266–271.
18. Масальский А. К. Способ измерения параметров контактного обмена на железе / А. К. Масальский, А. Ф. Нестеренко // *Украинский химический журнал.* – 1987. – Т. 53, № 3. – С. 285–288.
19. Антропов Л. И. Влияние добавок на скорость контактного выделения меди на железе / Л. И. Антропов // *Журнал прикладной химии.* – 1954. – Т. 27, № 5. – С. 527–532.
20. Пурин Б. А. Исследования контактного выделения меди на железных электродах в пирофосфатных электролитах / Б. А. Пурин, Э. А. Озола // *Защита металлов.* – 1966. – Т. 2, № 3. – С. 559–563.
21. Модель возникновения вихревых потоков электролита при цементационном осаждении дендритных покрытий в градиентном магнитном поле / О. Ю. Горобец, С. В. Горобец, Ю. А. Легенький, Ю. Н. Пименов // *Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природн. науки.* – 2009. – Вип. 2. – С. 14–19.
22. Waskaas M. Effect of magnetic fields on convection in solutions containing paramagnetic ions / M. Waskaas, Y. I. Khar-kats // *Journal of Electroanalytical Chemistry.* – 2001. – Vol. 502. – P. 51–57.
23. Aogaki R. Magnetic field effects in electrochemistry / R. Aogaki // *Magneto hydrodyn. J.* – 2001. – Vol. 37. – P. 143–150.
24. Effect of Magnetic Convection on Metal Substitution Reaction under Intense Magnetic Field / T. Kozuka, T. Sakai, R. Miyamura, M. Kawahara // *ISIJ International.* – 2003. – Vol. 43, No 6. – P. 884–889.
25. Gorobets S. V. Permanent magnetic field as an accelerator of chemical reaction and an initiator of rotational motion of electrolyte flows near thin steel wire / S. V. Gorobets, O. Yu. Gorobets, S. A. Reshetnyak // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2004. – Vol. 272–276, Pt. 3. – P. 2408–2409.

Поступила в редакцию 13.12.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Відпрацьовано вагову методику вимірювання швидкості контактного (цементацийного) осадження мідного дендритного покриття на сталеві феромагнітні зразки (підкладки) сферичної та циліндричної форми у магнітному полі. Досліджено вплив магнітофореза іонів в розчинах електролітів на залежності швидкості осадження, цементациї дендритів міді, від величини напруженості зовнішнього магнітного поля, його напрямку щодо осі циліндричних підкладок, та їх орієнтації щодо напрямку сили тяжіння.

Ключові слова: градієнтне магнітне поле, магнітофорез, цементацийне осадження, феромагнітний шар, феромагнітний циліндр.

SUMMARY

A weight technique for rate measurement of contact (cementational) deposition of copper dendrite coating onto steel ferromagnetic spherical and cylindrical substrates in magnetic field has been developed. The effect of magnetophoresis of ions in an electrolyte solution on the strength dependence of deposition rate on the strength of external magnetic field, its orientation in respect to the axes of cylindrical substrates and the position of the latter in respect to the gravity force has been investigated.

Keywords: gradient magnetic field, magnetophoresis, cementational deposition, ferromagnetic ball, ferromagnetic cylinder.

УДК537.61

Л. С. Похил, В. С. Ткаченко, Ю. И. Гусева

СПИНВОЛНОВОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТР

Предложена схема конструкции интерферометра спиновых волн. Для проектирования и изготовления прибора было записано уравнение Ландау-Лифшица в выбранной системе координат. Выписано дисперсионное соотношение и приведены граничные условия. Теоретически описано поведение бегущей спиновой волны на основе ее s-параметров: коэффициентов отражения и прохождения в изогнутой «петле», полного коэффициента прохождения спиновой волны.

Ключевые слова: интерферометр, спиновые волны, коэффициент прохождения.

Введение. Развитие спинтроники и магноники требует разработки и создания устройств непосредственно в сверхвысокочастотном диапазоне. При разработке спин-волновых приборов к ним предъявляются высокие требования относительно допустимого уровня затухания и искажения передаваемого сигнала.

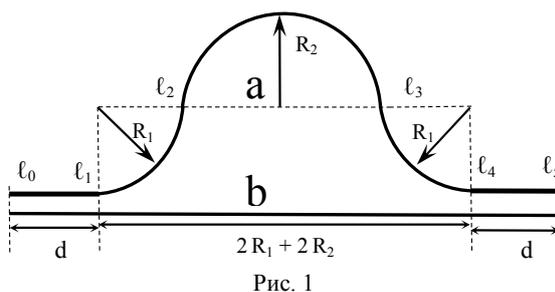
С технической точки зрения весьма перспективными в этом плане являются устройства на спиновых волнах, так как обладают рядом характерных особенностей, заметно отличающих их от других типов волн: нелинейная дисперсия спиновых волн, возможность управления дисперсионными характеристиками с помощью геометрии структуры. В основе работы прибора лежит гипотеза о влиянии геометрии проволоки на распространение в ней спиновых волн, в частности, на спектр, коэффициенты прохождения и отражения, доказанная в работах [1, 2], а так же в работах [3, 4]. Микромагнитное моделирование спектра спиновых волн на основе численных методов с целью изучения указанных выше процессов в различного рода структурах было проведено в работе [5]. Работа [6] показывает перспективность исследования распространения спиновых волн в волноводах и построение интерферометров и других элементов логических устройств спинтроники и магноники. В статье [7] представлено исследование намагниченности и магнитные переходы в сверхмалых и малых поликристаллических магнитных кобальтовых кольцах шириной и толщиной сравнимой с обменной длиной кобальта. В работе [8] предложен численный микромагнитный метод представления устройства магноники как двух-портовой линейной сети, и описываемой в s-параметрах (характеристик прошедшей и отраженной волн). В [9] широко представлено зигзагообразное распространение спиновых волн как следствие изгиба волновода. Показан интерферометрический «нелогический» клапан, основанный на изогнутом волноводе.

Модель интерферометра. Рассмотрим интерферометр спиновых волн (рис. 1), аналогичный представленному в работе [10]. Интерферометр состоит из генератора спиновой волны, волновода и детектора спиновой волны.

Волновод может быть представлен в виде петли с двумя ветвями. Одна ветвь (b) представляет собой однородно намагниченную прямую нанопроволоку и служит в качестве «ссылки». Другая ветвь (a) представляет собой магнитную нанопроволоку с наведенной магнитной анизотропией за счет изгиба и служит в качестве «фазовращателя» спиновой волны. Сигнал, зарегистрированный детектором, является результатом интерференции двух спиновых волн, прошедших через «ссылку» и «фазовращатель».

Для проектирования конструкции и изготовления прибора необходимо теоретически описать поведение бегущей спиновой волны, основываясь на ее s-параметрах: значениях выражений для коэффициентов отражения и прохождения. Прежде всего, необходимо получить выражение для коэффициента прохождения в изогнутой «петле» и полного коэффициента прохождения спиновой волны, включая прямой участок. Предположим, что магнитная нанопроволока сделана из материала, имеющего намагниченность насыщения M_0 . Введем обозначения: g – гиромангнитное отношение, обменная константа $\alpha (= 4\pi l_{ex}^2)$. Нанопроволоку будем считать «бесконечно тонкой», то есть достаточно тонкой, чтобы оправдать пренебрежение любой магнитной неравномерности в поперечном сечении.

Детально рассмотрим область изгиба. Для описания изогнутой части нанопроволоки, введем естественные оси координат. Орт нормали нанопроволоки \vec{p} направлен к центру кривизны траектории, орт $\vec{\phi}$ – по касательной к нанопроволоке, орт перпендикулярный векторам касательной и главной нормали (бинормаль)



определим как векторное произведение $\vec{z} = [\vec{\phi} \times \vec{\rho}]$. Кроме координат ρ, φ, z используем дополнительную координату длины нанопровода l (рис. 2).

Представим спиновые волны как колебания плотности магнитного момента подрешёток $\partial \vec{M}(\vec{r}, t)$ – функции координаты \vec{r} и времени t , распространяющиеся в магнитоупорядоченном кристалле. Запишем уравнение Ландау-Лифшица, определяющее изменение плотности магнитного момента со временем [11]

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = -g \left[\vec{M} \times (\vec{h}_m + \beta(\vec{M}\vec{\phi})\vec{\phi} + \alpha\Delta\vec{M}) \right], \quad (1)$$

где \vec{h}_m – размагничивающее магнито-статическое слагаемое, соответствующее магнито-дипольному полю, которое можно выразить через размагничивающие коэффициенты. Напряженность \vec{h}_m собственного (размагничивающего) поля намагниченого образца выразим через его намагниченность \vec{M} и размагничивающий фактор \hat{N} как $\vec{h}_m = -\hat{N}\vec{M} = -N_z m_z \vec{z} - N_\rho m_\rho \vec{\rho}$, где N_z, N_ρ – не нулевые диагональные компоненты размагничивающего тензора \hat{N} , $N_z + N_\rho = 4\pi$. Запишем энергию магнитной анизотропии как $\beta(\vec{M}\vec{\phi})\vec{\phi}$, где β – постоянная объемной одноосной анизотропии, $\vec{\phi}$ – орт легкого намагничивания, $\alpha\Delta\vec{M}$ – эффективное обменное поле.

Рассмотрим малые отклонения намагниченности от основного состояния $\vec{m}(\vec{r}, t)$, предполагая, что основное состояние соответствует постоянной части намагниченности $M_0\vec{\phi}$, направленной вдоль проволоки. Для этого представим распределение намагниченности в виде

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = M_0\vec{\phi} + \vec{m}(\vec{r}, t), \quad [\vec{M}(\vec{r}, t)]^2 = M_0^2, \quad |\vec{m}| \ll M_0. \quad (2)$$

Мы используем и обозначим. Линеаризуя уравнение Ландау-Лифшица можно получить

Представим переменную часть намагниченности в виде Фурье-компонент $\vec{m}_j(\vec{r}, t) = \vec{m}_j \exp\{i\omega t\}$ и обозначим $\mu = m_x + im_y$. Линеаризуем уравнение Ландау-Лифшица, что согласуется с работой с [3]

$$\frac{d^2 \mu_j(l)}{dl^2} + k_j^2(l) \mu_j(l) = 0, \quad j = 1 \dots 5. \quad (3)$$

Дисперсионное соотношение согласно [4] запишем в виде

$$k_j^2 = \frac{1}{\alpha} \left[\alpha_j - \beta - 2\pi + \sqrt{\Omega^2 + \alpha_j^2} \right], \quad (4)$$

где $\alpha_j = \alpha / (2\rho_j^2)$, $\Omega = \omega / gM_0$.

Запишем радиусы кривизны для разных частей нанопроволоки

$$\rho_j = \begin{cases} \rho_1 \rightarrow \infty & l_0 < l < l_1, \\ \rho_2 = R_1 & l_1 < l < l_2, \\ \rho_3 = R_2 & l_2 < l < l_3, \\ \rho_4 = R_1 & l_3 < l < l_4, \\ \rho_5 \rightarrow \infty & l_4 < l < l_5. \end{cases} \quad (5)$$

Намагниченность каждой части нанопроволоки в соответствии с [2] имеет вид

$$\mu_j(l) = \mu_j^+ e^{+ik_j l} + \mu_j^- e^{-ik_j l}. \quad (6)$$

Рассчитаем коэффициенты отражения r и прохождения t для спиновых волн, распространяющихся в данной структуре с учетом граничных условий

$$\mu_j \Big|_{z_j} = \mu_{j+1} \Big|_{z_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial z} \Big|_{z_j} = \frac{\partial \mu_{j+1}}{\partial z} \Big|_{z_j}, \quad j = 1 \dots 5. \quad (7)$$

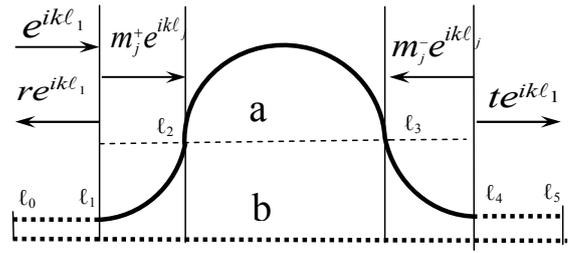


Рис. 2 Амплитуды прошедших и отраженных спиновых волн

Предполагаем, что амплитуда падающей волны равна 1, амплитуда отраженной волны равна r , после прохождения через данную часть нанопроволоки амплитуды волны будет равна t . Рассмотрим одну петлю интерферометра. В этом случае можно пренебречь прямыми участками изогнутой ветви $\ell_0 - \ell_1, \ell_4 - \ell_5$. Граничные условия для этого случая имеют вид

$$\mu_j \Big|_{z_j} = \mu_{j+1} \Big|_{z_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial z} \Big|_{z_j} = \frac{\partial \mu_{j+1}}{\partial z} \Big|_{z_j}, \quad j = 2 \dots 4. \quad (8)$$

По-прежнему считаем, что амплитуда падающей волны равна 1, амплитуда отраженной волны равна r , после прохождения через данную часть нанопроволоки амплитуды волны будет равна t . Запишем систему уравнений для определения коэффициентов отражения r и прохождения t .

$$\begin{aligned} e^{+ik_1 \ell_1} + r e^{-ik_1 \ell_1} &= \mu_2^+ e^{+ik_2 \ell_1} + \mu_2^- e^{-ik_2 \ell_1}, \\ ik_1 e^{+ik_1 \ell_1} - ik_1 r e^{-ik_1 \ell_1} &= ik_2 \mu_2^+ e^{+ik_2 \ell_1} - ik_2 \mu_2^- e^{-ik_2 \ell_1}, \\ \mu_2^+ e^{+ik_2 \ell_2} + \mu_2^- e^{-ik_2 \ell_2} &= \mu_3^+ e^{+ik_3 \ell_2} + \mu_3^- e^{-ik_3 \ell_2}, \\ ik_2 \mu_2^+ e^{+ik_2 \ell_2} - ik_2 \mu_2^- e^{-ik_2 \ell_2} &= ik_3 \mu_3^+ e^{+ik_3 \ell_2} - ik_3 \mu_3^- e^{-ik_3 \ell_2}, \\ \mu_3^+ e^{+ik_3 \ell_3} + \mu_3^- e^{-ik_3 \ell_3} &= \mu_4^+ e^{+ik_2 \ell_3} + \mu_4^- e^{-ik_2 \ell_3}, \\ ik_3 \mu_3^+ e^{+ik_3 \ell_3} - ik_3 \mu_3^- e^{-ik_3 \ell_3} &= ik_2 \mu_4^+ e^{+ik_2 \ell_3} - ik_2 \mu_4^- e^{-ik_2 \ell_3}, \\ \mu_4^+ e^{+ik_2 \ell_4} + \mu_4^- e^{-ik_2 \ell_4} &= t e^{+ik_1 \ell_4}, \\ ik_2 \mu_4^+ e^{+ik_2 \ell_4} - ik_2 \mu_4^- e^{-ik_2 \ell_4} &= ik_1 t e^{+ik_1 \ell_4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Значения коэффициента отражения r и прохождения t в «петле» соответственно равны

$$r = \Delta^{-1} \left[2i(k_1^2 - k_2^2) \left((k_2 + k_3)^2 \sin \pi(k_2 R_1 + k_3 R_2) - (k_2 + k_3)^2 \sin \pi(k_2 R_1 - k_3 R_2) \right) + 4i(k_1^2 + k_2^2)(k_2^2 - k_3^2) \sin(\pi k_3 R_2) \right], \quad (10)$$

$$t = -16k_1 k_2^2 k_3 \Delta^{-1} e^{-i\pi k_1 (R_1 + R_2)}. \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= (k_2 - k_3)^2 \left(e^{-i\pi(k_2 R_1 - k_3 R_2)} (k_2 + k_1)^2 - e^{i\pi(k_2 R_1 - k_3 R_2)} (k_1 - k_2)^2 \right) + \\ &+ (k_2 + k_3)^2 \left(-e^{-i\pi(k_2 R_1 + k_3 R_2)} (k_2 + k_1)^2 + e^{i\pi(k_2 R_1 + k_3 R_2)} (k_1 - k_2)^2 \right) + \\ &+ 4i(k_1^2 - k_2^2) (k_2^2 - k_3^2) \sin(\pi k_3 R_2). \end{aligned}$$

Полный коэффициент прохождения T , включая прямой участок, запишем в виде

$$T = (t + 1)/2, \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{2} - 8k_1 k_2^2 k_3 \Delta^{-1} e^{-i\pi k_1 (R_1 + R_2)}. \quad (13)$$

На рис. 3 изображены графики изменения коэффициента прохождения T от частоты Ω .

Выводы. Предлагаемый подход дает возможность проанализировать поведение бегущей спиновой волны, основываясь на ее s-параметрах: полученных значениях для коэффициентов отражения r и прохождения t в изогнутой «петле», полного коэффициента прохождения T , включая прямой участок. Зависимость коэффициента прохождения T от частоты Ω показывает, что наиболее подходящими для проектирования интерферометра являются следующие соотношения для радиусов: $R_1 = 10 \cdot \ell_{ex}$, $R_2 = 50 \cdot \ell_{ex}$ и $R_1 = 10 \cdot \ell_{ex}$, $R_2 = 60 \cdot \ell_{ex}$, где $\ell_{ex} = 5,69 \cdot 10^{-9}$ м (рис. 3).

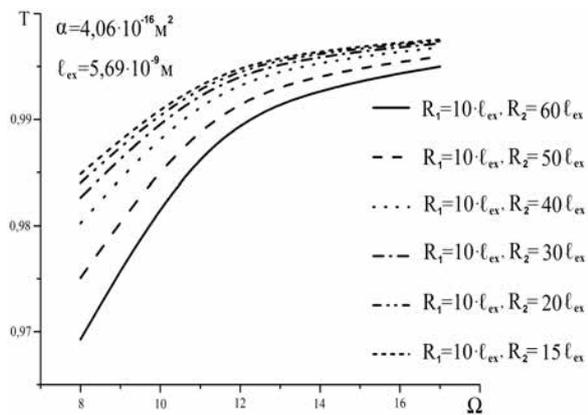


Рис. 3

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кругляк В. В. Распространение спиновых волн в тонком цилиндрическом магнетонном кристалле / В. В. Кругляк, А. Н. Кучко, В. Ю. Горобец // Металлофизика и новейшие технологии. – 2004. – Т. 26, № 5. – С. 579–589.
2. Tkachenko V. S. Spectrum and reflection of spin waves in magnonic crystals with different interface profiles / V. S. Tkachenko, V. V. Kruglyak, A. N. Kuchko // Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 81, No 2. – P. 425–433.
3. Ткаченко В. С. Влияние наведенной изгибом анизотропии на спектр спиновых волн в искривленной магнитной нанопроволоке / В. С. Ткаченко, А. Н. Кучко, В. В. Кругляк // Физика низких температур. – 2013. – Т. 39, № 2. – С. 214–218.
4. Propagation and scattering of spin waves in curved magnonic waveguides / V. S. Tkachenko, A. N. Kuchko, M. Dvornik, V. V. Kruglyak // Appl. Phys. Lett. – 2012. – Vol. 101. – P. 152402–152407.
5. Кучко А. Н. Микромагнитное моделирование спектра спиновых волн магнитной нанопроволоки / А. Н. Кучко, В. В. Кругляк, Н. А. Дворник // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2007. – № 2. – С. 119–121.
6. Scattering of spin waves in curved magnonic waveguides / A. Francis, C. Davies, M. Dvornik et al. // The research leading to these results has received funding from the EC's FP7/2007 – 2013 (GA 228673, MAGNONICS and GA 247556, NoWaPhen) and EPSRC.
7. Singh D. K. Magnetic transitions in ultra-small nanoscopic magnetic rings: Theory and experiments / D. K. Singh, R. Krotkov, M. T. Tuominen // Physical Review B. – 2009. – Vol. 79. – P. 184409–184418.
8. Dvornik M. Micromagnetic method of s-parameter characterization of magnonic devices / M. Dvornik, A. N. Kuchko, V. V. Kruglyak // Journal of Applied Physics. – 2011. – Vol. 109. – P. 07d350 (3).
9. How do spin waves pass through a bend? / X. Xing, Y. Yu1, S. Li, X. Huang // Scientific Reports. – 2013. – Vol. 3 (2958). – P. 02958–02964.
10. Spin wave interferometer employing a local nonuniformity of the effective magnetic field / S. V. Vasiliev, V. V. Kruglyak, M. L. Sokolovskii, A. N. Kuchko // Journal of Applied Physics. – 2007. – Vol. 101. – P. 113919–113923.
11. Ахизер А. И. Спиновые волны / А. И. Ахизер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

Поступила в редакцію 18.11.2013 г.

РЕЗЮМЕ

Запропонована схема конструкції інтерферометра спінових хвиль. Для проектування конструкції та виготовлення приладу було записано рівняння Ландау-Ліфшиця у вибраній системі координат. Виписано дисперсійне співвідношення та приведені граничні умови. Теоретично описано поведінку спінової хвилі, що біжить, на основі її s-параметрів: коефіцієнтів відбиття і проходження в вигнутій «петлі», повного коефіцієнта проходження спінової хвилі.

Ключові слова: інтерферометр, спінові хвилі, коефіцієнт проходження.

SUMMARY

The publication proposed a scheme of spin-wave interferometer. The Landau-Lifshitz equation was written in the selected coordinate system for elaboration and production of the device. Dispersion relation is written out and given boundary conditions. Here we describe theoretically the behavior of the running spin wave based on its s-parameters: the reflection and transmission coefficients in a curved «loop», complete transmission coefficient of spin wave.

Keywords: interferometer, spin wave, transmission coefficient.

УДК 541.64:678.045.3

*С. М. Батиг, В. И. Мельниченко***КИНЕТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ МЕТИЛМЕТАКРИЛАТА С МЕТАКРИЛОВОЙ КИСЛОТОЙ В ПРИСУТСТВИИ РАСТВОРИТЕЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПОЛЯРНОСТИ**

Изучена инициированная радикальная сополимеризация метилметакрилата с метакриловой кислотой в среде растворителей различной полярности: ацетона, толуола и метанола. Установлено влияние полярности среды на скорость реакций сополимеризации и величину энергии активации, а также состав сополимеров. Полученные зависимости позволяют предполагать механизм образования ассоциатов как между мономерами, так и с молекулами растворителей.

Ключевые слова: метилметакрилат, метакриловая кислота, сополимеризация, полярность растворителей.

Введение. В последнее время приобретает все большее распространение идея о роли межмолекулярных взаимодействий в процессах образования полимеров [1–6]. Наличие межмолекулярных взаимодействий в реакционной среде приводит к определенной молекулярной организации системы, определяемой ее составом и температурой. Под молекулярной организацией здесь подразумеваются структуры гомо- и гетероассоциатов, образованные компонентами системы. Реакционная способность реагирующих компонентов зависит от характера ассоциата и его размера (степени ассоциации). Концентрации указанных структур определяются составом исходной системы, механизмом реакции и температурой. Такой подход позволяет не только глубже понять механизм протекающих реакций, влияние химической структуры реагентов и природы растворителей на скорость реакции, но и адекватно описать процессы автоускорения и другие сложные кинетические особенности реакции.

К настоящему времени накоплены экспериментальные факты, свидетельствующие о влиянии структуры жидкого состояния мономеров (олигомеров) на кинетику полимеризации [2, 7–15], которые интерпретируют в рамках модели об ассоциатах-«заготовках». Согласно этой модели ассоциаты-«заготовки» – это достаточно долгоживущие регулярные ассоциаты, в которых взаимное положение молекул благоприятно для протекания реакции роста полимерной цепи. Условием влияния этих ассоциатов на кинетику сополимеризации является соотношение $\tau_{\phi} > \tau_x$, где τ_{ϕ} – среднее время жизни ассоциативных связей, а τ_x – средняя продолжительность элементарного акта роста полимерных цепей. Впервые реальность существования кинетически активных ассоциатов в полимеризационных системах обоснована в работе Н.Н. Семенова [11]. Причиной кинетической активности является образование ассоциата с особым типом регулярной структуры, при которой наблюдается взаимоориентация двойных связей мономерных молекул, которая более благоприятна для реакции роста цепи. Ассоциат с благоприятной ориентацией способен ускорять полимеризационный процесс вследствие уменьшения стерических ограничений. Так при полимеризации некоторых виниловых мономеров вблизи температуры плавления [12], где и регулярность взаиморасположения молекул в ассоциатах и высокие значения τ_{ϕ} обеспечиваются состоянием предкристаллизации, наблюдается резкое возрастание скорости процесса.

Известно предположение, согласно которому некоторые эффекты растворителя в радикальной сополимеризации могут быть интерпретированы исходя из "bootstrap" модели сополимеризации [16]. Под последней понимают модель, предусматривающей влияние избирательной сольватации макромолекул мономерами на эффективные относительные концентрации мономеров в зоне реакции макрорадикалов, т. е. в "клетке" конечного активного звена макрорадикала. Показано, что при сополимеризации стирола с метакриловой кислотой ярко проявляется влияние растворителей, образующих водородные связи, на состав сополимера [17], что является общим явлением для сополимеризации ненасыщенных карбоновых кислот [18], и объясняется разрушением димеров кислот растворителями. Известно также, что при их сополимеризации в массе состав сополимера стирол–метакриловая кислота зависит от молекулярной массы, что связано с зависимостью коэффициента избирательной сольватации макромолекул от их длины [19].

На основании вышеизложенного, учитывая многогранное влияние состава реакционной смеси на процесс сополимеризации, предсказать кинетическое поведение таких систем не представляется возможным. В связи с этим целью данной работы было изучение влияния состава смеси и природы растворителей на кинетические параметры инициированной сополимеризации метилметакрилата (ММА) и метакриловой кислоты (МАК).

Экспериментальная часть. ММА и МАК очищали путем перегонки в вакууме в атмосфере инертного газа [20]. Полимеризация происходила в запаянных ампулах или дилатометрах в атмосфере

инертного газа в температурном интервале 323–343 К в присутствии 0,05 % мольных лаурилпероксида в качестве инициатора. В составе исходной мономерной смеси варьировалось содержание МАК (от 5 до 30 % моль). В качестве растворителей использовали высушенные и перегнанные толуол, ацетон, метанол. Содержание растворителя в реакционной смеси составляло 30 % масс. Диэлектрическую проницаемость среды рассчитывали по формуле:

$$\lg \varepsilon_{\Sigma} = \sum_i y_i \lg \varepsilon_i,$$

где y_i – объемные концентрации мономеров и растворителей.

Сополимеризацию проводили до глубины превращения мономеров не более 10 %, пересаждали и высушивали. Состав сополимера определяли титрованием кислотных групп спиртовым раствором щелочи в присутствии индикатора тимолфталейна.

Анализ результатов эксперимента. На рис. 1 представлена кинетика сополимеризации MMA с МАК в соотношении 90:10 % моль при $T=333$ К без растворителя – 1; в присутствии 30 % масс. растворителей: 2 – ацетона; 3 – толуола; 4 – метанола. Аналогичные данные были получены при варьировании температуры и состава исходной мономерной смеси. Условия проведения сополимеризации и полученные кинетические параметры представлены в табл. 1. Как видно из данных рис. 1 и табл. 1 скорость процесса в присутствии растворителя заметно снижается. Это связано, прежде всего, со снижением общей концентрации пероксида в системе, так как при расчете его концентрации учитывалось только соотношение мономеров и пероксида. Таким образом, в системе сохранялось постоянным соотношение количества двойных связей и инициатора. Введение растворителя пропорционально уменьшало как концентрацию мономеров, так и инициатора. Общее увеличение количества МАК в системе, как это видно из данных, приведенных на рис. 2 (зависимость скорости сополимеризации от количества % моль МАК в мономерной смеси при $T=333$ К без растворителя – 1; в присутствии 30 % масс. растворителей: 2 – ацетона; 3 – толуола; 4 – метанола), способствует увеличению скорости сополимеризации независимо от наличия растворителя. Как следствие всего вышесказанного, теоретическое предсказание кинетических параметров процесса сополимеризации MMA с МАК, особенно в присутствии растворителя, довольно сложно.

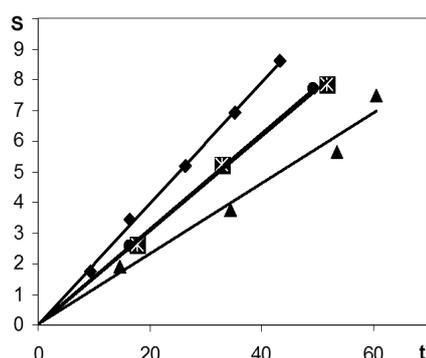


Рис. 1

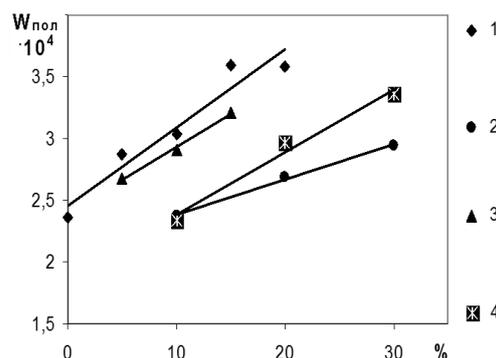


Рис. 2

Таблица 1

Кинетические параметры реакций сополимеризации MMA с МАК в присутствии растворителей

Растворитель	Состав мономерной смеси, % мольный	$W_{\text{пол}} \cdot 10^4$, моль/л·с при 333 К	E_a , кДж/моль	ε
–	MMA:МАК=95:5	2,87	$22,4 \pm 1,1$	6,31
	MMA:МАК=90:10	3,03	$18,2 \pm 0,9$	6,65
	MMA:МАК=85:15	3,59	$15,5 \pm 0,7$	6,99
	MMA:МАК=80:20	3,58	$12,9 \pm 0,5$	7,35
Ацетон (30% масс.)	MMA:МАК=90:10	2,37	$29,6 \pm 1,3$	9,71
	MMA:МАК=80:20	2,69	$27,6 \pm 1,2$	10,46
	MMA:МАК=70:30	2,94	$25,4 \pm 1,1$	11,27
Толуол (30% масс.)	MMA:МАК=95:5	2,68	$13,3 \pm 0,6$	4,89
	MMA:МАК=90:10	2,91	$9,6 \pm 0,3$	4,74
	MMA:МАК=85:15	3,21	$7,8 \pm 0,1$	5,27
Метанол (30% масс.)	MMA:МАК=90:10	2,34	$46,7 \pm 2,4$	11,99
	MMA:МАК=80:20	2,97	$44,1 \pm 2,1$	12,92
	MMA:МАК=70:30	3,36	$42,6 \pm 2,2$	13,75

Если сделать допущение, что скорость распада лаурилпероксида остается неизменной, а эффективность иницирования составляет 0,8, можно рассчитать скорость иницирования при данных температурах. Используя значения скоростей (со)полимеризации и иницирования, по уравнению:

$$W = k_p [M] W_{ин.}^{1/2} / W_t^{1/2},$$

были определены соотношения констант скоростей роста и обрыва цепи (k_t/k_p^2) и их зависимости от температуры для систем, содержащих от 5 до 30 % моль МАК в присутствии растворителей с различной полярностью. С ростом концентрации МАК на каждые 10 % соотношение этих констант возрастает примерно в 1,2–1,3 раза. Наблюдаемое увеличение соотношения констант скоростей роста и обрыва цепи обусловлено, прежде всего, возрастанием константы скорости роста. Для этих соотношений констант скоростей роста и обрыва цепи были определены значения эффективной энергии активации при сополимеризации MMA с МАК (рис. 3, 4).

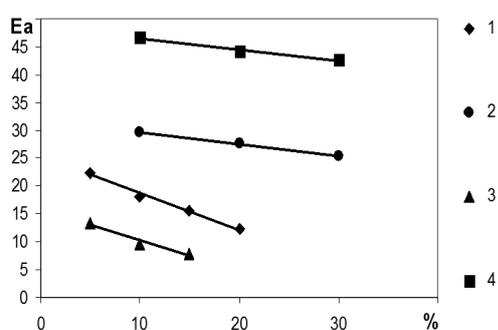


Рис. 3. Зависимость энергии активации от количества % моль МАК в мономерной смеси без растворителя – 1; в присутствии 30% масс. растворителей: 2 – ацетона; 3 – толуола; 4 – метанола

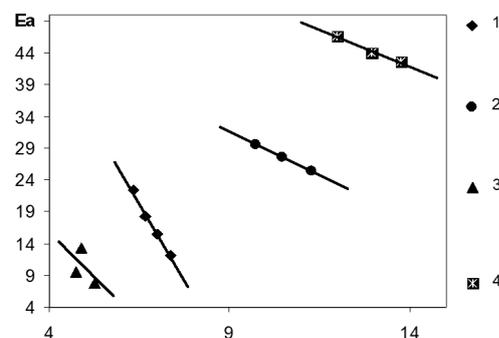


Рис. 4. Зависимость энергии активации от диэлектрической проницаемости реакционной смеси без растворителя – 1; в присутствии 30% масс. растворителей: 2 – ацетона; 3 – толуола; 4 – метанола

Установлено, что в присутствии ацетона наблюдается увеличение энергии активации для обоих составов, по сравнению с сополимеризацией в отсутствие растворителя. Наличие метанола в реакционной среде также увеличивает энергию активации реакции, тогда как в присутствии толуола для системы, содержащей 10 % моль МАК, наблюдается существенное снижение энергии активации. При более высоком содержании МАК кинетические параметры не были определены, так как полученный сополимер выделяется в отдельную фазу. Расслоение системы способствует резкому возрастанию скорости процесса, которую не удалось зафиксировать. Обобщая полученные результаты отметим, что увеличение полярности растворителя способствует возрастанию энергии активации, а увеличение доли МАК в системе способствует ее снижению независимо от количества и природы растворителя. Причиной такого различия в скоростях сополимеризации является склонность МАК к образованию ассоциатов за счет водородных связей. В апротонных средах такие связи образуются между молекулами МАК. При благоприятном строении ассоциата он включается как единое целое в полимерную молекулу, что приводит к снижению энергии активации.

Таблица 2

Содержание элементарных звеньев метакриловой кислоты в сополимерах, полученных на начальных стадиях сополимеризации в присутствии различных растворителей

Содержание МАК в мономерной смеси, % моль	Растворитель			
	Без растворителя	Ацетон	Толуол	Метанол
10	11,0	10,9	15,1	8,9
20	22,6	21,1	24,1	17,2
30	–	28,4	34,3	26,8

Одновременно, сополимер, образующийся на начальных стадиях, должен быть обогащен МАК. Как видно из данных табл. 2, сополимеры, полученные в среде толуола, содержат наибольшее количество МАК, а в метаноле наименьшее, так как в протонных растворителях склонность к самоассоциации подавляется тем сильнее, чем выше диэлектрическая постоянная раствора.

Выводы. Изучена иницированная лаурилпероксидом радикальная сополимеризация метилметакрилата с метакриловой кислотой в присутствии 30% масс. растворителей различной полярности: ацетона, толуола и метанола. Определены кинетические параметры реакций сополимеризации. Установлено, что в присутствии ацетона и метанола энергия активации возрастает, а в присутствии толуола снижается. Это обусловлено склонностью метакриловой кислоты к образованию ассоциатов. С увеличением полярности растворителей склонность к ассоциации подавляется и сополимеры будут более однородными по составу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Влияние мономерно-полимерной ассоциации производных (мет)акриловой кислоты на их радикальную сополимеризацию в водных растворах / К. В. Ширшин, А. П. Сивохин, Т. А. Хохлова и др. // Тр. Новосибирского государственного технического университета. – 2004. – Т. 45. – С. 26–28.
2. Кинетические проявления регулярных ассоциативных структур в радикальной полимеризации высших n-алкил(мет)акрилатов на малых глубинах превращения / Г. В. Королев, А. А. Ильин, М. М. Могилевич и др. // Изв. вузов: Химия и хим. техн. – 2002. – Т. 45, вып. 2. – С. 33–38.
3. Роль молекулярной организации олигомеров в реакциях образования линейных полиуретанов / Е. В. Стовбун, Э. Р. Бадамшина, В. А. Григорьева и др. // Высокомолекул. соед. – 1998. – Т. 40 А, № 8. – С. 1286–1293.
4. Королев Г. В. Влияние межмолекулярных взаимодействий на кинетику радикальной полимеризации нонилакрилата / Г. В. Королев, Е. О. Перепелицина // Высокомолекул. соед. – 1997. – Т. 39 Б, № 2. – С. 338–341.
5. Роль межмолекулярной ассоциации при радикальном иницировании в растворах / В. В. Рябинин, П. О. Яблонский, В. Д. Сухов и др. // Высокомолекул. соед. – 1997. – Т. 39 Б, № 11. – С. 1869–1872.
6. Королев Г. В. Кинетические проявления ассоциативной структуры жидких олигомеров в процессах полимеризации и сополимеризации. Механизмы ассоциативных процессов и методика исследования их с помощью спинзонда / Г. В. Королев, М. П. Березин. – Черногоровка, 1994. – 56 с. (препр. / ОИХФРАН).
7. Аномальное влияние малых добавок сомономеров на глубокие стадии полимеризации высших алкил(мет)акрилатов / Г. В. Королев, А. А. Ильин, М. М. Могилевич и др. // Высокомолекул. соед. – 2003. – Т. 45 А, № 6. – С. 883–890.
8. Дуфлот В. Р. Влияние структурной упорядоченности жидких олигомеров на кинетику радиационной полимеризации / В. Р. Дуфлот, Н. Х. Файзи, Ю. А. Чикин // Высокомолекул. соед. – 1982. – Т. 24 А, № 11. – С. 2363–2366.
9. Влияние растворителей на ассоциацию метилметакрилата и олигомера диметакрилат-(бис-триэтиленгликоль)фталата и эффективность иницирования в этих средах / Б. Р. Смирнов, И. В. Голиков, Г. В. Королев и др. // Высокомолекул. соед. – 1977. – Т. 19 А, № 4. – С. 735–740.
10. Могилевич М. М. Кинетические особенности процесса окислительной полимеризации олигоэфиракрилатов / М. М. Могилевич, Г. А. Суханов, Г. В. Королев // Высокомолекул. соед. – 1975. – Т. 17 А, № 11. – С. 2487–2492.
11. Семенов Н. Н. О некоторых проблемах химической кинетики и реакционной способности / Н. Н. Семенов. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – 346 с.
12. Семенов Н. Н. К вопросу о полимеризации при низких температурах / Н. Н. Семенов, Н. С. Ениколопан, В. И. Гольданский // Rev. chim. Acad. RPR. – 1962. – Vol. 7, No 1. – P. 501–511.
13. Берлин А. А. Акриловые олигомеры и материалы на их основе / А. А. Берлин, Г. В. Королев, Т. Я. Кефели. – М.: Химия, 1983. – 232 с.
14. Королев Г. В. Кинетические аномалии в радикальной полимеризации высших алкилакрилатов и их количественная интерпретация в рамках модели ассоциатов-«заготовок» / Г. В. Королев, Е. О. Перепелицина // Докл. РАН. – 2000. – Т. 371, № 4. – С. 488–492.
15. Королев Г. В. Кинетические аномалии в радикальной полимеризации высших алкил(мет)акрилатов и их количественная интерпретация в рамках модели ассоциатов-«заготовок» / Г. В. Королев, Е. О. Перепелицина // Высокомолекул. соед. – 2001. – Т. 43 А, № 5. – С. 774–783.
16. «Bootstrap» модель сополимеризации и эффект растворителя в системе стирол-метакриловая кислота / С. Д. Зайцев, Т. Е. Князева, И. Б. Мясникова и др. // Высокомолекул. соед. Сер. А. – 1998. – Т. 40, № 8. – С. 1271–1277.
17. Рябов А. В. Роль среды при гомогенной радикальной сополимеризации ненасыщенных карбоновых кислот с винильными мономерами / А. В. Рябов, Ю. Д. Семчиков, Н. Н. Славническая // Высокомолекул. соед. Сер. А. – 1970. – Т. 12, № 3. – С. 553–560.
18. Кабанов В. А. Комплексно-радикальная полимеризация / В. А. Кабанов, В. П. Зубов, Ю. Д. Семчиков. – М.: Химия, 1987. – 256 с.
19. Семчиков Ю. Д. Кинетика радикальной сополимеризации в условиях избирательной сорбции мономеров / Ю. Д. Семчиков, Л. А. Смирнова, С. Д. Зайцев // Высокомолекул. соед. Сер. А. – 1995. – Т. 37, № 5. – С. 741–745.
20. Лачинов М. Б. Методические разработки к практическим работам по синтезу высокомолекулярных веществ / М. Б. Лачинов, Е. В. Черникова, А. В. Оленин // Под ред. проф. д. х. н. В. П. Шибяева. – М.: МГУ, 2002. – 58 с.
21. Багдасарьян Х. С. Теория радикальной полимеризации / Х. С. Багдасарьян. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

Поступила в редакцию 17.12.2013 г.

РЕЗЮМЕ

Вивчено ініційовану радикальну (ко)полімеризацію метилметакрилату з метакриловою кислотою в середовищі розчинників різної полярності: ацетону, толуолу і метанолу. Встановлено вплив полярності середовища на швидкість реакцій (ко)полімеризації і величину енергії активації, а також склад (ко)полімерів. Отримані залежності дозволяють висувати припущення щодо механізму утворення асоціатів як між мономерами, так і з молекулами розчинників.

Ключові слова: метилметакрилат, метакриловова кислота, (ко)полімеризація, полярність розчинників.

SUMMARY

The radical initiated copolymerization of methyl methacrylate with methacrylic acid was studied in solvents of different polarity: acetone, toluene, methanol. The influence of polarity of the medium upon copolymerization reaction rates, values of the activation energy and composition of the copolymers was determined. Received dependences allowed to assume the mechanism of formation of associates both between monomers and with molecules of solvents.

Keywords: methyl methacrylate, methacrylic acid, copolymerization, polarity of the solvents.

УДК 678.6

С. В. Жильцова

**ЕПОКСИДНО-СИЛОКСАНОВІ НАНОКОМПОЗИТИ АНГІДРИДНОГО ТВЕРДНЕННЯ,
ОДЕРЖАНІ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДУ**

Золь-гель методом одержано однорідні епоксидно-силоксанові наноккомпозити ангідридного тверднення. Золі полісилоксанових частинок формували на основі суміші тетраетоксисилану і 3-гліцидоксипропілтриетоксисилану у різних мольних співвідношеннях. Показано, що з підвищенням вмісту полісилоксанових частинок і частки 3-гліцидоксипропілтриетоксисилану знижується густина зшивання полімерної матриці. В діапазоні концентрацій наповнювача 0,5–3 мас% спостерігається ефект малих добавок: відбувається збільшення ефективної густини зшивання за рахунок армувальної дії просторового кластеру з полісилоксанових частинок і підвищення фізико-механічних властивостей композитів.

Ключові слова: епоксидні смоли, етоксисилани, ангідридне тверднення, золь-гель метод, наноккомпозити, структура, властивості.

Вступ. Одним із перспективних напрямків хімії високомолекулярних сполук є одержання полімерних наноккомпозиційних матеріалів, для яких модифікація структури і властивостей органічної матриці спостерігається при невеликій кількості наповнювача. Комбінування властивостей обох фаз у таких системах дозволяє створювати композити з підвищеною термічною стабільністю, теплостійкістю, адгезійною і когезійною міцністю, стійкістю до корозії і дії агресивних середовищ [1–4]. Особливу увагу дослідників привертають матеріали на основі епоксидних смол завдяки великому вибору епоксидних олігомерів і, відповідно, можливості в широких межах варіювати властивості композитів [5].

При одержанні епоксидно-силоксанових наноккомпозиційних матеріалів часто використовують золь-гель технологію для формування частинок наповнювача на основі різних алкоксисиланових сполук [6, 7]. У більшості випадків такі композити синтезують шляхом катіонної полімеризації, фотополімеризації, а також амінного тверднення епоксидної складової системи [8–10]. Незважаючи на те, що застосування ангідридного тверднення дозволяє формувати полімери з високими теплостійкістю, міцністю, стійкістю до дії агресивних середовищ, епоксидно-силоксанові наноккомпозити ангідридного тверднення з полісилоксановими частинками (ПСЧ), синтезованими з використанням золь-гель технології, систематично не досліджувались. Автори робіт [11–13] для формування епоксидно-силоксанових композитів ангідридного тверднення використовували готові золі первинних наночастинок різних торговельних марок. При цьому спостерігалось суттєве покращення фізико-механічних властивостей одержаних полімерних наноккомпозитів: підвищення модулю пружності, стійкості до дії циклічних навантажень, збільшення міцності на розрив тощо. Актуальною задачею є одержання наноккомпозитів з подібними властивостями при формуванні наночастинок золь-гель методом *in situ*. Це дозволить синтезувати оптично прозорі матеріали з рівномірним розподілом ПСЧ у полімерній матриці, з можливістю регулювати розмір і структуру силоксанового наповнювача шляхом варіювання умов синтезу.

Метою даної роботи є встановлення закономірностей формування і дослідження структури і властивостей епоксидно-силоксанових наноккомпозитів ангідридного тверднення, одержаних з використанням золь-гель методу.

Експериментальна частина. Як вихідні сполуки обрано циклоаліфатичний триепоксид (ТЕ) 1,1-диметил-3-циклогексену (марки УП-650Т, ЕЧ = 37,4 %) і діепоксид (ДЕ) дигліцидиловий етер дициклогексилпропану (EPONEXTM RESIN 1510, ЕЧ = 24,4 %); твердник – *ізо*-метилтетрагідрофталевий ангідрид (*ізо*-МТГФА, КЧ = 662 мг КОН/г); прискорювач – третинний амін (ТА) 2,4,6-трис-(*N,N*-диметиламінометил)фенол (марки УП-606/2, у кількості 0,3 мас% відносно сумарної маси епоксиду й ангідриду в композиції). Зразки полімеру отримують змішуванням епоксидного олігомеру зі стехіометричною кількістю твердника і прискорювачем.

Композити формують на основі золю ПСЧ, епоксидної смоли, *ізо*-МТГФА і ТА. Розроблено методику синтезу композитів, що забезпечує формування оптично прозорих систем на всіх етапах одержання композитів. Вона складається з наступної послідовності стадій: 1) гідроліз і конденсація продуктів гідролізу етоксисиланів з утворенням *in situ* первинних ПСЧ; 2) вакуумування золів для видалення летких продуктів золь-гель синтезу й продовження визрівання золю; 3) утворення епоксидно-силоксанових композитів шляхом ангідридного тверднення епоксидної складової системи, з остаточним формуванням структури ПСЧ всередині полімерної матриці. Режим тверднення: 120 °С (1 год) + 160 °С (2 год) + 180 °С (2 год).

ПСЧ одержують *in situ* золь-гель методом на основі тетраетоксисилану (ТЕОС, $\rho = 0,9334 \text{ г/см}^3$, $n_D^{20} = 1,383$) і 3-гліцидоксипропілтриетоксисилану (ГПТЕС, $\rho = 1,000 \text{ г/см}^3$, $n_D^{20} = 1,425$) у різних моль-

них співвідношеннях. Формування золю ПСЧ відбувається в середовищі епоксидного олігомеру або за його відсутності при 20 °С в протягом 24 год. В останньому випадку смолу додають у золь безпосередньо перед вакуумуванням. Гідроліз етоксисиланів проводиться з використанням напівстехіометричної кількості води в присутності кислотного каталізатора HNO_3 (рН системи $\sim 1,5\text{--}2,0$), розчинник – ацетон (етоксисилани:ацетон = 65:35, об.). Для одержання однорідних зразків композитів застосовується вакуумування композицій, яке забезпечує видалення летких компонентів – етанолу, розчинника й залишків води. Крім того, при наявності в системі етилового спирту як продукту гідролізу етоксисиланів відбувається непродуктивне витрачання ангідридного твердника в реакції естерифікації [14], тому він додається після стадії вакуумування. Етоксисилани додаються в такій кількості, щоб забезпечити вміст ПСЧ у композитах від 0,5 до 10 мас% (у перерахунку на SiO_2).

Зразки для проведення експериментальних випробувань виготовлено у вигляді тонких плівок товщиною $0,100 \pm 0,005$ або $0,20 \pm 0,01$ мм та циліндричних блоків діаметром і висотою ~ 10 мм.

Для дослідження структури синтезованих матеріалів використано малокутове розсіювання рентгєнівських променів (МКРРП). Криві МКР отримано у вакуумній камері типу Кратки, у випромінєнні мідного аноду, монохроматизованому повним внутрішнім відбиттям і нікелевим фільтром. Мікроскопічні дослідження проведено з використанням сканувального електронного мікроскопу серії JSM-6390LV (JEOL Ltd., Японія).

Термомеханічні дослідження блокових зразків при стисненні виконано на лабораторній установці, що складається з термокріокамери, програмованого регулятора температури, електронної вимірювальної системи та самописного потенціометра, при навантаженні 0,75 МПа і швидкості нагрівання $4 \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{хв}^{-1}$. В'язкопружні властивості визначено методом динамічного механічного аналізу на частотному релаксометрі з автоматичним вимірюванням фазового кута в режимі вимушених синусоїдальних коливань з частотою 100 Гц в температурному діапазоні 20–250 °С при швидкості нагрівання $2 \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{хв}^{-1}$.

Швидкість поглинання кисню визначено газоволомометричним методом при 200 °С і тиску 0,1 МПа. Дериватографічні дослідження проведено на дериватографі Q-1500 D системи Paulik – Paulik – Erdey (Угорщина) в динамічному режимі в діапазоні температур 20–850 °С при швидкості нагрівання $10 \text{ }^\circ\text{C}\cdot\text{хв}^{-1}$.

Граничні механічні властивості при одноосовому розтягуванні (напруга руйнування σ_p й деформація при розриві ε_p) визначено на динамометрі типу Полянї при швидкості деформації $3,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$. Модуль пружності E розраховано за кутом нахилу початкової ділянки кривої $\sigma = f(\varepsilon)$. Адгезійну міцність при рівномірному відриві ($\sigma_{\text{відр}}$) і зсуві ($\tau_{\text{зсув}}$) клейових з'єднань алюмінієвого сплаву Д16 визначено відповідно до ГОСТ 14760–69 і ГОСТ 14759–69.

Результати і їх обговорення. Структура ПСЧ, отриманих золь-гель методом, як відомо [6], має самоподібну організацію і може бути описана з використанням концепції фрактальної геометрії, яку часто застосовують для описання структури випадково розподілених об'єктів. Методом МКРРП проаналізовано морфологію композитів з ПСЧ на основі суміші ТЕОС і ГПТЕС (2:1, мол.) (рис. 1).

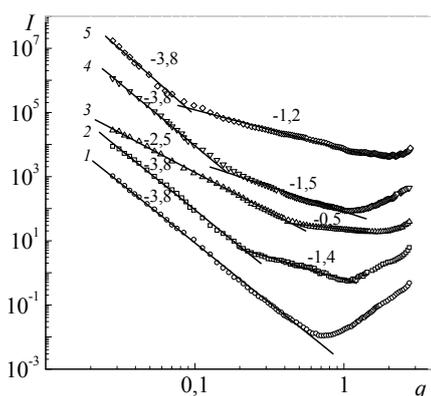


Рис. 1. Криві малокутового розсіювання рентгєнівських променів композитів з формуванням золь-гелю полісилоксанових частинок, отриманих при співвідношенні ТЕОС:ГПТЕС 2:1 у присутності триепоксидного олігомеру. Вміст полісилоксанових частинок: 0 (1), 0,5 (2), 1,5 (3), 4,5 (4) і 10 мас% (5)

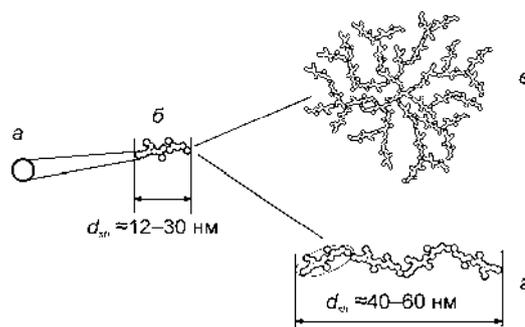


Рис. 2. Схематичне зображення особливостей агрегації ПСЧ (ТЕОС:ГПТЕС 2:1) при формуванні золь-гелю у присутності ТЕ: а – первинні частинки; б – анізодіаметричні агрегати (0,5 мас% ПСЧ); в – масово-фрактальні агрегати другого рівня (1,5 мас% ПСЧ); з – анізодіаметричні агрегати більшого розміру (4,5–10 мас% ПСЧ)

На рис. 1 представлено зміну інтенсивності розсіювання I (відн. од.) при різних значеннях хвильового вектора q (нм^{-1}) від вмісту ПСЧ у полімерній матриці композитів. Схематичне зображення особли-

востей агрегації ПСЧ наведено на рис. 2. Характерною особливістю системи з формуванням золів у присутності триепоксиду є суттєва зміна вигляду профілю МКР при концентрації ПСЧ 1,5 мас% (рис. 1, крива 3) порівняно з рештою досліджуваних концентрацій, пов'язана з формуванням просторового кластеру з ПСЧ (рис. 2, в), існування якого може суттєво позначитися на властивостях композиту.

При використанні діепоксиду як основи полімерної матриці також спостерігається формування фрактальних агрегатів. Наночастинки утворені з розгалужених слабкозшитих полісилоксанових ланцюгів, про що свідчать результати СЕМ (рис. 3): видно, що мікрообласті, збагачені силіцієм, мають дуже слабо-виражений контур (рис. 3, а). Тільки підвищена концентрація силіцію в таких ділянках дозволяє віднести їх до ПСЧ (точки 1–3). Це може бути пов'язано з тим, що при кислотному каталізі гідролітичної поліконденсації етоксисиланів відбувається повільне накопичення три- і тетрафункціональних силоксанових фрагментів [15]. Наявність у структурі ПСЧ гліцидилових груп (при використанні для синтезу частинок ГПТЕС) також перешкоджає формуванню регулярної сітки з фрагментів Si–O–Si. Сукупність цих факторів сприяє утворенню нерегулярної структури ПСЧ (зі зниженим вмістом тетрафункціональних Si–O–Si-вузлів просторової сітки, утворених внаслідок незавершеної гідролітичної поліконденсації) і появи перехідного шару між ними й епоксидною матрицею композита, що може позначитися на властивостях одержаних матеріалів. Розмір частинок у дослідженому зразку становить у середньому 60–90 нм (рис. 3, б).

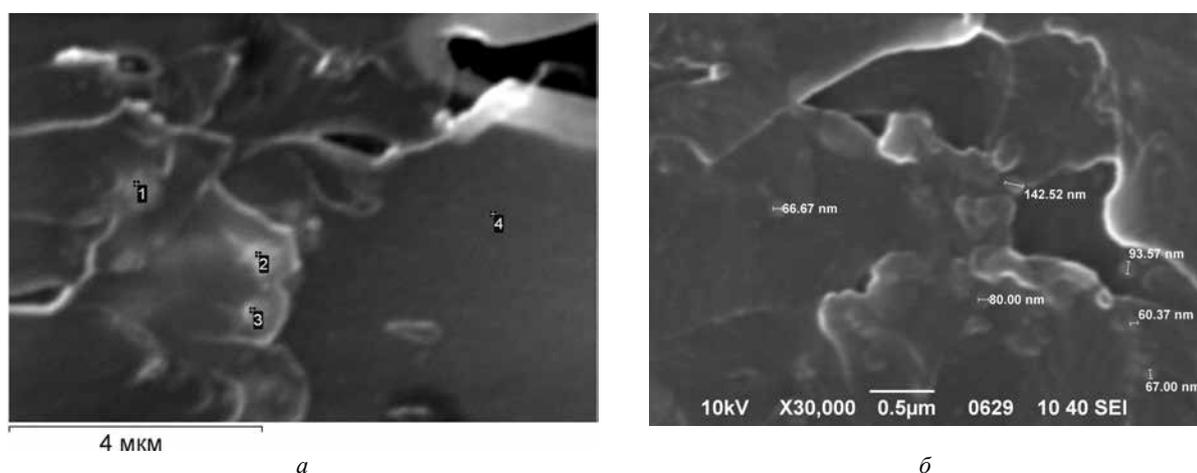


Рис. 3. Мікрофотографії СЕМ композита з вмістом ПСЧ (ТЕОС:ГПТЕС 2:1) 1 мас% (формування золю в присутності ДЕ): аналіз елементного складу (а) (вміст Si, %: 4,5 (1), 7,3 (2), 5,8 (3), 0,7 (4)); аналіз частинок за розмірами (б)

Для встановлення впливу ПСЧ на топологічну структуру полімерної складової композитів проведено термомеханічні дослідження і золь-гель аналіз одержаних на основі триепоксиду матеріалів. Встановлено, що при збільшенні вмісту ПСЧ у системі відбувається поступове зниження температур склування (T_c) композитів при одночасному підвищенні кількості екстрагованих низькомолекулярних сполук (золь-фракції), причому збільшення частки ГПТЕС поглиблює цей ефект (табл. 1).

Таблиця 1

Вплив мольного співвідношення ТЕОС і ГПТЕС і загальної кількості ПСЧ на температуру склування T_c і вміст золь-фракції композитів W_{sol} при формуванні золів ПСЧ у присутності ТЕ

w(SiO ₂), мас%	T_c , °C			W_{sol} , %		
	1:0	1:1	0:1	1:0	1:1	0:1
0		193			0,19	
0,5	190	180	189	0,17	0,15	0,32
1,0	170	186	179	0,20	0,43	0,39
1,5	182	173	166	0,53	0,60	1,4
3,0	179	152	134	0,44	0,89	2,0
4,5	171	135	105	0,70	1,6	3,5
6,0	175	125	97	1,0	2,4	4,0
10	137	100	78	3,9	3,1	8,2

Одержані результати вказують на порушення топологічної структури епоксидної матриці при її формуванні в присутності одержаних золь-гель методом полісилоксанових частинок. Це може бути зумовлено непродуктивною витратою частини епоксидних груп в реакції з HNO₃ при формуванні золів ПСЧ у присутності епоксидної смоли [16], а також наявністю специфічної адсорбції одного з компонентів системи на поверхні ПСЧ [17]. Подібний ефект спостерігали й автори робіт [12, 18] при одержанні епоксидно-силоксанових нанокompозитів ангідридного тверднення з використанням комедійних наноча-

стинок SiO_2 . В будь-якому разі між поверхнею ПСЧ і полімерною матрицею композита спостерігається формування перехідного шару з порушеною топологічною структурою епоксидної складової. Більш виражене зниження T_c для композитів із формуванням ПСЧ на основі ГПТЕС (ТЕОС:ГПТЕС 0:1). Це можна пояснити наявністю в структурі частинок великої кількості гліцидилових фрагментів, які в процесі ангідридного тверднення утворюють щеплені до епоксидної матриці ПСЧ і зумовлюють появу більш вираженого перехідного шару між полімерною матрицею та полісилоксановими частинками.

Незважаючи на зниження температури склування, при невеликій кількості ПСЧ у системі (1–3 мас%) спостерігається збільшення ефективної густини зшивання, на що вказує збільшення значень концентрації міжвузлових ланцюгів n_c (рис. 4). Такий характер залежності можна пояснити з позиції утворення просторового кластеру з полісилоксанових частинок всередині органічної матриці, що може приводити до ефекту армування і сприятиме покращенню властивостей композитів [11,19]. Подальше підвищення концентрації ПСЧ призводить до зниження значень n_c , причому густина зшивання нижче для композитів з формуванням ПСЧ на основі лише ГПТЕС (рис. 4, крива 3). Пояснити це явище можна наявністю специфічної адсорбції твердника на поверхні ПСЧ [17], а також непродуктивним витрачанням твердника в результаті взаємодії з ПСЧ, що містять силоксанові, а також негідролізовані етоксисиланові групи [20]. Збільшення вмісту ПСЧ призводить до поглиблення ступеня протікання в системі бічних процесів (оскільки підвищується частка уведених для формування золю компонентів відносно вмісту епоксидної смоли й ангідридного твердника).

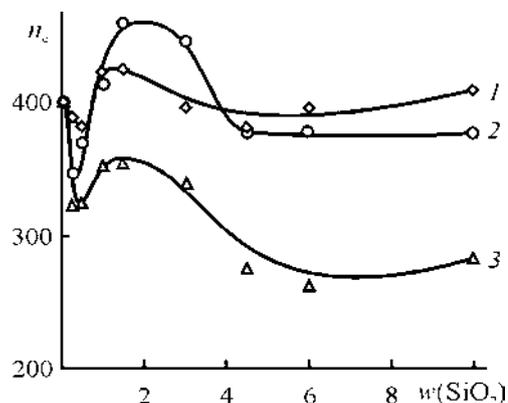


Рис. 4. Залежність концентрації міжвузлових ланцюгів n_c (моль·м⁻³) епоксидно-силоксанових композитів від вмісту SiO_2 (мас%) при формуванні золів у присутності ТЕ. Співвідношення ТЕОС:ГПТЕС 1:0 (1), 1:1 (2) і 0:1 (3)

Оскільки при проведенні процедури синтезу первинних ПСЧ у присутності епоксидного олігомеру відбувається часткове розкриття епоксидних груп у реакції з HNO_3 (відносно зменшення епоксидного числа смоли становить ~2 %) [16], запропоновано альтернативний спосіб синтезу, коли смола додається безпосередньо перед вакуумуванням золю. Для порівняльного аналізу впливу умов формування золів первинних ПСЧ на властивості композитів обрано системи зі співвідношенням ТЕОС:ГПТЕС 2:1, оскільки такий склад композиції забезпечує утворення стабільних золів при невисокому вмісті компатибілізатора й, відповідно, меншому зниженню густини зшивання полімерної матриці відносно решти досліджуваних співвідношень етоксисиланів.

Для композитів, одержаних при витриманні золів ПСЧ за відсутності ТЕ, значення температур α -релаксаційного переходу є вищими (у середньому на 6–10 градусів), а вміст золь-фракції – меншим порівняно з попереднім способом синтезу (табл. 2). Отже, при проведенні гідролітичної поліконденсації етоксисиланів за відсутності епоксидного олігомеру відбувається відносно збільшення густини зшивання полімерної матриці, яке можна пояснити більшим ступенем завершеності гідролітичної поліконденсації етоксисиланів і, відповідно, зниженням вмісту негідролізованих етоксисиланових груп у структурі ПСЧ.

Таблиця 2

Вплив вмісту ПСЧ на температуру склування T_c і вміст золь-фракції композитів W_{sol} при формуванні золів ПСЧ на основі ТЕОС і ГПТЕС (2:1) у присутності й за відсутності епоксидної смоли

$w(\text{SiO}_2)$, мас%	T_c , °C	W_{sol} , %	T_c , °C	W_{sol} , %	T_c , °C	W_{sol} , %	T_c , °C	W_{sol} , %
	у присутності ТЕ		за відсутності ТЕ		у присутності ДЕ		за відсутності ДЕ	
0	193	0,19	193	0,19	128	1,1	128	1,1
0,5	–	–	–	–	123	2,6	123	1,0
1,0	180	0,39	186	0,17	116	3,2	118	1,5
1,5	172	0,62	175	0,40	107	3,5	113	2,1
3,0	161	1,0	168	0,8	100	4,6	106	2,7
4,5	137	1,5	150	1,4	81	6,9	91	4,2
6,0	130	2,3	139	1,8	74	10	76	6,4
10	89	3,5	115	3,2	–	–	–	–

Взаємодія полімеру й наповнювача на межі поділу фаз приводить до зміни рухливості полімерних ланцюгів поблизу межі поділу, й, відповідно, відбивається як на температурі склування наповнених полімерів, так і на швидкості релаксаційних процесів у температурній області поблизу T_c [21, 22]. Аналіз температурних залежностей (T , °C) тангенса кута механічних втрат $\text{tg } \delta$ композитів, наповнених ПСЧ

(ТЕОС: ГПТЕС 2:1), вказує на порушення топологічної структури епоксидної матриці в процесі ангідридного тверднення в присутності полісилоксанових частинок: спостерігається зсув $\text{tg } \delta_{\text{max}}$ у бік більш низьких температур (рис. 5), причому для композитів з формуванням золів ПСЧ у присутності епоксидного олігомеру цей ефект більш виражений (рис. 5, криві 2', 3', 4').

Узагальнені дані ДМА для систем на основі двох епоксидних смол наведено в табл. 3. Для розрахунку ефективної молекулярної маси міжвузлового сегмента сітки M_c композитів використано значення модулю пружності в області плато вискоеластичності, одержані за даними ДМА. Спостерігається зниження M_c (тобто збільшення густини зшивання) в межах концентрацій полісилоксанових частинок 0,5–4,5 мас% (1,0–4,5 мас%) для композитів, одержаних з формуванням золів ПСЧ за відсутності ДЕ (ТЕ), і 0,5–3,0 мас% ПСЧ для композитів з частинками, одержаними в присутності ДЕ.

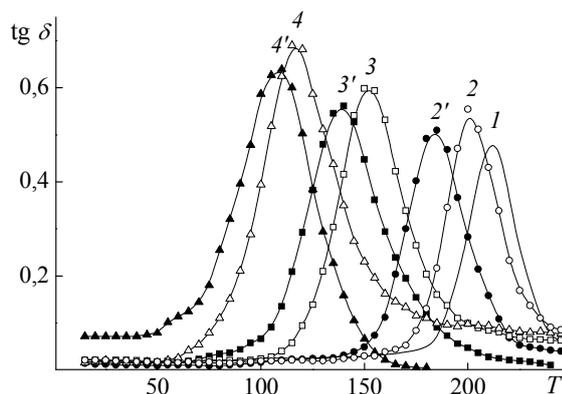


Рис. 5. Температурна залежність тангенса кута механічних втрат $\text{tg } \delta$ композитів із вмістом ПСЧ 0 (1), 1,5 (2, 2'), 6,0 (3, 3') і 10 мас% (4, 4') при формуванні золів ПСЧ (ТЕОС:ГПТЕС 2:1) за відсутності (2, 3, 4) й у присутності ТЕ (2', 3', 4')

Таблиця 3

Максимуми тангенсів кутів механічних втрат $\text{tg } \delta_{\text{max}}$ і значення ефективної молекулярної маси міжвузлового сегмента сітки M_c ($\text{г} \cdot \text{моль}^{-1}$) для композитів з формуванням золів ПСЧ на основі ТЕОС і ГПТЕС (2:1) у присутності й за відсутності епоксидної смоли

$w(\text{SiO}_2)$, мас%	$\text{tg } \delta_{\text{max}}$	M_c						
	у присутності ТЕ		за відсутності ТЕ		у присутності ДЕ		за відсутності ДЕ	
0	0,47	360	0,47	360	1,08	2400	1,08	2400
0,5	–	–	–	–	1,00	1200	1,05	1400
1,0	0,51	510	0,55	340	1,05	1350	1,07	1600
1,5	0,50	600	0,48	200	1,14	1800	1,08	1800
3,0	0,49	650	0,52	360	1,17	2000	1,06	1900
4,5	0,57	900	0,53	290	1,22	2350	1,08	1900
6,0	0,56	550	0,50	205	–	–	1,04	3400
10	0,63	880	0,69	510	–	–	–	–

Отже, при формуванні структури композитів мають місце два протилежних ефекти. З одного боку, відбувається утворення перехідного шару з підвищеною молекулярною рухливістю між поверхнею полісилоксанових частинок й полімерною складовою системи, спостерігається порушення топологічної структури епоксидної матриці, з іншого – наявність ПСЧ у невеликій кількості виявляє армувальний вплив на полімер і сприяє появі ефекту малих добавок. Поєднання цих факторів приводить до появи екстремумів на залежностях «властивості – вміст ПСЧ».

З метою встановлення впливу полісилоксанових частинок на термостабільність одержаних матеріалів проведено високотемпературне окиснення плівкових зразків молекулярним киснем. Показано, що зі зростанням вмісту ПСЧ у композитах підвищується максимальна швидкість поглинання кисню V_{max} (рис. 6), що корелює зі зміною густини зшивання полімерної матриці і вмістом золь-фракції. При невисокій концентрації ПСЧ (0,5–1,5 мас% ПСЧ залежно від типу епоксидного олігомеру, при формуванні золів за відсутності епоксидної смоли) зберігається відносно невисока V_{max} , значення якої знаходяться нижче або на рівні немодифікованого епоксидного полімеру.

Термостабільність одержаних композитів у неізотермічному режимі досліджена методом дериватографії. Показано, що введення в епоксидну матрицю ПСЧ у невеликій кількості приводить до відносного підвищення параметрів термостабільності матеріалів, характеристиками якої можуть бути значення температур 10 %-вої втрати маси T_{10} й максимальної швидкості термодеструкції T_{max} (табл. 4).

Відомо, що введення неорганічного наповнювача в епоксидну матрицю часто сприяє покращенню механічних характеристик матеріалу, зокрема, спостерігається підвищення когезійної міцності, модулю пружності композитів [23, 24]. Такий ефект автори пов'язують з армувальним впливом наноповнювача на полімерну матрицю. Для синтезованих у даній роботі матеріалів показано, що наявність ПСЧ в епоксидно-ангідридній матриці сприяє покращенню деформаційно-міцносних характеристик. Армувальний ефект проявляється в області концентрацій ПСЧ 1–3 мас% і 0,5–1,5 мас% для композитів на основі ТЕ і

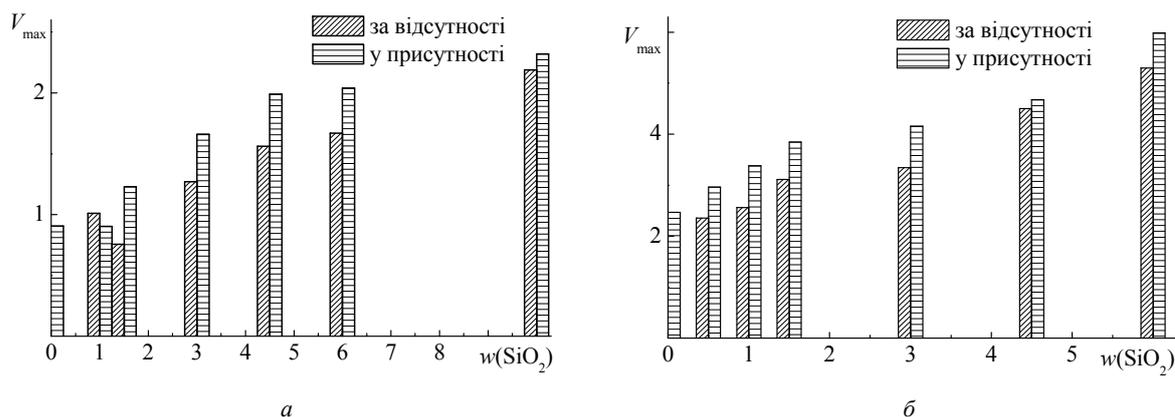


Рис. 6. Залежність максимальної швидкості поглинання кисню V_{\max} ($\cdot 10^4$ моль \cdot кг $^{-1}$ \cdot с $^{-1}$) в процесі високотемпературного окиснення (200 °С) молекулярним киснем епоксидно-силоксанових композитів на основі ТЕ (а) і ДЕ (б) від вмісту ПСЧ (ТЕОС:ГПТЕС 2:1) (мас%) і процедури формування золів (у присутності або за відсутності епоксидної смоли)

Таблиця 4
Температури 10 % втрати маси T_{10} й максимальної швидкості термодеструкції T_{\max} (°С) епоксидно-силоксанових композитів з формуванням золів ПСЧ (ТЕОС:ГПТЕС 2:1) у присутності й за відсутності епоксидної смоли

$w(\text{SiO}_2)$, мас%	T_{10}	T_{\max}	T_{10}	T_{\max}	T_{10}	T_{\max}	T_{10}	T_{\max}
	у присутності ТЕ		за відсутності ТЕ		у присутності ДЕ		за відсутності ДЕ	
0	270	330	270	330	270	330	270	330
0,5	–	–	–	–	285	345	280	335
1,0	280	335	270	330	280	345	285	340
1,5	280	340	270	330	–	–	–	–
3,0	280	340	270	340	270	335	275	345
6,0	265	330	260	345	280	330	270	335
10	250	325	245	335	–	–	–	–

ДЕ відповідно: спостерігається підвищення модулю пружності E й міцності при одноосьовому розтягуванні σ_p (табл. 5). Подальше збільшення концентрації ПСЧ призводить до зниження міцносних характеристик композитів. Значення модулю пружності при цьому лишається на досить високому рівні порівняно з немодифікованим епоксидним полімером, одночасно спостерігається зниження величини відносного подовження ε_p . При цьому використання ДЕ дає змогу одержати менш жорсткі й крихкі композити порівняно з системами на основі ТЕ.

Таблиця 5
Вплив вмісту ПСЧ на модуль пружності E (ГПа), міцність при розтягуванні σ_p (МПа) й відносне подовження ε_p (%) плівкових зразків композитів з формуванням золів ПСЧ на основі ТЕОС і ГПТЕС (2:1) у присутності й за відсутності епоксидної смоли

$w(\text{SiO}_2)$, мас%	E	σ_p	ε_p	E	σ_p	ε_p	E	σ_p	ε_p
	у присутності ТЕ			за відсутності ТЕ			за відсутності ДЕ		
0	1,45	61	6,2	1,45	61	6,2	1,32	66	9,5
0,5	–	–	–	–	–	–	1,43	74	9,0
1,0	1,30	61	6,7	1,54	84	8,5	1,54	75	8,5
1,5	1,39	66	6,8	1,47	79	7,7	1,59	75	7,6
3,0	1,41	67	8,1	1,56	74	6,5	1,40	65	7,1
6,0	1,36	59	6,3	1,50	63	6,4	1,73	70	6,1
10	1,24	57	6,1	1,52	57	5,6	–	–	–

Відомо, що зміна когезійної міцності є однією з основних причин зміни адгезійної міцності клейових з'єднань при рівномірному відриві. Додатковий внесок у значення адгезійної міцності може робити формування ковалентних зв'язків Si–O–Al між поверхнею субстрату й силанольними групами полісилоксанових частинок [25]. В області малих добавок ПСЧ спостерігається збільшення адгезійної міцності клейових з'єднань алюмінієвого сплаву Д16 при рівномірному відриві $\sigma_{\text{відр}}$ (табл. 6). Значення міцності клейових з'єднань при зсуві $\tau_{\text{зсув}}$ лишається майже незмінним. Збільшення $\sigma_{\text{відр}}$ композитів відносно

немодифікованого епоксидного полімеру при формуванні золів ПСЧ у присутності й за відсутності ТЕ становить 32 % і 50 %, для композита основі ДЕ – 9 % і 35 % відповідно.

Таблиця 6

Адгезійна міцність клейових з'єднань алюмінієвого сплаву Д16 при зсуві $\tau_{зсув}$ і рівномірному відриві $\sigma_{відр}$ (МПа) для епоксидно-силоксанових композитів з формуванням золів ПСЧ на основі ТЕОС і ГПТЕС (2:1) у присутності й за відсутності епоксидної смоли

w(SiO ₂), мас%	$\tau_{зсув}$	$\sigma_{відр}$	$\tau_{зсув}$	$\sigma_{відр}$	$\tau_{зсув}$	$\sigma_{відр}$	$\tau_{зсув}$	$\sigma_{відр}$
	у присутності ТЕ		за відсутності ТЕ		у присутності ДЕ		за відсутності ДЕ	
0	10	28	10	28	11	35	11	35
0,5	–	–	–	–	9,1	38	11	46
1,0	10	36	11	35	11	24	12	47
1,5	9,9	32	10	37	11	24	11	40
3,0	9,8	37	9,6	42	11	28	9,0	31
4,5	10	32	9,3	33	9,4	10	9,0	24
6,0	10	27	10	34	11	6,5	6,0	21
10	9,1	25	9,1	28	–	–	–	–

Узагальнення й аналіз результатів проведених досліджень дозволяє зробити висновок, що завдяки оптимальній комбінації деформаційно-міцносних, адгезійних характеристик, а також термостабільності кращі властивості має епоксидний композит із вмістом ПСЧ 0,5–1,5 мас%, сформований при мольному співвідношенні ТЕОС:ГПТЕС 2:1 за відсутності ДЕ.

Висновки. З використанням золь-гель підходу одержано однорідні епоксидно-силоксанові нанокompозити ангідридного тверднення з матрицею на основі триепоксиду 1,1-диметил-3-циклогексену або діепоксидного олігомеру дигліцидилового етеру дициклогексилпропану з вмістом полісилоксанових частинок 0,5–10 мас%, при варіюванні мольного співвідношення тетраетоксисилану і 3-гліцидоксипропілтриетоксисилану, а також послідовності введення епоксидної смоли у золі ПСЧ.

Встановлено, що в ході синтезу в полімерній матриці формуються структури фрактального типу з первинних полісилоксанових частинок (розмір первинних ПСЧ становить 4–10 нм). При концентрації ПСЧ 1,5 мас% у композиті утворюється просторовий кластер з полісилоксанових наночастинок.

Показано, що зі збільшенням вмісту полісилоксанових наночастинок, сформованих у присутності епоксидної смоли, спостерігається зниження густини зшивання композитів (зниження температури склування і збільшення вмісту золь-фракції), більш виражене для систем із високою часткою 3-гліцидоксипропілтриетоксисилану в структурі ПСЧ. Формування золів ПСЧ за відсутності епоксидного олігомеру зменшує цей ефект (T_c вище в середньому на 6–10 °С, незалежно від обраної епоксидної смоли).

В області концентрації ПСЧ 1,0–3,0 і 0,5–3,0 мас% для композитів на основі триепоксиду і діепоксиду відповідно спостерігається ефект малих добавок. Наночастинки виявляють армувальний вплив на полімерну матрицю, при цьому збільшується ефективна густина зшивання композитів, підвищується модуль пружності й міцність при розтягуванні. На 35–50 % збільшується адгезійна міцність при рівномірному відриві клейових з'єднань алюмінієвого сплаву Д16. Кращі фізико-механічні характеристики мають композити, одержані при формуванні золів ПСЧ за відсутності епоксидного олігомеру.

Встановлено, що при концентрації ПСЧ вище 3 мас% порушення топологічної структури епоксидної складової композитів (зниження густини зшивання) викликає підвищення швидкості їх високотемпературного окиснення. В області малих добавок ПСЧ (до 3 мас%) зберігається невисока швидкість поглинання кисню композитами, а також зберігається їх загальна висока термічна стійкість.

Одержано композити з вмістом ПСЧ (ТЕОС:ГПТЕС 2:1) 0,5–3,0 мас% з високими деформаційно-міцносними, адгезійними характеристиками і термостабільністю, які можуть використовуватися як клеї гарячого тверднення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Hanemann T. Polymer-nanoparticle composites: from synthesis to modern applications / T. Hanemann, D. V. Szabó // Materials. – 2010. – Vol. 3, No 6. – P. 3468–3517.
- Zou H. Polymer/Silica nanocomposites: preparation, characterization, properties, and applications / H. Zou, S. Wu, J. Shen // Chem Rev. – 2008. – Vol. 108, No 9. – P. 3893–3957.
- Tjong S. C. Structural and mechanical properties of polymer nanocomposites / S. C. Tjong // Mater. Sci. Eng.: R. – 2006. – Vol. 53, No 3–4. – P. 73–197.
- Camargo P. H. C. Nanocomposites: synthesis, structure, properties and new application opportunities / P. H. C. Camargo, K. G. Satyanarayana, F. Wypych // Mat. Res. – 2009. – Vol. 12, No 1. – P. 1–39.
- Epoxy resins / H. Q. Pham, M. J. Marks // Encyclopedia of polymer science and technology: 12 Vol. / H. F. Mark. – John Wiley & Sons, 2004. – Vol. 9. – P. 678–804.

6. Brinker C. J. Sol-gel science: the physics and chemistry of sol-gel processing / C. J. Brinker, G. W. Scherer. – Academic Press, Inc., 1990. – 912 p.
7. Золь-гель технология микро- и нанокомпозитов / Под ред. О. А. Шиловой. – СПб.: Изд-во «Лань», 2013. – 304 с.
8. Composite film coatings prepared by cationic polymerization of epoxy-polysiloxane systems / N. G. Leonova, V. M. Mikhal'chuk, V. I. Rybachenko et al. // Russ. J. Appl. Chem. – 2011. – Vol. 84, No 4. – P. 708–712.
9. Işın D. Preparation and characterization of UV-curable epoxy/silica nanocomposite coatings / D. Işın, N. Kayaman-Apohan, A. Güngör // Prog. Org. Coat. – 2009. – Vol. 65, No 4. – P. 477–483.
10. Innocenzi P. Hybrid organic-inorganic sol-gel materials based on epoxy-amine systems / P. Innocenzi, T. Kidchob, T. Yoko // J. Sol-Gel Sci. Technol. – 2005. – Vol. 35, No 3. – P. 225–235.
11. Property improvements of in situ epoxy nanocomposites with reduced interparticle distance at high nanosilica content / H. Zhang, Z. Zhang, K. Friedrich, C. Eger // Acta Materialia. – 2006. – Vol. 54, No 7. – P. 1833–1842.
12. Fracture behaviours of in situ silica nanoparticle-filled epoxy at different temperatures / H. Zhang, L.-C. Tang, Z. Zhang et al. // Polymer. – 2008. – Vol. 49, No 17. – P. 3816–3825.
13. Toughening mechanisms of nanoparticle-modified epoxy polymers / B. B. Johnsen, A. J. Kinloch, R. D. Mohammed et al. // Polymer. – 2007. – Vol. 48, No 2. – P. 530–541.
14. Получение эпоксикремнеземных композитов, отвержденных *изо*-метилтетрагидрофталевым ангидридом / С. В. Жильцова, В. М. Михальчук, Е. М. Петрова и др. // Журнал прикл. химии. – 2007. – Т. 80, № 3. – С. 479–483.
15. Matějka L. Structure evolution in epoxy-silica hybrids: sol-gel process / L. Matějka, J. Pleštil, K. Dušek // J. Non-Cryst. Solids. – 1998. – Vol. 226, No 1-2. – P. 114–121.
16. Властивості епоксидно-силоксанових композитів, одержаних при різних способах формування золю полісилоксанових частинок / С. В. Жильцова, В. М. Михальчук, О. Г. Пурікова, В. О. Білошенко // Вопросы химии и химической технологии. – 2010. – № 1. – С. 46–51.
17. Rosso P. Epoxy/silica nanocomposites: nanoparticle-induced cure kinetics and microstructure / P. Rosso, L. Ye // Macromol. Rapid Commun. – 2007. – Vol. 28, No 1. – P. 121–126.
18. Glass transition and relaxation behavior of epoxy nano-composites / Y. Sun, Zh. Zhang, K.-S. Moon, C. P. Wong // J. Polym. Sci.: B. – 2004. – Vol. 42, No 1. – P. 3849–3858.
19. Структурно-морфологические особенности органо-неорганических гибридных материалов на основе этоксисиланов и эпоксидной смолы / Ю. П. Гомза, В. В. Клепко, С. В. Жильцова и др. // Высокомолекул. соед. Сер. А: Физика полимеров. – 2010. – Т. 52, № 6. – С. 963–968.
20. Epoxy-silica nanocomposites based on ethoxysilanes and diglycidyl ether of dicyclohexylpropane / S. Zhylytova, V. Mykhalchuk, O. Platonova, V. Biloshenko // Chemistry & Chemical Technology. – 2011. – Vol. 5, No 1. – P. 49–54.
21. Mascia L. Substantiating the role of phase bicontinuity and interfacial bonding in epoxy-silica nanocomposites / L. Mascia, L. Prezzi, B. Haworth // J. Mater. Sci. – 2006. – Vol. 41, No 4. – P. 1145–1155.
22. Вязкоупругие и прочностные свойства эпоксидно-силоксановых нанокомпозитов ангидридного отверждения / С. В. Жильцова, Н. В. Бабкина, В. М. Михальчук и др. // Полімерний журнал. – 2010. – Т. 32, № 5. – С. 421–428.
23. Epoxy nanocomposites – fracture and toughening mechanisms / B. Wetzell, P. Rosso, F. Hauptert, K. Friedrich // Eng. Fract. Mech. – 2006. – Vol. 73, No 16. – P. 2375–2398.
24. Influence of nanoparticles and nanofibers of aluminum oxide on the properties of epoxy composites / B. N. Dudkin, G. G. Zainullin, P. V. Krivoshapkin et al. // Glass Phys. Chem. – 2008. – Vol. 34, No 2. – P. 187–191.

Надійшло до редакції 03.04.2014 р.

РЕЗЮМЕ

Золь-гель методом получені однородні епоксидно-силоксанові нанокомпозити ангидридного отвердження. Золи полісилоксанових частинок формували на основі суміші тетраетоксисилану і 3-глицидоксипропілтриетоксисилану в різних мольних співвідношеннях. Показано, що з підвищенням вмісту полісилоксанових частинок і частки 3-глицидоксипропілтриетоксисилану в системі зменшується густина шивання. В діапазоні концентрацій наповнювача 0,5–3 мас% спостерігається ефект малих доданків: відбувається збільшення ефективної щільності шивання за рахунок армирующего дії просторового кластера з полісилоксанових частинок і підвищення фізико-механічних властивостей композитів.

Ключові слова: епоксидні смоли, етоксисилани, ангидридне отвердження, золь-гель метод, нанокомпозити, структура, властивості.

SUMMARY

Homogeneous anhydride cured epoxy-silica nanocomposites were received using the sol-gel method. Silica particles' sols were obtained via mixing tetraethoxysilane and 3-glycidoxypropyltriethoxysilane at different molar ratios. Higher silica content and amount of 3-glycidoxypropyltriethoxysilane in the system result in lower network density. Within filler concentrations range 0.5–3 mas% effect of small additions was observed. Effective molecular weight of chain between junctions decreases, which leads to reinforcement effect and increase of composites' physical-mechanical properties.

Keywords: epoxy resins, ethoxysilanes, anhydride curing, sol-gel method, nanocomposites, structure, properties.

УДК 546.881.5'817'33'662:544.228

А. В. Игнатов, Т. М. Саванкова, Е. Г. Дидоренко, А. Ю. Талыкова, Е. И. Гетьман, Л. В. Пасечник

ИЗОМОРФНОЕ ЗАМЕЩЕНИЕ В СИСТЕМЕ $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$

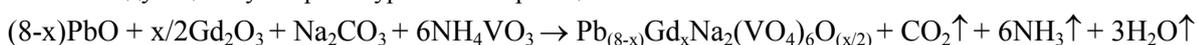
Твердые растворы $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ исследованы методами рентгенофазового анализа, сканирующей электронной микроскопии и измерением электропроводности. Уточнена кристаллическая структура твердых растворов по Ритвельду. Установлено, что замещение свинца на гадолиний происходит в области до $x = 0,15$. Изучено влияние замещения на электропроводность, характер ее изменения свидетельствует о переходе от катионной проводимости к анионной с увеличением содержания гадолиния в структуре.

Ключевые слова: оксованадат свинца-натрия, гадолиний, апатит, рентгенофазовый анализ, метод Ритвельда твердые растворы, проводимость.

Введение. Семейство апатитов включает в себя большое число разнообразных по составу и свойствам соединений, которые широко используются в качестве биоматериалов, твердых электролитов сенсоров, адсорбентов, лазерных, люминесцентных, оптических материалов, катализаторов реакций органического синтеза и т.д. [1–4]. Общая формула соединений данного семейства $M_{10}(ZO_4)_6X_2$ (где $M - Na^+, K^+, Ca^{2+}, Sr^{2+}, Ba^{2+}, Pb^{2+}, Cd^{2+}, Eu^{3+}, Y^{3+}, La^{3+}$ и др.; $Z - Si^{4+}, Ge^{4+}, P^{5+}, V^{5+}, As^{5+}, S^{6+}, Cr^{6+}$ и др.; $X - OH^-, F^-, Cl^-, Br^-, I^-, O^{2-}, \square$ – вакансии и др.). Большинство соединений семейства апатитов кристаллизуется в гексагональной решетке (пространственная группа $P6_3/m$) и имеет склонность к замещению своих структурных единиц другими ионами, следствием чего является образование твердых растворов, свойства которых могут существенно отличаться от свойств незамещенных соединений [5]. Получение твердых растворов на основе различных соединений и исследование их свойств является одним из подходов создания новых функциональных материалов.

Целью данной работы является исследование замещения свинца на гадолиний в ванадате натрия свинца $Pb_8Na_2(VO_4)_6$ по схеме $2Pb^{2+} + \square \rightarrow 2Gd^{3+} + O^{2-}$ и изучение влияния состава образующихся твердых растворов $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ на их электрофизические свойства.

Экспериментальная часть. Все образцы получали по методике твердофазного синтеза. Навески исходных веществ взяты в таком соотношении, чтобы предполагаемый состав образующихся твердых растворов соответствовал формуле $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ ($0 \leq x \leq 0,6$). Образование твердых растворов указанного состава происходит вследствие протекания химического взаимодействия, которое можно описать следующим суммарным уравнением реакции:



Смеси исходных веществ гомогенизировались в агатовой ступке и прокаливались при температуре 300 °С в течении 3 часов и 600 °С на протяжении 46 часов. После каждых 5–6 часов прокаливания при температуре 600 °С образцы исследовались методом рентгенофазового анализа. Прокаливание проводили до достижения постоянства фазового состава образцов, что являлось свидетельством завершения протекания реакции.

Рентгенофазовый анализ образцов проводили на ДРОН-3М дифрактометре (CuK_α -излучение, фильтр – Ni) в интервале 16°–54° (2 θ). Идентификация фазового состава осуществлялась с помощью программы Match (v. 1.5c) и рентгеновской базы данных pdf-2 (International Center Diffraction Data). Параметры элементарных ячеек рассчитывались методом наименьших квадратов по 16 однозначно индицируемым линиям, кремний использовался в качестве внешнего эталона.

Уточнение особенностей кристаллической структуры методом Ритвельда выполняли с использованием массива данных, полученного из порошковой рентгенограммы, снятой на ДРОН – 3М в интервале углов от 15° до 140° (2 θ). Шаг сканирования и время экспозиции в каждой точке составляли соответственно 0,05° и 3 секунды. Уточнение проводили с использованием программы FULLPROF.2k (версия 3.40) с графическим интерфейсом WinPLOTR.

Оценку размера зерен, определение элементного состава и распределение элементов по поверхности частиц образца проводили на растровом электронном микроскопе JSM-6490LV с применением рентгеновского энергодисперсионного спектрометра INCA Penta FETx3 (OXFORD Instruments).

Для определения удельной проводимости образцов порошки прессовались в таблетки диаметром 0,8 см под давлением 120 МПа и спекались при 600 °С на протяжении 70 ч. В качестве электродов использовалось серебро. Измерения удельного сопротивления проводили при нагревании образцов от 300 до 600 °С со скоростью 2 °/мин на измерителе параметров LCR DE-5000 при фиксированных частотах 100 Гц, 1, 10 и 100 кГц.

Результаты и их обсуждение. Согласно данным рентгенофазового анализа замещение свинца гадолинием в соединении $\text{Pb}_8\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6$ протекает в области составов до $x = 0,15$. На рентгенограммах образцов данной области присутствуют только рефлексы фазы $\text{Pb}_8\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6$ (рис. 1), в то время как в области $x \geq 0,20$ помимо рефлексов указанной фазы, присутствуют также рефлексы фазы GdVO_4 , относительная интенсивность которых возрастает с увеличением значения x .

Исследование образца состава $\text{Pb}_{7,85}\text{Gd}_{0,15}\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{0,075}$ методом сканирующей электронной микроскопии показало, что полученный порошок является мелкодисперсным и характеризуется размерами агрегатов 3–5 мкм и зерен – 1 мкм, что наглядно продемонстрировано на микрофотографии образца (рис. 2). Также следует отметить, что химические элементы равномерно распределены по поверхности зерен и их содержание согласуется с теоретически рассчитанными значениями (табл. 1).

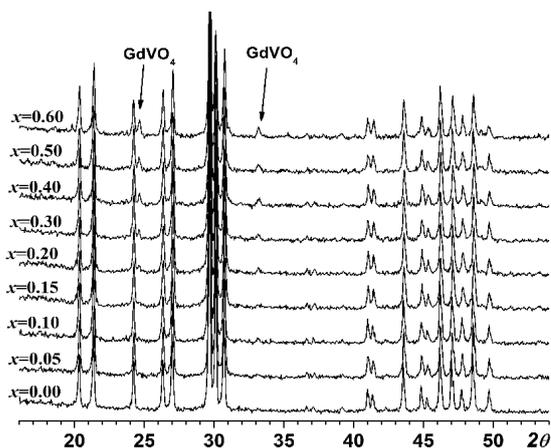


Рис. 1. Рентгенограммы образцов $\text{Pb}_{(8-x)}\text{Gd}_x\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{(x/2)}$

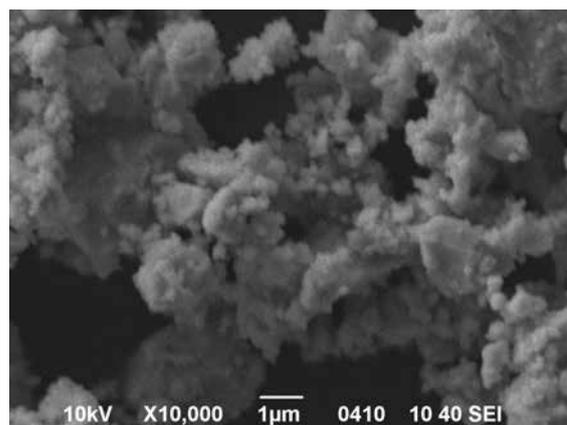


Рис. 2. Микрофотография образца состава $\text{Pb}_{7,85}\text{Gd}_{0,15}\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{0,075}$

Таблица 1

Результаты элементного анализа образцов состава $\text{Pb}_{(8-x)}\text{Gd}_x\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{(x/2)}$ (масс. %)

X	Pb		Na		Gd		V		O	
	эксп.	теор.								
0	69,99	69,26	1,93	1,92	–	–	13,62	12,77	14,46	16,05
0,15	67,01	68,14	3,49	1,93	0,95	0,99	13,34	12,81	15,21	16,14

Значения параметров элементарной гексагональной ячейки образцов твердых растворов $\text{Pb}_{(8-x)}\text{Gd}_x\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{(x/2)}$ однофазной области представлены в табл. 2, из которой видно, что в образцах, содержащих гадолиний, параметр a незначительно уменьшается, а параметр c не изменяется. Подобное поведение параметров не согласуется с величинами ионных радиусов Pb^{2+} (1,35 Å) и Gd^{3+} (1,107 Å) [6], поскольку вхождение меньших по размеру ионов гадолиния в структуру твердого раствора должно сопровождаться существенным уменьшением параметров элементарной ячейки структуры апатита. Для объяснения наблюдаемого несоответствия сопоставим значения параметров элементарных ячеек трех свинец-содержащих соединений со структурой апатита $\text{Pb}_{10}(\text{VO}_4)_6(\text{OH})_2$ ($a = 10,2242(3)$ Å, $c = 7,4537(3)$ Å) [7], $\text{Pb}_8\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6$ ($a = 10,060(2)$ Å, $c = 7,346(1)$ Å) [8] и $\text{Pb}_8\text{K}_2(\text{VO}_4)_6$ ($a = 10,111(2)$ Å, $c = 7,448(1)$ Å) [8]. Ванадаты натрия-свинца $\text{Pb}_8\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6$ и калия-свинца $\text{Pb}_8\text{K}_2(\text{VO}_4)_6$ можно рассматривать в качестве производных от гидроксованадата свинца $\text{Pb}_{10}(\text{VO}_4)_6(\text{OH})_2$, в котором часть ионов Pb^{2+} замещена ионами щелочных металлов (соответственно, натрием и калием). Вхождение в структуру апатита меньших по размеру ионов Na^+ (1,24 Å) приводит к уменьшению параметров ячейки, в то время как вхождение в структуру больших по размеру ионов K^+ (1,55 Å) также сопровождается уменьшением параметров ячейки. Таким образом, замещение ионов свинца в гидроксованадате ионами щелочных металлов приводит к сильному сжатию элементарной ячейки структуры апатита, поэтому, протекающее в узком интервале составов замещение свинца на гадолиний в соединении $\text{Pb}_8\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6$, уже не сказывается на изменении параметров элементарной ячейки.

С кристаллохимической точки зрения, если не принимать во внимание атомы кислорода, в структуре апатита можно выделить четыре структурных положения: два M(1) и M(2) – в катионной подрешетке и два Z и X – в анионной подрешетке. Положение M(1) кратностью 4 имеет координационное окружение, состоящее из девяти атомов кислорода, каждый из которых, в свою очередь, входит в состав тетра-

Таблица 2

Состав, X	a (Å)	c (Å)
0	10,057(2)	7,327(2)
0,05	10,049(1)	7,328(1)
0,10	10,052(2)	7,329(2)
0,15	10,048(2)	7,326(2)

эдров ZO_4 . Положение M(2) координировано шестью атомами кислорода, также входящих в состав тетраэдров, и атомом, заселяющим положение X структуры. Атомы, располагающиеся в положении M(2) образуют треугольники, которые повернуты друг относительно друга на 60° вдоль направления, параллельного параметру c структуры. Эти треугольники формируют каналы, в которых располагаются атомы положения X структуры [9]. В структуре соединения $Pb_8Na_2(VO_4)_6$ положение X вакантно, а канал заполнен стереохимически активными парами электронов ионов Pb^{2+} .

Результаты уточнения особенностей кристаллической структуры образцов с $x = 0$ и $0,15$ представлены в табл. 3 и 4. В соединении $Pb_8Na_2(VO_4)_6$ ионы натрия преимущественно локализируются в позиции M(1) структуры апатита. В структуре твердого раствора $Pb_{7,85}Gd_{0,15}Na_2(VO_4)_6O_{0,075}$ ионы гадолиния полностью локализируются в положении M(1), что в свою очередь приводит к некоторому перераспределению ионов натрия между катионными позициями M(1) и M(2). Кроме того, положение X структуры частично заполняется ионами кислорода, появление которых обусловлено необходимостью компенсации гетеро-валентного замещения свинца гадолинием в катионной подрешетке.

Таблица 3

Заселенность катионных позиций в структуре $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ и факторы достоверности

Состав	Положение M(1) (4f)			Положение M(2) (6h)			Факторы достоверности				
	Pb	Na	Gd	Pb	Na	Gd	R_B	R_F	R_P	R_{WP}	χ^2
$X=0$	2,34(2)	1,66(2)	–	5,66(2)	0,34(2)	–	7,86	6,88	7,85	10,1	1,63
$X=0,15$	2,18(2)	1,21(2)	0,15(0)	5,21(2)	0,79(2)	0(0)	4,09	4,45	6,55	8,60	1,51

Таблица 4

Некоторые межатомные расстояния в структуре $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$

Состав	<Pb(1)–O>	<Pb(2)–O(1-3)>	Pb(2)–O(4)	Pb(2)–Pb(2)
$x = 0$	2,75(1)	2,54(1)	–	4,405(7)
$x = 0,15$	2,74(1)	2,57(1)	2,533(5)	4,387(7)

Исходя из значений координат атомов, полученных при уточнении кристаллической структуры с помощью алгоритма Ритвелда, были рассчитаны значения межатомных расстояний, которые выборочно представлены в табл. 4. Замещение свинца гадолинием практически не сказывается на изменении средних расстояний <Pb(1)–O> полиэдра M(1) структуры апатита, в то время как средние расстояния <Pb(2)–O(1-3)> в полиэдре M(2) несколько возрастают, что объясняется увеличением координационного числа с 6 до 7 за счет появления в каналах структуры ионов кислорода. Последние притягивают к себе противоположно заряженные ионы металлов, располагающихся в положении M(2) структуры, вследствие чего расстояние Pb(2)–Pb(2) уменьшается.

Ряд соединений семейства апатитов являются ионными проводниками, что обусловлено возможностью перемещения частиц по каналам структуры. В зависимости от того, какие частицы служат носителями тока, ионная проводимость может быть катионной, анионной или смешанной [10, 11]. Вид проводимости соединений семейства апатитов зависит от их химического состава, например, проводимость $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ и $Ca_{9,5}Na_{0,5}(PO_4)_6(OH)_{1,5}$ – протонная, $Ca_{8,5}La_{1,5}(VO_4)_6O_{1,75}$ – анионная (O^{2-}), $Pb_8K_2(VO_4)_6$ – катионная (K^+) [12], $Pb_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ – смешанная (e^- и OH^-) [13].

В качестве примера в табл. 5 представлены величины проводимости на частоте переменного тока 1 кГц образцов $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ однофазной области для различных температур.

Таблица 5

Проводимость ($См \cdot см^{-1}$) образцов $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ на частоте переменного тока 1 кГц

x	400°C	450°C	500°C	550°C	600°C
0	$0,035 \cdot 10^{-5}$	$0,1 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$12 \cdot 10^{-5}$	$26 \cdot 10^{-5}$
0,05	$0,020 \cdot 10^{-5}$	$0,068 \cdot 10^{-5}$	$0,23 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$
0,10	$0,078 \cdot 10^{-5}$	$0,23 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$17 \cdot 10^{-5}$
0,15	$0,082 \cdot 10^{-5}$	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$7,5 \cdot 10^{-5}$	$18 \cdot 10^{-5}$

Как видно из таблицы величина проводимости при замещении свинца гадолинием во всем температурном интервале сначала (при $x = 0,05$) резко уменьшается, а затем с увеличением содержания гадолиния возрастает. Логарифмическая зависимость проводимости образцов от обратной температуры подчиняется уравнению Аррениуса, что позволяет определить энергию активации проводимости. В качестве примера на рис. 3 представлена такая зависимость для образцов состава $x = 0$ и $0,10$. Прямолинейный участок в интервале температур 300–450 °С описывает примесную проводимость, в то время как прямолинейный участок в области 500–600 °С характеризует собственную проводимость образцов. В интерва-

ле 450–500 °С, который характеризується високою енергією активації, происходит перемещение катионов натрия в каналы структуры, что первоначально обеспечивает катионную проводимость.

Подобное изменение в области собственной проводимости можно объяснить следующим образом: незамещенный ванадат натрия-свинца $\text{Pb}_8\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6$ характеризуется катионной проводимостью, которая обусловлена перемещением ионов натрия по каналам структуры [14–16]. При замещении согласно схеме $2\text{Pb}^{2+} + \square \rightarrow 2\text{Gd}^{3+} + \text{O}^{2-}$, каналы структуры апатита заполняются ионами кислорода, которые частично блокируют переход в каналы и перемещение по ним ионов натрия, что существенно снижает катионную проводимость уже при $x = 0,05$ и приводит к появлению анионной составляющей, величина которой возрастает с увеличением степени замещения свинца на гадолиний.

Таким образом, введение в структуру соединения $\text{Pb}_{8-x}\text{Gd}_x\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{(x/2)}$ ионов гадолиния приводит к изменению вида проводимости с катионной на смешанную – катионно-анионную.

Выводы. Определены условия синтеза модифицированного гадолинием оксованадата натрия-свинца состава $\text{Pb}_{(8-x)}\text{Gd}_x\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{(x/2)}$ со структурой апатита твердофазным методом (температура 600 °С, время прокаливания 46 ч). Методом рентгенофазового анализа установлено, что замещение свинца на гадолиний происходит в области до $x = 0,15$. Методом Ритвельда показано, что в твердом растворе атомы свинца преимущественно занимают места в семирешетчатых, натрия – преимущественно в девятирешетчатых, а гадолиния располагаются только в девятирешетчатых. Атомы кислорода заселяют каналы структуры, что косвенно свидетельствует о переходе от катионной проводимости к анионной с увеличением содержания гадолиния в структуре.

В дальнейшем необходимо уточнить природу проводимости модифицированного апатита прямым методом путем измерения электропроводности в зависимости от парциального давления кислорода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Biomimetic apatite sintered at very low temperature by spark plasma sintering: physico-chemistry and microstructure aspects / D. Grossin, S. Rollin-Martinet, C. Estournis et al. // *Acta Biomaterialia*. – 2010. – Vol. 6, No 2. – P. 577–585.
2. Luminescence of Ce^{3+} -activated chalcogenide apatites $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6\text{Y}$ (Y = S, Se) / J. Zhang, H. Liang, R. Yu et al. // *Materials Chemistry and Physics*. – 2009. – Vol. 114, No 1. – P. 242–246.
3. Yoshioka H. Ionic conductivity and fuel cell properties of apatite-type lanthanum silicates doped with Mg and containing excess oxide ions / H. Yoshioka, Y. Nojiri, S. Tanase // *Solid State Ionics*. – 2008. – Vol. 179, No 38. – P. 2165–2169.
4. Conventional and microwave-assisted multicomponent reaction of alkyne, halide and sodium azide catalyzed by copper apatite as heterogeneous base and catalyst in water. / S. Kale, S. Kahandal, S. Disale, R. Jayaram // *Current Chemistry Letters*. – 2012. – Vol. 1. – P. 69–80.
5. Electrical properties of lanthanum containing vanadocalcic oxyapatite / H. Benmoussa, M. Mikou, A. Bensaoud, et al. // *Mat. Res. Bull.* – 2000. – Vol. 35. – P. 369–375.
6. Shannon R. D. Revised effective ionic radii and systematic studies of interatomic distances in halides and chalcogenides / R. D. Shannon // *Acta Crystallographica*. – 1976. – Vol. 32. – P. 751–767.
7. A structural analysis of lead hydroxyvanadinite / J. G. Eon, C. B. Boechar, A. M. Rossi et al. // *Physical Chemistry Chemical Physics*. – 2006. – Vol. 8. – P. 1845–1851.
8. Etude Structurale D'Orthovanadates D'Alcalins et de Plomb Cristallisant avec la Structure Apatite Lacunaire / M. Azrou, L. El Ammari, Y. Le Fur et al // *Journal of Solid State Chemistry*. – 1998. – Vol. 141. – P. 373–377.
9. Брег У. Кристаллическая структура минералов / У. Брег, Г. Кларингбулл. – М.: Мир, 1967. – 390 с.
10. Коровин Н. В. Электрохимическая энергетика / Н. В. Коровин. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 264 с.
11. Волькенштейн Ф. Ф. Электронные процессы в реальных кристаллах / Ф. Ф. Волькенштейн // *Успехи физических наук*. – 1946. – Т. XXVIII, вып. 4. – С. 389–437.
12. Gao W. Synthèse et caractérisation de revêtements de silicates de lanthane de structure apatite élaborés par projection plasma dédiés aux piles à combustibles it-sofcs. Université de Franche-Comté, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, Thèse de doctorat, 18 septembre 2008. – P. 21–24.
13. Takahashi T. Electrical conductivity of some hydroxyapatites / T. Takahashi, S. Tanase, O. Yamamoto // *Electrochimica Acta*. – 1978. – Vol. 23. – P. 369–373.
14. Effect of Apatite Amendments on Plant Uptake of Lead from Contaminated Soil / V. Laperche, T. J. Logan, P. Gaddam, S. J. Triana // *Environ. Sci. Technol.* – 1997. – Vol. 31. – P. 2745–2753.

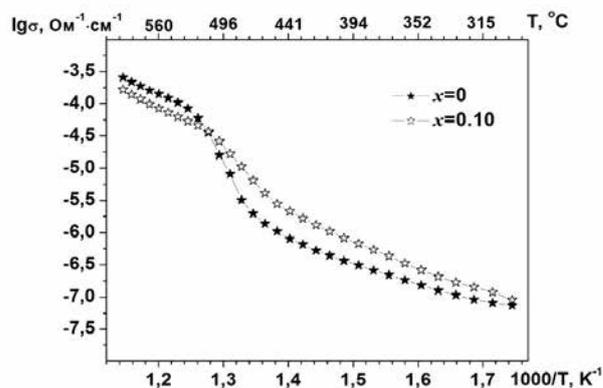


Рис. 3. Зависимость логарифма проводимости от обратной температуры образцов $\text{Pb}_{(8-x)}\text{Gd}_x\text{Na}_2(\text{VO}_4)_6\text{O}_{(x/2)}$ на частоте переменного тока 1 кГц

15. Synthesis, characterization and electrical properties of a lead sodium vanadate apatite / E. Chakroun-Ouadhour, R. Ternare, D. Ben Hassen-Chehimi et al. // Materials Research Bulletin. – 2008. – Vol. 43. – P. 2451–2456.
16. Laghzizil A. Cationic conductivity and structural studies in the $Pb_8K_{2-x}Na_x(PO_4)_6$ system / A. Laghzizil, P. Barboux, A. Bouhaouss // Solid State Ionics. – 2000. – Vol. 128. – P. 177–181.

Поступила в редакцію 18.04.2014 з.

РЕЗЮМЕ

Тверді розчини $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ досліджені методами рентгенофазового аналізу, скануючої електронної мікроскопії та вимірюванням електропровідності. Уточнена кристалічна структура твердих розчинів за Ритвельдом. Встановлено, що заміщення свинцю на гадоліній відбувається в області до $x = 0,15$. Вивчено вплив заміщення на електропровідність, характер змін свідчить про перехід від катіонної провідності до аніонної зі збільшенням вмісту гадолінію в структурі.

Ключові слова: оксованадат свинцю-натрію, гадоліній, апатит, рентгенофазовий аналіз, метод Ритвельда, тверді розчини, провідність.

SUMMARY

Solid solutions $Pb_{(8-x)}Gd_xNa_2(VO_4)_6O_{(x/2)}$ have been investigated by X-ray powder diffraction, scanning electron microscopy and conductivity measurement methods. The crystal structure of solid solutions was refined by Rietveld method. It was established that substitution of lead for gadolinium occurs in the region up to $x = 0.15$. Dependence of a substitution degree on conductivity has been studied. The character of conductivity changing shows that the cationic conductivity is changed to the anionic one with raising of gadolinium content in the solid solution.

Keywords: lead-sodium oksovanadate, gadolinium, X-ray powder diffraction, apatite, Rietveld method solid solutions, conductivity.

УДК 666.655

В. В. Климов, Н. И. Селикова, А. С. Штонда, А. Н. Бронников*Научно-технологический центр «Реактивэлектрон» НАНУ, г. Донецк***ИССЛЕДОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ КЕРАМИКИ ЦТС
С МАЛЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОТЕРЯМИ**

Исследована ЦТС-керамика, модифицированная Sr, Fe, F со сложными добавками $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO}$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-La}_2\text{O}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-V}_2\text{O}_5$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Li}_2\text{O}$, введенными сверх стехиометрии. Керамика получена по обычной керамической технологии с применением механохимического активирования. Изучены электрофизические свойства, исследована микроструктура керамики, распределение элементов в керамике. Керамика обладает структурой перовскита с тетрагональным искажением решетки, имеет мелкокристаллическое строение и равномерное распределение элементов на границах и внутри кристаллитов. При введении указанных добавок получена пьезокерамика, обладающая практически значимыми свойствами. Введение в ЦТС наряду с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO}$ добавок с высокозарядными ионами Nb^{5+} и W^{6+} дает возможность получить качественную керамику с набором важных свойств, низкими диэлектрическими потерями, как при комнатной температуре, так и при повышенных температурах и напряжениях. Для керамики с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$ в интервале температур 20–160 °C значения $\text{tg}\delta$ не превышают 0,008, а при повышении напряженности электрического поля до 300 В/мм $\text{tg}\delta_s$ не более 0,01.

Ключевые слова: модифицированный ЦТС, пьезокерамика, электрофизические свойства.

Введение. Цирконат-титанат свинца (ЦТС) в настоящее время является одним из наиболее востребованных материалов для получения пьезоэлектрической керамики [1–4]. Такая керамика применяется при изготовлении гидроакустических излучателей и приемников, звукоснимателей и излучателей звука, датчиков ускорения, датчиков давления и перемещения, пьезотрансформаторов, пьезодвигателей и т.д. По результатам исследований компании iRAP inc. [5], проведенным в 2009 г., 98 % рынка пьезоэлектрических активаторов и двигателей приходится на устройства на основе объемной керамики ЦТС. Разнообразные свойства ЦТС-материалов возможно получить при введении в перовскитовую ABO_3 решетку ЦТС изовалентных и гетеровалентных ионов, что приводит к возникновению в ней дефектов, изменению микроструктуры керамики и, в конечном счете, изменению электрофизических характеристик. При изучении влияния различных добавок, вводимых в ЦТС, марганцу уделяется особое внимание [6–10], так как его присутствие (отдельно или совместно с другими ионами), как и сочетание добавок, содержащих фтор и железо, с другими добавками [11–13], приводит к получению пьезокерамики, на основе которой создается большое количество силовых устройств (гидроакустических приборов, пьезодвигателей, пьезотрансформаторов и др.).

В данной работе исследовалась многокомпонентная керамика на основе ЦТС, модифицированная добавками стронция, фтора, железа с комплексной добавкой, введенной сверх стехиометрии, содержащей оксиды марганца, магния, висмута. В качестве четвертого компонента добавки использовали оксиды ниобия, вольфрама, ванадия, лантана, лития. Изучены электрофизические характеристики материалов при введении комплексных добавок. Современные методы исследования, имеющиеся данные по изучению различных факторов, определяющих свойства пьезокерамики, дают возможность установить влияние вводимых добавок на формирование различных свойств готовой керамики.

Цель работы – получение и исследование модифицированной ЦТС-керамики, способной работать при повышенной напряженности электрического поля. Такие материалы характеризуются высокими значениями механической добротности (Q_m), низкими диэлектрическими потерями ($\text{tg}\delta$). Важно, чтобы такая керамика обладала высокими значениями коэффициента электромеханической связи (k_p) и пьезоэлектрического модуля (d_{31}).

Экспериментальная часть. Получение образцов проводили по керамической технологии. Шихту готовили с использованием промышленных марок карбоната свинца, диоксида титана, диоксида циркония. Добавки были реактивной чистоты (х. ч., ч. д. а.) и вводились в виде оксидов (ZnO , MnO_2 , Bi_2O_3 , La_2O_3 , Nb_2O_5 , Fe_2O_3 , WO_3), карбонатов ($m\text{MgCO}_3 \cdot n\text{Mg(OH)}_2$, SrCO_3) и фторида (PbF_2).

Согласно керамической технологии перед синтезом шихту предварительно брикетируют (в данном случае в форме дисков диаметром 35 мм и толщиной 10 мм при давлении 1 т/см²) с целью улучшения контакта между зёрнами. Брикет прокаливали на алундовых подложках в муфельных печах, печах типа СНОЛ при температурах 800–850 °C, 850–900 °C в течение определенного времени (2–4 ч). Скорость подъема температуры 150–200 °C/час. Смешивание и помол исходных компонентов, помол синтезированного материала с добавками до получения мелкодисперсного порошка проводили в устройствах с высоким уровнем энергетического воздействия: в вибромельнице, гуммированной специальной резиной

с металлическими шарами в течение 1 ч. в планетарной мельнице “Fritsch” с яшмовыми шарами и ювелями в течение 0,5–1 ч. Далее готовили контрольные образцы для спекания и определения электрофизических свойств.

Исследуемую керамику спекали при 1200 ± 50 °С в засыпке (30 мас.% PbO + 70 мас.% ZrO₂) в течение 2–4 ч. Керамические, электрофизические свойства определяли по ОСТ-11-0444-87 [14] на дисках диаметром 10 мм и толщиной 1 мм и диаметром 17 мм и толщиной 3–3,5 мм с удельным давлением прессования 1–1,5 т/см². После спекания образцы шлифовали на шлифовальном станке шлифпорошком типа М-40 с обеих сторон до толщины 1 мм и 3–3,5 мм. Качество полученной керамики проверяют определением плотности, открытой пористости и водопоглощения методом гидростатического взвешивания [15, 16]. Для изучения диэлектрических свойств на образцы, предварительно высушенные и обезжиренные спиртом, наносят серебросодержащую пасту и вжигают электроды при температуре 750–780 °С в течение 10–15 мин.

Рентгеноструктурный анализ выполняли по общепринятой методике на рентгеновском аппарате УРС-50И с использованием Cu K α излучения. Микроструктуру керамики изучали на растровом микроскопе JSM-6490 с энергодисперсионной приставкой Link-860–890 (Англия). Образцы предварительно шлифовали и подвергали травлению в 1%растворе соляной кислоты с добавлением HF. Распределение элементов по поверхности керамики определяли на сканирующем растровом электронном микроскопе, валентное состояние ионов добавок – с помощью рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФС). Для определения температурной зависимости диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь используются емкостные мосты типа ВМ-484, МЛЕ-1, измеряющие тангенс диэлектрических потерь от 0,0001 до 0,56 и электротермостат, в крышке которого вмонтированы электроды из немагнитной стали. Термостат позволяет устанавливать температуру испытуемых образцов от комнатной температуры до 400 °С с погрешностью ± 2 °С, регламентируемую ОСТом [14].

Для изучения пьезоэлектрических свойств образцы поляризуют в сильном постоянном электрическом поле. Поляризация образцов проводится в полисилоксановой жидкости при температуре 150 ± 10 °С на протяжении 1 ч. в постоянном электрическом поле с напряженностью 3–4 кВ/мм. После поляризации образцы обезжиривают в тетрахлористом углероде. Затем определяют пьезоэлектрические характеристики, используя резонансный метод. Величина тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg} \delta_s$ в сильных полях определяется на поляризованных образцах в виде дисков в специальной установке, обеспечивающей амплитудное значение синусоидального напряжения 3 кВ при частоте 50 Гц и амплитудном значении напряженности электрического поля 100, 200 и 300 В/мм на мосте переменного тока P526 или P5025 (мост Шеринга) [14].

Анализ результатов. Структура пьезокерамики. Изучение кристаллической структуры исследуемой керамики ЦТС методом рентгеноструктурного анализа показало, что образцы обладают структурой перовскита и имеют четко выраженное тетрагональное искажение элементарной кристаллической ячейки, что соответствует характерному для морфотропной области соотношению циркония и титана. На рис. 1, 2 представлено изображение микроструктуры поверхности модифицированной керамики ЦТС со сложной добавкой, содержащей MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ (рис. 1) и MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ (рис. 2). Керамика с добавкой, содержащей MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ имеет размер кристаллитов 2–6 мкм., с формой близкой к шестиграннику. У керамики с добавкой, содержащей MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ размер кристаллитов – 1–3 мкм (рис. 2) также с формой, близкой к шестиграннику.

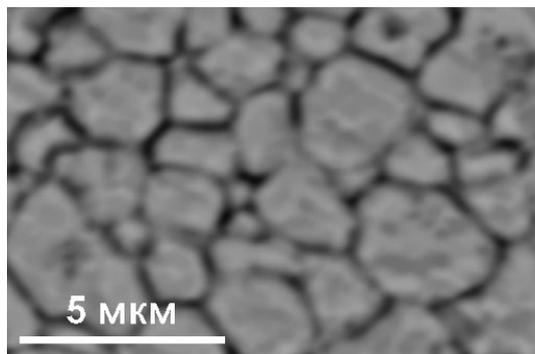


Рис.1. Микроструктура поверхности керамики с добавками MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃

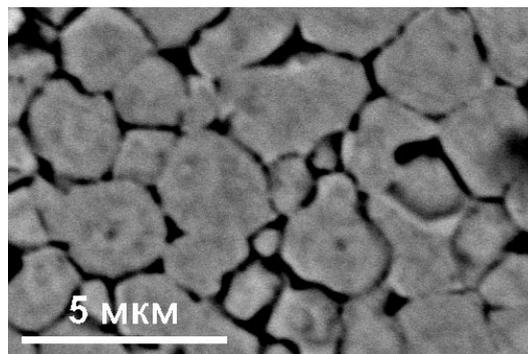
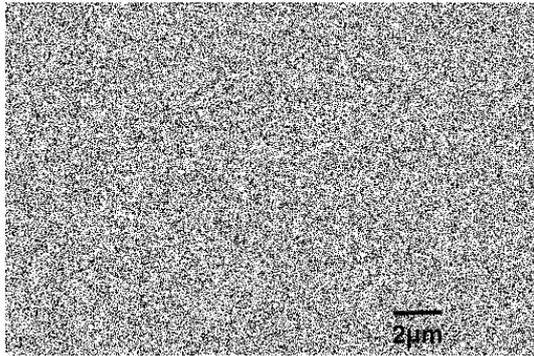
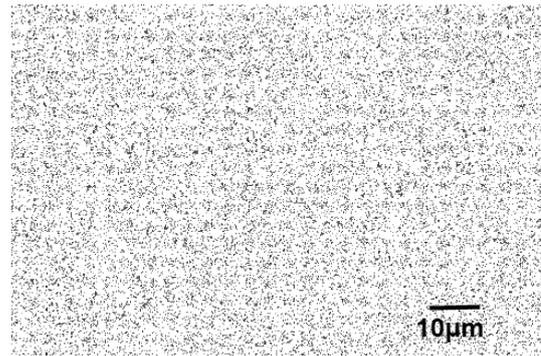


Рис.2. Микроструктура поверхности керамики с добавками MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅

Исследование распределения элементов в керамике со сложными добавками MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ и MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ проводили с использованием микрорентгеноспектрального анализа путем непрерывного сканирования по линии, картирования с площади и определения концентрации элементов вблизи границ и внутри зерен. Результаты исследования представлены на рис. 3 для добавки MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ и на рис. 4 для добавки MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅. Основные элементы и добавки

Рис. 3. Распределение Pb, Zr, Ti в керамике с добавками $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$ Рис. 4. Распределение Pb, Sr, Ba в керамике с добавками $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$

равномерно распределены по поверхности керамики, и нет различия в их распределении на границах и внутри зерен. Использование как одного типа добавки, так и другого одинаково отражается на распределении элементов.

Электрофизические свойства. В результате многочисленных исследований были установлены пути повышения качества жесткой керамики, которые в основном сводились к созданию дефектов в кислородной подрешетке. В последние годы было выяснено, что жесткой керамикой, способной работать в сильных полях является керамика, в которой часть кислорода замещена фтором. В работе [6] предлагается осуществить введение фтора в кислородную подрешетку (а возможно и в иное положение кристаллической решетки перовскита) по обычной керамической технологии с применением механохимического активирования. Особенность процесса активирования заключается в том, что в ходе механической обработки, кроме измельчения, происходит накопление дефектов в структуре кристаллов. Это резко изменяет физико-химические свойства твердых веществ, в том числе и реакционную способность. Введение добавок в структуру ЦТС приводит к возникновению в ней дефектов и к изменению микроструктуры керамики и, в конце концов, к изменению ее электрофизических свойств. Выбор исследуемой добавки осуществлялся на основании литературных данных о влиянии различных окислов на свойства ЦТС и многочисленных экспериментальных исследованиях. В состав добавки входят ион висмута, высокозарядные ионы ниобия, вольфрама в сочетании с ионами различной валентности. Введение высокозарядного иона способствует увеличению пьезоактивности керамики, иона висмута-улучшению спекаемости керамики, а введение остальных проводилось с целью регулирования значений ϵ_r , $\text{tg}\delta$, d_{31} , k_p , Q_m и других параметров. Состав вводимой добавки выражался эмпирической формулой.

Изучена пьезоэлектрическая керамика ЦТС с комплексными добавками различного типа: $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO}$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-La}_2\text{O}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-V}_2\text{O}_5$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Li}_2\text{O}$. Добавки в интервале концентраций MnO_2 – $0,5\pm 2,0$ мол.%; Bi_2O_3 – $0,5\pm 1$ мол.%; MgO – $0,5\pm 1$ мол.%; La_2O_3 – $0,25\pm 1$ мол.%; Li_2O – $0,5\pm 1$ мол.%; WO_3 – $0,25\pm 5$ мол.%; Nb_2O_5 – $0,5\pm 6$ мол.% вводились сверх стехиометрии в титанат-цирконат свинца, модифицированный совместной добавкой фтора и железа, в котором свинец частично замещался барием и стронцием. Для керамики с каждым типом добавки подобрано определенное соотношение основных компонентов и добавок, которое способствует получению керамики с лучшим сочетанием электрофизических параметров. В табл. 1 приведены электрофизические свойства керамики ЦТС со сложными добавками различного типа.

Таблица 1
Электрофизические свойства керамики ЦТС с добавками различного типа ($x+y+z=1$; $y=0,50$; $0,48 \leq x \leq 0,50$)

Тип добавки	$\text{tg}\delta$	ϵ_r	k_p	d_{31} , пКл/Н	Q_m	T_C , °C
$(\text{Pb}_{0,94}\text{Ba}_{0,02}\text{Sr}_{0,04})(\text{Zr}_x\text{Ti}_y\text{Fe}_z)\text{O}_{3-z}\text{F}_{0,004}\text{-}$ $-0,01\text{MnO}_2\text{-}0,01\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,01\text{MgO-}$	0,002	1160	0,49	90	1300	290
$(\text{Pb}_{0,94}\text{Sr}_{0,06})(\text{Zr}_x\text{Ti}_y\text{Fe}_z)\text{O}_{3-z}\text{F}_{0,004}\text{-}$ $0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO-}0,005\text{La}_2\text{O}_3$	0,002	1180	0,46	90	1200	290
$(\text{Pb}_{0,93}\text{Sr}_{0,07})(\text{Zr}_x\text{Ti}_y\text{Fe}_z)\text{O}_{3-z}\text{F}_{0,004}\text{-}$ $-0,03\text{MgO-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,05\text{Nb}_2\text{O}_5$	0,003	1800	0,58	160	1000	260
$(\text{Pb}_{0,93}\text{Sr}_{0,07})(\text{Zr}_x\text{Ti}_y\text{Fe}_z)\text{O}_{3-z}\text{F}_{0,004}\text{-}$ $-0,04\text{MgO-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,01\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,01\text{WO}_3$	0,004	1400	0,53	110	800	260
$(\text{Pb}_{0,94}\text{Sr}_{0,06})(\text{Zr}_x\text{Ti}_y\text{Fe}_z)\text{O}_{3-z}\text{F}_{0,004}\text{-}$ $-0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO-}0,005\text{-Li}_2\text{O}$	0,004	1220	0,48	100	800	290
$(\text{Pb}_{0,93}\text{Sr}_{0,07})(\text{Zr}_x\text{Ti}_y\text{Fe}_z)\text{O}_{3-z}\text{F}_{0,004}\text{-}$ $-0,04\text{MgO-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,01\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,01\text{V}_2\text{O}_5$	0,012	1160	0,30	60	700	–

Для матеріалів с досліджуєми типами добавок, за исключением $MnO_2-Bi_2O_3-MgO-V_2O_5$, характерны невысокие значения тангенса угла диэлектрических потерь (0,002–0,004). Керамика с добавкой $MnO_2-Bi_2O_3-MgO$ имеет малые диэлектрические потери ($tg\delta$), высокую добротность (Q_m) и средние величины коэффициента электромеханической связи (k_p) и пьезоэлектрического модуля (d_{31}). Введение La_2O_3 в керамику с добавкой $MnO_2-Bi_2O_3-MgO$ незначительно изменяет электрофизические свойства; добавка Li_2O снижает Q_m , несколько повышает $tg\delta$, а k_p и d_{31} практически не изменяются. Керамика с добавкой Nb_2O_5 , WO_3 имеет довольно низкие потери $tg\delta$ и достаточно высокую добротность Q_m , при этом увеличиваются k_p и d_{31} керамики.

Введение в ЦТС наряду с добавкой $MnO_2-Bi_2O_3-MgO$ добавок с высокозарядным ионом Nb^{5+} и W^{6+} дает возможность получить качественную керамику с набором важных для практического использования свойств: низкими и стабильными при повышенных температурах и напряжениях диэлектрическими потерями, высокой добротностью (Q_m) и средними величинами коэффициента электромеханической связи (k_p) и пьезоэлектрического модуля (d_{31}). В табл. 2 приведены электрофизические свойства керамики с добавками $MnO_2-Bi_2O_3-MgO-WO_3$ и $MnO_2-Bi_2O_3-MgO-Nb_2O_5$ с различным содержанием WO_3 и Nb_2O_5 .

Таблица 2
Электрофизические свойства керамики ЦТС с добавкой $MnO_2-Bi_2O_3-MgO-Nb_2O_5$ и $MnO_2-Bi_2O_3-MgO-WO_3$
($x+y+z=1$; $y=0,50$; $0,48 \leq x \leq 0,50$)

Состав	$tg \delta$	ϵ_r	k_p	d_{31} , пКл/Н	Q_m	$tg \delta_s$		
						100 В/мм	200 В/мм	300 В/мм
$(Pb_{0,92}Sr_{0,08})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,05WO_3$	0,0045		0,39	95	300	0,017	0,024	0,024
$(Pb_{0,92}Sr_{0,08})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,04WO_3$	0,0045	1350	0,42	100	400			
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,03WO_3$	0,0043	1400	0,38	80	400			
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,02WO_3$	0,003	1130	0,47	100	680			
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,04MgO-0,01MnO_2-0,01Bi_2O_3-0,01WO_3$	0,0035	1270	0,53	110	850	0,021	0,023	0,027
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,04MgO-0,01MnO_2-0,01Bi_2O_3-0,005WO_3$	0,0035	1400	0,51	108	900	0,012	0,013	0,017
$(Pb_{0,92}Sr_{0,08})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,05MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,0025WO_3$	0,004	1320	0,48	96	780			
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,005Nb_2O_5$	0,0025	1150	0,44	88	920	0,018	0,02	0,02
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,01Nb_2O_5$	0,0025	1200	0,44	92	930	0,008	0,01	0,014
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,02Nb_2O_5$	0,0025	1240	0,48	102	780			
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,03Nb_2O_5$	0,0035	1420	0,47	112	500			
$(Pb_{0,93}Sr_{0,07})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,05Nb_2O_5$	0,003	1570	0,58	160	1000	0,007	0,008	0,009
$(Pb_{0,92}Sr_{0,08})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,02MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,04Nb_2O_5$	0,003	1800	0,56	135	880	0,007	0,009	0,011
$(Pb_{0,92}Sr_{0,08})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,02MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,06Nb_2O_5$	0,0036	1600	0,53	120	500			
$(Pb_{0,93}Ba_{0,05}Sr_{0,02})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,005Bi_2O_3-0,06Nb_2O_5$	0,005	1500	0,52	112	530			
$(Pb_{0,93}Ba_{0,05}Sr_{0,02})(Zr_xTi_yFe_z)O_{3-z}F_{0,004}-0,03MgO-0,01MnO_2-0,06Nb_2O_5$	0,006	1200	0,52	117	560			

Для исследуемых материалов определялась температура фазового перехода (T_c) и изучалась температурная зависимость диэлектрической проницаемости (ϵ_r) и тангенса угла диэлектрических потерь ($tg\delta$) в интервале температур 20–320 °С. На рис. 5 представлены графики зависимостей ϵ_r и $tg\delta$ от температуры для керамики ЦТС с разными типами добавок. Для керамики с добавкой $MnO_2-Bi_2O_3-MgO-Nb_2O_5$ в интервале температур 20–160 °С значения $tg\delta$ не превышают 0,008. Для работы в сильных электрических полях важно, чтобы пьезоэлектрическая керамика сохраняла низкие значения тангенса угла диэлектрических потерь ($tg\delta$) при повышении напряжения электрического поля. Определена величина тангенса угла диэлектрических потерь ($tg\delta_s$) при амплитудном значении напряженности поля 100, 200 и 300 В/мм.

На рис. 6 приведены зависимость тангенса угла диэлектрических потерь от напряженности электрического поля для керамики с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-La}_2\text{O}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$. Для керамики с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$ значения $\text{tg}\delta_s$ при повышении напряженности электрического поля до 300 В/мм не более 0,01.

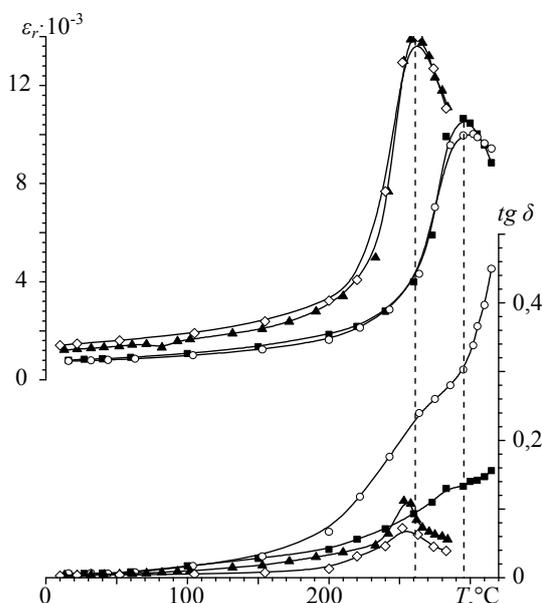


Рис. 5. Зависимость ϵ_r и $\text{tg } \delta$ от температуры для
 (■) $(\text{Pb}_{0,94}\text{Sr}_{0,06})(\text{Zr}_{0,496}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,004})\text{O}_{2,996}\text{F}_{0,004}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO}$;
 (○) $(\text{Pb}_{0,94}\text{Ba}_{0,02}\text{Sr}_{0,04})(\text{Zr}_{0,4962}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,0038})\text{O}_{2,9962}\text{F}_{0,044}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO}\text{-}0,005\text{La}_2\text{O}_3$;
 (◇) $(\text{Pb}_{0,92}\text{Sr}_{0,08})(\text{Zr}_{0,496}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,004})\text{O}_{2,996}\text{F}_{0,004}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO}\text{-}0,04\text{Nb}_2\text{O}_5$;
 (▲) $(\text{Pb}_{0,93}\text{Sr}_{0,07})(\text{Zr}_{0,496}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,004})\text{O}_{2,996}\text{F}_{0,004}\text{-}0,04\text{MgO}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,01\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,01\text{WO}_3$

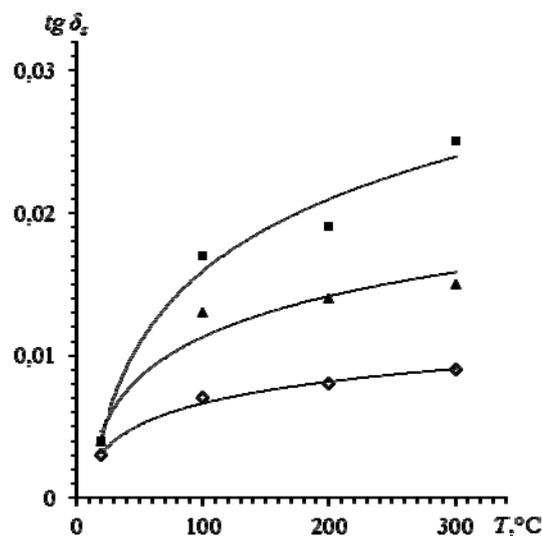


Рис. 6. Зависимость $\text{tg } \delta_s$ от напряженности электрического поля для
 (■) $(\text{Pb}_{0,93}\text{Sr}_{0,07})(\text{Zr}_{0,496}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,004})\text{O}_{2,996}\text{F}_{0,004}\text{-}0,04\text{MgO}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,01\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,01\text{WO}_3$;
 (▲) $(\text{Pb}_{0,94}\text{Ba}_{0,02}\text{Sr}_{0,04})(\text{Zr}_{0,4962}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,0038})\text{O}_{2,9962}\text{F}_{0,044}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO}\text{-}0,005\text{La}_2\text{O}_3$;
 (◇) $(\text{Pb}_{0,92}\text{Sr}_{0,08})(\text{Zr}_{0,496}\text{Ti}_{0,5}\text{Fe}_{0,004})\text{O}_{2,996}\text{F}_{0,004}\text{-}0,01\text{MnO}_2\text{-}0,005\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-}0,02\text{MgO}\text{-}0,04\text{Nb}_2\text{O}_5$

Заключение. Изучено влияние комплексных добавок $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO}$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-La}_2\text{O}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-V}_2\text{O}_5$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Li}_2\text{O}$ на электрофизические свойства пьезокерамики ЦТС, полученной по керамической технологии с применением механохимического активирования. Анализ кристаллической структуры и микроструктуры показал, что керамика с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$ имеет размер кристаллитов 2–6 мкм, у керамики с добавкой, $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$ размер кристаллитов 1–3 мкм. При исследовании распределения элементов в керамике со сложными добавками показано, что основные элементы и добавки равномерно распределены по поверхности керамики, и нет различия в их распределении на границах и внутри зерен. Использование разных добавок одинаково отражается на распределении элементов.

Для керамики с разным типом добавок изучена температурная зависимость ϵ_r и $\text{tg}\delta$ в интервале температур 20–320 °С, определена T_C , которая составляет 290–260 °С. У керамики с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-Nb}_2\text{O}_5$ в интервале температур 20–160 °С значения $\text{tg}\delta$ не превышают 0,008, $\text{tg}\delta_s$ при повышении напряженности электрического поля до 300 В/мм не более 0,01, а с добавкой $\text{MnO}_2\text{-Bi}_2\text{O}_3\text{-MgO-WO}_3$ не более 0,017. Полученные электрофизические параметры определяют области возможного применения полученной керамики в качестве пьезотрансформаторов, ультразвуковых преобразователей, способных работать при повышенной напряженности электрического поля и повышенной температуре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головин В. А. Пьезоэлектрическая керамика (применение и производство) / В. А. Головин, В. И. Ривкин // Зарубежная радиоэлектроника. – 1985. – № 3. – С. 47–59.
2. Пьезокерамика различного назначения / В. В. Климов, О. С. Дидковская, Г. Е. Савенкова, Ю. Н. Веневцев // Неорганические материалы. – 1995. – Т. 31, № 3. – С. 419–422.
3. Innovative Research and Products (iRAP) Inc. Piezoelectric Ceramic, Polymer and Ceramic/polymer composite Devices – Types, Materials, Applications, New Developments, Industry structure and Global Markets. – 2008. – Report ET. – 107 p.

4. Innovative Research and Products (iRAP) Inc. Piezoelectric Actuators and Motors–Types, Applications, New Developments, Industry Structure and Global Markets. – 2010. – Report ET. – 112 p.
5. Резниченко Л. А. Роль марганца в «ужесточении» сегнетоэлектрических материалов. / Л. А. Резниченко, О. Н. Разумовская, С. В. Гавриленко // Труды Междунар. конф. «Фундаментальные проблемы пьезоэлектрического приборостроения». – Ростов-на-Дону, 1999. – Т. 1. – С. 98–109.
6. Получение жесткой пьезокерамики на основе цирконата-титаната свинца / В. В. Климов, Н. И. Селикова, В. В. Дорофеева, А. Н. Бронников // Неорганические материалы. – 2004. – Т. 40, № 12. – С. 1526–1529.
7. Климов В. В. Влияние оксидов марганца, висмута и цинка на электрофизические свойства пьезокерамики на основе ЦТС / В. В. Климов, Н. И. Селикова, А. Н. Бронников // Неорганические материалы. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 634–638.
8. Van V. Role of Secondary Phase in High Power Piezoelectric PMN-PZT Ceramics / V. Van, K.-H. Cho, S. Priya // J. Amer. Ceram. Soc. – 2011. – Vol. 94, No 12. – P. 4138–4141.
9. Van V. Piezoelectric properties and temperature stability of Mn-doped Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O₃-PbZrO₃-PbTiO₃ ceramics / V. Van, K.-H. Cho, S. Priya // J. Appl. Phys. Letter. – 2011. – P. 100908.
10. Guiffard B. Fluorine-oxygen substitution in MgO-doped lead zirconate titanate ceramics: diffractometric and dielectric studies / B. Guiffard, M. Troccaz // J. Mater. Sci. – 2000. – Vol. 35. – P. 101–104.
11. Influence of the fluoride ion on the piezoelectric properties of a PZT / L. Eyraud, P. Eyraud, D. Audigier, B. Claudel // Ferroelectrics. – 1995. – Vol. 175. – P. 241–250.
12. France Patent 9502744. Ceramigues Flurees de puisiance. Eyraud L., Eyraud P., Audiger D., Boisrayon M. – 1995. – 15 p.
13. Guiffard B. Fluorine-oxygen substitution in MgO-doped lead zirconate titanate ceramics: diffractometric and dielectric studies / B. Guiffard, M. Troccaz // J. Mater. Sci. – 2000. – Vol. 35. – P. 101–104.
14. ГОСТ 11-0444-87 Материалы пьезокерамические: технические условия.
15. ГОСТ 473.4-81 Изделия химические стойкие и термостойкие керамические. Метод определения кажущейся плотности и кажущейся пористости.
16. ГОСТ 473.3-81 Изделия химические стойкие и термостойкие керамические. Метод определения водопоглощения.

Поступила в редакцию 24.12.2013 г.

РЕЗЮМЕ

Вивчено вплив комплексних добавок MnO₂-Bi₂O₃-MgO, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-La₂O₃, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Li₂O, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ та ін. на електрофізичні властивості п'єзокераміки ЦТС, отриманої за керамічною технологією із застосуванням механохімічного активування. Аналіз кристалічної структури і мікроструктури показав, що кераміка з добавкою MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ має розмір кристалітів 2–6 мкм, кераміка з добавкою MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ – розмір кристалітів 1–3 мкм. Основні елементи і добавки рівномірно розподілені по поверхні кераміки, і немає відмінності в їх розподілі на границях і всередині зерен.

Для кераміки з різним типом добавок вивчена температурна залежність ϵ_r і $\text{tg} \delta$ в інтервалі температур 20–320 °С, визначена T_C , яка складає 290–260 °С. У кераміки з добавкою MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ в інтервалі температур 20–160 °С $\text{tg} \delta$ не перевищує 0,008, $\text{tg} \delta_s$ при підвищенні напруженості електричного поля до 300 В/мм складає не більше 0,01, а з добавкою MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ не більше 0,017. Области можливого застосування отриманої кераміки – п'єзотрансформатори, ультразвукові перетворювачі, що здатні працювати за підвищеної напруженості електричного поля і підвищеної температури.

Ключові слова: модифікований ЦТС, п'єзокераміка, електрофізичні властивості.

SUMMARY

The influence of complex additives MnO₂-Bi₂O₃-MgO, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-La₂O₃, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Li₂O, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃, MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ and others on the electrical properties of PZT piezoelectric ceramics obtained by ceramic technology using mechanochemical activation was investigated. Analysis of the crystal structure and microstructure showed that ceramic with MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃ has a crystallite size of 2–6 μm and ceramic with MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ has crystallite size of 1–3 μm. Main and auxiliary elements are uniformly distributed over the surface of the ceramic, and no difference in their distribution to the boundaries and within the grains.

The temperature dependence of ϵ_r and $\text{tg} \delta$ in the temperature range 20–320 °C for ceramics with different types of additives was studied. T_C was defined as 290–260 °C. Ceramic with MnO₂-Bi₂O₃-MgO-Nb₂O₅ in the temperature range 20–160 °C has $\text{tg} \delta$ not greater than 0.008, $\text{tg} \delta_s$ is not more than 0.01 with increasing electric field strength of 300 V/mm, and $\text{tg} \delta_s$ is not more than 0.017 for ceramic with MnO₂-Bi₂O₃-MgO-WO₃. Areas of possible application of the obtained ceramics are piezotransformers, ultrasonic transducers that capable of operating at high electric field and elevated temperature.

Keywords: modified PZT, piezoelectric ceramics, the electrical properties.

УДК 544.2:544.42:544.43

В. Ю. Маслова, А. М. Ніколаєвський, Олена І. Хижан, Г. А. Тихонова, Олександр І. Хижан*
 *Інститут фізико-органічної хімії і вуглехімії ім. Л.М.Литвиненка НАН України

АНТИОКСИДАНТНА АКТИВНІСТЬ ХІНОЛІЛГІДРАЗОНІВ ПРИ ОКИСНЕННІ ОРГАНІЧНИХ РЕЧОВИН

Досліджено вплив хінолілгідрозонів різної будови на процес окиснення етилбензолу в гомогенній та гетерогенній системах з використанням хемілюмінесцентного та йодометричного методів дослідження.

Ключові слова: антиоксидантна активність, хінолілгідрозони, етилбензол.

Вступ. Окиснення вуглеводнів, спиртів, кислот, жирів та інших органічних речовин являє собою ланцюговий процес. Такі процеси призводять до зіпсування цінних харчових продуктів (згіркнення жирів, руйнування вітамінів), втрати механічної міцності і зміни кольору полімерів (каучук, пластмаса, волокно), осмоленню палива, утворення кислот і шламу в турбінних та трансформаторних маслах та ін.

Для уповільнення таких процесів застосовують антиоксиданти. Вони можуть також запобігти руйнівній дії вільних радикалів на клітини живих організмів. Серед ефективних антиоксидантів можна виділити арилгідрозони, які обривають ланцюги по реакції з пероксильними радикалами [1, 2]. Одними з найбільш перспективних антиоксидантів і біоантиоксидантів можуть бути речовини, отримані в результаті комбінації ефективних антиоксидантів з гетероциклічними фрагментами.

Такими сполуками є хінолілгідрозони. В структурі цих сполук з одного боку міститься фрагмент алкалоїду ліпідину, з іншого боку – фрагмент гідрозону з лабільним NH- зв'язком. Хінолінове ядро, яке входить до складу ліпідину, є фрагментом лікарських препаратів (плазмоцид, хінін). Крім того, 6-етокси-2,2,4-триметілгідрохінолін (етоксихін) є одним з ефективних інгібіторів низькотемпературного окиснення вуглеводнів [3]. Тому вивчення властивостей цих сполук залишається актуальною проблемою сьогодення.

Метою даної роботи є вивчення антиоксидантних властивостей хінолілгідрозонів гідроксибензалдегідів при ініційованому та автоокисненні етилбензолу в гомогенній та гетерогенній системах.

Експериментальна частина. Вибір етилбензолу (ЕТБ) в якості субстрату (джерела пероксирадикалів), що окиснюється, обумовлений тим, що процес окиснення цього вуглеводню є однією з найбільш добре вивчених в якісному і кількісному відношенні модельних систем рідиннофазного окиснення.

Методи дослідження кінетики процесу – хемілюмінесцентний та йодометричний. Кількісно антиоксидантну активність (АОА) характеризували періодом індукції (τ), стехіометричним коефіцієнтом інгібування (f), константою швидкості взаємодії з пероксильними радикалами (k_7). Для вивчення АОА хінолілгідрозонів в Інституті фізико-органічної хімії і вуглехімії ім. Л.М. Литвиненка НАН України були синтезовані і ідентифіковані п'ять хімічних сполук, що представлені на рис. 1. Нумерація сполук зберігається в подальшому викладі результатів досліджень. Для відносного порівняння їх АОА використовувалася активність типового антиоксиданту – іонолу (4-метил-2,6-дитретбутилфенол).

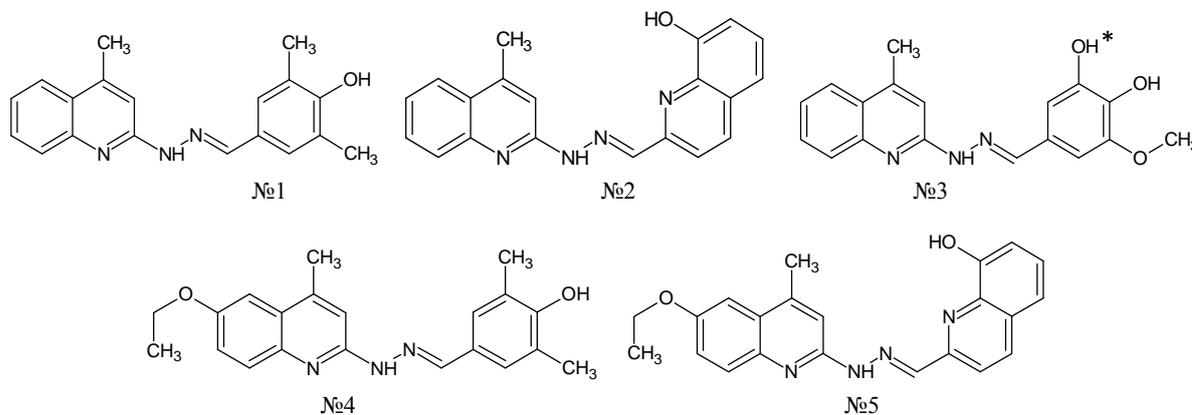
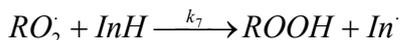


Рис. 1

Результати та обговорення. Встановлено, що введення хінолілгідрозонів призводить до зниження хемілюмінесцентного світіння, тобто хінолілгідрозони взаємодіють з пероксильними радикалами етилбензолу:



З використанням залежностей відносної інтенсивності $(I_0/I)^{1/2}$ хемілюмінесценції в реакції окиснення етилбензолу від концентрації інгібітору $[InH] \cdot 10^5$ моль·л⁻¹: 1 – сполука 1, 2 – сполука 2, 3 – сполука 3. $V_i = 5.4 \cdot 10^{-7}$ моль·л⁻¹·с⁻¹. $T = 343K$, які представлені на рис. 2, за рівнянням

$$\frac{[RO_2]_0}{[RO_2]} = \sqrt{\frac{I_0}{I}} = 1 + 1,1 \frac{k_7}{\sqrt{k_6 V_i}} [InH]$$

були розраховані константи швидкості реакції з пероксирадикалами ЕТБ, а з періодів індукції визначені стехіометричні коефіцієнти інгібування. Ці параметри представлені в табл. 1.

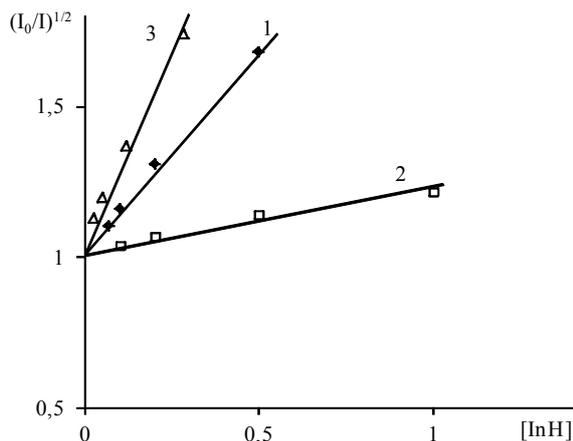


Рис. 2

Таблиця 1

Параметри антиоксидантної дії хінолілгідрозонів та іонулу (6) при ініційованому окисненні етилбензолу ($V_i = 5.4 \cdot 10^{-7}$ моль·л⁻¹·с⁻¹, $T = 343K$) та їх квантово-хімічні характеристики електронної структури

№	k_7 , л/моль·с	f	D_{O-H} , кДж/моль	D_{N-H} , кДж/моль
1	$(7,60 \pm 0,02) \cdot 10^5$	2,5	310,8	283,2
2	$(2,70 \pm 0,07) \cdot 10^4$	–	293,2	269,4
3	$(8,90 \pm 0,07) \cdot 10^5$	3,9	316,2*	262,7
			293,2	
4	$(1,20 \pm 0,08) \cdot 10^3$	–	317,1	290,3
5	слабо інгібує	–	293,6	280,2
6	$(3,10 \pm 0,02) \cdot 10^4$	2,0	304,1	–

Найбільш вірогідними реакційними центрами, по яким йде обрив ланцюгів окиснення є NH- та OH- групи гідразонової частини молекули. Для встановлення того, який з цих реакційних центрів вносить основний вклад в антирадикальну активність гідрозонів були проведені квантово-хімічні розрахунки міцності NH- та OH- зв'язків.

У наближенні обмеженого методу Хартрі-Фока з використанням напівемпіричного методу AM1 здійснювалася повна оптимізація по всіх геометричних параметрах молекули. Розрахунок електронної структури радикалів гідрозонів проводився в рамках цього ж методу в наближенні необмеженого методу Хартрі-Фока. Величини міцності NH-зв'язків (D_{N-H}) та OH-зв'язків (D_{O-H}) для ряду хінолілгідрозонів різної будови представлені в табл. 1.

Порівняння D_{N-H} та D_{O-H} в хінолілгідрозонах гідроксибензальдегідів свідчить про те, що N-H зв'язок є менш міцним, а значить більш реакційно-здатним стосовно пероксирадикалів. Якщо порівнювати АОА сполук 1 і 4 то можна бачити, що введення метоксигрупи в хінолінове ядро декілька підвищує міцності як OH, так і N-H-зв'язку. Це призводить до зниження параметрів АОА. Така ж сама залежність спостерігається для сполук 2 і 5. Найбільш ефективний антиоксидант в досліджуваному ряду сполука 3, антиоксидантна активність його вище стандартного інгібітору - іонулу. Високе значення стехіометричного коефіцієнту цього хінолілгідрозону пояснюється наявністю декількох реакційних центрів в молекулі.

Ефективні антиоксиданти не завжди зберігають свою активність при окисненні органічних речовин в гетерогенних системах. Тому була досліджена антиоксидантна активність хінолілгідрозонів при окисненні молекулярним киснем емульсії прямого типу етилбензол-вода (1:3), ініційованого азодіізобутіронітрилом. Встановлено, що хінолілгідрозони виявляють антиоксидантну активність при окисненні в цій системі. Вони знижують швидкість процесу, що можна побачити з представленого рис. 3. На ньому зображені кінетичні криві накопичення $[ROOH] \cdot 10^2$, моль·л⁻¹ при ініційованому окисненні ЕТБ в емульсії в присутності хінолілгідрозонів різної будови: 0 – без інгібітору, 2 – сполука №2, 4 – сполука №4, 5 – сполука №5. $[InH] = 5 \cdot 10^{-5}$ моль·л⁻¹. $T = 343 K$.

При окисненні етилбензолу в емульсії не спостерігається чітких періодів індукції. Тому в якості критерію оцінки антиоксидантної активності гідрозонів використовується співвідношення часу досягнення концентрації гідропероксиду $1 \cdot 10^{-2}$ моль·л⁻¹ - τ до часу досягнення такої концентрації без інгібітору – τ_0 .

Антиоксидантна дія хінолілгідразонів обумовлена обривом ланцюгів окиснення по реакції з пероксирадикалами субстрату, що окиснюється. Про це свідчить пряmolінійна залежність τ/τ_0 від концентрації інгібітору. Параметри антиоксидантної активності хінолілгідразонів (τ/τ_0) при ініційованому окисненні емульсії при $T=343\text{K}$; $[\text{InH}]=1\cdot 10^{-4}$ моль л^{-1} і розраховані значення коефіцієнта ліпофільності ($\log P$) досліджуваних сполук представлені в табл. 2. З таблиці видно, що в цілому, хінолілгідразони виявляють високу антиоксидантну активність. Але не спостерігається кореляції між антиоксидантною активністю хінолілгідразонів при окисненні в гомогенній та гетерогенній системах. Це може бути пов'язано з розподілом учасників окиснювального процесу між водною та органічною фазами. Тому були розраховані значення коефіцієнтів ліпофільності ($\log P$) для досліджуваних сполук. З цих значень випливає, що розподіл може бути фактором, який впливає на АОА, але внесок його не є визначальним.

Висновки. Встановлено, що хінолілгідразони є інгібіторами радикально-ланцюгових процесів окиснення етилбензолу. Антиоксидантну дію цього ряду речовин обумовлено обривом ланцюгів окиснення по реакції з пероксирадикалами субстрату, що окиснюється. Досліджувані сполуки можуть бути перспективними інгібіторами окиснення органічних речовин, антиоксидантна активність яких вище стандартного інгібітору – іонолу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Антиоксидантная активность арилгидразонов в процессе окисления подсолнечного масла / Е. И. Хижан, А. И. Хижан, Г. А. Тихонова, В. Ю. Маслова // Журн. прикл. химии. – 2012. – Т. 85, № 3. – С. 490–494.
2. Особенности антиоксидантного действия фенилгидразона бензальдегида / А. Н. Николаевский, В. В. Виноградов, Е. И. Хижан, О. П. Книга // Укр. хим. журнал. – 2013. – Т. 79, № 2. – С. 94–101.
3. Некипелова Т. Д. Механизм разветвления цепей в реакции окисления этоксихина / Т. Д. Некипелова, А. Б. Гагарина, Н. М. Эмануэль // Докл. АН СССР. Сер. хим. – 1979. – Т. 250. – С. 734–740.

Поступила в редакцию 03.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Исследовано влияние хинолилгидразонов разного строения на процесс окисления этилбензола в гомогенной и гетерогенной системах с использованием хемиллюминесцентного и йодометрического методов исследования.

Ключевые слова: антиоксидантная активность, хинолилгидразоны, этилбензол.

SUMMARY

We have studied the effect of different structures of quinolilhydrazones by oxidation of ethylbenzene in homogeneous and heterogeneous systems using iodometric and chemiluminescent methods.

Keywords: antioxidant activity, quinolilhydrazone, ethylbenzene.

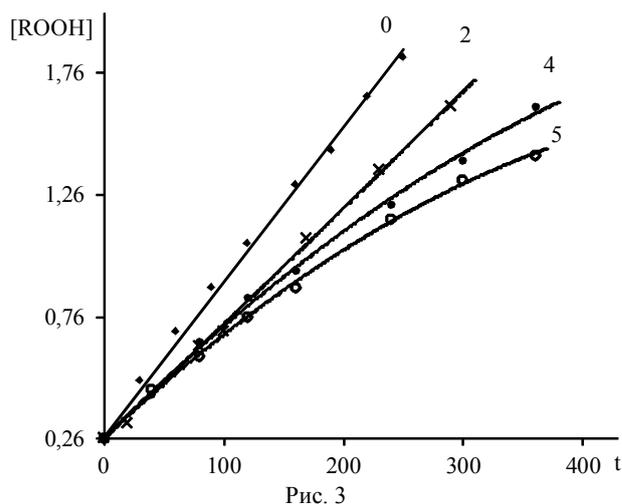


Рис. 3

Таблиця 2

№	τ/τ_0	$\log P$
1	1,7	$4,6 \pm 0,5$
2	1,3	$3,4 \pm 0,5$
3	1,4	$4,1 \pm 1,1$
4	1,6	$4,7 \pm 0,8$
5	1,7	$4,0 \pm 0,8$
6	1,4	$5,3 \pm 0,3$

УДК 546.786:544.342

О. Ю. Пойманова, Г. М. Розанцев, К. Є. Білоусова, Н. Н. Зайцева

ЗАЛЕЖНІСТЬ СТАНУ СИСТЕМИ $\text{Na}_2\text{WO}_4\text{--HCl--NaCl--DMSO(40об. \%)\text{--H}_2\text{O}$ ВІД ЧАСУ ВИТРИМУВАННЯ

Методом точкового рН-потенціометричного титрування досліджено стан системи $\text{Na}_2\text{WO}_4\text{--HCl--NaCl--DMSO(40 об. \%)\text{--H}_2\text{O}$ в залежності від часу витримування. Запропоновано хімічну модель, що описує експериментальні залежності $\text{pH}=f(Z, \tau)$. Розраховано концентраційні константи рівноваг утворення та побудовано діаграми розподілу відповідних ізополіаніонів в області $Z=0,8\text{--}2,3$ для проміжку часу $\tau=0\text{--}28800$ хв. від початку взаємодії. Методом УФ-спектроскопії ідентифіковано наявність декавольфрамат-аніону у водно-диметилсульфоксидних розчинах з $\varphi=40$ об.%, витриманих 28800 хв.

Ключові слова: рН-потенціометрія, УФ-спектроскопія, моделювання, водно-диметилсульфоксидне середовище, декавольфрамат-аніон.

Вступ. Дослідженню рівноваг утворення та перетворення ізополівольфрамат-аніонів (ІПВА) у водно-органічних розчинах приділяється небагато уваги. Але інформації про поведінку ІПВА у водно-органічних розчинах в залежності від витримування їх у часі зовсім не знайдено. Між тим відомо, що з часом в підкислених рівноважних водних розчинах, які містять як орто-, так і поліаніони, рівновага зміщується із одночасною зміною і співвідношення між аніонами, і рН розчину. Вважається, що кінцевою точкою таких змін через великий, проте конкретно не встановлений час, стане утворення суміші орто- й метавольфрамат-аніонів (або декавольфраматів), співвідношення між якими буде залежати від кислотності розчину. При цьому всі інші форми, такі як гекса-, гепта- й додекавольфрамат, тобто ті, що відносяться до паравольфраматів, мають зникнути з розчину [1].

Згідно досліджень у водному середовищі [2] вміст метавольфрамат-аніонів $\text{W}_{12}\text{O}_{38}(\text{OH})_2^{6-}$ у розчині після витримування зростає, особливо помітно за низьких концентрацій вихідних розчинів. Проте зменшення концентрації орто- й паравольфраматів не помічено. З'ясовано, що вміст орто- й гексавольфраматів практично не змінюється, паравольфраматів $\text{B H}_x[\text{W}_{12}\text{O}_{40}(\text{OH})_2]^{(10-x)-}$ – сумарно зростає, а гептавольфраматів – істотно зменшується. Серед паравольфраматів Б з часом зростає частка протонованих форм і зменшується частка апротонної форми. Та всупереч даним [1] у роботі [2] не підтверджено наявності диспропорціонування всіх форм Вольфраму (+6) до орто- й метавольфрамат-аніонів після витримування розчинів.

Експериментальна частина. Для дослідження поведінки ІПВА в системі $\text{Na}_2\text{WO}_4\text{--HCl--NaCl--DMSO(40 об. \%)\text{--H}_2\text{O}$ готували серію розчинів, задаючи іонну силу ($I(\text{NaCl})=0,40$ моль/л), та різну кислотність в інтервалі 0,8–2,3. Даний інтервал кислотностей обрано на основі результатів рН-потенціометричного титрування, які показали що основні перетворення відбуваються в області $Z=1,00\text{--}1,70$. В роботі представлено часовий проміжок (до 28800 хв.) для детального простеження зміни значень рН ($25,0 \pm 0,1$ °C) у системі. Аналіз стану ізополівольфрамат-аніонів у розчинах проводили за допомогою двопробеневого спектрофотометра СФ-2000 у діапазоні $\lambda = 200\text{--}1000$ нм. Спектри записували відносно водно-диметилсульфоксидного розчину ($\varphi(\text{ДМСО})=40$ об. %).

Значення рН у системах із відповідним вмістом диметилсульфоксиду (ДМСО, DMSO) були отримані виходячи з вимірних даних $\text{pH}_{\text{в-д}}$ з урахуванням поправки Δ , згідно рівняння [3]:

$$\text{pH} = \text{pH}_{\text{в-д}} - \Delta. \quad (1)$$

Поправки при розрахунку рН водно-диметилсульфоксидних розчинів у залежності від вмісту ДМСО дорівнюють відповідно: -0,05 (10%), 0,08 (20%), 0,19 (30%), 0,29 (40%), 0,44 (50%) [3].

Полученные при титровании зависимости $\text{pH} = f(Z)$ использовали для проведения моделирования взаимодействий в растворах.

Для аналізу результатів рН-потенціометричних досліджень проведено математичне моделювання стану іонів методом Ньютона (quasi-Newton; програма CLINP 2.1) у розчинах із різним часом витримування (0–28800 хв.) від початку взаємодії. Детальне описання проведення математичного моделювання було наведено у попередній роботі [4].

Обговорення. Слід зазначити, що в усіх випадках було одержано залежності $\text{pH} = f(Z)$, на яких зі збільшенням часу витримування спостерігається зростання рН в області $Z = 1,0\text{--}1,7$, у той час як за $Z < 1,0$ та $Z > 1,7$ така зміна значно менша (рис. 1). Це може свідчити про те, що рівновага утворення деяких ІПВА з WO_4^{2-} та H^+ встановлюється дуже швидко, у той час, як рівновага взаємоперетворень між ІПВА встановлюється повільно. В роботі [2] визначено, що на встановлення рівноваги реакції утворення ІПВА із вихідних речовин (WO_4^{2-} та H^+) навіть не потрібно і запропонованого в роботі [1] часу (120–

180 хв.); із досить високою ймовірністю можна вважати, що рівновага встановлюється практично миттєво, одразу після змішування вихідних розчинів ортовольфрамату та кислоти.

Зростання рН із часом (рис. 1), особливо в діапазоні $1 < Z < 1,7$, можна пояснити наявністю переходів між окремими формами аніонів, які вже утворились. Такий перехід буде впливати на характер розподілу цих іонів та його зміну в залежності від часу витримування розчинів. Для підтвердження цього за допомогою програми CLINP 2.1 було розраховано логарифми концентраційних констант рівноваги утворення індивідуальних ПВА (табл. 1), на основі яких побудовано діаграми розподілу частинок, що надають інформацію про їх стабільність у часі та взаємоперетворення між ними (рис. 2).

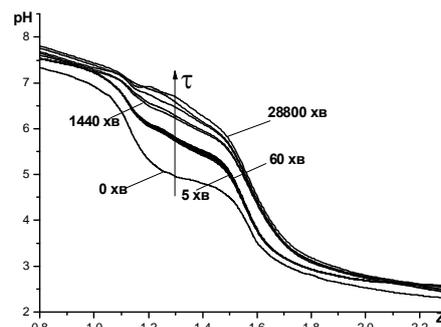


Рис. 1. Залежності рН = f(Z) для різних проміжків часу від початку взаємодії

Таблиця 1

Середні значення концентраційних констант $\lg K_c$ утворення ПВА в часі

Частинка	$\lg K_c$ ($I=0,40$ моль/л) $\varphi(\text{ДМСО})=40$ об.%						
	5 хв.	60 хв.	1440 хв.	2880 хв.	8640 хв.	18720 хв.	28800 хв.
$W_7O_{24}^{6-}$	73,4	73,4	73,5	73,6	73,7	74,1	74,8
$HW_{12}O_{40}(\text{OH})_2^{9-}$	134,8	134,9	136,3	136,7	137,3	138,1	138,9
$W_{12}O_{38}(\text{OH})_2^{6-}$	151,1	152,1	153,8	154,4	155,5	156,7	158,0
$W_{10}O_{32}^{4-}$	127,5	129,5	132,4	132,8	133,8	134,9	136,1

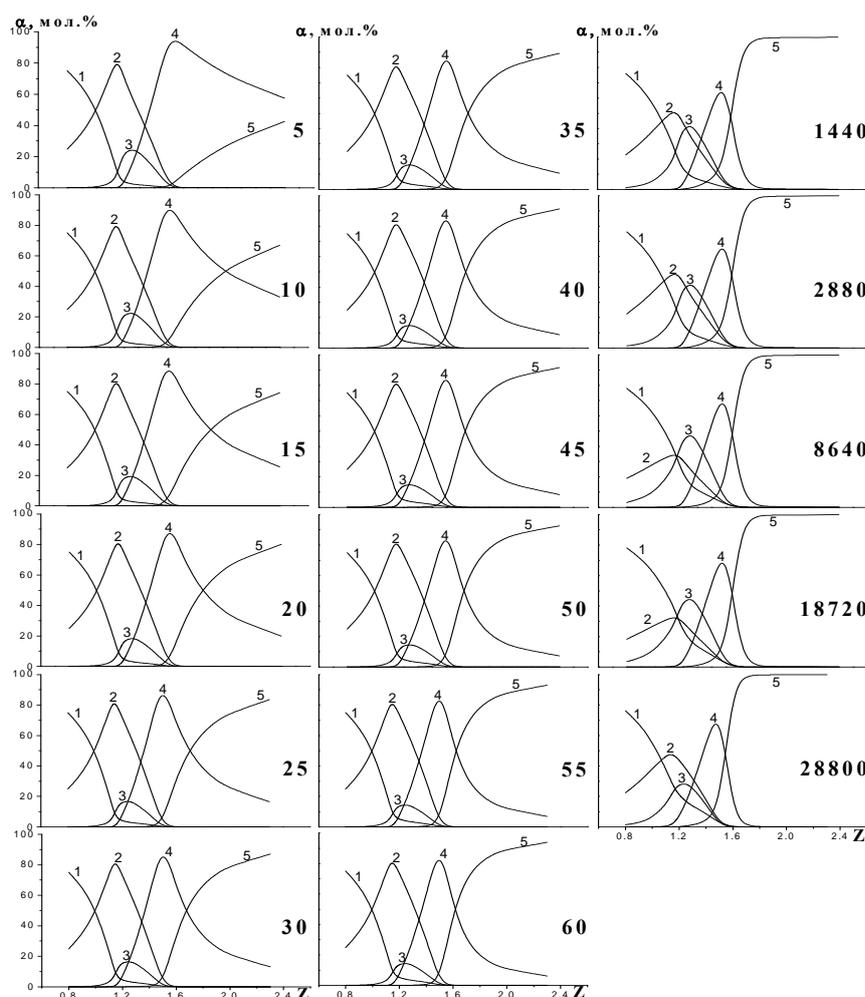


Рис. 2. Діаграми розподілу ПВА в розчині Na_2WO_4 ($C_w = 0,01$ моль/л) – HCl – NaCl ($I = 0,40$ моль/л) – DMSO ($\varphi=40$ об.%) – H_2O (жирним позначено час від початку взаємодії, 1 – WO_4^{2-} ; 2 – $W_7O_{24}^{6-}$; 3 – $HW_{12}O_{40}(\text{OH})_2^{9-}$; 4 – $W_{12}O_{38}(\text{OH})_2^{6-}$; 5 – $W_{10}O_{32}^{4-}$)

Проведені дослідження дозволяють порівняти особливості поведінки ПВА у водно-диметилсульфоксидних із поведінкою у водних розчинах [2]. Висновок щодо відсутності загального диспропорціонування між аніонами можна зробити для водно-диметилсульфоксидних розчинів, витриманих у часі. Діаграми розподілу (рис. 2) свідчать про те, що набір частинок не змінюється, а змінюється лише їх вміст у розчині. Також як і у водних розчинах в даних системах вміст монопротонованої форми паравольфрамату Б ($\text{HW}_{12}\text{O}_{40}(\text{OH})_2^{9-}$) збільшується із плином часу, а вміст гептавольфрамат-аніону ($\text{W}_7\text{O}_{24}^{6-}$) зменшується. Але всупереч змінам у водному середовищі у випадку водно-ДМСО розчинів вміст метавольфрамат-аніонів ($\text{W}_{12}\text{O}_{38}(\text{OH})_2^{6-}$) зменшується. Водночас декавольфрамат-аніон ($\text{W}_{10}\text{O}_{32}^{4-}$) накопичується в розчині (рис. 3).

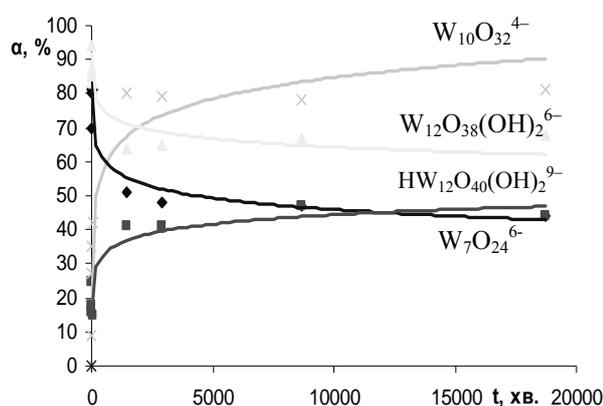


Рис. 3. Зміна вмісту ПВА від часу витримування при $\varphi(\text{ДМСО})=40$ об.%

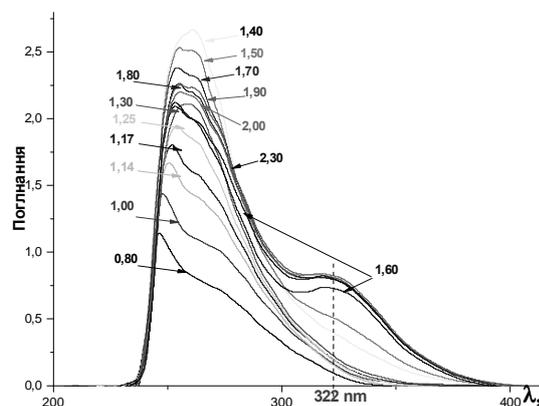


Рис. 4. УФ-спектри для систем $\text{Na}_2\text{WO}_4 - \text{HCl} - \text{NaCl} - \text{DMSO}$ (40 об.%) – H_2O , час витримування 28800 хв

Цікаво відзначити, що єдиний ізополівольфрамат-аніон, який дає сигнал в УФ-області, – декавольфрамат-аніон. Це обумовлено його будовою: аніон $\text{W}_{10}\text{O}_{32}^{4-}$ утворений двома блоками W_5O_{18} , з'єднаними майже лінійними містками $\text{W} - \text{O} - \text{W}$ (448 К). Єдиними іншими полівольфраматами із групами переносу заряду (взагалі потрапляють в інтервал 240-270 нм), такими ж як 325 нм, є α - і β - $\text{P}_2\text{W}_{18}\text{O}_{62}^{6-}$, які також мають димерну структуру, поєднану майже лінійними (435 К) $\text{W} - \text{O} - \text{W}$ містками [5].

На УФ-спектрах досліджених підкислених, витриманих протягом 28800 хв. розчинів вольфрамату натрію з 40% вмістом ДМСО (рис. 4) з'являється пік при 322 нм, інтенсивність якого збільшується з ростом кислотності вихідних розчинів, що свідчить про збільшення концентрації декавольфрамат-аніону в них. Це узгоджується із запропонованими моделями згідно рН-потенціометричного титрування.

Висновки. Досліджено поведінку ПВА в підкислених водно-ДМСО розчинах ($\varphi=40$ об.%) у часі. Встановлено, що як і у водних розчинах в даних системах вміст монопротонованої форми паравольфрамату Б ($\text{HW}_{12}\text{O}_{40}(\text{OH})_2^{9-}$) збільшується із плином часу, а вміст гептавольфрамат-аніону ($\text{W}_7\text{O}_{24}^{6-}$) зменшується. Але всупереч змінам у водному середовищі у випадку водно-ДМСО розчинів вміст метавольфрамат-аніонів ($\text{W}_{12}\text{O}_{38}(\text{OH})_2^{6-}$) зменшується. Водночас декавольфрамат-аніон ($\text{W}_{10}\text{O}_{32}^{4-}$) накопичується в розчині. Ідентифіковано методом УФ-спектроскопії наявність декавольфрамат-аніону у водно-ДМСО розчинах ($\varphi=40$ об.%), витриманих протягом місяця. Виявлено зростання його вмісту зі збільшенням кислотності розчинів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кабанов В. Я. Исследование механизма образования водных высокомолекулярных вольфраматов методом инфракрасной спектроскопии / В. Я. Кабанов, В. И. Спицын // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148, № 1. – С. 109–112.
2. Розанцев Г. М. Изменение состояния изополивольфрамат-анионов в водных растворах по мере достижения равновесия / Г. М. Розанцев, С. В. Радио, Е. Е. Белоусова // Вопросы химии и химической технологии. – 2005. – № 5. – С. 32–36.
3. Александров В. В. Кислотность неводных растворов / В. В. Александров. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981. – С. 32–90.
4. Пойманова Е. Ю. Определение условий образования декавольфрамат-анионов в водно-диметилформамидной среде / Е. Ю. Пойманова, Г. М. Розанцев, Е. Е. Белоусова // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. – 2012. – № 1. – С. 152–156.
5. Synthesis and properties of the decatungstate ion / L. Lorente, M. A. Martinez, J. M. Arrieta et al. // Termochimica Acta. – Vol. 98. – 1986. – P. 89–97.

Надійшло до редакції 16.10.2013 р.

РЕЗЮМЕ

Методом точечного рН-потенциметрического титрования исследовано состояние системы $\text{Na}_2\text{WO}_4\text{-HCl-NaCl-DMSO(40 об. \%)-H}_2\text{O}$ в зависимости от времени выдерживания. Предложена химическая модель, описывающая экспериментальные зависимости $\text{pH}=\text{f}(\text{Z},\tau)$. Рассчитаны концентрационные константы равновесий образования и построены диаграммы распределения соответствующих изополианионов в области $\text{Z}=0,8\text{-}2,3$ для промежутка времени $\tau=0\text{-}28800$ мин. от начала взаимодействия. Методом УФ-спектроскопии идентифицировано наличие декавольфрамат-аниона в водно-диметилсульфоксидных растворах с $\varphi=40$ об.%, выдержанных 28800 мин.

Ключевые слова: рН-потенциметрия, УФ-спектроскопия, моделирование, водно-диметилсульфоксидная среда, декавольфрамат-анион.

SUMMARY

The method of point pH--potentiometric titration was used to investigate the changes in the state of the system $\text{Na}_2\text{WO}_4\text{-HCl-NaCl-DMSO(40 Vol. \%)-H}_2\text{O}$ during aging. The chemical model The chosen model of equilibrium processes of formation of particles adequately describe the experimental curves $\text{pH} = \text{f}(\text{Z } \tau)$. Concentration formation constants of tungsten anion forms were calculated and diagrams of ions distribution in the range $\text{Z}=0,8\text{-}2,3$ and $\tau=0\text{-}28800$ min from the beginning of interaction. UV-spectroscopy has shown the presence of decatungstate-anion in aqueous-dimethylsulfoxide solutions $\varphi=40$ Vol.% after 28800 min of aging.

Keywords: pH-potentiometric investigation, UV-spectroscopy, simulation, aqueous-dimethylsulfoxide media, decatungstate-anion.

УДК 543.422+543.067.5+546.62

Е. А. Решетняк, Н. В. Ивченко, В. Н. Шевченко, Н. А. Никитина
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков

ЖЕЛАТИНОВАЯ ПЛЕНКА С ИММОБИЛИЗОВАННЫМ ЭРИОХРОМЦИАНИНОМ R – ТВЕРДОФАЗНЫЙ РЕАГЕНТ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЛЮМИНИЯ(III)

Предложен оптически прозрачный твердофазный аналитический реагент для фотометрического и визуально-тестового определения алюминия(III) в водных средах. Индикаторная пленка получена путем физической иммобилизации металлоиндикатора эриохромцианина R в желатиновом слое фотопленки. Показано, что индикаторную реакцию нужно проводить при pH 5,5 в присутствии катионного ПАВ цетилпиридиний хлорида. Установлен состав продукта реакции и оценены количественные характеристики процесса комплексообразования в гетерогенной системе вода/желатиновая пленка: степень извлечения и коэффициент распределения Al(III) между фазами, условная константа устойчивости комплекса. Определены метрологические характеристики фотометрического и визуального определения Al(III) с использованием предложенного твердофазного реагента.

Ключевые слова: алюминий(III), желатиновая пленка, эриохромцианин R, иммобилизация, твердофазные аналитический реагент, фотометрия, визуальная колориметрия.

Введение. Модифицирование сорбентов путем иммобилизации реагентов или закрепления функционально-аналитических групп на их поверхности лежит в основе получения разнообразных твердофазных аналитических реагентов. Применение твердофазных реагентов в первую очередь связано с необходимостью концентрирования и отделения аналитов, что позволяет существенно повысить чувствительность и селективность аналитических определений [1]. Процедура анализа с использованием твердофазного реагента предполагает извлечение определяемого элемента или вещества в фазу модифицированного сорбента за счет его взаимодействия с реагентом-модификатором, т.е. проведение твердофазной экстракции, и дальнейшее определение выделенного компонента непосредственно в фазе сорбента [1, 2].

Перспективными для анализа объектов окружающей среды и биологических проб считают оптически прозрачные полимерные материалы с иммобилизованными реагентами. Их можно фотометрировать, использовать в визуальной колориметрии или использовать в качестве чувствительных элементов в сенсорных устройствах. К таким материалам относят, например, полиметакрилатные матрицы [3], триацетилцеллюлозу [4, 5], этилцеллюлозу [6], желатиновые пленки, в частности, готовые слои отвержденного желатинового геля коммерческих фотографических пленок [7–11]. Такие пленки эластичны, обладают высокой механической, химической и термической устойчивостью; отвержденный желатиновый гель имеет пористую структуру и высокую степень гидратации. В результате высокой «оводненности» желатинового геля поведение реагентов в пленке подобно их поведению в водных растворах, при этом растворимость реагентов в геле может в десятки раз превышать их растворимость в воде [10]. В желатиновых слоях индикаторных пленок были изучены аналитические реакции разного типа, в том числе реакции комплексообразования [9, 12–14]. При выборе оптимальных условий извлечения реагентов в желатиновую матрицу авторы учитывали заряд частиц, их гидрофобность, а также значение pH в изоэлектрической точке полимера (pI), равное $4,5 \pm 0,1$ [14] (при $\text{pH} < 4,5$ суммарный сеточный заряд желатиновой матрицы положительный, а при $\text{pH} > 4,5$ — отрицательный).

Цель данной работы – изучить особенности протекания цветной реакции взаимодействия Al(III) с комплексообразующим индикатором эриохромцианином R в среде отвержденного желатинового геля, выбрать условия и оценить возможности фотометрического и визуально-тестового определения Al(III) в водных растворах с использованной индикаторной пленки.

Объекты и методы исследования. Для изготовления твердофазного реагента использовали фотографическую пленку для офсетной печати фирмы AGFA с толщиной желатинового слоя ~ 20 мкм [15], из которого полностью удаляли галогениды серебра, используя коммерческие растворы Agfa Graphics NV (Belgium). Для извлечения эриохромцианина R (ЭХЦ) в желатиновую матрицу бесцветные и прозрачные образцы пленок размером $2,5 \times 3,5$ см погружали в раствор реагента с концентрацией $5 \cdot 10^{-4}$ моль/л и pH 5,5 на 20 мин, затем извлекали из раствора и сушили на воздухе. Равномерно окрашенные в оранжевый цвет образцы хранили при комнатной температуре в темном закрытом месте.

Для приготовления растворов использовали дистиллированную воду, соль $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ (ч.), катионное поверхностно активное вещество (ПАВ) цетилпиридиний хлорид (ЦПХ, Merck) с массовой долей основного вещества 96 %, индикатор эриохромцианин R (Сhemapol) квалификации «ч.д.а.». Концентрацию ионов Al^{3+} в исходном растворе $\text{Al}(\text{NO}_3)_3$ устанавливали обратным комплексонометрическим титрованием [16]. Раствор ЭХЦ с массовой концентрацией 0,7 мг/л готовили по методике, приведенной в [17]. Тре-

буемое значения pH в растворах создавали ацетатным буфером, приготовленным из одномолярных растворов уксусной кислоты и щелочи.

Светопоглощение желатиновых пленок регистрировали на фотоколориметре КФК-3, закрепляя пленки в держателе непосредственно в кюветном отделении прибора. Пленки с иммобилизованным реагентом фотометрировали против неокрашенного образца, пленки с иммобилизованным комплексом — против образца с реагентом. Состав и устойчивость комплекса, образующегося в двухфазной системе вода/желатиновая пленка, устанавливали методом молярных отношений (насыщения) согласно методике, описанной в работах [12, 14]. Для получения кривой насыщения готовили 10–14 растворов с переменной концентрацией Al^{3+} от $7 \cdot 10^{-6}$ до $1,0 \cdot 10^{-4}$ моль/л, постоянными значениями $c(ЦПХ) = 1 \cdot 10^{-4}$ моль/л и pH 5,5. Растворы выливали в чашки Петри. В каждый раствор погружали на 20 мин 8–10 образцов пленок с иммобилизованным реагентом. Пленки извлекали из растворов, сушили на воздухе и фотометрировали при $\lambda_{max} = 610$ нм относительно исходной пленки с реагентом.

Общую концентрацию иммобилизованного в каждой пленке ЭХЦ, $\overline{c(R)}$, определяли по уменьшению его концентрации в растворе, в котором модифицировали пленки. Чтобы получить значимо различающиеся значения поглощения растворов до и после иммобилизации реагента, в растворе одновременно выдерживали 20–25 образцов пленок. Остаточную концентрацию ЭХЦ в растворе контролировали фотометрически при $\lambda_{max} = 510$ нм. Молярную концентрацию реагента в среде желатинового геля вычисляли по формуле:

$$\overline{c(R)} = V(c_1(R) - c_2(R)) / (V_{жс} \cdot k), \quad (1)$$

где $c_1(R)$ и $c_2(R)$ – концентрации ЭХЦ в растворе до и после погружения в него пленок; $V_{жс}$ – объем желатиновой фазы, вычисленный из геометрических размеров пленки; k – количество образцов пленок; $V = 25$ мл – объем раствора. Общую концентрацию металла в фазе желатинового геля $\overline{c(M)}$ находили из соотношения (заряд иона металла опущен):

$$\overline{c(M)} = V(c_1(M) - c_2(M)) / (V_{жс} \cdot k), \quad (2)$$

где $c_1(M)$ и $c_2(M)$ – начальная и остаточная концентрации иона Al^{3+} в растворе до и после погружения в него пленок с реагентом. Остаточную концентрацию ионов Al^{3+} определяли, добавляя в растворы после извлечения пленок эриохромцианин и фотометрируя растворы при $\lambda_{max} = 610$ нм. По кривой насыщения, представляющей зависимость поглощения комплекса в пленке от величины $\overline{c(M)}$, находили значение $\overline{c(M)'}'$, соответствующее абсциссе точки пересечения касательных к линейным участкам графика. Эта концентрация отвечает максимальной концентрации комплекса, который может образоваться в выбранных условиях в желатиновой матрице. Соотношение металл : реагент в составе комплекса приравнивали соотношению $\overline{c(M)'}' : \overline{c(R)}$.

Результаты и их обсуждение. Выбор оптимальных условий иммобилизации металлоиндикатора и комплекса в желатиновой пленке. Эриохромцианин R (2-сульфо-3,3-диметил-4-оксифлуксон-5,5-дикарбоновая кислота) – один из наиболее известных металлоиндикаторов, которые применяют для фотометрического определения $Al(III)$ в объектах окружающей среды [18–21].

В молекулу реагента входят заместители, способные участвовать в кислотно-основных равновесиях. В зависимости от кислотности среды индикатор может существовать в различных протонированных формах согласно схемам протолитических равновесий и долевой диаграммы (рис. 1).

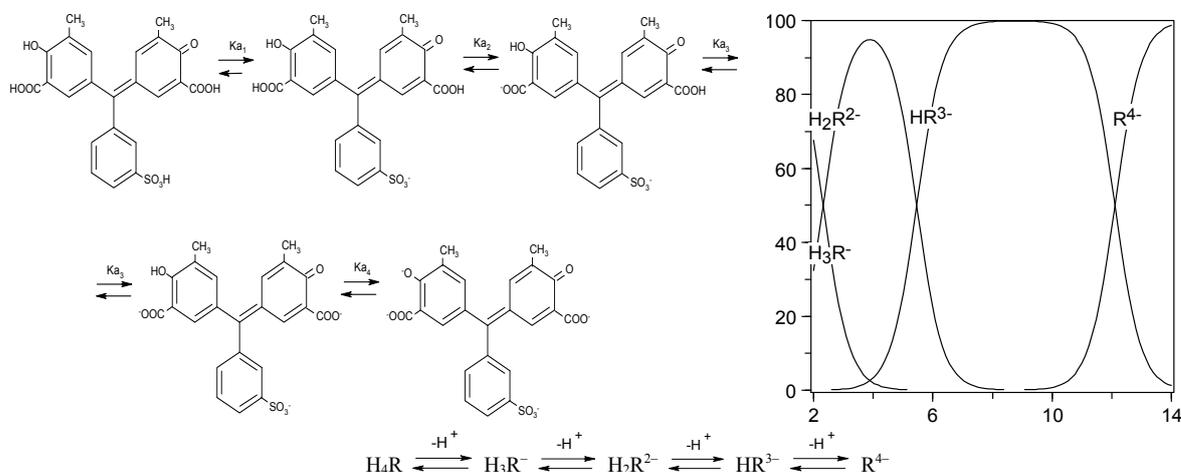


Рис. 1. Схемы протолитических равновесий [22] и долевая диаграмма распределения протонированных форм эриохромцианина R в зависимости от pH раствора ($K_{a1} > 0,1$, $K_{a2} = 10^{-2,32}$, $K_{a3} = 10^{-5,45}$, $K_{a4} = 10^{-12,1}$ ($I = 0,1$ моль/л) [23])

Протонированные формы ЭХЦ по-разному окрашены: H_3R – оранжево-красная ($\lambda_{\max}=480$ нм, рН 1), H_2R^{2-} – розово-красная ($\lambda_{\max}=515$ нм, рН 4), HR^{3-} – желтая ($\lambda_{\max}=430$ нм, рН 8), R^{4-} – сине-фиолетовая ($\lambda_{\max}=580$ нм, рН 13) [24].

Эриохромцианин с ионами алюминия образует в водных растворах, в основном, комплексы красно-фиолетового цвета состава 1:1. В справочном издании [23] приведены константы устойчивости комплексов: $\lg K(AlR^+)=13,66$, $\lg K(AlHR)=18,25$, $\lg K(AlH_2R^+)=22,29$. Тихонов В. Н. указывает [24], что при рН 4,1 устойчив комплекс 1:1 ($\lg K=7,62$), а при рН 6,3 может образовываться комплекс с соотношением алюминия к реагенту 1:2. Фотометрическое определение Al(III) в водных объектах ведут при рН 6 и $\lambda_{\max}=535$ нм [20] или при рН 5,4 и $\lambda_{\max}=536-540$ нм [18].

В ходе исследования было установлено, что анионные формы реагента извлекаются в пленку только в кислой среде при рН 2,5–4, окрашивая ее в розовый цвет; при рН $\geq 4,5$ (рН $\geq pI$) пленка остается бесцветной, т.к. ЭХЦ и его комплекс с Al(III) не проникают в желатиновый слой. Такое поведение металлоиндикатора согласуется с электростатической природой взаимодействия заряженных частиц с желатиновой матрицей: анионные формы реагента эффективно сорбируются только положительно заряженной желатиновой матрицей при рН $< pI$. Введение катионного ПАВ цетилпиридиний хлорида в растворы $Al(NO_3)_3$ и ЭХЦ привело к стабилизации реагента и комплекса в желатиновой пленке в нужном диапазоне рН ($>4,5$). Это произошло, с одной стороны, в результате гидрофобизации желатиновой матрицы — катионы ПАВ частично экранируют отрицательно заряженные функциональные группы макромолекул желатина, с другой стороны, в результате нейтрализации в пленке заряда реагента и комплекса. При погружении в водно-мицеллярный раствор $Al(NO_3)_3$ оранжевые ЭХЦ-ЦПХ-пленки становятся синими. Оптимальное время иммобилизации реагента и комплекса в желатиновой пленке установили на основании кинетических зависимостей, оно составляет 20 мин.

Оптические характеристики иммобилизованных в желатиновой пленке эриохромцианина R и металлокомплекса. Известно [22], что введение катионного ПАВ в растворы фенолкарбоновых кислот, в частности в растворы эриохромцианина R, всегда приводит к сдвигу максимумов поглощения протонированных форм ($\Delta\lambda$) и к небольшому росту интенсивности их поглощения. Эти изменения в спектрах обусловлены образованием ионных ассоциатов анионных форм ЭХЦ с катионом ПАВ, например с цетилпиридиний-ионом ЦП⁺: 1) $H_3R^+ : ЦП^+ = 1:1$, $\lambda_{\max}=466$ нм, $\Delta\lambda=-(8-14)$ нм; 2) $H_2R^{2-} : ЦП^+ = 1:2$, $\lambda_{\max}=505$ нм, $\Delta\lambda=-(9-10)$ нм; 3) $HR^{3-} : ЦП^+ = 1:3$, $\lambda_{\max}=429$ нм, $\Delta\lambda=-(1-5)$ нм; 4) $R^{4-} : ЦП^+ = 1:4$, $\lambda_{\max}=586$ нм, $\Delta\lambda=+(0-6)$ нм.

В растворе ЭХЦ при рН 5,5 преобладают и находятся примерно в равных молярных соотношениях две протонированные формы – ионы HR^{3-} и H_2R^{2-} (рис. 1). Спектры поглощения этих форм перекрываются и дают суммарный спектр с размытым максимумом вблизи $\lambda=450$ нм. Присутствие ЦПХ в растворе ЭХЦ приводит к батохромному сдвигу суммарной полосы поглощения ассоциатов с 450 нм до 510 нм, т.е. на 60 нм. После извлечения ЭХЦ в желатиновую пленку при рН 5,5 из раствора, содержащего ЦПХ, вид спектра поглощения и значение его максимума не изменились – $\lambda_{\max}=510$ нм (рис. 2, спектр 1).

Присутствие ЦПХ влияет и на оптические характеристики комплекса ионов Al^{3+} с ЭХЦ как в растворе, так и в отвержденном желатиновом геле. Максимум спектра поглощения комплекса в растворе смещается на 80 нм в длинноволновую область (от 535 до 610 нм); значение λ_{\max} иммобилизованного в пленке комплекса соответствует 610 нм (рис. 2, спектр 2), т.е. не меняется по сравнению с раствором. После введения ЦПХ повышается контрастность индикаторной реакции от 85 до 100 нм.

Изменение спектральных характеристик комплексов в присутствии КПАВ наблюдали при изучении комплексобразования Fe(III) и Cu(II) с хромазуролом S, иммобилизованным в ксерогеле. Максимум спектра поглощения комплекса Fe(III) с реагентом в присутствии ЦПХ в растворе сместился на 55 нм (от 580 до 635 нм), в ксерогеле – на 65 нм (от 610 до 675 нм); для комплекса Cu(II) при добавлении ЦПХ спектр поглощения сместился в растворе на 35 нм (от 580 до 615 нм), в ксерогеле – на 55 нм (от 580 до 635 нм) [1].

Состав иммобилизованного в желатиновом геле металлокомплекса устанавливаем по кривой насыщения (рис. 3), построенной по данным фотометрических измерений (было получено три кривых насыщения, для каждой серии измерений готовили новые растворы и новые индикаторные образцы). Общую кон-

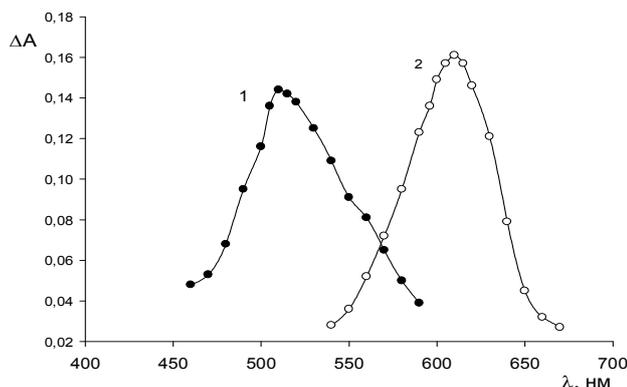


Рис. 2. Спектры поглощения при рН 5,5 ЭХЦ (1) и металлокомплекса (2), иммобилизованных в желатиновой пленке (в растворах: 1 – $c(\text{ЭХЦ})=5,0 \cdot 10^{-4}$ моль/л, $c(\text{ЦПХ})=0,01$ моль/л; 2 – $c(Al^{3+})=1,0 \cdot 10^{-5}$ моль/л, $c(\text{ЦПХ})=1,0 \cdot 10^{-4}$ моль/л)

центрацію Al(III) в пленке $\overline{c(M)}$ вычисляем по формуле (2), а общую концентрацию иммобилизованного реагента $\overline{c(R)}$ – по формуле (1).

По графику (рис. 3) находим значение $\overline{c(M)}$, соответствующее абсциссе точки пересечения касательных к линейным участкам графика и равное $3.8 \cdot 10^{-3}$ моль/л. Соотношение $\text{Al} : \text{ЭХЦ}$ в составе комплекса приравняем соотношению $\overline{c(M)}' : \overline{c(R)} = 3.8 \cdot 10^{-3} : 8.1 \cdot 10^{-3} \approx 1:2$.

Как отмечено выше, в водных растворах исследуемый реагент может образовывать с ионами Al^{3+} комплексы двух видов (1:1 и 1:2), однако в желатиновом геле стабилизируется один вид комплекса с максимальным числом лигандов. Такое же соотношение $\text{Al} : \text{R}$ было установлено в составе ассоциата, образующегося в домицеллярном растворе ЦПХ – $\text{Al} : \text{ЭХЦ} : \text{ЦП} = 1 : 2 : 2$ [22]. Таким образом, число координируемых частиц реагента ионами Al^{3+} в присутствии ПАВ увеличивается как в растворе, так и в пленке. Увеличение числа лигандов в составе комплексов алюминия(III) с другими представителями фенолкарбоновых кислот – силохромом и хромозуролом S – наблюдали при иммобилизации этих комплексов при pH 4–6 в присутствии ПАВ на тонко-слоистых матрицах-тканях: бязи, вискозе, шелке [25].

Количественные характеристики процесса комплексобразования в гетерогенной системе вода/желатиновая пленка. Исходя из полученных кривых насыщения, оцениваем значение коэффициента распределения (D) ионов Al^{3+} в двухфазной системе вода/желатиновая пленка, значение степени извлечения металла (R) одним образцом индикаторной пленки площадью $\sim 9 \text{ см}^2$ ($V_{\text{жк}} \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ дм}^3$) из 25 мл раствора и условную константу (β') равновесия комплексобразования в гетерогенной системе (заряд частиц опущен): $\text{Al} + 2\overline{\text{R}} \Leftrightarrow \overline{\text{AlR}_2}$. Исходные данные для вычисления D, R и β' приведены в таблице.

Таблица

Пример экспериментальной оценки условной константы устойчивости комплекса в желатиновом геле ($k=10$)

№	$\overline{c(R)}$, 10^{-3} моль/л	$c(\text{Al}^{3+})$, 10^{-5} моль/л		$\overline{c(\text{Al}^{3+})} = \overline{c(\text{AlR}_2)}$, 10^{-3} моль/л	$\overline{c^*(R)}$, 10^{-3} моль/л	$\lg \beta'$
		начальная	остаточная			
1	8,1	1,0	0,36	1,14	5,82	6,97
2	8,1	1,5	0,52	1,74	4,62	7,19
3	8,1	2,0	0,63	2,45	3,20	7,58
4	8,1	2,5	1,02	2,65	2,80	7,52
5	8,1	3,0	1,47	2,74	2,62	7,43

Условную константу устойчивости комплекса в желатиновом геле определяем как:

$$\beta' = \overline{c(\text{AlR}_2)} \left\{ \overline{c^*(R)} \right\}^{-2} c^{-1}(\text{Al})$$

где $c(\text{Al})$ – остаточная концентрация алюминия в растворе после извлечения пленок с реагентом, $\overline{c(\text{AlR}_2)}$ и $\overline{c^*(R)}$ – молярные концентрации комплекса и несвязанного в комплекс реагента в объемной фазе желатинового геля, которую находим по формуле: $\overline{c^*(R)} = \overline{c(R)} - 2\overline{c(\text{AlR}_2)}$. Среднее значение логарифма условной константы устойчивости комплекса $\text{Al}(\text{ЭХЦ})_2$ в желатиновой пленке составляет: $\lg \beta' = 7.3 \pm 0.3$. Судя по найденному значению β' , при иммобилизации ЭХЦ в отвержденном желатиновом геле устойчивость комплекса с Al(III) , по сравнению с раствором, существенно понижается, но значение константы остается достаточно высоким. Это согласуется с результатами, полученными разными авторами, исследовавшими равновесие комплексобразования на различных сорбентах [12, 14, 26, 27].

Желатиновые пленки не относятся к высоко концентрирующим сорбентам, однако концентрация Al(III) в желатиновой матрице увеличивается по сравнению с водным раствором примерно в сто раз (таблица). На основании этих данных можно оценить количественные характеристики D и R как:

$$D = \overline{c(\text{Al})} / c(\text{Al}), \quad R = D / (D + 1/r),$$

где $c(\text{Al})$ – концентрация алюминия в растворе после извлечения одной пленки с реагентом, $r = V_{\text{жк}} / V_{\text{р-ра}}$. Усредненные значения характеристик составляют: $D = 128 \pm 13$, $R = (8,2 \pm 0,8) \%$.

Полученные результаты показывают, что, несмотря на «кажущееся» снижение устойчивости комплекса при переходе из раствора в желатиновую матрицу, индикаторная пленка с иммобилизованным

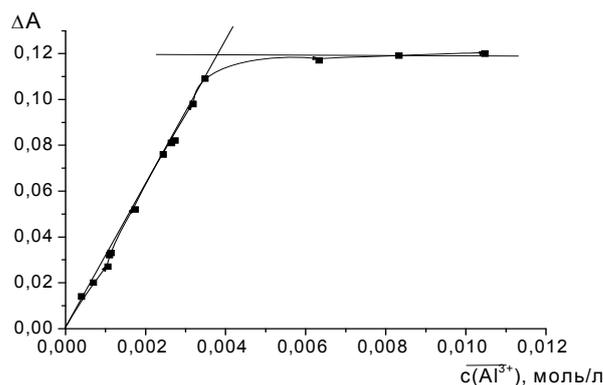


Рис. 3. Зависимость поглощения при $\lambda_{\text{max}}=610$ нм иммобилизованного комплекса от общей концентрации алюминия(III) в желатиновой пленке ($\overline{c(R)} = 8,1 \cdot 10^{-3}$ моль/л)

ЭХЦ способна эффективно извлекать и удерживать ионы Al^{3+} , что свидетельствует о перспективности ее использования в качестве оптически прозрачного твердофазного реагента.

Применение индикаторной пленки для фотометрического и визуально-тестового определений $Al(III)$. Погружение ЭХЦ-пленки в раствор, содержащий ионы Al^{3+} , сопровождается изменением ее цвета от оранжевого к синему; при этом интенсивность окраски комплекса в пленке пропорционально увеличивается с ростом концентрации алюминия в растворе. Это позволяет применить индикаторную пленку для фотометрического и визуального определения $Al(III)$ в водных средах, используя градуировочную зависимость или цветовую шкалу соответственно.

Границы диапазона линейности градуировочного графика для твердофазно-фотометрического определения $Al(III)$ соответствуют концентрациям $(0,5-4,0) \cdot 10^{-5}$ моль/л (рис. 3, наклонный линейный участок). Значение предела определения c_{lim} , оцененное по градуировочному графику согласно рекомендациям [28], составляет $3,3 \cdot 10^{-6}$ моль/л или 0,09 мг/л.

Построение цветовой шкалы можно начинать с концентрации $Al^{3+} 5 \cdot 10^{-6}$ моль/л, увеличивая затем содержание алюминия в два раза. Окрашенные пленки следует разложить на белом листе бумаги в порядке возрастания концентрации. Значение предела визуального определения, оцененное по цветовой шкале статистическим методом [29], составляет: $c_{lim}=4,2 \cdot 10^{-6}$ моль/л или 0,11 мг/л. Найденные значения пределов сопоставимы с метрологическими характеристиками методик определения $Al(III)$ с использованием других твердофазных аналитических реагентов, если в методике не предусмотрено предварительное концентрирование анализируемого раствора на специальных устройствах [25, 30–32].

Существенное мешающее влияние на аналитический сигнал исследуемой индикаторной пленки оказывают ионы Fe^{3+} , Mn^{2+} , Cu^{2+} , поэтому при определении $Al(III)$ в анализируемые растворы необходимо вводить маскирующие компоненты (аскорбиновую кислоту, NaF , тиомочевину или $Na_2S_2O_3$). Примеры определений $Al(III)$ в водных средах разного состава приведены в наших публикациях [33, 34].

Выводы. Выполненные в работе исследования показали, что иммобилизованный в отвержденном желатиновом геле фотопленки металлоиндикатор эриохромцианин R может быть использован как прозрачный твердофазный реагент для визуально-тестового и фотометрического определения $Al(III)$. Пределы определения алюминия(III) по предложенным методикам сопоставимы со значениями c_{lim} для известных твердофазно-спектрофотометрических и тестовых методик анализа (без предварительного концентрирования пробы на специальных устройствах).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорбционное концентрирование микрокомпонентов из растворов: применение в неорганическом анализе / Ю. А. Золотов, Г. И. Цизин, С. Г. Дмитриенко, Е. И. Моросанова. – М.: Наука, 2007. – 320 с.
2. Золотов Ю. А. Химические тест-методы анализа / Ю. А. Золотов, В. М. Иванов, В. Г. Амелин. – М.: Изд. «Эдиториал УРСС», 2002. – 302 с.
3. Гавриленко Н. А. Твердофазно-спектрофотометрическое определение серебра с использованием дитизона, иммобилизованного в полиметакрилатную матрицу / Н. А. Гавриленко, Н. В. Саранчина. // Журн. аналит. хим. – 2010. – Т. 65, № 2. – С. 153–157.
4. Optode for uranium(IV) determination in aqueous medium / J. M. Joshi, P. N. Pathak, A. K. Pandey, V.K. Manchanda // Talanta. – 2008. – Vol. 76, No 1. – P. 60–65.
5. Ensafi A. A. A simple optical sensor for cadmium ions assay in water samples using spectrophotometry / A. A. Ensafi, Z. N. Isfahani // Журн. аналит. хим. – 2011. – Т. 66, № 2. – С. 155–161.
6. Choi M. M. F. Fluorimetric optode membrane for sulfide detection / M. F. M. Choi // Analyst. – 1998. – Vol. 123, No 7. – P. 1631–1634.
7. Protolytic properties of dyes embedded in gelatin films / N. A. Nikitina, E. A. Reshetnyak, N. V. Svetlova, N. O. Mchedlov-Petrosyan // J. Braz. Chem. Soc. – 2011. – Vol. 22, No 5. – P. 855–864.
8. Коновалова О. Ю. Особенности протекания индикаторной реакции на первичные ароматические амины в желатиновой пленке / О. Ю. Коновалова, Л. П. Логинова // Методы и объекты хим. анализа. – 2008. – Т. 3, №2. – С. 147–156.
9. Кузнецов В. В. Аналитические реакции комплексообразования органических реагентов с ионами металлов в отвержденном желатиновом геле / В. В. Кузнецов, С. В. Шереметьев // Журн. аналит. хим. – 2009. – Т. 64, № 9. – С. 910–919.
10. Михайлов О. В. Желатин-иммобилизованные металлокомплексы / О. В. Михайлов. – М.: Научный мир, 2004. – 236 с.
11. Geethakrishnan T. Generation of phase-conjugate wave in acid blue 7 dye-doped gelatin film / T. Geethakrishnan, P.K. Palanisamy // Current Science. – 2005. – Vol. 89, No 11. – P. 1894–1898.
12. Протолитические и комплексообразующие свойства индикаторов в среде желатинового геля / Е. А. Решетняк, Н. А. Никитина, Л. П. Логинова и др. // Вестн. Харьк. нац. ун-та. Химия. – 2005. – Вып. 13(36), № 669. – С. 67–82.
13. Оптический сенсор на основе отвержденного желатинового геля для фотометрического определения сульфатов в водных средах / Е. А. Решетняк, В. Е. Асмолов, Н. Н. Немец, Н. А. Никитина // Вестн. Харьк. нац. ун-та. Химия. – 2010. – Вып. 18(41), № 895 – С. 74–81.
14. Reshetnyak E. A. Photometric determination of aqueous cobalt(II), nickel(II), copper(II) and iron(III) with 1-nitroso-2-naphthol-3,6-disulfonic acid disodium salt in gelatin films / E. A. Reshetnyak, N. V. Ivchenko, N. A. Nikitina // Cent. Eur. J. Chem. – 2012. – Vol. 10, No 5. – P. 1617–1623.
15. Джеймс Т. Теория фотографического процесса / Т. Джеймс. – Ленинград: Химия, 1980. – 672 с.

16. Комплексные соединения в аналитической химии / Ф. Умланд, А. Янсен, Д. Тириг, Г. Вюнш. – М.: МИР, 1975. – 499 с.
17. Вода питна. Нормативні документи: довідник у 2 т. Том 1. За ред. В. І. Іванова. – Львів: НТЦ «Леонорм-стандарт», 2001. – 260 с.
18. Справочник по свойствам, методам анализа и очистке воды. Часть 1. / Л. А. Кульский, И. Т. Горонский, А. М. Когановский, М. А. Шевченко. – Киев: Наукова думка, 1980. – 680 с.
19. Лурье Ю. Ю. Аналитическая химия промышленных сточных вод / Ю. Ю. Лурье. – М.: Химия, 1984. – 448 с.
20. Унифицированные методы исследования качества вод. Часть 1. Методы химического анализа вод. Том 1. Основные методы. – Москва, 1987. – 592 с.
21. Фомин Г. С. Вода. Контроль химической, бактериальной и радиационной безопасности по международным стандартам. Энциклопедический справочник / Г. С. Фомин. – М.: Госстандарт России, 1995. – 618 с.
22. Савин С. Б. Поверхностно-активные вещества / С. Б. Савин, Р. К. Чернова, С. Н. Штыков. – М.: Наука, 1991. – 251 с.
23. Hulanicki L. Complexometric indicators: characteristics and application / L. Hulanicki, S. Glab, G. Ackermann // Pure Appl. Chem. – 1983. – Vol. 7, No 55. – P. 1137–1230.
24. Тихонов В. Н. Аналитическая химия алюминия / В. Н. Тихонов. – М.: Наука, 1971. – 268 с.
25. Амелин В. Г. Особенности тест-реакций ионов металлов с хромазуолом S, иммобилизованным на тонкослойных матрицах / В. Г. Амелин, О. Б. Чернова // Журн. аналит. химии. – 2008. – Т. 63, № 8. – С. 873–879.
26. Костенко Є. С. Хіміко-аналітичні властивості сульфоталеїнових барвників, іммобілізованих на аніоніті АВ-17×8 та їх використання в аналізі харчових об'єктів / Є. С. Костенко // Методи і об'єкти хімічного аналізу. – 2011. – Т. 6, № 1. – С. 56–70.
27. Yari A. Ultra trace mercury(II) detection by highly selective new optical sensor / A. Yari, F. Papi // Sensors and Actuators B: Chem. – 2011. – Vol. 160. – P. 698–704.
28. Compendium of analytical nomenclature, 3rd edition, edited by J. Inczedy, T. Lengyel, A.M. Ure. – Oxford: Blackwell Scientific Publications, 1998. – 964 p.
29. Тест-метод определения суммы металлов реактивной индикаторной бумагой и его метрологические характеристики / В. М. Островская, Е. А. Решетняк, Н. А. Никитина и др. // Журн. аналит. хим. – 2004. – Т. 59, №10. – С. 1101–1108.
30. Наджафова О. Ю. Индикаторная бумага для тест-определения алюминия в растворах / О. Ю. Наджафова, С. В. Лагодзинская, В. В. Сухан // Журн. аналит. химии. – 2001. – Т. 56, № 2. – С. 201–205.
31. Амелин В. Г. Фенолкарбоновые кислоты трифенилметанового ряда, иммобилизованные на тканях из искусственных и натуральных волокон, для тест-определения алюминия, бериллия и катионных ПАВ / В. Г. Амелин, О. Б. Ганькова // Журн. аналит. химии. – 2007. – Т. 62, № 3. – С. 318–323.
32. Аналитические возможности ксерогелей на основе опоки и силикатного клея с иммобилизованным хромазуолом S / Р. К. Чернова, Л. М. Козлова, И. В. Мызникова, Ю. Г. Чуднова // Журн. аналит. химии. – 2004. – Т. 59, № 5. – С. 475–479.
33. Пат. на корисну модель 64666 Україна. Спосіб визначення алюмінію(III) в водних середовищах з еріохромціаніном-R, іммобілізованим в желатиновій плівці / О. А. Решетняк, Н. В. Івченко, В. М. Шевченко, Н. А. Нікітіна. – № U 2011 05606, заявл. 04.05.2011, опубл. 10.11.2011, Бюл. № 2.
34. Индикаторные пленки на основе желатинового геля для определения Co(II), Cu(II), Pb(II), Cd(II), Ni(II), Zn(II), Fe(III), Al(III), Ba(II), Sr(II) и SO₄²⁻ / Е. А. Решетняк, Н. В. Ивченко, Н. А. Никитина, Т. Б. Починок // Методы и объекты химического анализа. – 2012. – Т. 7, № 4. – С. 192–201.

Поступила в редакцію 15.04.2014 г.

РЕЗЮМЕ

Запропоновано оптично прозорий твердофазний аналітичний реагент для фотометричного і візуально-тестового визначення алюмінію(III) у водних середовищах. Індикаторна плівка отримана шляхом фізичної іммобілізації металоіндикатору еріохромціаніну R у желатиновому шарі фотоплівки. Показано, що індикаторну реакцію необхідно проводити при рН 5,5 у присутності катіонної ПАР цетилпіридиній хлориду. Встановлено склад продукту реакції і оцінені кількісні характеристики процесу комплексоутворення в гетерогенній системі вода/желатинова плівка: ступінь вилучення і коефіцієнт розподілу Al(III) між фазами, умовна константа стійкості комплексу. Оцінені метрологічні характеристики фотометричного і візуального визначення Al(III) з використанням запропонованого твердофазного реагенту.

Ключові слова: алюміній(III), желатинова плівка, еріохромціанін R, іммобілізація, твердофазний аналітичний реагент, фотометрія, візуальна колориметрія.

SUMMARY

The optical transparent solid-phase complexing reagents are recommended for the photometric and visual-test determination of Al(III) in water media. Indicator film is obtained by the physical immobilization of indicator eriochromecyanine R in gelatin layers of photographic film. It is shown that the indicator reaction should be conducted at pH 5.5 in the presence of cationic surfactants cetylpyridinium chloride. The composition of the reaction product and quantitative characteristics of the complexation process were determined in a heterogeneous system water/gelatin film: the degree of extraction and Al(III) distribution coefficient between the phases, the conditional stability constant of the complex. The metrological characteristics for photometric and visual determination of aluminium(III) using recommended solid-phase reagents were estimated.

Keywords: aluminium(III), gelatin film, eriochromecyanine R, solid-phase analytical reagent, immobilization, photometry, visual colorimetry.

УДК 541.132.4+541.135+541.8

В. В. Стецик

ПРИНЦИПЫ КЛАССИФИКАЦИИ КИСЛОТ И ОСНОВАНИЙ ПО СИЛЕ

С учетом значений степени электролитической диссоциации кислот или оснований Бренстеда- Лоури в 0,1 М растворах и при $C \rightarrow 0$ предложена их классификация по силе на семь или четыре группы. Критерии принадлежности кислот (оснований) к группам по силе выражаются через соотношения констант кислотности (основности) и констант автопротолиза K_{SH} . В крайние группы наиболее сильных и наиболее слабых выделено кислоты (основания), достигающие практически предельной диссоциации уже при больших концентрациях.

Ключевые слова: сила кислот и оснований, классификация кислот, классификация оснований.

Введение. Классификация предметов и явлений является важной составной частью всех разделов науки. Рациональная классификация электролитов по силе позволяет предвидеть некоторые важные их свойства без специального изучения их индивидуальных особенностей. А классификация, проведенная на основе новых теоретических представлений, способна в какой-то мере изменять представления о поведении электролитов.

Применение классификации может принести практическую пользу лишь в случае, если классификация и принципы ее построения достаточно общепризнаны. А для такого признания недостаточно одной договоренности. Надо, чтобы выделяемые группы электролитов имели настолько значимые количественные различия некоторых свойств (например, степени диссоциации при определенных условиях), что они уже переходят в новые качества. Существующая на сегодня классификация электролитов не удовлетворяет предъявляемым требованиям, покажем это конкретнее.

Различные авторы в литературе подразделяют электролиты по силе на различное количество групп: обычно от двух [1, 2] до пяти [3, 4]. Критерии принадлежности к одним и тем же группам варьируют весьма свободно. Так, к сильным в водных растворах относят электролиты с показателем константы диссоциации pK до 4,5 [3, 4] и в то же время с константой диссоциации $K = \infty$ [5]. Одни авторы приписывают для электролитов средней силы [4] диапазон $pK = 4,5 \div 9,0$, другие [3] тот же диапазон pK указывают для слабых электролитов. Ортофосфорную кислоту и гидросульфат-ион некоторые авторы относят к слабым кислотам [6], хотя чаще им приписывают среднюю силу [7]. Авторы работы [8] при достаточно детальной классификации (на 5 групп) группу средней силы вообще не выделяют, называя «сильными» кислоты и основания, традиционно причисляемые к средним по силе. Имели место попытки при делении на группы по силе в неводных растворителях применять к кислотам одни критерии, а к основаниям – совсем другие [9]. Приведенный далеко не полный перечень разногласий свидетельствует об отсутствии на сегодня достаточно обоснованной и общепризнанной классификации электролитов по силе.

Разное деление на группы в предлагаемых авторами в литературе системах классификации частично объясняется различной степенью детализации при таком делении с соблюдением единых принципов, что при определенных условиях оправдано, но в ряде случаев причина состоит в применении явно противоречивых принципов. Приведенные примеры свидетельствуют о потребности в дополнительном обосновании деления электролитов на группы для упорядочения этого деления и повышения уровня взаимопонимания в вопросах классификации.

В описанных в литературе системах классификации электролитов не учтены принципиальные отличия кислот и оснований при больших разбавлениях от других электролитов. Эти особенности отражены, например, в работах [10–13]. Из них следует, что классификация по силе кислот и оснований, с одной стороны, и общая классификация по силе электролитов, с другой стороны, это разные, хотя в определенной мере и близкие задачи. Приведенная в большинстве работ классификация электролитов относится только к водным растворам и лишь в отдельных – к протолитическим растворителям вообще [14].

В настоящей работе предпринята попытка дополнительного обоснования деления кислот и оснований на группы по силе с учетом принципиальных отличий кислот и оснований, проявляющихся при очень большом и бесконечном разбавлении растворов. Учетом этих особенностей, приведенных в работах [10–13], данная статья отличается от других опубликованных работ по классификации электролитов по силе. При делении кислот и оснований на группы по силе основываемся на сложившихся традициях в тех случаях, когда они общепризнаны и достаточно обоснованы. Результаты относятся к нейтральным или заряженным кислотам и основаниям Бренстеда как в водных растворах, так и в растворах других протолитических растворителей с близкими константами автопротолиза, а также в смесях таких растворителей.

Теоретическая часть. Анализ состояния вопроса и типа разногласий в литературе говорит о том, что никакая система классификации кислот и оснований по силе, предусматривающая единственный

вариант деления на группы, не сможет удовлетворить все слои пользователей этой системы, принципиально различающиеся как уровнем подготовки в вопросах теории электролитической диссоциации, так и требованиями к детализации деления на группы. На сегодня актуально создание в определенной мере гибкой системы классификации, построенной на единых принципах и позволяющей объединять или дополнительно выделять группы в зависимости от потребности показать в явном виде отличительные особенности этих групп. Наиболее подробная классификация кислот и оснований должна содержать столько групп, сколько значительных скачков выявляется в зависимости свойств, определяющих силу кислоты или основания, от констант кислотности или основности во всем диапазоне их возможных значений. Наиболее подробный вариант должен учитывать в виде отдельной группы и область, переходную к соединениям, уже практически не обладающим кислотными или основными свойствами.

Силу кислоты или основания оценивали в основном в зависимости от их степени диссоциации или сольволиза



в 0,1 М растворе и при бесконечном разбавлении, определяемым из закона разбавления Оствальда и по формуле [10, 12]

$$\alpha_0 = K / (K + \sqrt{K_{SH}}). \quad (1)$$

В этих и последующих формулах фигурируют реальные (концентрационные) константы кислотности или основности (диссоциации или сольволиза), зависящие также от присутствия индифферентных электролитов и связанные известными соотношениями со степенью электролитической диссоциации. Исходим из того, что в случае многоступенчатых диссоциации или сольволиза сила кислоты (основания) определяется первой ступенью процесса, как наиболее выраженной.

Дополнительные возможности для деления кислот и оснований по силе дает учет концентрации C' , при которой с разведением достигается практически предельное значение степени диссоциации:

$$\alpha' = \alpha_0(1 - \delta). \quad (2)$$

Численное значение величины δ , характеризующей степень приближения практически предельной α' к предельной α_0 степени диссоциации, в данной ситуации можно принять равным 0,01, что соответствует точности достаточно точных расчетов ионных равновесий. Зависимость концентрации C' от константы кислотности или основности (при $\delta = 0,01$) приведена на рис. 1 и была рассчитана по формуле [10, 11]:

$$C' = \frac{K(1 - \alpha')}{(\alpha')^2} - \frac{K_{SH}}{K(1 - \alpha')}. \quad (3)$$

Из рис. 1 видно, что для указанных растворителей (константы автопротолиза взяты из работы [15]) рассматриваемая зависимость для кислот и оснований средней силы сближается, а для сильных – совпадает. Зависимость проходит через минимум при $K \approx \sqrt{K_{SH}}$, точность выполнения этого равенства повышается с уменьшением δ . Независимо от того, что в области высоких концентраций точность выполнения закона действующих масс уменьшается (по концентрационной шкале), сам характер зависимости приведенный рисунок выражает правильно (вопрос о растворах настолько концентрированных, что в них состояние растворенного вещества существенно отличается от состояния в разбавленных растворах, здесь не затрагивается).

Для наиболее слабых из приведенных на рисунке (K меньше K_{SH} на несколько порядков) и наиболее сильных (K больше единицы на несколько порядков) кислот и оснований Бренстеда практически предельная степень диссоциации α' достигается уже в области весьма значительных концентраций, то есть при любых концентрациях в отношении степени диссоциации они находятся в растворах только в состоянии, практически соответствующем бесконечному разведению. Эта отличительная особенность позволяет выделить очень сильные (K больше единицы на несколько порядков) и самые слабые (K меньше K_{SH} на несколько порядков) кислоты или основания в отдельные группы. Можно принять, что ничтожная

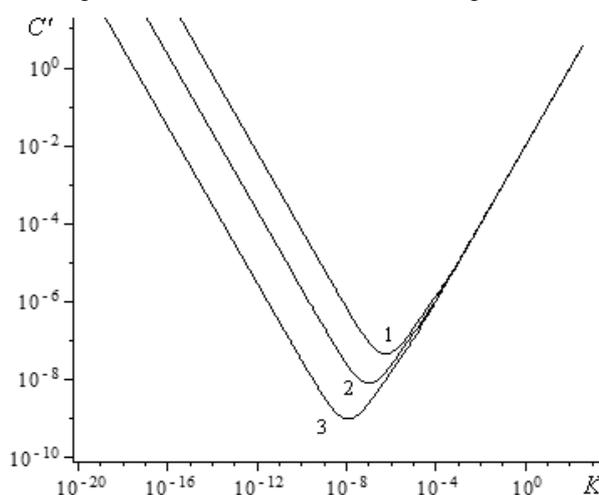


Рис. 1. Зависимость концентрации C' (моль/л), при которой достигается практически предельная степень диссоциации кислот или оснований Бренстеда, от констант кислотности (основности) K (моль/л) в логарифмических координатах в растворителях: 1 – фтороводород ($pK_{SH} = 12,5$ при 0°C); 2 – вода ($pK_{SH} = 14,00$); 3 – этиленгликоль ($pK_{SH} = 15,84$)

по величине диссоциация и вместе с тем практическая независимость степени диссоциации от концентрации во всем ее диапазоне при $K \ll K_{SH}$ – это и есть важнейшая отличительная особенность соединений, уже «практически не обладающих кислотно-основными свойствами». Отметим, что в литературе [4, 16] приводятся критерии принадлежности к крайним группам (в их системе классификации) в водных растворах $pK < -1,74$ и $pK > 15,74$, близкие к предлагаемым.

Перспективным для разграничения групп нам представляется также сравнение концентрации продуктов диссоциации растворенного вещества с концентрацией ионов растворителя, равной $\sqrt{K_{SH}}$. По системе подробной классификации к группе «чрезвычайно слабых» ($K < K_{SH}$) относятся кислоты и основания, создающие, в отличие от более сильных кислот и оснований, ионы в концентрации, меньшей концентрации ионов растворителя (при $C = 1$ М).

Некоторые авторы при делении на группы указывают одновременно силу сопряженных кислоты и основания [3, 16]. Здесь это не делается, поскольку силу сопряженной кислоты (основания) можно быстро оценить с помощью известного соотношения:

$$pK_a + pK_b = pK_{SH}.$$

На основе указанных соображений нами проведено деление кислот и оснований Бренстеда по силе. Критерии принадлежности к группам по силе выражены через константы кислотности (основности) соединений и константы автопротолиза чистых или смешанных растворителей. Смеси протолитических растворителей характеризуются константами автопротолиза, определяемыми, например, из кривых кислотно-основного потенциометрического титрования. В константу автопротолиза данного смешанного растворителя входят суммы ионов лиония и лиата нескольких видов, но основные соотношения остаются такими же, как для чистых растворителей [17].

Одной из главных причин в наметившихся в литературе заметных разногласиях в определении границ сильных электролитов является нечеткое разграничение понятий ионизации и электролитической диссоциации. Только диссоциацией определяется концентрация ионов (сольватированных) как кинетически независимых частиц, они и обуславливают те свойства электролитов, которые являются их атрибутом и, прежде всего, электропроводность. Различие в понятиях ионизации и электролитической диссоциации конкретно учтено в единой схеме диссоциации электролитов Н.А. Измайлова [5, 18]. Наиболее приемлемый подход к определению «сильных» электролитов без абсолютизации их свойств, по мнению ряда авторов, состоит в выполнении условия: в 0,1 М растворе они находятся в основном в диссоциированном состоянии, то есть $\alpha > 0,9$, что достигается при $K > 1$ [14]. А нередко приводимое в литературе положение о практически полной диссоциации «сильных» кислот и оснований при любых концентрациях [1,8] следует относить только к более сильной их части, которую при подробной классификации целесообразно выделить в отдельную группу «очень сильных».

Дополнительные обоснования деления на группы базируются на анализе формулы (1): при $K \gg \sqrt{K_{SH}}$ предельная степень электролитической диссоциации $\alpha_0 \approx 1$ – это одно из важнейших отличительных свойств кислот и оснований средней силы, при $K \ll \sqrt{K_{SH}}$ малодиссоциированы при бесконечном разведении – «очень слабые» (если $K > K_{SH}$), а в промежутке между ними просто «слабые» – при соизмеримых значениях K и $\sqrt{K_{SH}}$ или сравнительно умеренном различии между ними. На основе изложенных принципов составлена подробная система классификации кислот и оснований по силе, представленная в табл. 1. В таблице под «степенью диссоциации» подразумевается также и степень сольволиза ионов. Подобная терминология применяется в работе [2].

Для большей определенности при использовании системой классификации, представленной в табл. 1, желательно конкретизировать смысл операторов «намного больше», «намного меньше» и других в соотношениях, чтобы уточнить численные соотношения сравниваемых при этом величин. Предлагается диапазон для кислот (оснований) средней силы обозначить через показатели констант: $0 < pK < a \cdot pK_{SH}$. Численное значение коэффициента a из приведенных соображений известно только приближенно. Чтобы уменьшить элемент неопределенности, подберем такое значение a , чтобы в указанный диапазон попали кислоты и основания, традиционно причисляемые к средним по силе. Аналогичный подход применяем и к другим группам кислот (оснований). Поскольку указанные коэффициенты окончательно уточняются эмпирически, они могут выражаться «некруглыми» числами. Найденные таким образом ориентировочные границы трех групп в системе подробной классификации кислот и оснований: средней силы – $0 < pK < 0,26pK_{SH}$, слабые – $0,26pK_{SH} < pK < 0,66pK_{SH}$, очень слабые – $0,66pK_{SH} < pK < pK_{SH}$. Приведенные здесь диапазоны нахождения групп с численными коэффициентами применимы к растворителям с pK_{SH} , близким к 14. Групповой принадлежностью определяются и

Таблиця 1

Подробная классификация кислот и оснований Бренстеда по силе в воде и других протолитических растворителях с близкими значениями констант автопротолиза

Группы кислот и оснований по силе	Отличительные особенности групп	Критерии принадлежности к группам
I. Очень сильные	Практически полная кислотная или основная диссоциация достигается уже в диапазоне больших концентраций.	$K \gg 1$
II. Сильные	$\alpha > 0,9$ в 0,1 М растворах. pH уже практически не изменяется с понижением pK ниже 0. Практически предельная диссоциация достигается уже в области рабочих (разбавленных) растворов.	$K > 1$
III. Средней силы	Частично диссоциируют в 0,1 М растворах ($0,03 < \alpha < 0,9$), практически полностью диссоциируют при $C \rightarrow 0$. Незаряженные кислоты и основания еще подчиняются (приближенно) закону аддитивности электропроводности при $C \rightarrow 0$.	$1 > K \gg \sqrt{K_{SH}}$
IV. Слабые	Малодиссоциированы в 0,1 М растворах, частично диссоциированы при $C \rightarrow 0$. Незаряженные кислоты и основания уже не подчиняются закону аддитивности электропроводности при $C \rightarrow 0$.	K и $\sqrt{K_{SH}}$ соизмеримы или различаются не очень сильно
V. Очень слабые	Практически не диссоциированы в 0,1 М растворах, малодиссоциированы при $C \rightarrow 0$ ($\alpha_0 \ll 1$).	$\sqrt{K_{SH}} \gg K > K_{SH}$
VI. Чрезвычайно слабые	Практически не диссоциированы даже при $C \rightarrow 0$. Предел диссоциации достигается в области разбавленных растворов. pH 0,1 М раствора не изменяется при увеличении pK выше pK_{SH} . В 1 М растворах концентрация продуктов диссоциации $< \sqrt{K_{SH}}$.	$K < K_{SH}$
VII. Практически не обладающие кислотно-основными свойствами или граничащие с ними	Кислотно-основная диссоциация практически отсутствует даже при $C \rightarrow 0$. Практически предельная диссоциация достигается уже в области больших концентраций.	$K \ll K_{SH}$

некоторые физико-химические закономерности. Так, закон Кольрауша аддитивности электропроводности при бесконечном разбавлении достаточно точно выполняется для нейтральных кислот HA и оснований только I, II и III групп, то есть при выполнении условия $K \gg \sqrt{K_{SH}}$ [11].

Приведенная классификация более обоснована по сравнению с применяемыми в настоящее время. Можно предположить, что она более приемлема для специалистов, тесно соприкасающихся с теорией электролитической диссоциации и смежными вопросами. Но во многих случаях для широкого применения больше подойдет менее подробная классификация. Подробная классификация, приведенная в табл. 1, является базовой при создании менее подробной классификации путем сокращения количества групп. Некоторые группы, например, шестая и седьмая в случае менее подробной классификации могут быть объединены. Во многих случаях (в том числе в ряде вузовских курсов химии) в качестве рабочей может служить классификация, состоящая из четырех групп: сильные, средней силы, слабые и очень слабые. Отметим, что без четвертой группы классификация будет явно неполной, поскольку не будет представлено в явном виде принципиальное отличие группы «очень слабых» (малодиссоциированы при $C \rightarrow 0$). При потребности показать в явном виде отличительные особенности дополнительных групп они могут быть выделены отдельно. Так, из группы «очень слабых» могут быть выделены в отдельную группу «чрезвычайно слабые», из группы «сильных» – «очень сильные» и т. д. Считается, что при проведении указанных операций выделения дополнительных групп границы между соответствующими группами, принятые в подробной классификации, не должны изменяться, поскольку они имеют обоснование, а при объединении групп некоторые границы становятся внутренними и не актуальны.

Заключение. Предложенная система классификации является гибкой и позволяет делить кислоты и основания Бренстеда в зависимости от потребности в детализации на различное число групп по силе на основе обоснованных единых принципов. Разумеется как и все предыдущие, является приближенной, некоторые «пограничные» соединения с равными основаниями можно отнести к любой из двух соседних групп. В пределах предлагаемой концепции возможны и другие варианты решения некоторых частных вопросов, например, об ограничении диапазона нахождения некоторых групп в середине табл. 1 (подробной классификации) с одной или двух сторон. Не исключается, что в будущем предложенные численные значения полуэмпирических коэффициентов могут уточняться. Но это не меняет суть предлагаемого подхода. Предлагаемые дополнительные обоснования приведут к конкретизации представлений об отличительных особенностях групп и большей определенности при отнесении кислот и оснований Бренстеда к группам по силе.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Электрохимия / Ф. Миомандр, С. Садки, П. Одебер, Р. Меалле-Рено. – М.: Техносфера, 2008. – 360 с.
2. Кристиан Г. Аналитическая химия: в 2 т. Т.1 / Г. Кристиан. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 623 с.
3. Ляликов Ю. С. Теоретические основы современного качественного анализа / Ю. С. Ляликов, Ю. А. Клячко. – М.: Химия, 1978. – 312 с.
4. Пономарев В. Д. Аналитическая химия: в 2 ч. Ч.1 / В. Д. Пономарев. – М.: Высш. школа, 1982. – 304 с.
5. Измайлов Н. А. Электрохимия растворов / Н. А. Измайлов. – М.: Химия, 1966. – 575 с.
6. Дикерсон Р. Основные законы химии: в 2 т. Т. 1 / Р. Дикерсон, Г. Грей, Д. Хейт. – М.: Мир, 1982. – 652 с.
7. Карапетьянц М. Х. Общая и неорганическая химия / М. Х. Карапетьянц, С. И. Дракин. – М.: Химия, 2000. – 592 с.
8. Аналитическая химия. Проблемы и подходы: в 2 т. Т. 1 / Под ред. Р. Кельнера, Ж.-М. Мерме, М. Отто, М. Видмера. – М.: Мир: ООО «Издательство АСТ», 2004. – 608 с.
9. Денеш И. Титрование в неводных средах / И. Денеш. – М.: Мир, 1971. – 413 с.
10. Коренман И. М. Аналитическая химия малых концентраций / И. М. Коренман. – М.: Химия, 1967. – 168 с.
11. Стецик В. В. Концентрації практично граничного ступеня електролітичної дисоціації кислот та основ у розчинниках з автопротолізом / В. В. Стецик // Український хіміч. журн. – 2010. – Т. 76, № 6. – С. 93–97.
12. Стецик В. В. Про інформативну роль деяких співвідношень між константами іонних рівноваг / В.В. Стецик // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2011. – № 2. – С. 128–131.
13. Химическое равновесие / В. А. Михайлов, О. В. Сорокина, Е. В. Савинкина, М. Н. Давыдова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 197 с.
14. Основы аналитической химии: в 2 кн. Кн. 1 / Ю. А. Золотов, Е. Н. Дорохова, В. И. Фадеева и др.; Под ред. Ю. А. Золотова. – М.: Высш. школа, 2004. – 360 с.
15. Райхардт К. Растворители и эффекты среды в органической химии / К. Райхардт. – М.: Мир, 1991. – 763 с.
16. Отто М. Современные методы аналитической химии / М. Отто. – М.: Техносфера, 2006. – 544 с.
17. Фиалков Ю. Я. Растворитель как средство управления химическим процессом / Ю. Я. Фиалков. – Л.: Химия, 1990. – 240 с.
18. Мискиджян С. П. Введение в современную теорию кислот и оснований / С. П. Мискиджян, А. Д. Гарновский. – К.: Вища школа, 1979. – 153 с.

Поступила в редакцію 27.01.2014 г.

РЕЗЮМЕ

З врахуванням значень ступеня електролітичної дисоціації кислот або основ Бренстеда- Лоурі в 0,1 М розчинах та при $C \rightarrow 0$ запропонована їх класифікація за силою на сім або чотири групи. Критерії приналежності кислот (основ) до груп за силою виражаються через співвідношення констант кислотності (основності) та констант автопротолізу K_{SH} . В крайні групи найбільш сильних й найбільш слабких виділено кислоти (основи), що досягають практично граничної дисоціації уже при великих концентраціях.

Ключові слова: сила кислот і основ, класифікація кислот, класифікація основ.

SUMMARY

The classification of Brensted-Louri acids and bases containing seven or four groups considering their electrolytic dissociation degree in 0,1 M while $C \rightarrow 0$ was proposed. Criteria for belonging to the groups of acids (bases) express in terms of the ratio of constants of acidity (basicity) and autoprotolysis constants K_{SH} . In extreme groups, containing the strongest and the weakest acids (bases), they have almost extreme dissociation in high concentrations.

Keywords: the strength of acids and bases, classification of acids, classification of bases.

УДК 504:579.22:574.63

І. Ю. Аревадзе

ВПЛИВ ДЕЯКИХ ІОНІВ МЕТАЛІВ НА БАКТЕРІАЛЬНУ ОЧИСТКУ ТЕХНОГЕННИХ СТІЧНИХ ВОД З ВИКОРИСТАННЯМ УФ-ВИПРОМІНЮВАННЯ

Приведено результати досліджень бактерицидної активності УФ-випромінювання індивідуально та в поєднанні з іонами деяких металів (Cu^{2+} , Ag^+ , Zn^{2+}), що містяться в стічних шахтних водах та проявляють власну бактерицидну активність. В експериментах використовували суспензію культури санітарно-показного мікроорганізму *E. coli*. Показано, що присутність іонів металів дозволяє економити енергоресурси (за рахунок зниження дози ультрафіолету), досягти більш глибокого рівня знезараження та подовжити бактерицидну дію УФ-променів.

Ключові слова: мікроорганізм, бактерицидна активність, УФ-випромінювання, іони металів, шахтні води.

Вступ. В техногенних регіонах з дефіцитом питної води актуальною є задача використання підземних мінералізованих вод для побутових та комунальних потреб після попереднього очищення [1, 2]. Одним з ефективних та екологічно чистих способів очищення підземних вод є УФ-знезараження [3], яке використовується в тому числі і в побутових фільтрах. Однак хімічний склад води впливає на дію УФ-променів на мікроорганізми внаслідок процесів фотокаталізу, вибіркового поглинання променів з різною довжиною хвилі та ін. [4]. Відомо також, що ряд іонів, що містяться в підземних шахтних водах, самі володіють вираженою бактерицидною активністю. Метою даної роботи є дослідження впливу іонного складу хлоридно-сульфатно-гідрокарбонатної стічної шахтної води на бактерицидну активність УФ-випромінювання.

Експериментальна частина. Природна вода є середою життєдіяльності різноманітних мікроорганізмів – вірусів, бактерій та простіших, які представляють собою небезпеку для людини. Небезпечними, перш за все, є бактерії групи *E. coli*, які з водних джерел попадають в організм людини. Вибір цього мікроорганізму в якості індикатора забруднення природної, питної та стічної вод обумовлено якісним та кількісним обліком кишкової палички що виконується відносно легко та швидко, не потребує дефіцитних, коштовних матеріалів та обладнання. Зафіксована в процесі досліджень загибель *E. coli* означає загибель і інших хворобливих мікроорганізмів [5, 6]. Чисельність кишкових паличок в воді є вираженням колі-індексу, який представляє собою число вказаних клітин в 1 літрі води. В експериментах використовували суспензію культури санітарно-показного мікроорганізму *E. coli-1257* зі стандартною щільністю 10^8 кл/см³. Для приготування робочих розчинів з необхідною концентрацією мікроорганізмів суспензію розбавляли відповідним об'ємом бідистильованої води, стерильної водопровідної, фізіологічного розчину (0,9% хлорид натрію в дистильованій воді) або (при необхідності) використовували модельний розчин деяких хімічних речовин в бідистильованій воді. Попередньо встановлювали, що протягом всього часу експерименту бактеріальні клітини, що суспендовані в бідистильованій воді, зберігали свою життєздатність. Дослідження бактерицидної активності УФ-випромінювання проводили на експериментальній установці в мікробіологічній лабораторії Держсанепідслужби України в м. Донецьку. З метою вивчення бактерицидного впливу УФ-випромінювання суспензію мікроорганізмів *E. coli* в об'ємі 40 см³ вносили в чашки Петрі діаметром 9 см. Товщина опромінювального шару складала 1 см. Суспензію опромінювали УФ-променям від бактерицидної лампи ДБ-15 на відстані 45–100 см від поверхні шару. Інтенсивність випромінювання, яку було виміряно ферриоксалатним методом [7], складала 0,027 мДж (см²·с). Для визначення ступеню поглинання УФ-випромінювання приготовленими розчинами в досліджуваному спектральному діапазоні оптичну густину вимірювали при $\lambda=254$ нм на спектрофотометрі СФ-16 у сантиметровому шарі. Як показали розрахунки, послабленість інтенсивності світла при даній товщині шару води було незначним (біля 4 %).

Кількість мікроорганізмів, що вижили, визначали оптичним методом по числу КСО (колонії створених одиниць) на середовищі Ендо через 24 години інкубації при 37 °С. Для підрахунку клітин застосовували метод мембранних фільтрів. Долю клітин, що вижили, встановлювали за логарифмом відношення $\lg N_t/N_0$, де N_t – число бактерій, що вижили, а N_0 – вихідна кількість, що містилась в розчині. Досліди проводили у 3–6 кратній повторності і отримані результати в подальшому обробляли математично.

Аналіз результатів. Раніше було встановлено, що присутні у модельній шахтній воді індивідуальні макроіони Na^+ , Cl^- , SO_4^{2-} , HCO_3^- не оказують помітного впливу на бактерицидний ефект УФ-випромінювання. Попередньо вивчали дію УФ-променів на життєздатність кишкової палички в фізіологічно-

му ізотонічному розчині (0,9% розчин NaCl в бідистильованій воді), водопровідній воді та інфікованому модельному розчині (шахтна вода). На основі попередньо стерилізованої стічної води шахти ім. Абакумова, приготовленої розчиненням в бідистильованій воді солей NaCl, Na₂SO₄, NaHCO₃ до концентрації (мг/л): 700 Cl⁻, 1500 SO₄²⁻, 500 HCO₃⁻. В отриманий розчин вводили бактерії *E. coli*, після чого проби інфікованого розчину опромінювали дозами 5; 10; 15; 20; 25 мДж/см² при постійній температурі 22 °С.

Як видно з рис. 1, антимікробний вплив УФ-променів в фізіологічному розчині сильніше, ніж у водопровідній воді, ця різниця зростає зі збільшенням дози випромінювання.

Попередні дослідження показали, що бактерицидна активність УФ-променів знижується при збільшенні концентрації досліджуваних іонів у природній воді. Це слід враховувати при реалізації УФ-знезараження вод різного складу, особливо з підземних джерел. В нашому випадку повне знезараження досягалося: для фізіологічного розчину при дозі 17 мДж/см², для інфікованої водопровідної води при 20 мДж/см², для модельного розчину при 25 мДж/см².

Досліджено вплив рН на індивідуальну бактерицидну активність УФ-променів, а також модельних іонів міді і срібла, які часто містяться у шахтних водах [8] і мають високу бактерицидну активність. Згідно [9] зниження рН на одиницю подовжує час відмирання бактерій в природній воді в 1,6 рази. Залежність бактерицидного ефекту іонів срібла Ag⁺, міді Cu²⁺ від рН ілюструють дані рис. 2. Відмічається значний вплив величини рН на бактерицидну активність іонів срібла(I) та міді(II) в інтервалі від 3 до 6 одиниць, після чого зростання рН незначною мірою впливає на антибактеріальні властивості вказаних катіонів.

Вивчення впливу рН на бактерицидну активність УФ-променів проводили при дозах 2 і 16 мДж/см². Шляхом введення в бідистильовану воду відомих кількостей стандартних розчинів HCl та NaOH отримували потрібне значення рН. Вхідна кількість мікроорганізмів складала 10⁵ кл/см³, температура 19±0,1 °С. Результати представлені на рис. 2 (криві 3 і 4). Отримані дані свідчать, що зміна рН води в широкому діапазоні не оказує помітного впливу на бактерицидні властивості УФ-променів ні при малих (крива 3), ні при великих (крива 4) дозах.

Особливу увагу слід звернути на підвищення антибактеріальної стійкості води, що підверглася УФ-обробці. Відомо, що після припинення УФ-опромінювання вода знов легко може забруднюватися у розподільних сітках і тому посилення бактерицидного впливу УФ-опромінювання є актуальною проблемою. Нами наведені результати досліджень по пролонгації бактерицидної активності УФ-опромінювання води за допомогою поєднання з дезінфектантами іонної природи, які можуть знаходитися в шахтних водах. Для дослідів була взята попередньо простерилізована кип'ятінням стічна вода шахти ім. Абакумова, в яку було внесено санітарно-показникові мікроорганізми *E. coli* в кількості 10⁴ кл/см³. Дією УФ-опромінювання (дозою 20 мДж/см²) вода була доведена до санітарно-безпечного стану (колі-індекс ≤3). Надалі проби води були перенесені в 2 чашки Петрі, одна оставалась на контролі, а в другу внесено розчин Ag₂SO₄ з концентрацією 0,01 мг Ag⁺/л. Проби води витримувались при температурі 20±1 °С в умовах прямого контакту з атмосферним повітрям та аналізувались на вміст мікроорганізмів через кожну добу. Результати представлені на рис. 3.

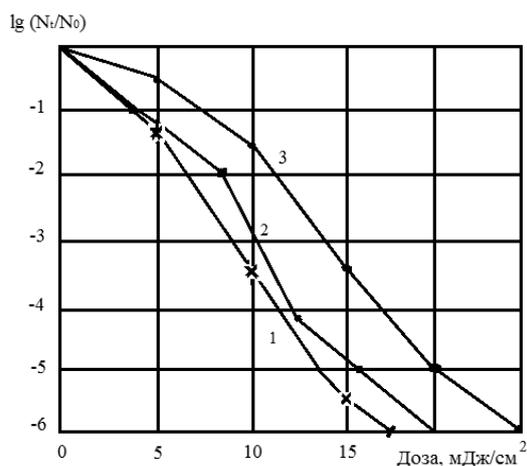


Рис. 1. Бактерицидний вплив УФ-випромінювання на *E. coli* (10⁶ кл/см³): 1 – в фізіологічному розчині; 2 – в водопровідній воді; 3 – в інфікованому модельному розчині шахтної води

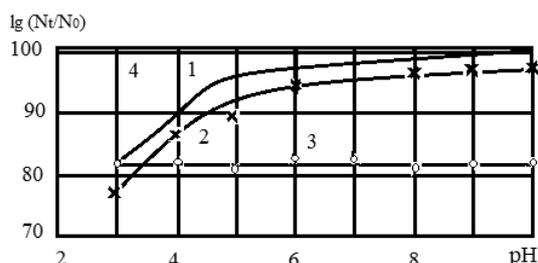


Рис. 2. Вплив рН на бактерицидний ефект з використанням: 1 – Ag⁺; 2 – Cu²⁺; 3 – УФ-променів (2 мДж/см²); 4 – УФ-променів (16 мДж/см²)

Особливу увагу слід звернути на підвищення антибактеріальної стійкості води, що підверглася УФ-обробці. Відомо, що після припинення УФ-опромінювання вода знов легко може забруднюватися у розподільних сітках і тому посилення бактерицидного впливу УФ-опромінювання є актуальною проблемою. Нами наведені результати досліджень по пролонгації бактерицидної активності УФ-опромінювання води за допомогою поєднання з дезінфектантами іонної природи, які можуть знаходитися в шахтних водах. Для дослідів була взята попередньо простерилізована кип'ятінням стічна вода шахти ім. Абакумова, в яку було внесено санітарно-показникові мікроорганізми *E. coli* в кількості 10⁴ кл/см³. Дією УФ-опромінювання (дозою 20 мДж/см²) вода була доведена до санітарно-безпечного стану (колі-індекс ≤3). Надалі проби води були перенесені в 2 чашки Петрі, одна оставалась на контролі, а в другу внесено розчин Ag₂SO₄ з концентрацією 0,01 мг Ag⁺/л. Проби води витримувались при температурі 20±1 °С в умовах прямого контакту з атмосферним повітрям та аналізувались на вміст мікроорганізмів через кожну добу. Результати представлені на рис. 3.

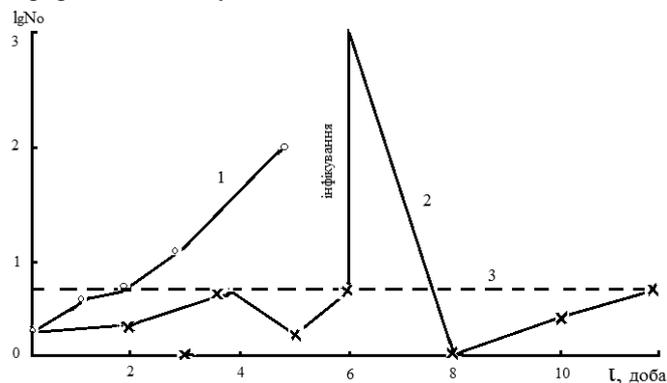


Рис. 3. Бактеріальна стійкість води за часом: 1 – після тільки УФ-опромінювання; 2 – містить іони Ag⁺ (попередня УФ-обробка); 3 – санітарно-безпечна вода

З отриманих даних видно, що вода, в яку безпосередньо після обробки УФ-променями введені іони срібла (концентрація суттєво нижче ГДК, рівній 0,025 мг/л), успішно чинила опір повторному бактерицидному забрудненню. Навіть після штучного інфікування води бактеріями *E. coli* ($N_0=10^3$ кл/см³) через дві доби вода залишилась санітарно-безпечною.

Для вивчення спільної дії УФ-опромінення та іонів срібла була проведена окрема серія дослідів. В стерилізовану водопровідну воду вносили *E. coli* з розрахунку 10^6 кл/см³, після чого одну пробу інфікованої води УФ-опромінювали при 20 °С, а другу – дезінфікували іонами срібла (0,025 мг Ag^+ /л) з періодичним відбором на бактеріологічний аналіз. Інші проби інфікованої води спочатку підвергали впливу УФ-променів певною дозою (2; 5; 10; 14; 16 мДж/см²), після чого вимикали УФ-установку та в опромінену воду швидко вводили розчин Ag_2SO_4 в дистильованій воді. Після закінчення контакту проводили визначення мікроорганізмів, що вижили. Результати досліджень представлені на рис. 4 (координата часу построєна для аналізу бактерицидної активності тільки для іонів срібла).

З рис. 4 видно, що послідовне застосування УФ-опромінення та іонів срібла дозволяє різко збільшити глибину знезараження, при цьому є можливість знизити дозу опромінення. Так, значення $lg(N_t/N_0) = -5$, що відповідає зниженню вихідного числа мікроорганізмів у 10^5 раз, досягається при індивідуальному впливу УФ-опромінення дозою 16 мДж/см² (крива 2); аналогічний ефект знезараження спостерігається при суттєво меншій дозі УФ-опромінення (7 мДж/см²), якщо в опромінену воду ввести іони срібла з наступною витримкою 2 години (крива 5).

Представляло інтерес в теоретичному та практичному відношенні вивчення одночасного бактерицидного впливу УФ-опромінення та іонів срібла. Враховуючи більш високу бактерицидну активність УФ-променів в порівнянні з іонами срібла (рис. 4, криві 1 та 2), дану серію дослідів проводили в інтервалі часу, через який не виявлено живих мікроорганізмів. З аналізу отриманих даних (рис. 5) слідує,

що одночасний вплив УФ-променів та іонів срібла на мікроорганізми *E. coli* дозволяє суттєво збільшити кінцеву глибину знезараження. Ефект синергізма, а також гарантія бактерицидної післядії роблять знезараження води в поєднанні дії УФ-променів та іонів срібла (в концентрації нижче ГДК) перспективним для систем водопостачання.

Далі проводили дослідження послідовної дії УФ-опромінення та іонів срібла, але концентрація останніх була знижена до 0,005 мг/л (0,2 ГДК). З отриманих даних (рис. 6) та порівняння з даними рис. 4 видно, що зниження концентрації іонів срібла в 5 раз (з 0,025 до 0,005 мг/л) помітно знижує їх антибактеріальну дію. Рівень знезараження 99,0 % ($lg(N_t/N_0) = -2$) досягається через 45 хвилин, а при 0,005 мг/л через 80 хвилин. Тем не менш, введення вказаної малої кількості Ag^+ в воду або природна присутність їх в воді, яка пройшла

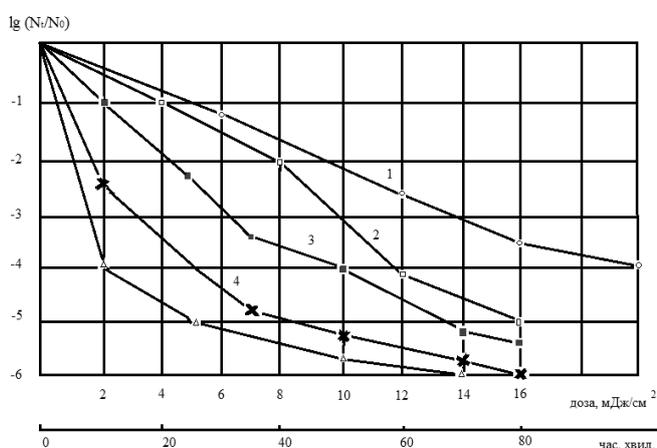


Рис. 4. Ефект знезараження: 1 – іони срібла; 2 – УФ-опромінення дозою 16 мДж/см²; 3 – УФ-опромінення дозою 7 мДж/см²; 4 – УФ-опромінення та іони срібла (спільна дія); 5 – УФ-опромінення та іони срібла з наступною витримкою 2 години

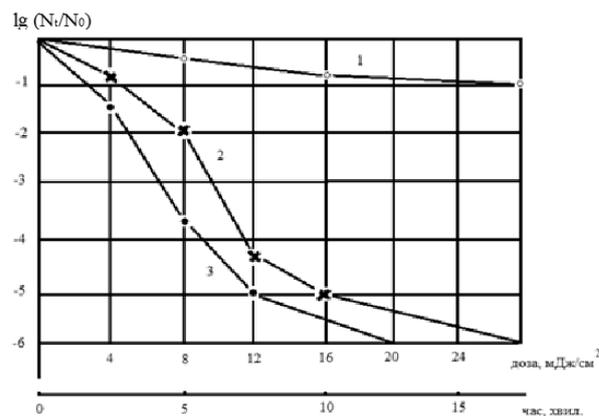


Рис. 5. Ефект знезараження: 1 – іони срібла; 2 – УФ-опромінення; 3 – УФ-опромінення та іони срібла (спільна дія)

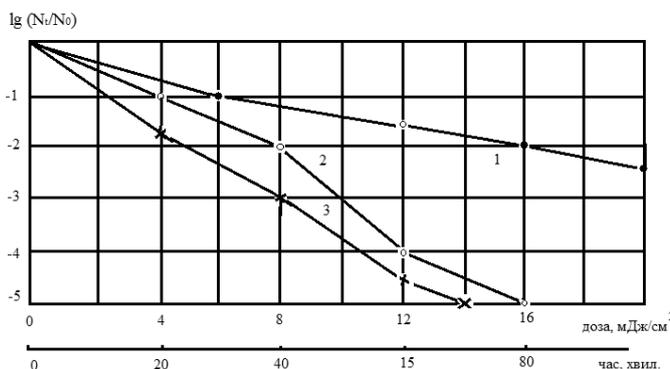


Рис. 6. Бактерицидна дія: 1 – іонів срібла (0,01 мг/л); 2 – УФ-опромінення; 3 – спочатку УФ-опромінення, далі послідовно (після доз 4; 8; 12; 14 мДж/см²) введення 0,01 мг Ag^+ /л з витримкою 2 години

попереднє УФ-опромінення, суттєво збільшує інтегральний рівень знезараження, досягнутий після 2-х годинного контакту зі сріблом. Для отримання 99,9 % ($\lg(N_t/N_0) = -3$) потрібно УФ-знезараження дозою 10 мДж/см², а у випадку послідовного УФ-опромінення з введеним 0,01 мг Ag⁺/л та витримкою протягом 2 годин аналогічний ефект досягається при меншій дозі УФ-опромінення біля 7 мДж/см².

Таким чином, УФ-знезараження стічних шахтних вод, які містять іони срібла на рівні навіть 0,2 ГДК дозволяє економити енергоресурси (за рахунок зниження дози ультрафіолету) та досягти більш глибокого рівня знезараження.

Крім іонів срібла, мінералізована стічна шахтна вода містить інші іоні-бактерициди тривалої дії, які можуть впливати на ефективність УФ-знезараження води. Нами досліджено бактеріальну активність сполук міді(II) та цинку(II). Для дослідів взяли попередньо простерилізовану кип'ятінням стічну воду

шахти ім. Абакумова, в яку були внесені санітарно-показникові мікроорганізми *E. coli* в кількості 10⁴ кл/см³. Дією УФ-опромінення (доза 20 мДж/см²) вода була доведена до санітарно-безпечного стану (колі-індекс ≤3). Надалі проби води були перенесено до 3 чашок Петрі, одна залишалась на контролі, в другу і третю внесено розчин CuSO₄ з концентрацією 1 мг Cu²⁺/л та ZnSO₄ (1 мг Zn²⁺/л). Проби води витримувались при температурі 20±1 °С в умовах прямого контакту з атмосферним повітрям та аналізувались на вміст мікроорганізмів через кожну добу. З отриманих даних (рис. 7) слідує, що вода, в яку безпосередньо після обробки УФ-променями введені іони міді, успішно чинила опір повторному бактеріальному забрудненню навіть через дві доби. Аналогічну закономірність, хоч і в меншому ступені, виявлено по відношенню до води, в яку були введені іони цинку (рис. 8).

Таким чином, присутність у природній воді, яку знезаражують за допомогою УФ-опромінення, іонів міді(II) та цинку(II), що були взяті при концентраціях не нижче відповідних ГДК, усуває один з основних недоліків УФ-знезараження води, а саме – відсутність пролонгованої бактерицидної дії.

Для дослідження комбінованого бактерицидного впливу УФ-опромінення та іонів міді в попередньо стерилізовану водопровідну воду вносили бактерії *E. coli* з розрахунку 10⁵ кл/см³, після чого одну пробу інфікованої води підвергали УФ-опроміненню при 20 °С, а другу впливу іонів міді з CuSO₄ (з розрахунку 0,5 мг Cu²⁺/л) з періодичним відбором на бактеріологічний аналіз. Інші проби інфікованої води спочатку підвергали впливу УФ-променів з дозою 4; 8; 12; 14 мДж/см², після чого в опромінену воду швидко вносили розчин CuSO₄. Після 3 годин проводили визначення числа мікроорганізмів, що вижили. Результати наведені на рис. 9.

Отримані дані свідчать, що при послідовній обробці води УФ-променями та іонами міді(II) можливо досягнення більш глибокого рівня знезараження.

Поєднана дія УФ-променів та іонів цинку (0,5 мг/л) було розглянуто за аналогічною методикою. Результати досліджень представлені на рис. 10.

Отримані дані свідчать, що подібно іонам міді, присутність у воді іонів цинку також сприяє досягненню більш високого ступеню знезараження води у порівнянні з індивідуальною обробкою води тільки УФ-променями. Важливою є обставина, що для досягнення значення $\lg(N_t/N_0) = -5$ потребується доза ульт-

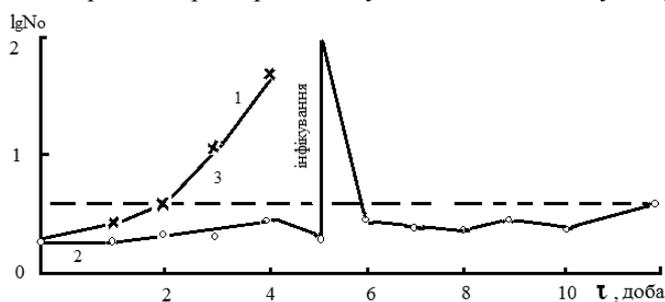


Рис. 7. Бактеріальна стійкість води: 1 – після УФ-опромінення; 2 – містить іони міді Cu²⁺ (попередньо УФ-оброблена); 3 – санітарно-безпечна при коли-індекс ≤3 (N₀ – число мікроорганізмів)

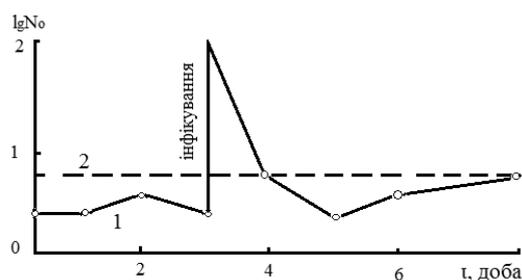


Рис. 8. Бактеріальна стійкість води: 1 – містить іони цинку Zn²⁺ (попередньо УФ-оброблена); 2 – санітарно-безпечна при коли-індекс ≤3.

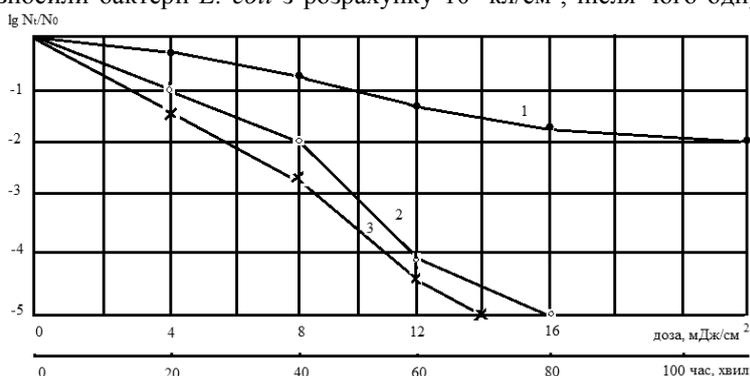


Рис. 9. Бактерицидна дія: 1 – іонів міді(II); 2 – УФ-опромінення; 3 – спочатку УФ-опромінення, далі послідовне (після доз 4; 8; 12; 14 мДж/см²) введення 0,5 мг Cu²⁺/л

рафіолету 16 мДж/см², а в присутності 0,1 мг Zn²⁺/л (0,1 ГДК) – менша доза 14 мДж/см².

Висновки. Встановлено, що при пошуку оптимальних параметрів УФ-знезараження мінералізованих шахтних вод необхідно враховувати наявність іонів, які проявляють власну бактерицидну активність. В результаті вивчення індивідуальної або поєднаної бактерицидної активності іонів срібла(I), міді(II), цинку(II) та УФ-променів встановлено, що при послідовному застосуванні УФ-опромінення та вказаних іонів проявляється синергетичний ефект, а вода набуває здатність до тривалої антибактеріальної стійкості, тим самим усувається основний недолік УФ-знезараження. Присутність іонів срібла та міді в концентраціях нижче ГДК дозволяє знизити (на 10–20 %) дози наступного УФ-опромінення, що потрібно до повного знезараження води, тим самим зменшується рівень енергозатрат та подовжити бактерицидну дію.

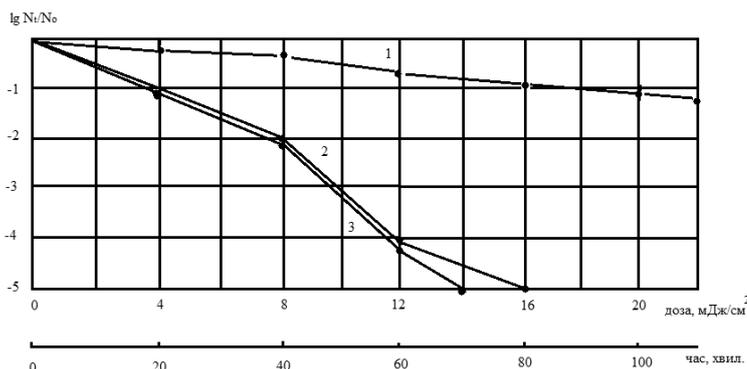


Рис. 10. Бактерицидна дія: 1 – іонів цинку(II); 2 – УФ-опромінення; 3 – спочатку УФ-опромінення, далі послідовне (після доз 4; 8; 12; 14 мДж/см²) введення 0,5 мг Zn²⁺/л

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Использование шахтных вод для технического и хозяйственно-питьевого водоснабжения / В. В. Кульченко, Ю. Н. Резников, В. И. Полтавиц и др. // Охрана докільля та екологічна безпека: Збірка доповідей науково-практичної конференції. – Т. 1 – Донецьк, 2001. – С. 199–203.
2. Матлак Е. С. Организационно-методические аспекты процесса вовлечения попутно-добываемых шахтных вод в хозяйственное водоснабжение Донбасса / Е. С. Матлак, Ю. Ю. Рудакова, М. В. Жилин // Проблемы екології. – 2008. – № 1–2 – С. 121–128.
3. Фізико-хімічні основи технології очищення стічних вод / А. К. Запольський, Н. А. Мішкова-Клименко, І. М. Астрелін та ін. – К.: Лібра, 2000. – 552 с.
4. Потопченко Н. Г. Использование ультрафиолетового излучения в практике обеззараживания воды / Н. Г. Потопченко, О. С. Савлук // Химия и технология воды. – 1994. – Т. 16, № 12. – С. 7–12.
5. Мокієнко О. В. Санітарно-епідеміологічна ситуація у водопостачанні / О. В. Мокієнко // Вода і водоочисні технології. – 2001. – № 1. – С. 10–15.
6. Мокієнко А. В. Обеззараживание воды и заболеваемость населения: к оценке взаимосвязи / А. В. Мокієнко // АКВА УКРАЇНА – 2006: Матеріали науково-практичних конференцій IV Міжнародного водного форуму. – К.: Українська водна асоціація, 2006. – С. 285–288.
7. Карюхина Т. А. Химия воды и микробиология / Т. А. Карюхина, И. Н. Чурбанова. – М.: Стройиздат, 1983. – 118 с.
8. Шахтные воды угольной промышленности: Сборник Всесоюз. научн. исслед. и проектно-конструк. ин-та охраны окружающей природной среды в угольной пром-ти (ВНИИОСуголь). – Пермь, 1989. – Ч. I–III.
9. Кульский Л. А. Основы химии и технологии воды / Л. А. Кульский. – К.: Наукова думка, 1991. – 586 с.

Надійшло до редакції 27.02.2014 р.

РЕЗЮМЕ

Приведены результаты исследований бактерицидной активности УФ-излучения индивидуально или в сочетании с ионами некоторых металлов (Cu²⁺, Ag⁺, Zn²⁺), которые содержатся в сточных шахтных водах и проявляют собственную бактерицидную активность. В экспериментах использовали суспензию культуры санитарно-показательного микроорганизма *E. coli*. Показано, что присутствие ионов металлов позволяет экономить энергоресурсы (за счет снижения дозы ультрафиолета), достичь более глубокого уровня обеззараживания и продолжить бактерицидное действие УФ-лучей.

Ключевые слова: микроорганизм, бактерицидная активность, УФ-излучение, ионы металлов, шахтные воды.

SUMMARY

The results of bactericidal activity study of UV radiation, individually or in combination with certain metal ions (Cu²⁺, Ag⁺, Zn²⁺), containing in waste mine waters and exhibit bactericidal activity of their own were demonstrated. In all experiments the suspension culture sanitary indicator microorganisms *E. coli* was used. It was shown that the presence of metal ions can save energy (by reducing the UV dose), achieve the higher level of disinfection and continue bactericidal effect of UV rays.

Keywords: microorganism, bactericidal activity, UV-radiation, metal ions, mine waters.

УДК 617+616

И. Г. Герасимов*Лаборатория онтологик Донецкого национального технического университета, г. Донецк***АНАЛИЗ АСИММЕТРИИ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ ЧЕЛОВЕКА**

На основании анализа литературных данных у человека без учета пола и возраста выявлена асимметрия заболеваемости и патологических изменений, которые проявляются в преимущественном развитии неврологических нарушений слева (72,7 %, $p < 0,0001$), а онкологических и травматических – справа (68,0 %, $p < 0,005$ и 66,7 %, $p = 0,005$, соответственно). При этом соматические заболевания по сторонам тела или органа возникают с примерно одинаковой вероятностью (справа – 54,4 %, слева – 45,6 %, $p > 0,5$), однако слева «мощность» заболеваемости больше, чем справа.

Ключевые слова: асимметрия заболеваемости, соматика, неврология, онкология, травматизм.

Введение. Давно и хорошо известно о наличии у человека функциональной асимметрии, обусловленной, в первую очередь, межполушарной асимметрией головного мозга. Причины и следствия наличия асимметрии такого уровня продолжают оставаться предметом многочисленных исследований, например [1–3]. Между тем вопрос о таком важном аспекте асимметрии у человека, как имеет ли место преимущественное асимметричное патологическое поражение различных органов и систем организма и в связи с этим развитие заболеваний? – до настоящего времени не ставился и ответ на него соответственно не мог быть получен. В то же время в работах, касающихся тех или иных аспектов диагностики и лечения различных заболеваний, иногда приводятся данные о соотношениях между больными с асимметричными поражениями, а также степень тяжести таких поражений и некоторые другие сведения о них. В связи с этим появляется возможность на основании литературных данных попытаться ответить на интересующий вопрос, что явилось предметом настоящей работы.

Материалы и методы. Анализировали данные, касающиеся асимметрии болезней (заболеваний), синдромов и симптомов, патологических изменений и/или нарушений, или процессов, или явлений (в контексте данной работы используются как синонимы) без учета пола и возраста (асимметрия заболеваемости).

Просмотреть хотя бы значительную часть оригинальных публикаций, в которых потенциально могут содержаться сведения указанного характера, практически невозможно. Поэтому анализировали данные из рефератов работ, опубликованных в базе данных «Medline» за последние 20 лет. Несмотря на большое количество рефератов (порядка 20 тысяч), где, так или иначе, затрагивается обсуждаемая тема, лишь в очень немногих из них приводятся данные, которые могут быть использованы для статистического анализа. Возможная причина такого несоответствия, вероятно, в том, что далеко не все авторы сочли необходимым вынести в реферат интересующие нас сведения. Тем не менее, порядка 100 (точнее, 99) наблюдений из меньшего числа источников (например, [4–6]) оказались пригодными для статистической обработки. Такие сведения были двух типов: 1) содержащие только указание на то, с какой стороны (слева или справа) преимущественно отмечается та или иная дисфункция, или с какой стороны нарушения более существенны, или с какой стороны измененное состояние лучше поддается лечению и т. п. (всего 58 фактов); 2) содержащие процент указанных характеристик слева и справа, или данные, по которым этот процент можно рассчитать, что в таком случае и было сделано (всего 41 факт). Учитывали не только данные, относящиеся к той или иной половине тела, но и касающиеся парных, например, легкие [7] или яички [8] или симметричных, например, сердце [9] или кишечник [10] органов. Все факты маркировали по бинарной шкале («хуже справа» – «хуже слева», ноль – один), подсчитывали количество нулей и единиц и находили их процентное выражение в общей массе фактов. Эту же операцию проделывали отдельно по «неврологическим единицам» (условно – частота, 30 наблюдений; частота для парных или симметричных органов – 26 наблюдений), поскольку одному и тому же заболеванию в ряде случаев соответствовало несколько фактов, например, эндометриоз почечной лоханки встречается чаще слева и рубцы при этом более выражены слева [11]. Для данных второго типа находили численные значения отношения «справа/слева», и рассчитывали его среднее, а также средний процент частот отдельно слева и отдельно справа. Кроме этого анализировали отдельно соматические заболевания (57 фактов), неврологические нарушения (11 фактов), новообразования (25 фактов) и травмы (6 фактов). Помимо среднего находили его доверительный интервал с доверительной вероятностью $P = 0,95$ ($p < 0,05$). Сравнивали попарно результаты, полученные слева и справа с помощью критерия χ^2 (факты типа 1) или с помощью t-критерия и строили гистограммы соответствующих распределений, значения для которых выражены в процентах (факты типа 2). Обработку данных проводили с помощью пакета статистических программ «Statistica».

Результаты и обсуждение. Из всего количества наблюдений патологические изменения наблюдались справа в 55 % случаев, а слева – в 45 % ($p > 0,2$). Соответственно среднее значение отношений справа/слева составило $1,1 \pm 0,31$. Таким образом, справа поражения наблюдаются чаще, чем слева. Наоборот, среднее число этих же изменений, выраженных в процентах, составило слева $53 \pm 6,5$ %, и справа – $47 \pm 6,5$ % ($p > 0,6$). Очень близкие результаты получены при анализе частот только и при анализе симметричных органов только, соответственно слева $57 \pm 6,5$ % и $57 \pm 7,2$ % ($p > 0,6$), а справа $43 \pm 6,5$ % и $43 \pm 7,2$ % ($p > 0,6$). Следовательно, имеются тенденции к проявлению патологий чаще справа, однако их мощность (степень выраженности) больше слева. Одна из причин, обуславливающих такую закономерность, может заключаться, например, в том, что правая сторона большинством людей (правши) эксплуатируется существенно менее экономно, чем левая (факт общеизвестный). При этом более высокая мощность патологий слева, не исключено, связана с менее сильным закислением (более высоким pH) левой половины тела человека [12]. По таким причинам, правая сторона тела (где pH ниже, чем слева) может быть более подвержена патологическим изменениям, тогда как левая сторона тела оказывается менее адаптированной к различным воздействиям, в том числе, приводящим к патологиям. Когда же они возникают слева, здесь их эффект оказывается более выраженным, чем при развитии дисфункций или иных нарушений справа.

О более высокой мощности заболеваемости слева, чем справа, свидетельствуют и гистограммы распределений процента патологий, построенные для всех трех рассмотренных вариантов анализа. В качестве примера приводим такие гистограммы для всех имеющихся фактов (рис. 1) относительно левой и правой сторон тела или органа. Разумеется, они являются зеркальным относительно центра шкалы абсцисс (50 %) отображением друг друга, однако для наглядности представляется целесообразным обсудить их совместно. Как видно из рисунка, наибольшее число фактов относительно правой стороны приходится на значения примерно 30–40 %, тогда как, наоборот, их количество относительно левой стороны оказывается в области около 60–70 %.

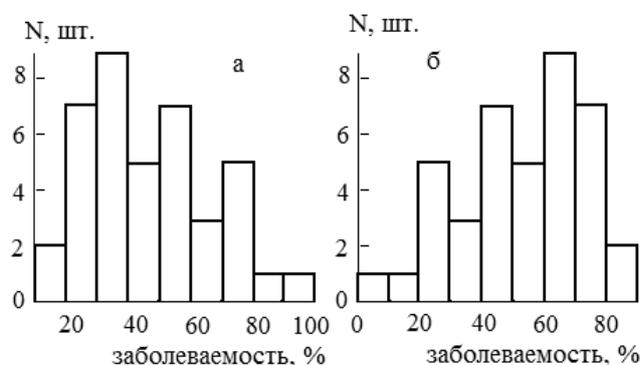


Рис. 1. Гистограммы распределений (N) патологических изменений у человека справа (а) и слева (б)

При этом наблюдается полимодальность распределений с максимумами примерно 25, 50 и 75 %. Иными словами, ряд заболеваний распределены между левой и правой сторонами равномерно (максимум – 50 %). Другая группа заболеваний более выраженное правостороннее проявление (справа 75 %, слева 25 %). Наконец, еще одна группа патологий проявляется чаще слева, чем справа (справа 25 %, слева 75 %). Для выяснения возможных причин наблюдаемых закономерностей проанализировали далее асимметрию заболеваемости, обусловленную разными типами нарушений (соматическими, неврологическими, онкологическими и травматическими).

В случае соматических заболеваний факты распределились следующим образом: справа – 31 (54,4 %), слева – 26 (45,6 %), $p > 0,5$. Для неврологических нарушений нашли такое соотношение: справа – 3 (27,3 %), слева – 8 (72,7 %), $p < 0,0001$ (справа меньше, чем слева). При новообразованиях наблюдается обратная картина: справа – 17 (68,0 %), слева – 8 (32,0 %), $p < 0,005$ (слева меньше, чем справа). Наконец травмы приводят к распределению, подобному предыдущему: справа – 4 (66,7 %), слева – 2 (33,3 %), $p = 0,005$. Следовательно, соматические заболевания возникают примерно с одинаковой вероятностью справа и слева, неврологические нарушения проявляются чаще слева, а онкологические и травматические – чаще справа, с чем и связана полимодальность распределения патологических изменений (рисунок). Что касается преимущественного травматизма с правой стороны тела, то, несомненно, это связано с преимущественным использованием человеком правой руки (правши). Относительно причин же асимметрии неврологических и онкологических заболеваний сказать что-либо определенное в контексте данной работы не представляется возможным, однако на выявленные закономерности следует обратить внимание при диагностике и лечении такого рода патологических процессов.

Заключение. Таким образом, у человека без учета пола и возраста выявлена асимметрия заболеваемости и патологических изменений, которая проявляется в преимущественном развитии неврологических нарушений слева, а онкологических и травматических – справа. При этом соматические заболевания по сторонам тела или органа возникают с примерно одинаковой вероятностью, но слева их мощность больше, чем справа.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колесов С. Н. Анатомия центральной нервной системы / С. Н. Колесов, М. Г. Воловик, М. А. Прилучный. – М.: Изд-во. УРАО, 2005. – 110 с.
2. Хомская Е. Д. Нейропсихология / Е. Д. Хомская. – СПб.: Питер, 2005. – 496 с.
3. Starr M. S. Bilateral asymmetry in brain gaga function / M. S. Starr, J. C. Kilpatrick // Neurosci. Let. – 1981. – Vol. 25, No 2. – P. 167–172.
4. Impact of tumor location on nodal evaluation for colon cancer / K. Y. Bilimoria, B. Palis, A. K. Stewart et al. // Dis. Colon. Rectum. – 2008. – Vol. 51, No 2. – P. 154–161.
5. Ding Y. A clinical research of Hirayama disease / Y. Ding, X. B. Wang, C. J. Li // Zhonghua Nei. Ke. Za. Zhi. – 2008. – Vol. 47, No 12. – P. 991–994.
6. Relationship between disease location and age, obesity, and complications in Korean patients with acute diverticulitis: a comparison of clinical patterns with those of Western populations // J. H. Kim, J. H. Cheon, S. Park et al. / Hepatogastroenterology. – 2008. – Vol. 55, No 84. – P. 983–986.
7. Postoperative risk after induction treatment on surgery in non-small cell lung cancer / F. Scotte, E. Fabre-Guillevin, A. Dujon, M. Riquet // Cancer. Radiother. – 2007. – Vol. 11, No 1–2. – P. 41–46.
8. Right-sided ovulation favours pregnancy more than left-sided ovulation / M. Fukuda, K. Fukuda, C. Y. Andersen, A. G. Byskov // Hum. Reprod. – 2000. – Vol. 15, No 9. – P. 1921–1926.
9. Reardon M. J. Therapy insight: malignant primary cardiac tumors / M. J. Reardon, J. C. Walkes, R. Benjamin // Nat. Clin. Pract. Cardiovasc. Med. – 2006. – Vol. 3, No 10. – P. 548–553.
10. Aortic root dynamics are asymmetric / E. Lansac, H. S. Lim, Y. Shomura et al. // J. Heart Valve Dis. – 2005. – Vol. 14, No 3. – P. 400–407.
11. Al-Fozan H. Left lateral predisposition of endometriosis and endometrioma / H. Al-Fozan, T. Tulandi // Obstet. Gynecol. – 2003. – Vol. 101, No 1. – P. 164–166.
12. Герасимов И. Регулирование в биологических системах: неравновесная термодинамика и ионно-электронные поля / И. Герасимов. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing GmbH & Co.KG, 2011. – 310 с.

Поступила в редакцию 17.03.2014 г.

РЕЗЮМЕ

На підставі аналізу літературних даних у людини без урахування статі та віку виявлена асиметрія захворюваності і патологічних змін, які проявляються в переважному розвитку неврологічних порушень ліворуч (72,7 %, $p < 0,0001$), а онкологічних та травматичних – праворуч (68,0 %, $p < 0,005$ і 66,7 %, $p = 0,005$, відповідно). При цьому соматичні захворювання по бокам тіла чи органа виникають із приблизно однаковою вірогідністю (праворуч – 54,4 %, ліворуч – 45,6 %, $p > 0,5$), однак ліворуч «потужність» захворюваності більше, ніж праворуч.

Ключові слова: асиметрія захворюваності, соматика, неврологія, онкологія, травматизм.

SUMMARY

On the grounds of analysis literary given beside human disregarding flap and age is revealed asymmetry of diseases and pathological change, which reveals itself in primary development of the neurological breaches on the left (72,7 %, $p < 0.0001$), and oncological and traumatic – on the right (68,0 %, $p < 0,005$ and 66,7 %, $p = 0,005$, accordingly). Herewith somatic diseases on sides of the body or organ appear with approximately alike probability (on the right – 54,4 %, on the left – 45,6 %, $p > 0,5$), however on the left their "power" of diseases more, than on the right.

Keywords: asymmetry of diseases, somatic, neurology, oncology, traumatism.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Для публікації у «Віснику Донецького університету. Сер. А: Природничі науки» приймаються не опубліковані раніше наукові роботи.

2. Рукопис подається в 2-х примірниках (українською, російською або англійською мовами), надрукованих з одного боку аркуша паперу формату А4 (другий примірник підписується авторами). Обсяг рукопису, як правило, не повинен перевищувати 8 сторінок, включаючи малюнки, таблиці, список літератури. Разом із рукописом подається CD-диск з повним текстом статті й окремими додатковими електронними файлами зазначеними нижче (в форматі WORD, Office 97-2010). Основний текст статті – шрифт Times New Roman, розмір 10 пт., з вирівнюванням по ширині; резюме, список літератури, таблиці, підрисуночні підписи – шрифт Times New Roman, розмір 9. Формули, їх компоненти і усі змінні в тексті та окремо в рядках набираються лише за допомогою редактора формул Microsoft Equation 3.0 або MathType 5.0–6.0; текст та змінна – курсивом, матриця і вектор – полужирним курсивом; розмір: 11 пт., 9 пт., 7 пт., 18 пт., 12 пт. (звичайний, крупний індекс, дрібний індекс, крупний символ, дрібний символ – відповідно); поля дзеркальні: верхнє – 28 мм, нижнє – 27 мм, зсередини – 30 мм, зовні – 20 мм. Міжрядковий інтервал – одинарний. Абзацний відступ – 1 см.

3. Рукопис починається з індексу УДК у верхньому лівому кутку сторінки. Текст рукопису повинен відповідати структурній схемі: **ініціали та прізвище авторів**, жирний, курсив, по лівому краю (для тих, хто не є співробітником університету, наводиться повна назва організації, яку представляє автор); **назва** – жирний, посередині (прописними літерами без перенесення слів); **резюме** обсягом до 100 слів, має коротко відображати предмет статті, застосовані методи досліджень та основні результати, отримані авторами, та закінчуватися *ключовими словами*; **вступ** (постановка проблеми у загальному вигляді та зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями, аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття, формулювання цілей статті); **основний розділ** (можливі підрозділи, де викладаються основні матеріали дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів); **висновки** з даного дослідження (стисло і чітко підсумовуються основні результати, отримані авторами і перспективи подальших розвідкувань у даному напрямку); **список літератури**. Прізвища та ініціали авторів (*курсивом*), назва статті (малими літерами, перша – прописна), текст резюме і ключові слова українською, російською і англійською мовами розміщуються у кінці рукопису. Для авторів – не громадян України – надання україномовного перекладу резюме не обов'язкове. Сторінки рукопису повинні бути послідовно пронумеровані. Всі значення фізичних величин виражаються в системі СІ. Для текстового матеріалу використовується теперішній час (за виключенням звернення до попередніх статей).

4. Рисунки і таблиці оформляються відповідно ДСТУ 3008-95 та розташовуються по тексту строго в межах друкованого поля книжкової орієнтації сторінок після першої згадки. Уся текстова інформація на рисунках повинна бути чіткою та розбірливою і не мати зайвих деталей (наприклад на графіках не допускаються «вторинні» відмітки на координатних осях та ін.). Необхідно слідкувати за тим, щоб після можливого зменшення до розміру 80 мм висота літер та цифр на рисунку залишалась не меншою 2 мм. Кожний рисунок має підпис (не поєднаний з малюнком), а таблиця – заголовок (вирівнювання по центру). Всі рисунки і таблиці повинні бути послідовно пронумеровані арабськими цифрами. Бажано додавати ілюстративний матеріал в графічному форматі JPG, TIFF, BMP та ін. (графіки – чорно-білі, 300 dpi; фотографії – у відтінках сірого, 300 dpi) у вигляді окремих файлів з назвами ris1, ris2, Формули мають наскрізну нумерацію з правого поля (необхідно посилання в тексті на пронумеровану формулу).

5. Перелік літературних джерел (список літератури) подається загальним списком в кінці рукопису *в порядку посилань* у тексті (а не в алфавітному порядку) на мові оригіналу відповідно вимог викладених у Бюлетені ВАК України (2008, №3, с. 9-13). Посилання на джерело дається в квадратних дужках. Необхідне включення у список якомога більш свіжих першоджерел з досліджуваного питання (не більш, як трьох-чотирьохрічної давності). Не слід обмежуватись цитуванням робіт, які належать тільки одному колективу авторів чи дослідницькій групі. Дуже бажаним є посилання на сучасні закордонні публікації. Статті, що не містять посилань на роботи, які вийшли протягом останнього десятиріччя, як правило, автоматично вважаються такими, що не відповідають редакційним вимогам.

6. Стаття супроводжується листом-заявою від організації, відомостями про авторів (ПІБ, науковий ступень, вчене звання, місце роботи, посада, поштова адреса, телефон, E-mail).

7. Рукописи що не відповідають редакційним вимогам, та статті, що не відповідають тематиці журналу, до розгляду не приймаються.

8. Редакція залишає за собою право проводити редакційну правку рукописів. У разі відмови в публікації статей редколегія не повертає автору рукопис статті. Коректура статей авторам не надсилається.

Матеріали надсилаються за адресою: 83001, м. Донецьк-1, вул. Університетська, 24.

Контактні тел. (062) 302-92-23, 302-92-93

E-mail: res.pro-rector@donnu.edu.ua