УДК 517.946

# НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*М.А.Бородин*

В настоящей работе доказано существование глобального классического решения в некоторой нелинейной двухфазной параболической задаче со свободной границей. Мы используем новый метод, при помощи которого автор доказал существование глобального классического решения в многомерной двухфазной проблеме Стефана [1,2]. Заметим, что аналогичная задача изучается в работах [3, 4]. Однако в них авторам не удалось пока доказать существование классического решения.

Суть метода, используемого в работе, заключается в следующем: создается некоторая дифференциально-разностная аппроксимация задачи, устанавливаются равномерные оценки, а затем совершается предельный переход.

### § 1. Постановка задачи. Построение аппроксимирующих задач

Пусть $D=\{x\in R^3 : 0<R_1<|x|<R_2\}$ $D_T=D\times(0,T)$, $B_i=\{x\in R^3 : |x|<R_i,\ i=1,2\}$. Требуется найти функцию $u(x,t)$ и области $\Omega_T, G_T$ по следующим условиям:

$$\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t}=0 \text{ в } \Omega_T\cup G_T, \tag{1.1}$$

$$\Omega_T=\{(x,t)\in D_T : u(x,t)<1\},\quad G_T=\{(x,t)\in D_T : u(x,t)>1\}.$$

На известной части границы

$$u(x,t)=\varphi_i(x,t) \text{ на } \partial B_i\times(0,T). \tag{1.2}$$

На свободной (неизвестной) части границы $\gamma_T=D\cap\partial\Omega_T=D\cap\partial G_T$,

$$u^+=u^-=1,\ \left|\nabla u^+\right|^2-\left|\nabla u^-\right|^2=Q^2(x). \tag{1.3}$$

Начальные условия

$$u(x,0)=\psi(x) \text{ в } D,\ \psi(x)\big|_{\partial B_1}<1,\ \psi(x)\big|_{\partial B_2}>1. \tag{1.4}$$

Здесь $R_i, T, a$ – заданные положительные константы, $u^{\pm}(x,t)$ – предельные значения функции $u(x,t)$ на $\gamma_T$, взятые, соответственно, со стороны областей $G_T$ и $\Omega_T$.

В дальнейшем мы будем рассматривать более общую задачу, а именно: заменим условие (1.3) следующим:

$$u^+=u^-=1,\ \left|\nabla u^+\right|^2-\left|\nabla u^-\right|^2=\lambda\left(u_t^+ + u_t^-\right)+Q^2(x) \text{ на } \gamma_T, \tag{1.3*}$$

где $\lambda$ – заданная положительная константа.

Если в (1.3*) положить $Q(x)=0$, то мы получим граничное условие Стефана

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u^{+}}{\partial x_i}-\frac{\partial u^{-}}{\partial x_i}\right)\cos(n,x_i)=\lambda\cos(n,t), \tag{1.5}$$

где $n$ – нормаль к поверхности, направленная в сторону возрастания функции $u(x,t)$.

Если в (1.3*) положить $a=0$, $\lambda=0$, то получим известную проблему, возникающую при моделировании струйных и кавитационных течений в гидромеханике.

Перейдем к построению аппроксимирующих задач. Рассечем цилиндр $D_T\times(0,T)$ плоскостями $t=kh$, где $hN=T$, $N$ – заданное целое число, $k=1,2,\ldots,N$. Определим $\forall\varepsilon>0$ функцию $\chi_\varepsilon(x)\in C^l\left(R^l\right)$, $l>1$ следующим образом:

$$\chi_\varepsilon(x)=1\ \forall x\le 1,\ \ \chi_\varepsilon(x)=0\ \ \forall x\ge 1+\varepsilon,\ \ \chi_\varepsilon'(x)\le 0\ .$$

Обозначим через $u_k(x,h,\varepsilon)$, $F_k(x,h,\varepsilon)$ функции, которые являются решениями задачи:

$$\Delta u_k-a\frac{u_k-u_{k-1}}{h}=-\lambda\frac{\chi_\varepsilon(u_k)-\chi_\varepsilon(u_0)}{h}-\frac{1}{2}Q^2(x)\sum_{l=0}^{k-1}\chi_\varepsilon'(u_l)+\frac{a}{h}F_{k-1}\qquad\forall x\in D, \tag{1.6}$$

$$u_k(x,h,\varepsilon)=\varphi_i(x,kh)\ \ \forall x\in\partial B_i,\ u_0(x)=\psi(x), \tag{1.7}$$

$$\Delta F_k-a\frac{F_k}{h}=-\lambda\frac{\chi_\varepsilon(u_k)-\chi_\varepsilon(u_0)}{h}-\frac{1}{2}Q^2(x)\sum_{l=0}^{k-1}\chi_\varepsilon'(u_l)\qquad\forall x\in D, \tag{1.8}$$

$$F_k(x,h,\varepsilon)=0\ \ \ \forall x\in\partial B_i,\ \ F_0(x,h,\varepsilon)=0\ \ \ \forall x\in D\ . \tag{1.9}$$

В дальнейшем нами будет доказано, что линейные интерполяции функций $\{u_k(x,h,\varepsilon)\}$ при $\varepsilon\to 0$ сходятся к решению задач (1.1), (1.2), (1.3*), (1.4).

Установим разрешимость задачи (1.6)-(1.9).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $\psi(x)\in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $\varphi_i(x,kh)\in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $Q(x)\in C^{\alpha}\left(\overline{D}\right)$, $\alpha\in(0,1)$. *Тогда* $\forall\varepsilon>0$, $\forall h>0$ *задача (1.6)-(1.9) однозначно разрешима, а функции*

$$u_k(x,h,\varepsilon),\ F_k(x,h,\varepsilon)\in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right).$$

Задача (1.6)-(1.9) может быть исследована последовательно, начиная с $k=1$. Сначала находим функцию $F_{k-1}(x,h,\varepsilon)$ (заметим, что $F_0=0$), затем эту функцию следует подставить в правую часть уравнения (1.6) и исследовать соответствующую краевую задачу для функции $u_k(x,h,\varepsilon)$. Функцию $u_k(x,h,\varepsilon)$ подставляем в правую часть уравнения (1.8) и находим функцию $F_k(x,h,\varepsilon)$ и так далее. Разрешимость каждой из задач, перечисленных выше, в пространствах $C^{2+\alpha}\left(\overline{D}\right)$ хорошо известна [5].

Обозначим через

$$w_k(x,h,\varepsilon)=u_k(x,h,\varepsilon)-F_k(x,h,\varepsilon)\,. \tag{1.10}$$

Вычтем (1.8) из (1.6) и учтем (1.7), (1.9), (1.10). В результате получим

$$\Delta w_k-a\frac{w_k-w_{k-1}}{h}=0\quad\forall x\in D, \tag{1.11}$$

$$w_k(x,h,\varepsilon)=\varphi_i(x,kh) \quad \text{на } \partial B_i,\ w_0(x)=\psi(x) \text{ в } D. \tag{1.12}$$

**§ 2. Равномерные оценки**

Из (1.10) получаем структурную формулу

$$u_k(x,h,\varepsilon)=w_k(x,h,\varepsilon)+F_k(x,h,\varepsilon),$$

которая показывает, что функция $u_k(x,h,\varepsilon)$ представима в виде суммы двух функций, одна из которых является решением заведомо более простой задачи, чем исходная, а вторая – описывает поведение функции $u_k(x,h,\varepsilon)$ вблизи сводной границы.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть выполнены предположения теоремы 1.1 и*

$$\Delta\psi < D \text{ в } D,\ 0 < c_1 h \le \varphi_i(x,(k-1)h)-\varphi_i(x,kh) \le c_2 h \text{ на } \partial D. \tag{2.1}$$

*Тогда найдутся такие константы* $c_3$ *и* $c_4$, *что всюду в* $\overline{D}$ *имеет место оценка*

$$0 < c_3 h \le w_{k-1}(x,h,\varepsilon)-w_k(x,h,\varepsilon) \le c_4 h, \tag{2.2}$$

*где константы* $c_i$ *не зависят от* $k,h,\varepsilon$.

На границе оценка (2.2) очевидна. Для того, чтобы доказать ее внутри области $D$, необходимо из (1.11) составить уравнение

$$\Delta(w_{k-1}-w_k)-a\frac{w_{k-1}-w_k}{h}=-a\frac{w_{k-2}-w_{k-1}}{h} \tag{2.3}$$

и воспользоваться тем, что в точках локального экстремума $\Delta(w_{k-1}-w_k)$ имеет определенный знак.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1.1, соответствующие условия согласования функций* $\psi(x)$ *и* $\varphi_i(x,kh)$ *при* $k=0$ *на* $\partial D$ *и*

$$\|\varphi_i(x,kh)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}+\left\|\frac{\varphi_i(x,kh)-\varphi_i(x,(k-1)h)}{h}\right\|_{C^{\alpha}(\overline{D})} \le c_1.$$

*Тогда существует такая константа* $c_2$, *что*

$$\|w_k(x,h,\varepsilon)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}+\left\|\frac{w_k(x,h,\varepsilon)-w_{k-1}(x,h,\varepsilon))}{h}\right\|_{C^{\alpha}(\overline{D})} \le c_2, \tag{2.4}$$

*где* $c_1,c_2$ *не зависят от* $k,h,\varepsilon$.

Для доказательства этой теоремы используется метод, предложенный в [5]. Пусть $\zeta_1(x),\zeta_2(x),\ldots,\zeta_l(x)$ неотрицательные бесконечно дифференцируемые финитные функции, дающие в сумме единицу при $x\in\overline{D}$, то есть

$$\sum_{k=1}^{l}\zeta_k(x)=1 \quad \forall x'\in\overline{D}.$$

Функции $\{w_{k-1}-w_k\}$ представим в виде

$$\sum_{s=1}^{l}\left[w_{k-1}^s(x,h,\varepsilon)-w_k^s(x,h,\varepsilon)\right]=w_{k-1}(x,h,\varepsilon)-w_k(x,h,\varepsilon),$$

где $w_{k-1}^s(x,h,\varepsilon)-w_k^s(x,h,\varepsilon)=\zeta_s(x)[w_{k-1}(x,h,\varepsilon)-w_k(x,h,\varepsilon)]$.

Учитывая (2.3), получим уравнение, которому будет удовлетворять функции $\left\{w_{k-1}^s - w_k^s\right\}$.

$$\Delta\left(w_{k-1}^s - w_k^s\right) - a\frac{w_{k-1}^s - w_k^s}{h} = -a\frac{w_{k-2}^s - w_{k-1}^s}{h} - \left(f_k^s - f_{k-1}^s\right), \tag{2.5}$$

где $f_k^s = \nabla(w_{k-1} - w_k)\nabla\zeta_s + (w_{k-1} - w_k)\Delta\zeta_s$. Пусть $K_R(x_0)$ – шар с центром в точке $x_0$, $K_R(x_0) \subset D$. Введем в рассмотрение фундаментальные решения

$$\Gamma_n(|x-y|) = \frac{ih}{2\pi a}\oint_{\partial L^+(\rho)} \frac{Sh\sqrt{z}(R-|x-y|)}{4\pi|x-y|Sh\sqrt{z}R}\frac{dz}{\left(1-\frac{zh}{a}\right)^n},$$

$$L^+(\rho) = \left\{z = \xi + i\eta : \operatorname{Re} z > 0,\ |z| < \rho,\ \rho \geq \frac{2a}{h}\right\},$$

$\partial L^+(\rho)$ – граница этого множества. Используя формулу Грина, с помощью ядер $\{\Gamma_n(|x-y|)\}$ можно построить интегральное представление решения системы (2.5) в точке $x_0$ и получить оценку (2.4).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.1. Тогда существуют такие константы* $c_1$ *и* $c_2$, *что имеет место всюду в* $\overline{D}$ *оценка*

$$0 < c_1 h \leq u_{k-1}(x,h,\varepsilon) - u_k(x,h,\varepsilon) \leq c_2 h,$$

*где константы* $c_1, c_2$ *не зависят от* $k, h, \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы проводится тем же способом, что и доказательство теоремы 2.1, но уравнение для функций $\{u_{k-1} - u_k\}$ имеет более сложный вид

$$\Delta(u_{k-1} - u_k) - a\frac{u_{k-1} - u_k}{h} = -a\frac{w_{k-2} - w_{k-1}}{h} + \lambda\frac{\chi_\varepsilon(u_k) - \chi_\varepsilon(u_{k-1})}{h} + \frac{1}{2}Q^2(x)\chi'_\varepsilon(u_{k-1}).$$

Однако все технические трудности удается преодолеть.

Лемма. *Пусть* $f(x) \in C^l(\overline{D})$, $l \geq 1$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - a\frac{u}{h} = -\frac{f}{h} \quad \forall x \in D.$$

*Тогда* $\forall x_0 \in D$: $dist(x_0, \partial D) \geq h^\sigma$, $\sigma \in (0,1/2)$, *справедливы оценки*

$$|u(x_0)| \leq c(\sigma_1)\max_{x\in D}|u(x)|h^{\sigma_1} + \frac{1}{a}\max_{x\in D}|f(x)|, \tag{2.6}$$

$$\left|D^l u(x_0)\right| \leq c(\sigma_2)\max_{x\in D}|u(x)|h^{\sigma_2} + \frac{1}{a}\max_{x\in D}\left|D^l f(x)\right|, \tag{2.7}$$

*где* $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, *константы* $c(\sigma_i)$ *не зависят от* $x_0, h$.

Оценки (2.6) и (2.7) могут быть получены непосредственно из интегрального представления решения уравнения.

Применим эту лемму к функциям $\{F_k(x,h,\varepsilon)\}$. Это даст:

Т е о р е м а 2.4. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.2. Тогда*

$$\forall x \in D : dist\left[x, \partial\{u_k(x,h,\varepsilon) > 1+\varepsilon\}\right] \geq h^{\sigma},\ \sigma \in (0, 1/2)$$

*имеет место оценка*

$$|F_k(x,h,\varepsilon)| + \left|D^l F_k(x,h,\varepsilon)\right| \leq ch^{\sigma_1},\ \sigma_1 > 0, \tag{2.8}$$

*где константы* $c, \sigma_1$ *не зависят от* $k, h, \varepsilon$.

Из этой теоремы получим

Т е о р е м а 2.5. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.2. Тогда*

$$\forall \overline{D'} \subset D:\ dist\left[\partial D', \partial\{u_k(x,h,\varepsilon) > 1+\varepsilon\}\right] \geq h^{\sigma}$$

*имеет место оценка*

$$\|u_k\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D'})} + \left\|\frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right\|_{C^{\alpha}(\overline{D'})} \leq c, \tag{2.9}$$

*где* $c$ *не зависит от* $k, h, \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы следует из (1.10), (2.8).

## § 3. Предельный переход

Пусть $\eta(x,t) \in C^{2,1}(\overline{D}_T)$, равная нулю на $\partial D$ вместе со своими первыми производными и при $t = T$. Умножим уравнение (1.6) на $h\eta(x,kh)$, проинтегрируем по области $D$ и просуммируем по $k$ от 1 до $N$. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} &h\sum_{k=1}^{N}\int_D \left\{-u_k\Delta\eta_k + ah^{-1}(u_k - u_{k-1})\eta_k - \lambda\chi_\varepsilon(u_k)h^{-1}(\eta_{k-1} - \eta_k)\right\}dx - \\ &- h\sum_{k=1}^{N}\int_D \frac{1}{2}Q^2(x)\chi'_\varepsilon(u_{k-1})\eta_k dx + h\sum_{k=1}^{N}\int_D \Delta\psi_k h^{-1}(F_{k-1} - F_k)dx + \\ &+ \lambda\int_D \chi_\varepsilon(u_0)\eta(x,h)dx = 0,\quad \Delta\psi_k = -h\sum_{l=k}^{N}\Delta\eta_k. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнены следующие предположения* $\psi(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi_i(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}_T)$, $Q(x) \in C^{1+\alpha}(\overline{D})$, $Q(x) \neq 0$, $\Delta\psi \leq 0$, $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} \leq 0$, *выполнены соответствующие условия согласования. Тогда* $\forall T > 0$ *существует классическое решение задачи (1.1), (1.2), (1.3*),(1.4), причем*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}_T) \cap \left\{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T \setminus \gamma_0) \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{G}_T \setminus \gamma_0)\right\},\ \gamma_T \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2},$$

$$\gamma_0 = \{x \in D : \psi(x) = 1\}.$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} u(x,t,h,\varepsilon) = u_{k-1} &+ \left(\frac{u_k - u_{k-1}}{h} - \frac{u_{k+1} - u_k}{h}\right)\frac{[t-(k-1)h]^2}{h} + \\ &+ \left(\frac{u_{k-1} - u_k}{h} - \frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right)\frac{[t-(k-1)h]^3}{h^2},\quad \forall t \in [(k-1)h, kh]. \end{aligned}$$

Сначала сделаем дополнительное предположение, что $\Delta\psi < 0, \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t} < 0$ $\forall (x,t) \in \overline{D}_T$. Тогда из теоремы 2.3 следует, что семейство функций $\{u(x,t,h,\varepsilon)\}$ равномерно ограничено и $\{u_t(x,t,h,\varepsilon)\}$ отграничены от нуля, а из теоремы 2.5 следует, что поверхности уровня $u(x,t,h,\varepsilon) = 1+\varepsilon+h^\sigma$ могут быть заданы уравнениями $t = w(x,h,\varepsilon) \in C^{1+\alpha}$, и в областях $u(x,t,h,\varepsilon) > 1+\varepsilon+h^\sigma$ для $u(x,t,h,\varepsilon)$ имеют место равномерные оценки норм (2.9). Это позволяет совершить предельный переход в тождестве (3.1) и доказать, что на свободной границе выполнено условие (1.3*). После этого при помощи еще одного предельного перехода избавляемся от дополнительных предположений, сделанных вначале. Так как, в силу условия (1.3*) $|\nabla u^+ \neq 0|$ на $\gamma_T$, то, используя теорему о неявных функциях, можно утверждать, что уравнение свободной границы представимо в виде $x_i = f(x',t), x = (x_i, x')$, причем $f(x',t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы 3.1. Тогда* $\forall T > 0$ *существует классическое решение задачи (1.1)-(1.4), причем*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}_T) \cap \{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T \setminus \gamma_0) \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{G}_T \setminus \gamma_0)\}\ \gamma_T \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}.$$

Как оказалось, равномерные оценки, полученные в предыдущей теореме, не зависят от $\lambda$. Это позволяет совершить предельный переход при $\lambda \to 0$. Заметим, что этим же методом может быть исследована и соответствующая стационарная задача.

**РЕЗЮМЕ**

В роботі за допомогою нового методу доведено існування глобального розв'язку двофазної параболічної задачі з невідомою межею.

Суть цього методу міститься в наступному: спочатку створюється еліптична диференціально-різнецева апроксимація задачі і установлюється її розв'язність. Потім доводяться рівномірні оцінки і відбувається граничний перехід.

**SUMMARY**

In this work we intoduce a new method which allowed to prove the existence of the global classical solution in the two phase parabolic problem of the free boundary.

The essence of the method consists of the following: at first we construct a sequence of elliptic difference – differential-approximating problems and establish their solvability. Then we prove some uniform estimates and pass to the limit.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин М.А. Двухфазная контактная задача // УМЖ, 1995. – 2. – т.47. – С.158-167.
2. Borodin M.A. Existence of classic solution of a two phase multidimensional Stefan problem on any finite time interval // Intern. Ser. Numer. Math., 1992, v.106, pp.97-103.
3. Caffarelli L.A. Uniform Lipschiz regularity of a singular perturbation problem // Diff. and Eqs., 8 (7), 1995, pp.1585-1590.
4. Caffarelli L.A., Vazques J.L. A free baundary problem for the heat equation arising in flame propagation // Trans. Amer. Math. Soc., 347, 1995, pp.411-441.
5. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – С.576.

*Надійшла до редакції 02.10.1997 р.*