УДК 517.944

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С ТОНКОЙ ПОЛОСТЬЮ

И.В.Скрыпник, М.А.Наумова

Поточечные оценки решений нелинейных эллиптических и параболических задач стали в последнее время основой построения усредненных задач в перфорированных областях, изучения поведения решения вблизи негладкой границы и на бесконечности, установления устранимости особенностей решений нелинейных задач. Методы получения поточечных оценок для нелинейных задач в областях с полостями малого диаметра были разработаны И.В.Скрыпником в работах [1, 2]. В случае областей с тонкой полостью соответствующая оценка для нелинейного эллиптического уравнения доказана в работе [3]. Роль поточечных оценок и некоторые из возможных приложений изложены в монографии [4].

Данная работа посвящена доказательству поточечной оценки решения модельной нелинейной параболической задачи в области с тонкой полостью.

Пусть F – замкнутое множество, содержащееся в цилиндре

$$D=\left\{x\in R^n : x'=(x_1,\dots,x_\sigma),\ |x'|\le d,\ x''=(x_{\sigma+1},\dots,x_n),\ |x''|\le H\right\},$$

где σ – целое число, $2<\sigma\le n$, $d\le\frac{1}{4}\le H\le\frac{1}{2}$. Обозначим:

$$\Omega=D_1\setminus F,\ D_1=\left\{x\in R^n : |x'|\le 1,\ |x''|\le 1\right\},$$

$$Q=\{(x,t): x\in\Omega, t\in[0,T]\},\ Q_\tau=\{(x,t): x\in\Omega, t\in[0,\tau]\},$$

$$\Omega_\tau=\{(x,t): x\in\Omega, t=\tau\},\ S=\{(x,t): x\in\partial\Omega, t\in[0,T]\}.$$

Получим оценку решения задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}a_i\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,t)=kf(x),\ (x,t)\in S\cup\Omega_0 \tag{2}$$

при $k\in R^1$.

Предположим, что функции $a_i(x,t,p), i=1,\dots,n$ определены при $(x,t)\in Q, p\in R^n$ и удовлетворяют при рассматриваемых значениях аргументов условиям:

a₁) при почти всех x, t функции $a_i(x,t,p)$, $i=1,\dots,n$ непрерывны по p и для всех p эти функции измеримы по x,t, $a_i(x,t,0)=0$ при $i=1,\dots,n$;

a₂) с положительной постоянной ν_1 выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t,p)p_i\ge\nu_1|p|^2,\ |a_i(x,t,p)|\le\nu_1^{-1}|p|,\ i=1,\dots,n. \tag{3}$$

Предположим еще, что функция $f(x)$ определена при $x\in D_1$, принадлежит $\overset{0}{W}{}_2^1(D_1)$ и удовлетворяет условиям:

f₁) $f(x)\equiv 1$ при $x\in F$;

f₂) с положительной постоянной ν_2 выполнены неравенства

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx \le \nu_2 d^{\sigma-2}, \quad 0 \le f(x) \le \min\left[1, \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\sigma-2}\right]. \tag{4}$$

Отметим интегральное тождество, которое будем использовать в дальнейшем

$$\int_0^t\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial t}u_{(b)}(x,t)\psi(x,t)+\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{(b)}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right\}dxdt=0, \tag{5}$$

справедливое при $b>0$, $0<t_1<T-b$ для произвольной функции $\psi(x,t)\in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}\left(Q_{t_1}\right)$. В (5) использовано обозначение

$$\varphi_{(b)}(x,t)=\left[\varphi(x,t)\right]_{(b)}=\frac{1}{b}\int_t^{t+b}\varphi(x,s)ds$$

для усреднения по t (по Стеклову).

З а м е ч а н и е 1. *Просто показать, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$0\le sign\, k\, u(x,t)\le |k|. \tag{6}$$

З а м е ч а н и е 2. *В дальнейшем достаточно оценить решение задачи (1), (2) при $k>0$, т.к. при $k<0$ можно перейти к оценке функции $v(x,t)=-u(x,t)$, являющейся решением задачи вида (1),(2).*

Обозначим $\left[g(x,t)\right]_+=\max\{g(x,t),0\}$ и определим при $r\in(d,1]$

$$m_r=\underset{|x'|=r,|x''|\le 1,t\in[0,T]}{\operatorname{vrai\,max}} u(x,t),\ u_r(x,t)=\left[u(x,t)-m_r\right]_+,$$

$$E_r=\{(x,t)\in Q: u(x,t)>m_r\},\ E_r^{(\tau)}=E_r\cap\Omega_r.$$

Аналогично доказательству (6) можно получить, что $u(x,t)\le m_r$ при $r\le|x'|\le 1$, $t\in[0,T]$ и так, что справедливо включение

$$E_r\subset\overline{(D_r\setminus F)}\times[0,T], \tag{7}$$

где $D_r=\{x\in R^n: |x'|\le r, |x''|\le 1\}$.

Зафиксируем в дальнейшем четную функцию $\lambda(t)$ класса $C^{\infty}\left(R^1\right)$, равную единице при $|t|\le\frac{1}{2}$, нулю при $|t|\ge 1$, удовлетворяющую условиям: $sign\, t\,\lambda'(t)\le 0$, $|\lambda'(t)|\le 3$, $0\le\lambda(t)\le 1$. И пусть $\lambda_p(t)=\lambda\left(\frac{t}{p}\right)$ для $p>0$. Отметим, что при $p_1<p_2$ справедливо неравенство $\lambda_{p_1}(t)\le\lambda_{p_2}(t)$.

Обозначим

$$\begin{aligned}I_r(h,\eta,p,\tau)&=\underset{0\le t\le T}{\operatorname{vrai\,max}}\int_{\Omega}u_r^2(x,t)\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau)dx+\\&+\int_{E_r}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau)dxdt\end{aligned} \tag{8}$$

при $r\in(d,1]$, $\tau\in[0,T]$, $p\in(0,T]$, $h\in(0,H]$, $|\eta|\le 1$, $\eta\in R^{n-\sigma}$. Здесь $\chi_h(x'',h)=\lambda\left(\frac{|x''-\eta|}{h}\right)$.

Пусть $\varphi(y)$ – бесконечно дифференцируемая функция на R^1, равная единице при $y \le 1$, нулю при $y \ge 2$ и такая, что $0 \le \varphi(y) \le 1$, $\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right| \le 2$. Обозначим $\varphi_d(x') = \varphi\left(\frac{|x'|}{d}\right)$.

Л е м м а 1. *Предположим, что выполнены условия a₁), a₂), f₁), f₂). Тогда существуют постоянные K_1, K_2, K_3, зависящие лишь от $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$, такие, что имеют место оценки:*

$$\text{а) } \|u\|^2_{V_2(Q)} \le K_1 k^2 H^{n-\sigma} d^{\sigma-2}, \tag{9}$$

$$\text{б) } \|u_r\|^2_{V_2(Q)} \le K_2 k(k-m_r) H^{n-\sigma} d^{\sigma-2} \ \text{при } r \in [2d,1], \tag{10}$$

$$\text{в) } \int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \varphi_d^2(x')\chi_h^2(t-\tau)dxdt \le K_3 p k^2 h^{n-\sigma} d^{\sigma-2} \tag{11}$$

при $r \in [2d,1]$, $h \in [d, H]$, $|\eta| \le 1$, $p \in [d^2, T]$, $\tau \in [0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства (9)-(11) получаются путем подстановки в интегральное тождество (5) соответственно пробных функций

$$\psi(x,t) = u_{(b)}(x,t) - kf(x),$$

$$\psi(x,t) = [u_{(b)}(x,t) - m_r]_+ - (k - m_r) f(x),$$

$$\psi(x,t) = u_{(b)}(x,t)\varphi_d^2(x')\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau) - k\varphi_d^2(x')\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau)g(\eta)$$

и проведения затем несложных оценок. При этом используются неравенства (3), (4), $g(\eta)$ – функция, равная единице при $|\eta| \le \frac{1}{2}$ и нулю при $|\eta| > \frac{1}{2}$.□

Лемма 2. *Пусть выполнены условия a₁), a₂), f₁), f₂). Предположим, что при некоторых* $r \in [2d,1]$, $h' \in [2r, H]$, $p' \in [lr^2, T]$ $l \ge 2$, $|\eta| \le 1$, $\tau \in [0, T]$ *имеет место неравенство*

$$I_r(h', \eta, p', \tau) \le Kp'k(k - m_r)(h')^{n-\sigma} d^{\sigma-2}. \tag{12}$$

Тогда при произвольных $h \in \left[r, \frac{h'}{2}\right]$, $p \in \left[r^2, \frac{p'}{l}\right]$ *справедлива оценка*

$$I_r(h, \eta, p, \tau) \le K_4 \left\{ p h^{n-\sigma} + Kp'(h')^{n-\sigma}\left(\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{h^2}\right)\right\} k(k - m_r) d^{\sigma-2} \tag{13}$$

с постоянной K_4, *зависящей лишь от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$.

Для доказательства достаточно подставить в интегральное тождество (5) функцию

$$\psi(x,t) = [u_{(b)}(x,t) - m_r]_+ \chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau) - (k - m_r)\varphi_d^2(x')\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau)$$

и провести стандартные преобразования.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия a₁), a₂), f₁), f₂). Тогда существуют постоянные* K_5, K_6, K_7, *зависящие только от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$, *такие, что при* $2d \le r \le 1, K_5 r \le h \le H$, $K_6 r^2 \le p \le T$, $|\eta| \le 1$, $\tau \in [0, T]$ *для решения* $u(x,t)$ *задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$I_r(h, \eta, p, \tau) \le K_7 pk(k - m_r) h^{n-\sigma} d^{\sigma-2}. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим конечные числовые последовательности $h_i = 2^{-i+1} H$, $p_i = l^{-i+1} T$, $i = 1, \ldots, I$ с I, удовлетворяющим условиям $2^{-I} H < K_5 r \le 2^{-I+1} H$,

$l^{-I}T < K_6 r^2 \le l^{-I+1}T$. Здесь l – некоторое число, зависящее лишь от $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T, H$. Покажем, что K_5, K_6, K_7 можно выбрать в виде

$$K_5 = \sqrt{K_7 + 1},\ K_6 = K_7 + 1,\ K_7 = 2^{n-\sigma} l \max\left\{3K_4, \frac{K_2}{T}\right\},$$

где K_2, K_4 – постоянные из лемм 1,2.

Будем вначале доказывать неравенства

$$I_r(h_i, \eta, p_i, \tau) \le \frac{K_7}{2^{n-\sigma} l} k(k - m_r) h_i^{n-\sigma} d^{\sigma-2} p_i \quad \text{для } i = 1,\dots,I. \tag{15}$$

При $i = 1$ это неравенство следует из (10). Далее, если (15) установлено для $i = i_0 - 1$, $i_0 \le I$, тогда для $i = i_0$ (16) следует из леммы 2:

$$I_r(h_{i_0}, \eta, p_{i_0}, \tau) \le K_4 \left\{ h_{i_0}^{n-\sigma} p_{i_0} + \left[\frac{r^2}{h_{i_0}^2} + \frac{r^2}{p_{i_0}}\right] \frac{K_7}{2^{n-\sigma} l} h_{i_0-1}^{n-\sigma} p_{i_0-1} \right\} k(k - m_r) d^{\sigma-2} \le$$

$$\le K_4 \left\{ 1 + \frac{K_7}{K_5^2} + \frac{K_7}{K_6} \right\} h_{i_0}^{n-\sigma} p_{i_0} k(k - m_r) d^{\sigma-2} \le \frac{K_7}{2^{n-\sigma} l} h_{i_0}^{n-\sigma} p_{i_0} k(k - m_r) d^{\sigma-2}.$$

Тем самым, оценка (15) установлена для любых $i = 1,\dots,I$.

Для произвольных $h \in [K_5 r, H]$, $p \in [K_6 r^2, T]$ определим соответственно целые числа $j(h), i(p)$ так, чтобы $2^{-j(h)} H < h \le 2^{-j(h)+1} H$, $l^{-i(p)} T < p \le l^{-i(p)+1} T$. Тогда $1 \le j(h) \le I$, $1 \le i(p) \le I$ и рассмотрим два случая:

1) $j(h) \le i(p)$, тогда $h_{j(h)} = h_{i(p)} 2^{i(p)-j(h)}$ и

$$I_r(h, \eta, p, \tau) \le I_r(h_{j(h)}, \eta, p_{i(p)}, \tau) \le \sum_{k=1}^{2^{[i(p)-j(h)](n-\sigma)}} I_r(h_{i(p)}, \eta_k, p_{i(p)}, \tau) \le$$

$$\le \frac{K_7 2^{[i(p)-j(h)](n-\sigma)}}{2^{n-\sigma} l} h_{i(p)}^{n-\sigma} p_{i(p)} k(k - m_r) d^{\sigma-2} \le K_7 h^{n-\sigma} p k(k - m_r) d^{\sigma-2},$$

2) $i(p) < j(h)$, тогда $p_{i(p)} = p_{j(h)} l^{j(h)-i(p)}$ и

$$I_r(h, \eta, p, \tau) \le I_r(h_{j(h)}, \eta, p_{i(p)}, \tau) \le \sum_{k=1}^{l^{i(p)-j(h)}} I_r(h_{j(h)}, \eta, p_{j(h)}, \tau_k) \le$$

$$\le \frac{K_7 l^{j(h)-i(p)}}{2^{n-\sigma} l} h_{j(h)}^{n-\sigma} p_{j(h)} k(k - m_r) d^{\sigma-2} \le K_7 h^{n-\sigma} p k(k - m_r) d^{\sigma-2}.$$

Из двух неравенств следует оценка (14), что и заканчивает доказательство теоремы 1.□

Пусть μ – произвольное число из интервала $(0, k - m_r)$. Введем обозначения

$$[u_r]_\mu = \min\{u_r(x,t), \mu\},\quad E_{r,\mu} = \{(x,t) \in Q : 0 \le u_r(x,t) \le \mu\},$$

$$E_{r,\mu}^{(\tau)} = E_{r,\mu} \cap \Omega_\tau,\quad F_{r,\mu} = \{(x,t) \in Q : u_r(x,t) \ge \mu\}.$$

Л е м м а 3. *Существует постоянная K_8, зависящая лишь от $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$, такая, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$\int\limits_{E_{r,\mu}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \le K_8 \mu k H^{n-\sigma} d^{\sigma-2} \tag{16}$$

при $r \in [2d,1]$, $0 < \mu < k - m_r$.

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (5)

$$\psi(x,t) = \left[[u_r]_\mu\right]_{(b)} - \frac{\mu}{k-m_r}[u_r(x,t)]_{(b)}.$$

В полученном равенстве интегрируем по частям в слагаемых, содержащих производные по t, и переходим к пределу по $b \to 0$. Используя оценки (3), (10), получим:

$$\int\limits_\Omega G_{r,\mu}(u)dx\Big|_0^{t_1} + \nu_1 \int\limits_0^t \int\limits_{E_{r,\mu}^{(r)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \le C_1 k\mu H^{n-\sigma} d^{\sigma-2},$$

где $G_{r,\mu}(y)$ – функция, определенная на R^1 и равная соответственно нулю при $y \le m_r$, $\frac{1}{2}(y-m_r)^2$ при $m_r \le y \le m_r + \mu$, $\frac{\mu^2}{2} + \mu(y - m_r - \mu)$ при $y \ge m_r + \mu$. Здесь и далее через C_j обозначаем постоянные, зависящие лишь от $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$.

Оценим первое слагаемое левой части полученного неравенства при $t = 0$. Пусть

$$D_{r,\mu}^{(1)} = \{x \in \Omega :\ m_r \le kf(x) \le m_r + \mu\},\ D_{r,\mu}^{(2)} = \{x \in \Omega : kf(x) > m_r + \mu\}.$$

Имеем

$$\int\limits_{D_{r,\mu}^{(1)}} G_{r,\mu}(kf(x))dx = \frac{1}{2}\int\limits_{D_{r,\mu}^{(1)}} [kf(x) - m_r]^2 dx \le \frac{\mu}{2} k \int\limits_{E_r} f(x)dx \le C_2 \mu k H^{n-\sigma} d^{\sigma-2},$$

$$\int\limits_{D_{r,\mu}^{(2)}} G_{r,\mu}(kf(x))dx = \mu \int\limits_{D_{r,\mu}^{(2)}} \left[kf(x) - m_r - \frac{\mu}{2}\right]dx \le C_3 \mu k H^{n-\sigma} d^{\sigma-2}.$$

Доказательство закончено. □

Пусть q – число из интервала (1,2), выбор которого будет указан далее. Обозначим

$$I_{r,\mu}(h,\eta,p,\tau) = \int\limits_{E_{r,\mu}} u_r^{q-2}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau)dxdt,$$

где $r \in [2d,1]$, $\mu \in (0, k - m_r)$, $K_5 r \le h \le H$, $K_6 r^2 \le p \le T$, $\tau \in [0,T,]$ $\eta \in R^{n-\sigma}$, $|\eta| \le 1$.

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(h,\eta,p,\tau) = \frac{K_9}{(q-1)^2}\left\{\left[\frac{r^2}{h^2} + \frac{r^2}{p}\right] I_{r,\mu}(2h,\eta,2p,\tau) + \mu^{q-1} k h^{n-\sigma} d^{\sigma-2} p + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu^{q-1}}{h}\int\limits_{F_{r,\mu}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \chi_h \lambda_p^2 dxdt + \frac{\mu^{q-1}}{p}\int\limits_{F_{r,\mu}} (u_r - \mu)\chi_h^2 \lambda_p dxdt\right\} \tag{17}$$

с постоянной K_9, *зависящей лишь от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$.

Доказательство. Пусть ε – произвольное число из интервала (0, μ). Подставим в интегральное тождество (5) функцию

$$\psi(x,t)=\left\{\left(\left[u_{(b),r}\right]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}\left[u_{(b),r}\right]_\mu-(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu\frac{u_{(b),r}(x,t)}{k-m_r}\right\}\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau).$$

Переходя к пределу по b, имеем

$$\int\limits_\Omega F_{r,\mu}(u)\chi_h^2\lambda_p^2\,dx\Big|_0^{t_1}-2\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega F_{r,\mu}(u)\chi_h^2\lambda_p\frac{d\lambda_p}{dt}dxdt+$$

$$+\nu_1(q-1)\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2\lambda_p^2dxdt\le\frac{1}{2}\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_\Omega u_r^2(x,t)\chi_h^2\lambda_p^2dx\Big|_0^{t_1}+$$

$$+2\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)p}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r^2\chi_h^2\lambda_p^2dxdt+C_4\left\{\frac{1}{h}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}[u_r]_\mu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\lambda_p^2dxdt+\right. \tag{18}$$

$$\left.+\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)h}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\lambda_p^2dxdt+\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2\lambda_p^2dxdt\right\},$$

где $F_{r,\mu}(y)$ – функция, определенная на R^1, равная нулю при $y\le m_r$,

$$\frac{(y-m_r+\varepsilon)^q}{q}-\varepsilon\frac{(y-m_r+\varepsilon)^{q-1}}{q-1}+\frac{\varepsilon^q}{q(q-1)}\ \text{при}\ m_r\le y\le m_r+\mu,$$

$$\left[(\mu+\varepsilon)^{q-1}-\varepsilon(\mu+\varepsilon)^{q-2}\right](y-m_r-\mu)+\frac{(\mu+\varepsilon)^q}{q}-\varepsilon\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-1}}{q-1}+\frac{\varepsilon^q}{q(q-1)}\ \text{при}\ y\ge m_r+\mu.$$

Первый интеграл в правой части (18) оценим по теореме 1:

$$\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_\Omega u_r^2(x,t)\chi_h^2\lambda_p^2dx\Big|_0^{t_1}\le(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu K_7pkh^{n-\sigma}d^{\sigma-2}.$$

Второй интеграл оцениваем также, используя дополнительно неравенство Пуанкаре

$$\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)p}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r^2\chi_h^2\lambda_pdxdt\le\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)}\frac{r^2}{p}\int\limits_{E_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^2\chi_h^2\lambda_{2p}^2dxdt\le$$

$$\le C_5(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2}.$$

Третье слагаемое правой части (18) разбиваем на сумму двух интегралов по $F_{r,\mu}$ и $E_{r,\mu}$:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}[u_r]_\mu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\lambda_p^2dxdt\le\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{F_{r,\mu}^{(t)}}\frac{\mu^{q-1}}{h}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\lambda_p^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{h}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}[u_r]_\mu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\chi_{2h}\lambda_p\lambda_{2p}dxdt.$$

Последний интеграл оценим, используя неравенства Юнга и Пуанкаре:

$$\frac{C_4}{(q-1)h}\int_0^{t_1}\int_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}[u_r]_\mu\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\chi_{2h}\lambda_p\lambda_{2p}dxdt\le$$

$$\le\frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^{t_1}\int_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2\lambda_p^2dxdt+\frac{C_6}{2\varepsilon_1(q-1)^2}\int_0^{t_1}\int_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}\times$$

$$\times\frac{[u_r]_\mu^2}{h^2}\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2dxdt\le\frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^{t_1}\int_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2\lambda_p^2dxdt+$$

$$+\frac{C_7}{\varepsilon_1(q-1)^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2\int_0^{t_1}\int_{E_{r,\mu}^{(t)}}\left([u_r]_\mu+\varepsilon\right)^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^2\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2dxdt,$$

где ε_1 – достаточно малое число.

Четвертое слагаемое правой части (18) оценим аналогично последнему интегралу

$$\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)h}\int_0^{t_1}\int_\Omega u_r\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\lambda_p^2dxdt\le C_8\,\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\frac{r^2}{h^2}\int_{E_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^2\chi_{2h}^2\lambda_p^2dxdt+$$

$$+C_8\,\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int_{E_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2\lambda_p^2dxdt\le C_9(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2}.$$

И, наконец, последнее слагаемое правой части (18) просто оценивается с использованием теоремы 1.

Оценим второй интеграл в левой части (18), используя неравенство Пуанкаре:

$$\int_0^{t_1}\int_\Omega F_{r,\mu}(u)\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p(t-\tau)\frac{d\lambda_p}{dt}dxdt\le\frac{C_{10}}{p}\left\{\int_{E_{r,\mu}}\frac{(u_r+\varepsilon)^q}{q}\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2dxdt+\right.$$

$$\left.+(\mu+\varepsilon)^{q-1}\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi_h^2\lambda_pdxdt\right\}\le\frac{C_{11}}{p}\left\{r^2\int_{E_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^2\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2dxdt+\right.$$

$$\left.+(\mu+\varepsilon)^{q-1}\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi_h^2\lambda_pdxdt\right\}.$$

Первое слагаемое в левой части (18) оценим как при доказательстве леммы 3 на множествах $D_{r,\mu}^{(1)}$, $D_{r,\mu}^{(2)}$.

В итоге, переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим нужное неравенство (17). Доказательство закончено. □

Л е м м а 5. *Существует постоянная* K_{10}, *зависящая от* n,σ,ν_1,ν_2,T, *такая, что справедлива оценка*

$$\int_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2(x'',\eta)\lambda_p^2(t-\tau)dxdt\le\frac{K_{10}}{(q-1)^2}\mu^{1-q}\left\{kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2}+\right.$$

$$\left.+\mu^{1-q}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{h^2}\right]\int_{F_{r,\mu}}u_r^q(x,t)\chi_{2h}^2(x'',\eta)\lambda_{2p}^2(t-\tau)dxdt\right\}.\tag{19}$$

Доказательство. Пусть $u_r^{(\mu)} = \max\{u_r(x,t), \mu\}$ и подставим в интегральное тождество (5) функцию

$$\psi(x,t) = \left\{\mu^{1-q} - \left[u_{(b),r}^{(\mu)}\right]^{1-q}\right\}\chi_h^2\lambda_p^2 - \left\{\mu^{1-q} - (k-m_r)^{1-q}\right\}\frac{u_{(b),r}}{k-m_r}\chi_h^2\lambda_p^2.$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4.□

Теорема 2. *При выполнении условий a_1), a_2), f_1), f_2) для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(h,\eta,p,\tau) \le \frac{K_{11}}{(q-1)^4}\left\{\left[\frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{h^2}\right] I_{r,\mu}(2h,\eta,2p,\tau) + \mu^{q-1} kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{h^2}\right]\int_{F_{r,\mu}} u_r^q(x,t)\chi_{2h}^2(x'',\eta)\lambda_{2p}^2(t-\tau)dxdt\right\}, \tag{20}$$

где $q \in (1,2)$, $r \in [2d,1]$, $\mu \in (0, k-m_r)$, $|\eta| \le 1$, $\tau \in [0,T]$, $K_5 r \le h \le H, K_6 r^2 \le p \le T$ *и постоянная* K_{11} *зависит только от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$.

Доказательство. Оценим интегралы из неравенства (17). Для оценки первого воспользуемся неравенствами Юнга и (19):

$$\frac{1}{h}\int_{F_{r,\mu}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h\lambda_p^2 dxdt \le \mu^{q-1}\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^2\lambda_p^2 dxdt +$$
$$+\mu^{1-q}\int_{F_{r,\mu}}\frac{u_r^q(x,t)}{h^2}\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2 dxdt \le \frac{C_{12}}{(q-1)^4}\left\{kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2} + \mu^{1-q}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{h^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int_{F_{r,\mu}} u_r^q(x,t)\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2 dxdt\right\}.$$

Второй интеграл из (17) оценим аналогично с использованием еще неравенства Пуанкаре:

$$\frac{1}{p}\int_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi_h^2\lambda_p dxdt \le \frac{\mu^{q-1}}{p}\int_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}(x,t)(u_r-\mu)^2\chi_h^2\lambda_p^2 dxdt +$$
$$+\frac{\mu^{1-q}}{p}\int_{F_{r,\mu}} u_r^q(x,t)\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2 dxdt \le \frac{C_{13}}{(q-1)^4}\left\{kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2} + \mu^{1-q}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{h^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int_{F_{r,\mu}} u_r^q(x,t)\chi_{2h}^2\lambda_{2p}^2 dxdt\right\}.$$

Из этих двух неравенств следует оценка (20). Доказательство закончено.□

Замечание 3. *Аналогично доказательству теоремы 2 только без использования срезывающих функций доказывается оценка*

$$\int_{E_{r,\mu}} u_r^{q-2}(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \le \frac{K_{12}}{(q-1)^4}\left\{\mu^{q-1}kph^{n-\sigma}d^{\sigma-2} + \left[\frac{1}{p}+\frac{1}{h^2}\right]\int_{F_{r,\mu}} u_r^q(x,t)dxdt\right\}.$$

Л е м м а 6. *Пусть выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2). Тогда с некоторой постоянной, зависящей лишь от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$ *для решения* $u(x,t)$ *задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$m_{r/2} - m_r \le K_{13} k \frac{H^{n-\sigma} d^{\sigma-2}}{r^n} \tag{21}$$

при $r \in [8d, 1]$, $h \le H$, $\tau \in [0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Определим числовые последовательности

$$r_j^{(1)} = \frac{r}{4}\left(1 + 2^{-j}\right),\ r_j^{(2)} = \frac{r}{4}\left(3 - 2^{-j}\right),\ h_j = \frac{h}{8} + \left(1 - 2^{-j+1}\right) r,$$

$$t_j^{(1)} = \tau - \frac{p}{16} - \left(1 - 2^{1-2j}\right) r^2,\ t_j^{(2)} = \tau + \frac{p}{16} + \left(1 - 2^{1-2j}\right) r^2,\ j = 1, 2, \ldots$$

Определим функции $\theta_j(t, p, \tau) \in C_0^\infty(R^1)$, равные единице при $t \in \left[t_j^{(1)}, t_j^{(2)}\right]$, нулю при $t \notin \left[t_{j+1}^{(1)}, t_{j+1}^{(2)}\right]$ и такие, что $0 \le \theta_j(t, p, \tau) \le 1$, $\left|\frac{d}{dt}\theta_j(t, p, \tau)\right| \le \frac{2^{2j}}{r^2}$.

Подставим в интегральное тождество (5)

$$\psi(x,t) = \left[u_{(b),r}(x,t)\right]^{\rho+1} \left[\varphi_j(x, t, h, \eta, p, \tau)\right]^{s+2},$$

где $\varphi_j(x, t, h, \eta, p, \tau) = \psi_j(x')\chi_{j,h}(x'', \eta)\theta_j(t, p, \tau)$, ρ, s – произвольные положительные числа.

Здесь $\psi_j(x')$ – функция класса $C_0^\infty(R^\sigma)$, равная единице на $G_j' = \left\{x' : r_j^{(1)} \le |x'| \le r_j^{(2)}\right\}$, нулю вне G_{j+1}' и такие, что $0 \le \psi_j(x') \le 1$, $\left|\frac{\partial \psi_j(x')}{\partial x'}\right| \le \frac{2^{j+4}}{r}$.

Определим еще функции $\chi_{j,h}(x'', \eta) \in C_0^\infty\left(R^{n-\sigma}\right)$, равные единице при $|x'' - \eta| \le h_j$, нулю при $|x'' - \eta| \ge h_{j+1}$ и такие, что $0 \le \chi_{j,h}(x'', \eta) \le 1$, $\left|\frac{\partial}{\partial x''}\chi_{j,h}(x'', \eta)\right| \le \frac{2^{j+1}}{r}$.

После стандартных преобразований и использования неравенств (4) получим

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0 \le t \le T} \int_\Omega u_r^{\rho+2} \varphi_j^{s+2} dx + (\rho+1)^2 \int_Q u_r^\rho \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \varphi_j^{s+2} dxdt \le$$

$$\le C_{14} \frac{(s+2)^2(\rho+2)^2}{r^2} 2^{2j} \int_Q u_r^{\rho+2} \varphi_j^s dxdt + C_{14}\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2} H^{n-\sigma}\right]^{\rho+2} r^\sigma.$$

Используя вложение $V_2(Q)$ в $L_{\frac{2(n+2)}{n}}(Q)$, получаем при $s = \left(\frac{n}{2} + 2\right)\rho$:

$$\int_Q u_r^{\rho+2} \varphi_j^{s+2} dxdt \le C_{15}\left\{\frac{(\rho+2)^4}{r^2} 2^{2j} \int_Q u_r^{\frac{\rho+2}{n+2}n} \varphi_j^{\frac{s+2}{n+2}n-2} dxdt + \right.$$

$$\left. + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2} H^{n-\sigma}\right]^{\frac{\rho+2}{n+2}n} r^\sigma\right\}^{\frac{n+2}{n}}. \tag{22}$$

Выберем значения ρ, s в виде

$\rho=\rho_i=2\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i-1\right],\ s=s_i=(n+4)\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i-1\right]$ и обозначим

$I_i=\int\limits_Q u_r^{\rho_i+2}\varphi_j^{s_i+2}dxdt+\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2}H^{n-\sigma}\right]^{\rho_i+2}r^{n+2},\ \Theta=\frac{n+2}{n}$. Имеем

$I_i^{\Theta^i}\le C_{16}^{\Theta^i}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{4i\Theta^{i-1}}\left(\frac{2^{2j}}{r^2}\right)^{\Theta^{i-1}}I_{i-1}^{\Theta^{i-1}}$. Применяя это неравенство последовательно и устремляя $i\to\infty$, получим оценку:

$$\mu_j^2(h,\eta,p,\tau)\le C_{17}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2}\left\{\int\limits_Q u_r^2\varphi_j^2dxdt+\left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2}H^{n-\sigma}\right]^2r^{n+2}\right\}. \tag{23}$$

Здесь

$$\mu_j(h,\eta,p,\tau)=\operatorname*{vrai\,max}_{(x,t)\in G_j(h,\eta,p,\tau)}\quad G_j(h,\eta,p,\tau)=\left\{(x,t):x'\in G_j',\ |x''-\eta|\le h_j,\ t\in\left[t_j^{(1)},t_j^{(2)}\right]\right\}.$$

Оценим интеграл в правой части (23), используя неравенство Пуанкаре и оценку (16)

$$\int\limits_Q u_r^2\varphi_j^2dxdt\le\int\limits_Q\left[u_r\right]^2_{\mu_{j+1}(h,\eta,p,\tau)}\chi_j^2(x'',\eta)dxdt\le$$
$$\le C_{18}r^2\int\limits_{E_{r,\mu_{j+1}(h,\eta,p,\tau)}}\left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^2dxdt\le C_{19}r^2\mu_{j+1}(h,\eta,p,\tau)kH^{n-\sigma}d^{\sigma-2}. \tag{24}$$

Из (23), (24) получаем для $\tilde{\mu}_j=\mu_j(h,\eta,p,\tau)+k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2}H^{n-\sigma}$:

$$\mu_1(h,\eta,p,\tau)\le C_{20}\frac{kH^{n-\sigma}d^{\sigma-2}}{r^n},$$

откуда последовательной итерацией по j следует неравенство

$$\mu_1(h,\eta,p,\tau)\le C_{21}\frac{kH^{n-\sigma}d^{\sigma-2}}{r^n},$$

доказывающее лемму 6.□

Л е м м а 7. *Предположим, что для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) при $4d\le r\le R\le 1$ выполнено неравенство*

$$m_{r/2}-m_r\le\frac{A}{r^n} \tag{25}$$

с некоторой положительной постоянной А. Тогда справедлива оценка

$$u(x,t)\le\frac{2^n}{2^n-1}\frac{A}{|x'|^n}+m_R \tag{26}$$

при $(x,t)\in Q,\ 8d\le|x'|\le R$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.9 гл.10 [4].

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2). Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$u(x,t) \le K_{14} kT \frac{H^{n-\sigma} d^{\sigma-2}}{|x'|^n} \tag{27}$$

при $(x,t) \in Q$, $K_{14} = \frac{1}{T} \max\left\{8^n, \frac{2^n}{2^n-1} K_{13}\right\}$, *где* K_{13} *– постоянная из леммы 6.*

Аналогично доказательствам лемм 6, 7, только используя вместо оценки (16) оценку (14) при $h = K_5 r$, $p = K_6 r^2$, может быть доказана:

Т е о р е м а 3. *Существует постоянная* K_{15}, *зависящая лишь от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$u(x,t) \le K_{15} k \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{\sigma-2}{2}}. \tag{28}$$

Далее будем исходить из дополнительного предположения, что с некоторым $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ и некоторой постоянной $A_1 \ge K_{14}$ справедлива оценка

$$u(x,t) \le A_1 k \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\lambda(\sigma-2)}, \quad (x,t) \in Q. \tag{29}$$

Тогда из (27), (29) следует, что при любом $\Theta \in [0,1]$, справедливо неравенство

$$u(x,t) \le M(A_1) k \left(\frac{T}{|x'|^2}\right)^{\Theta} \left(\frac{H}{|x'|}\right)^{\alpha} \left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\beta}, \quad (x,t) \in Q, \tag{30}$$

где

$$M(A_1) = K_{14}^{\Theta} A_1^{1-\Theta}, \quad \alpha = (n-\sigma)\Theta, \quad \beta = (\sigma-2)[\Theta + \lambda(1-\Theta)]. \tag{31}$$

Введем при произвольных положительных числах $A, r, \rho, h, p, \eta \in R^{n-\sigma}, \tau \in [0,T]$ обозначения

$$\begin{gathered} R_{r,\rho}(A,h,p) = \left[A k \left(\frac{d}{\rho}\right)^{\lambda(\sigma-2)} \right]^{q-1} k h^{n-\sigma} d^{\sigma-2} p + \\ + \left[M(A_1) k \left(\frac{p}{r^2}\right)^{\Theta} \left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha} \left(\frac{d}{r}\right)^{\beta} \right]^{q} r^{\sigma} h^{n-\sigma} p \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{p}\right], \end{gathered} \tag{32}$$

$$J_r(h,\eta,p,\tau) = \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{p}\right] \int_{E_r} u_r^q(x,t) \chi_h^2(x'',\eta) \lambda_p^2(t,\tau) dx dt \tag{33}$$

и пусть $R_r(A,h,p) = R_{r,r}(A,h,p)$.

Зафиксируем в дальнейшем значения q и Θ, полагая их соответственно равными

$$q = \frac{\sigma+1}{\sigma}, \quad \Theta = \frac{1}{n-\sigma+2}. \tag{34}$$

В этом случае справедливо неравенство

$$(\alpha + \beta + 2\Theta) q < \sigma. \tag{35}$$

Т е о р е м а 4. *Предположим, что q и Θ определяются равенствами (34) и для решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка (29) при $A_1 \geq K_{14}$ и $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Существуют постоянные $A_2, A_3, A_4, A_5 \in [1, \infty)$, зависящие лишь от c, такие, что из справедливости при некоторых $\bar{r} \in [8d, 1]$, $h \in (0, H]$, $p \in (0, T]$ оценок*

$$J_r(h, \eta, p, \tau) \leq A_2 R_r(A_1, h, p), \tag{36}$$

$$I_{r,\mu}(h, \eta, p, \tau) \leq A_3 R_{r,\rho}(A_1, h, p) \text{ для } \mu = m_\rho - m_r \tag{37}$$

при $2d \leq r \leq \bar{r}$, $|\eta| \leq 1$, $\tau \in [0, T]$, $\frac{r}{4^3} \leq \rho \leq r$, $2d \leq \rho$ и неравенств

$$A_4 \bar{r} \leq h, \quad A_5 \bar{r}^2 \leq p \tag{38}$$

следует выполнение оценок

$$J_r\left(\frac{h}{2}, \eta, \frac{p}{4}, \tau\right) \leq A_2 R_r\left(A_1, \frac{h}{2}, \frac{p}{4}\right), \tag{39}$$

$$I_{r,\mu}\left(\frac{h}{2}, \eta, \frac{p}{4}, \tau\right) \leq A_3 R_{r,\rho}\left(A_1, \frac{h}{2}, \frac{p}{4}\right) \text{ для } \mu = m_\rho - m_r \tag{40}$$

при $2d \leq r \leq \frac{\bar{r}}{2}$, $|\eta| \leq 1$, $\tau \in [0, T]$, $\frac{r}{4^3} \leq \rho \leq r$, $2d \leq \rho$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5 в [3].

С л е д с т в и е 2. *В условиях теоремы 4 при любом $r \in \left[2d, \min\left\{\frac{H}{A_4}, \sqrt{\frac{T}{A_5}}\right\}\right]$ справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(h, \eta, p, \tau) \leq K_{16}\left(\left[\frac{r^2}{h^2} + \frac{r^2}{p}\right] A_3 + 1\right) R_{r,\rho}(A_1, h, p) \tag{41}$$

для $\mu = m_\rho - m_r$, $\frac{r}{4^3} \leq \rho \leq r$, $A_4 \bar{r} \leq h$, $A_5 \bar{r}^2 \leq p$ с постоянной K_{16}, зависящей лишь от $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$.

Л е м м а 8. *Для некоторых j, h, η, p, τ имеет место оценка*

$$\mu_j^q(h, \eta, p, \tau) \leq K_{17}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2} \left\{ \int_Q u_r^q(x,t) \varphi_j^2 dx dt + \left[M(A_1) k \left(\frac{p}{r^2}\right)^{\Theta} \left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha} \left(\frac{d}{r}\right)^{\beta} \right]^q r^{n+2} \right\}. \tag{42}$$

Для доказательства достаточно подставить в интегральное тождество (5) $\psi(x,t) = \left[u_{(b),r}(x,t)\right]^{\rho+q-1} \left[\varphi_j(x, t, h, \eta, p, \tau)\right]^{s+2}$ и провести рассуждения как при доказательстве леммы 6. Здесь φ_j, ρ, s определены в лемме 6, q определено равенством (34).

Т е о р е м а 5. *Существует постоянная K_{18}, зависящая лишь от $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$ такая, что из справедливости при некотором $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ неравенства (29) следует выполнение оценки*

$$u(x,t)\le K_{18}A_1^{1-\Theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\beta} \tag{43}$$

где Θ,β определяются равенствами (31), (34).

Доказательство. Покажем, что для обеспечения неравенства (43) достаточно установить оценку

$$\mu_1(h_r,\eta,p_r,\tau)\le CA_1^{1-\Theta}k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta} \tag{44}$$

при $r\in\left[2d,\min\left\{\frac{H}{A_4},\sqrt{\frac{T}{A_5}}\right\}\right]$, $2d\le r\le 1$, $\eta\in R^{n-\sigma}$, $|\eta|\le 1$, $\tau\in[0,T]$, $h_r=A_4\bar r$, $p_r=A_5\bar r^{-2}$

с постоянными A_4, A_5 из теоремы 4 и постоянной C, зависящей лишь от n,σ,ν_1,ν_2,T.

Если предполагать доказанной оценку (44), то из определения $\mu_1(h_r,\eta,p_r,\tau)$ при соответствующем выборе η,τ следует

$$m_{r/2}-m_r\le CA_1^{1-\Theta}k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}.$$

Далее, применяя лемму 7, из последнего неравенства и равенства $u(x,t)=0$ при $|x'|=1$ получаем

$$u(x,t)\le C\frac{2^{\beta}}{2^{\beta}-1}A_1^{1-\Theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\beta}.$$

Докажем неравенство (44). При этом достаточно зафиксировать значения η,τ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu_1(h_r,\eta,p_r,\tau)\ge m_{r/2}-m_r.$$

Используя неравенство (42), получаем:

$$\mu_1^q(h_r,\eta,p_r,\tau)\le C_{22}\frac{2^{n+2}}{r^{n+2}}\left\{\int\limits_Q u_r^q(x,t)\varphi_1^2dxdt+\right.$$
$$\left.+\left[M(A_1)k\left(\frac{p}{r^2}\right)^{\Theta}\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^q r^{n+2}\right\}. \tag{45}$$

Оценим интеграл в правой части (45), используя неравенства Пуанкаре и (41):

$$\int\limits_Q u_r^q(x,t)\varphi_1^2dxdt\le C_{23}r^2\int\limits_{E_{r,\mu_2}}u_r^{q-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_{1,h_r}^2\theta_1^2dxdt\le$$
$$\le C_{24}r^2R_{r,r_2^{(1)}}(A_1,h_r,p_r). \tag{46}$$

Отметим, что $m_{r/2} - m_r \le \mu_2(h_r, \eta, p_r, \tau) \le m_{r_2^{(1)}} - m_r$ и тем самым обеспечены условия для $\mu_2(h_r, \eta, p_r, \tau)$, достаточные для применения оценки (41).

Из (45), (46) получаем

$$\mu_1^q(h_r, \eta, p_r, \tau) \le C_{25}\left\{\left[A_1 k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(\sigma-2)}\right]^{q-1} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2}\left(\frac{h_r}{r}\right)^{n-\sigma}\frac{p_r}{r^2}+\right.$$

$$\left.+\left[M(A_1)k\left(\frac{p}{r^2}\right)^{\Theta}\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^q\left(\frac{h_r}{r}\right)^{n-\sigma} p_r\left[\frac{1}{h_r^2}+\frac{1}{p_r}\right]+\left[M(A_1)k\left(\frac{p}{r^2}\right)^{\Theta}\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^q\right\}.$$

Оценим первое слагаемое в фигурной скобке

$$\left[A_1 k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(\sigma-2)}\right]^{q-1} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2} = \left[A_1^{\frac{q-1}{q}} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(\sigma-2)\frac{q-1}{q}+\frac{\sigma-2}{q}}\right]^q \le C_{26}\left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^q,$$

так как в силу выбора q, Θ, λ имеем

$$\frac{1}{q} > \Theta,\ \lambda(\sigma-2)\frac{q-1}{q}+\frac{\sigma-2}{q}-\beta = (\sigma-2)\left(\frac{1}{q}-\Theta\right)(1-\lambda) > 0.$$

Таким образом, для $\mu_1(h_r, \eta, p_r, \tau)$ получаем

$$\mu_1^q(h_r, \eta, p_r, \tau) \le C_{27}\left[A_1^{1-\Theta} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^q,$$

откуда следует оценка (44). Доказательство закончено. □

Т е о р е м а 6. *Предположим, что выполнены условия a_1), a_2), f_1), f_2). Тогда существует постоянная К, зависящая лишь от* $n, \sigma, \nu_1, \nu_2, T$, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \le K|k|\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\sigma-2}. \tag{47}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Как отмечалось ранее, достаточно рассматривать $k > 0$. Покажем, что число K можно выбрать в виде

$$K = \max\left\{1, K_{14}, K_{15}, K_{18}^{\frac{1}{\Theta}}\right\}, \tag{48}$$

где K_{14}, K_{15}, K_{18} – постоянные, определенные соответственно в следствии 1, теоремах 3,5, Θ – число, определенное равенством (34).

Определим последовательность λ_i, $i = 1,2,...$ равенством

$$\lambda_i = 1 - \frac{1}{2}(1-\Theta)^{i-1} \tag{49}$$

и покажем, что при $i = 1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$u(x,t) \le Kk\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\lambda_i(\sigma-2)}. \tag{50}$$

При $i = 1$ оценка (50) следует из (48) и теоремы 3. Далее оценка (50) доказывается индукцией по i. Если предполагать ее справедливость при $i = i_0$, $i_0 \ge 1$, то применяя теорему 5, получаем оценку:

$$u(x,t) \le K_{18}K^{1-\Theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{(\sigma-2)\Theta+\lambda_{i_0}(\sigma-2)(1-\Theta)}. \tag{51}$$

По выбору K имеем $K_{18}K^{1-\Theta} \le K$. Из (49) получаем

$$(\sigma-2)\Theta + \lambda_{i_0}(\sigma-2)(1-\Theta) = \lambda_{i_0+1}(\sigma-2).$$

Тем самым, из (51) следует (50) при $i = i_0 + 1$.

Замечая, что $\lambda_i \to 1$ при $i \to \infty$, предельным переходом по i из (50) получаем (47).

Исследования по данной работе были поддержаны частично проектами Фонда фундаментальных исследований Украины и INTAS.

РЕЗЮМЕ

Встановлюється поточкова оцінка розв'язку задачі Діріхде для квазілінійного параболічного рівняння другого порядку в області з тонкою порожниною.

SUMMARY

It is studied the pointwise estimate of a solution to Dirichle problem for quasilinear parabolic second order equation in the domain with thin cavity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скрыпник И.В. О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов. «Общая теория граничных задач». – К.: Наук. думка, 1983. – С.198-206.
2. Скрыпник И.В. Поточечная оценка решения модельной нелинейной параболической задачи. «Нелинейные граничные задачи». – К.: Наук.думка, 1991, вып.3. – С.72-86.
3. Скрыпник И.В., Наумова М.А. Поточечная оценка решения квазилинейной эллиптической задачи в области с тонкой полостью // Укр. матем. журнал, 1992, т.44, №10. – С.1417-1432.
4. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990. – 448 с.

Надійшла до редакції 13.10.1997 р.