УДК 519.21

АТТРАКТОРЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.А.Мельник, Е.И.Олейник

Введение

Одной из основных проблем теории эволюционных стохастических дифференциальных уравнений типа

$$du = \mathbf{A}(u)dt + \mathbf{B}(u)dw(t), \quad u\big|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$

где уравнение рассматривается на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P), с расширяющейся системой σ-алгебр $\{F_t\}$ ($t>0$), вложенных в F и пополненных по мере P; $u_0, u(t) \in E$, E банахово пространство; $w(t)$ – винеровский процесс со значениями в R, является изучение поведения их траекторий $u(t) = u(t,x)$ при $t \to \infty$. В детерминированном случае эта проблема изучалась Бабиным А.В. и Вишиком М.И. [2].

При изучении поведения траекторий эволюционных стохастических дифференциальных уравнений при $t \to \infty$ важную роль играют аттракторы. Полугруппой $\{S_t, t \ge 0\}$, отвечающей уравнению (1), называется семейство операторов S_t, действующих в банаховом пространстве E, $S_t : E \to E$, причём $S_t u_0 = u(t), \forall t \ge 0$, где $u(t)$ решение дифференциального уравнения (1). При этом, очевидно, предполагается, что задача однозначно разрешима.

Максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t, t \ge 0\}$ или дифференциального уравнения называется замкнутое ограниченное множество $U \subset E$, которое обладает:

1) свойством инвариантности: $S_t U = U, \forall t \ge 0$;

2) свойством притяжения: для любого ограниченного $B \subset E$ расстояние $dist_E(S_t B, U) \to 0$ при $t \to \infty$, где $dist_E(M,L) = \sup\limits_{m \in M} \inf\limits_{l \in L} \|m - l\|_E$.

Здесь M, L произвольные подмножества пространства E.

В данной работе изучена проблема существования аттрактора полугруппы, порождённой стохастическим дифференциальным уравнением параболического типа. Получена оценка сверху хаусдорфовой размерности аттрактора в $L_2(\Omega, X)$.

Существование максимального аттрактора полугруппы, порожденной стохастическим дифференциальным уравнением

На полном вероятностном пространстве рассматривается стохастическая задача Дирихле:

$$\begin{aligned} du(t,x) &= [(a(u'_x))'_x + (b(x,u))'_x - f(x,u) + \lambda u]dt + d(x,u)dw(t) \\ u(0,x) &= u_0(x), u\big|_{x \in \partial X} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $t \ge 0$, $x \in X$ – ограниченный интервал в R, ∂X его граница, $w(t)$-винеровский процесс, $\lambda \in R$. Предполагается, что функции $a(u), b(x,u), f(x,u), d(x,u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным и существуют положительные константы $\mu_0, \mu_1, c', c'', \dot{c}, \ddot{c}, \tilde{c}, \tilde{\tilde{c}}, p_0 > 2, p_1$, такие, что $\forall u \in R, x \in X$ выполнены неравенства:

$$a'_u(u) \ge \mu_0, \tag{3}$$

$$\mu_0(|u|^{p_1}+|u|^2)\le a(u)u\le\mu_1(1+|u|^{p_1}+|u|^2), \tag{4}$$

$$|b'_u|\le c', |b'_x(x,u)|\le c''(1+|u|), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}0\le f'_u(x,u), |f'_x(x,u)|\le \dot{c}(1+|u|),\\ \mu_0|u|^{p_0}-\ddot{c}\le f(x,u)u\le\mu_1|u|^{p_0}+\ddot{c},\end{gathered} \tag{6}$$

$$|d'_u(x,u)|\le\tilde{c}, |d'_x(x,u)|\le\tilde{\tilde{c}}(1+|u|), |d(x,u)|^2\le\tilde{\tilde{c}}(1+|u|^2). \tag{7}$$

Эти условия обеспечивают существование и единственность решения на любом конечном интервале времени при условии, что $u_0\in L_2(\Omega,X)$. Решение понимается в смысле определения данного Крыловым Н.В. и Розовским Б.Л. [1] на тройке пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)\subset L_2(X)\subset \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(X)$.

При этом

$$u\in L_\infty([0,T],L_2(\Omega,X))\cap L_2([0,T]\times\Omega,\overset{\circ}{W}{}_2^1(X))\cap L_{p_0}([0,T]\times\Omega\times X)$$

$$\begin{gathered}\sup_{s\in[0,t]} M\|u(s)\|^2+\mu_0\int_0^t\int_X M(|u'_x|^2+2|u'_x|^{p_1}+|u|^{p_0})dxds\le\\ \le c_0t+M\|u_0\|^2\end{gathered} \tag{8}$$

$$M\|u(t)\|^2\le c_1+M\|u_0\|^2e^{-c_2t}, c_2>0 \tag{9}$$

$$M\|tu'_x\|^2+\mu_0\int_0^t s^2M\|u''_{xx}\|^2ds\le c_3\int_0^t s^2M(\|u'_x\|^2+\|u\|^2+1)ds, \tag{10}$$

где константы c_0,c_1,c_2,c_3 не зависят от u_0 и t. Везде $\|\cdot\|$–норма в $L_2(X)$.

Соответствие $u_0\to u(t)$ определяет полугруппу $\{S_t\}: S_tu_0=u(t)$, причём операторы S_t непрерывны в $L_2(\Omega,X)$.

Теорема 1. *Полугруппа $\{S_t\}$ обладает следующими свойствами: 1) $\{S_t\}$ равномерно ограничена в $L_2(\Omega,X)$; 2) существует ограниченное в $L_2(\Omega,X)$ поглощающее множество полугруппы $\{S_t\}$; 3) операторы S_t отображают множества, ограниченные в $L_2(\Omega,X)$, во множества, ограниченные в $L_2(\Omega,\overset{\circ}{W}{}_2^1(X))$, и тем самым компактные в $L_2(\Omega,X)$.*

Доказательство. Если множество $B\subset L_2(\Omega,X)$ лежит в шаре $\{u\in L_2(\Omega,X): M\|u\|^2<R\}$, то согласно оценке (9) $M\|S_tu_0\|^2=M\|u(t)\|^2\le c_1+R$, при всех $t\ge0$ для любого $u_0\in B$, т.е. $\{S_t\}$ равномерно ограничена в $L_2(\Omega,X)$. Далее, из (9) следует, что $\exists t_0(R)$ такое, что при $t\ge t_0$ $M\|S_tu_0\|^2\le 2c_1$, $\{u\in L_2(\Omega,X): M\|u\|^2<2c_1\}$ – поглощающее множество для полугруппы $\{S_t\}$. Таким образам, свойства 1) и 2) доказаны. Для доказательства 3) воспользуемся (10). Так как, в силу (8), при $M\|u_0\|^2\le R$ правая часть (10) ограничена константой

$M\|u'_x\|^2 \le c(R)(1+t)$, то, учитывая компактность вложения $L_2(\Omega, \overset{0}{W}{}_2^1(X))$ в $L_2(\Omega, X)$, получаем 3). □

Т е о р е м а 2. *Полугруппа* $\{S_t\}$ *обладает максимальным аттрактором, ограниченным в* $L_2(\Omega, \overset{0}{W}{}_2^1(X))$.

Справедливость теоремы 2 следует из теоремы 1.1, доказанной Бабиным А.В. и Вишиком М.И. [2].

Оценка сверху хаусдорфовой размерности инвариантных множеств полугруппы, порождённой стохастическим дифференциальным уравнением

Важной характеристикой аттрактора является его хаусдорфова размерность. Построим оценку сверху хаусдорфовой размерности максимального аттрактора полугруппы $\{S_t\}$.

Пусть Q – неслучайный, линейный, самосопряженный, положительно определенный оператор с плотной областью определения в $L_2(X)$. Потребуем, чтобы оператор Q^{-1} был вполне непрерывным. Положим $H = L_2(\Omega, X)$. Обозначим через H_s шкалу гильбертовых пространств, порождённых оператором Q. Скалярное произведение в H_s: $(u, v)_s = (Q^s u, v)$, $\|\cdot\|_s$ – норма в H_s. Очевидно, $H_s \subset H_\sigma$ при $\sigma \le s$, и это вложение вполне непрерывно при $\sigma < s$.

$Qe_i = \gamma_i e_i$, $0 < \gamma_1 \le \gamma_2 \le \gamma_3 \le \cdots$

Векторы $\{e_i\}$, очевидно, являются ортогональным базисом в каждом из $L_2(\Omega; H_s)$.

Рассмотрим линейное эволюционное уравнение

$$dv(t) = A(t)v(t)dt + B(t)v(t)dw(t), v(0) = v_0, \tag{11}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – линейные операторы в H_s, зависящие от t и ω. Нас будут интересовать свойства оператора сдвига G_t, который при фиксированном t сопоставляет начальному данному v_0 значение $v(t)$ решения задачи (11).

На A и B наложим ограничения.

У с л о в и е 1. $\forall\ (t, \omega)$: $A(t)\colon H_1 \to H_{-1}$; $B(t)\colon H_1 \to H$; $\forall\ v \in H_1$ *функции* $A(t)v$ *и* $B(t)v$ *измеримы по* (t, ω) *и при* $\forall\ v \in H_1$, $t \in [0, T]$ *они* F_t*-измеримы по* ω, *причём существуют положительные константы* C_1, C_2, C_3 *такие, что при всех* $v \in H_1, (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ *выполнены неравенства*

$$\|A(t)v\|_{-1} \le C_1 \|v\|_1, \tag{12}$$

$$2(A(t)v, v) + \|B(t)v\|^2 \le -C_2 \|v\|_1^2 + C_3 \|v\|^2 \tag{13}$$

Условие 1 обеспечивает существование и единственность решения уравнения (11), при любом $v_0 \in L_2(\Omega; X)$, причём $M\|v(t)\|^2 \le CM\|v_0\|^2$, где C не зависит от $t \in [0, T]$ и v_0. Тем самым определён оператор $G_t : L_2(\Omega; X) \to L_2(\Omega; X)$.

Для произвольного линейного оператора $J : L_2(\Omega, X) \to L_2(\Omega, X)$ определим

$$\hat{\mu}_n(J) = \sup_{V_n \subset H} \frac{\mu_n(J(B))}{\mu_n(B)}, \tag{14}$$

где V_n – произвольное линейное n-мерное подпространство в H, μ_n -n-мерная мера, индуцируемая скалярным произведением в H; B – единичный шар в V_n.

Через $B_r(y)$ обозначим замкнутый шар в H радиуса r с центром в точке $y \in H$, P^n – ортогональный проектор на V_n, E^n – эллипсоид в V_n с центром в нуле с полуосями $a_1,...,a_n, a_i > 0$, занумерованными в порядке убывания.

Пусть $\Lambda^n = \Lambda^n(a_1,...,a_n)$ – множество:

$\Lambda^n = \{y \in H : y = y_1 + y_2, y_1 \in E^n, y_2 \in (I - P^n)H, M\|y_2\|^2 \le a_n{}^2\}$.

Такие множества будем называть бицилиндрами. Через $\omega_n(\Lambda^n)$, обозначается число $\omega_n(\Lambda^n) = a_1...a_n$, равное с точностью до множителя объёму эллипсоида E^n.

Определение 1. *Пусть $Y \subset H, n \in N$, $k>0$. Отображение $S: Y \to H$ называется (k,n) -сжимающим множество Y в H, если существует $r_0>0$ такое, что для любой точки $y \in Y$ найдётся такой проектор $P^n = P^n(y)$ на n-мерное подпространство $V^n = V^n(y) \subset H$, что при $r<r_0$ $S(Y \cap B_r(y)) \subset Sy + r\Lambda^n(a_1,...,a_n)$, причём $\omega_n(\Lambda^n(a_1,...,a_n)) \le k$.*

Следуя Бабину А.В. и Вишику М.И. [2], мы получим оценку сверху хаусдорфовой размерности инвариантных множеств, используя понятие (k,n)-сжимаемости и квазидифференцируемости.

Теорема 3. *Пусть операторы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условию 1 и, кроме того, $\forall$ $v \in H$ почти, наверное, справедливо неравенство*

$$(A(t)v, v) + \frac{1}{2}\|B(t)v\|^2 \le ((-g(t)Q + h(t)I)v, v) \ , \tag{15}$$

где $h(t)$ и $g(t)$ неслучайные интегрируемые положительные функции. Тогда при каждом $n=1,2,3,...$ и при всех $t \in [0,T]$

$$\hat{\mu}_n(G_t) \le \exp[-\hat{g}(t)Sp_n(Q) + n\hat{h}(t)] \ , \tag{16}$$

где $\hat{g}(t) = \int\limits_0^t g(s)ds, \quad \hat{h}(t) = \int\limits_0^t h(s)ds, \quad Sp_n(Q) = \sum\limits_{i=1}^n \gamma_i$

и при $k \le \exp[-\hat{g}(t)Sp_n(Q) + n\hat{h}(t)]$ оператор G_t является (k,n)-сжимающим H в H.

Доказательство. Применяя формулу Ито к $\|v(t)\|^2$, возьмём математическое ожидание и воспользуемся (15). Тогда

$$M\|v(t)\|^2 \le M\|v_0\|^2 + 2M\int\limits_0^t ((-g(s)Q + h(s)I)v(s), v(s))ds$$

Если $B = \{v \in H : M\|v\|^2 \le 1\}$, тогда множество $G_t(B)$ лежит в $\widetilde{G}_t(B)$, где $\widetilde{G}_t$ оператор, порождённый уравнением

$$d\widetilde{v}(t) = (-g(t)Q + h_1(t)I)\widetilde{v}(t)dt + h_2(t)\widetilde{v}(t)dw(t) \ . \tag{17}$$

Здесь $h_1(t) + h_2^2(t) = h(t)$. Умножив (17) на e_i, получим

$$d\widetilde{v}_i(t) = -\gamma_i g(t)\widetilde{v}_i(t)dt + h_1(t)\widetilde{v}_i(t)dt + h_2(t)\widetilde{v}_i(t)dw(t).$$

Решение этого уравнения удовлетворяет равенству

$$M\left|\widetilde{v}_i(t)\right|^2 = M\left|v_{i0}\right|^2 \exp\left\{2\int_0^t \left(-g(s)\gamma_i + h(s)\right)ds\right\} \text{ или}$$

$$\sum_i M\left|\widetilde{v}_i(t)\right|^2 \exp\left\{-2\int_0^t \left(-g(s)\gamma_i + h(s)\right)ds\right\} = M\left\|v_0\right\|^2$$

Множество $\widetilde{G}_t(B)$ является эллипсоидом $\widetilde{G}_t(B) = \left\{v \in H : \sum_i \frac{M\left|v_i\right|^2}{\alpha_i^2} \le 1\right\}$, где $\alpha_i = \exp\left\{\int_0^t \left(-g(s)\gamma_i + h(s)\right)ds\right\}$.

Оценим $\hat{\mu}_n(G_t)$. Если V_n – линейное n-мерное подпространство H, то $\mu_n(B \cap V_n)$ не зависит от V_n, а $\mu_n\left(\widetilde{G}_t(B \cap V_n)\right) = \mu_n\left(\widetilde{G}_t(B) \cap \widetilde{G}_t(V_n)\right)$ максимально, если $\widetilde{G}_t(V_n)$ содержит n полуосей эллипсоида $\widetilde{G}_t(B)$ максимальной длины. В этом случае $\mu_n\left(\widetilde{G}_t(B) \cap \widetilde{G}_t(V_n)\right)/\mu_n(B) = \prod_{i=1}^n \alpha_i = \exp\left\{\int_0^t \left(-g(s)Sp_n(Q) + nh(s)\right)ds\right\}$. Так как $G_t(B) \subset \widetilde{G}_t(B)$, то $\hat{\mu}_n(G_t) \le \exp\left\{\int_0^t \left(-g(s)Sp_n(Q) + nh(s)\right)ds\right\}$. (k,n)-сжимаемость оператора G_t следует из определения, если взять ортогональный проектор H на n-мерное подпространство в H с базисом из векторов, направленных вдоль n максимальных полуосей эллипсоида $\widetilde{G}_t(B)$. Теорема доказана. □

Доказанная в этой теореме (k,n)-сжимаемость оператора G_t позволяет построить оценку сверху хаусдорфовой размерности множеств, инвариантных относительно S_t.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть Y подмножество гильбертова пространства H и* $S : Y \to H$ *отображение, определённое на Y. Отображение S называется равномерно квазидифференцируемым в H на Y, если для любого* $\breve{u} \in Y$ *существует линейный оператор* $S'(\breve{u}), S'(\breve{u}) : H \to H$, *что при любом* $u_1 \in Y$ *выполнена оценка*

$$M\left\|Su_1 - S\breve{u} - S'(\breve{u})(\breve{u} - u_1)\right\|^2 \le \gamma(M\left\|u_1 - \breve{u}\right\|^2)M\left\|u_1 - \breve{u}\right\|^2,$$

где $\gamma(z) \to 0$ *при* $z \to 0$ *и* γ *не зависит от* $\breve{u}$ *и* u_1. *Оператор* $S'(\breve{u})$ *называется квазидифференциалом в точке* $\breve{u}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть Y – компакт в H, отображение* $S : Y \to Y$ *равномерно квазидифференцируемо в H на Y, причём квазидифференциалы* $S'(\breve{u})$ *равномерно ограничены на Y, и при некотором n* $\hat{\mu}_n(S'(\breve{u})) \le k \le 1$, *где k не зависит от* $\breve{u} \in Y$, *и* $S'(\breve{u})$ *(k,n)-сжимает H в H. Пусть множество Y инвариантно относительно S, S(Y)=Y. Тогда хаусдорфова размерность Y в H не больше, чем n:* $\dim Y \le n$.

Справедливость теоремы 4 следует из теоремы 5.1 и замечания 5.1, изложенных Бабиным А.В. и Вишиком М.И. [2].

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\{S_t, t \ge 0\}$ *– полугруппа отображений* $S_t : Y \to Y$, *где Y компакт в H,* $S_tY = Y$, $\forall t > 0$ *и операторы* S_t *равномерно квазидифференцируемы в H* *на Y. При каждом $\breve{u} \in Y$ квазидифференциал $S_t'(\breve{u})$ совпадает с оператором $G_t = G_t(\breve{u})$, который является оператором сдвига, соответствующим некоторому уравнению вида (11):*

$$dv(t) = A(t)v(t)dt + B(t)v(t)dw(t), v(0) = v_0 ,$$

где операторы $A(t)=A(t,\breve{u})$ и $B(t)=B(t,\breve{u})$ удовлетворяют условию 1 и условию (15):

$$(A(t)v,v) + \frac{1}{2}\|B(t)v\|^2 \le ((-g(t)Q + h(t)I)v,v) .$$

Пусть для функций $g(t)=g(t,\breve{u})$ и $h(t)=h(t,\breve{u})$ из этого условия имеют место оценки

$$\hat{g}(t,\breve{u}) = \int_0^t g(s,\breve{u})ds \ge g^0(t) > 0,\ \hat{h}(t,\breve{u}) = \int_0^t h(s,\breve{u})ds \le h^0(t),$$

где функции $g^0(t)$ и $h^0(t)$ не зависят от $\breve{u} \in Y$, и $\exists N \in \mathbf{N}: -g^0(t)Sp_N(Q) + Nh^0(t) < 0$.

Тогда хаусдорфова размерность Y в H не превышает N. Если $\eta(n)$, $n > 0$, –такая возрастающая функция,

что $Sp_n(Q)/n \ge \eta(n+1)\ \forall n \in \mathbf{N}$, (18)

то $\dim Y \le \eta^{-1}\left(h^0(t)/g^0(t)\right)$,

где η^{-1} *– функция обратная* $\eta(n)$. (19)

Доказательство. Согласно теореме 3 для фиксированного $\breve{u} \in Y$ из условия

$$-g^0(t)Sp_N(Q) + Nh^0(t) < 0 \tag{20}$$

вытекает, что $\hat{\mu}_N(G_t) \le k < 1$ и, следовательно, $\hat{\mu}_N(S_t'(\breve{u})) \le k < 1\ \forall \breve{u} \in Y$. (k,N)-сжимаемость $S_t'(\breve{u})$ следует из теоремы 3. Отсюда, воспользовавшись теоремой 4, сразу получаем, что $\dim Y \le N$. Если имеет место (18), то для выполнения (20) достаточно, чтобы было $Sp_N(Q)/N \ge \eta(N+1) > h^0(t)/g^0(t)$, т.е. $N+1 > \eta^{-1}(h^0(t)/g^0(t))$. Следовательно, в качестве N можно взять целую часть от $\eta^{-1}(h^0(t)/g^0(t))$. Так как $\dim Y \le N$, то отсюда получаем (19). □

Оценка сверху хаусдорфовой размерности аттрактора

Вернёмся к уравнению (2), но с линейной главной частью (a-константа). Соответствующее ему уравнение в вариациях в точке $\breve{u}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &dv = [av''_{xx} + (b'_u(x,\breve{u})v)'_x - f'_u(x,\breve{u})v + \lambda v]dt + d'_u(x,\breve{u})vdw(t) \\ &v|_{\partial X} = 0, v(0,x) = v_0(x) \end{aligned} \tag{21}$$

Кроме выполнения условий (3) – (7), потребуем от b, f и d выполнения неравенств

$$\begin{aligned} &|b(u+z) - b(u) - b'_u(u)z| \le \hat{c}(1+|u|+|z|)^{p_2/2}|z|^{1+q/2}, \\ &|f(u+z) - f(u) - f'_u(u)z| \le \hat{c}(1+|u|+|z|)^{p_2}|z|^{1+q}, \\ &|d(u+z) - d(u) - d'_u(u)z| \le \hat{c}(1+|u|+|z|)^{p_2/2}|z|^{1+q/2}, \forall u,z \in R, x \in X, \end{aligned} \tag{22}$$

где $p_2 < 2, q \in (0,1]$ и $\hat{c}$ не зависят от $u,z \in R, x \in X$..

Теорема 6. *Пусть U максимальный аттрактор полугруппы $\{S_t\}$, порождённой уравнением (2). Выполнены перечисленные выше условия и $\forall u \in R, x \in X$ $f'_u(x,u) \ge -f_0, f_0 > 0$. Тогда $\forall \breve{u} \in U$ оператор сдвига G_t, порождённый* *уравнением (21), является квазидифференциалом оператора S_t на U в $L_2(\Omega, X)$ в точке $\breve{u}$, и оператор S_t при $t \geq 0$ равномерно квазидифференцируем на U в $L_2(\Omega, X)$. Хаусдорфова размерность U в $L_2(\Omega, X)$ ограничена сверху величиной*

$$\left[\frac{c'^2}{c_0\mu_0{}^2} + \frac{2(\lambda + f_0) + \tilde{c}^2}{c_0\mu_0}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Квазидифференцируемость оператора S_t устанавливается непосредственно по определению, при этом квазидифференциал оператора S_t совпадает с G_t – порожденным уравнением (21). Из наложенных условий вытекает, что

$$\left(A(t)v, v\right) + \tfrac{1}{2}\|B(t)v\|^2 \leq \left(av''_{xx} + (b'_u v)'_x + f'_u v + \lambda v, v\right) + \tfrac{1}{2}\|d'_u v\|^2 \leq$$

$$\leq -\tfrac{\mu_0}{2}\|v'_x\|^2 + \left(\tfrac{(c')^2}{2\mu_0} + \lambda + f_0 + \tfrac{\tilde{c}^2}{2}\right)\|v\|^2.$$

Следовательно, можно выбрать $g^0(t) = \frac{\mu_0 t}{2}$, $h^0(t) = \left(\frac{(c')^2}{2\mu_0} + \lambda + f_0 + \frac{\tilde{c}^2}{2}\right)t$, $Q = -\Delta$. Согласно известным свойствам собственных чисел оператора Лапласа $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j \geq c_0 n^2$. Поэтому в качестве $\eta(n)$ из теоремы 5 можно взять $\eta(n) = c_0 n^2$. Значит, $\eta^{-1}(r) = \sqrt{r/c_0}$, и по теореме 5 получаем оценку сверху для хаусдорфовой размерности аттрактора $\left[\frac{c'^2}{c_0\mu_0{}^2} + \frac{2(\lambda + f_0) + \tilde{c}^2}{c_0\mu_0}\right]^{\frac{1}{2}}$. Теорема доказана.□

Добавление стохастического слагаемого в уравнение приводит к увеличению оценки размерности аттрактора. В случае когда стохастическое слагаемое отсутствует, результаты совпадают с результатом Бабина А.В. и Вишика М.И. [2].

РЕЗЮМЕ

Для нелінійних стохастичних параболічних рівнянь (проблема Діріхле) доведено існування максимального атрактору, а також побудовано оцінку зверху для його Хаусдорфового виміру.

SUMMARY

For nonlinear stochastic parabolic equation (Dirichlet problem) it has proofed the existence of maximal attractor and it has built above estimation of its Hausdorf dimension.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов Н.В. Розовский Б.Л. Об эволюционных стохастических уравнениях / Итоги науки и техники . Современные проблемы математики. 14. – Москва, ВИНИТИ. – 1979.
2. Бабин А.В. Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности / Усп.мат.наук. – 1983. – Т.38, вып 4. – С.133-187.

Надійшла до редакції 09.10.1997 р.