МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Р. МЕРТОНА

Бондарев Б.В., Полшков Ю.Н.

Р.Мертон (лауреат Нобелевской премии по экономике 1997 года) в работе [1] рассмотрел модель рынка ценных бумаг. Согласно этой модели портфель инвестора состоит из двух активов: банковского счета $B=(B_t)_{t\ge0}$ и акций $S=(S_t)_{t\ge0}$, функционирующих во времени. Относительно банковского счета предполагалось, что $B=(B_t)_{t\ge0}$ детерминированная функция $B_t= B_0 e^{rt}$, $B_0 > 0$, $r \ge 0$, подчиняющаяся очевидным образом уравнению

$$\frac{dB_t}{B_t} = rt\,. \tag{1}$$

Для описания эволюции стоимости акции, представляющей по своей природе "рисковую" ценную бумагу, предполагалось, что все рассмотрения происходят на винеровском стохастическом базисе [2] и в качестве модели взята модель "экономического" броуновского движения П.Самуэльсона [3], согласно которой

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma W_t\}, \tag{2}$$

где $(W_t)_{t\ge0}$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma>0$, $\mu \in R^+$. Воспользовавшись формулой Ито [4] убеждаемся в том, что

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

с начальным значением S_0.

В соответствии с (2) цена акции $S=(S_t)_{t\ge0}$ зависит от трех параметров: случайности, коэффициента волатильности $\sigma>0$, коэффициента роста $\mu>0$. Везде в дальнейшем будем считать, что величина процентной ставки $r \ge 0$ фиксирована и выполняется условие $r<\mu$, в противном случае имело бы смысл пользоваться лишь банковским счетом.

Пусть $0\le u_1(t)\le 1$ – доля капитала, инвестируемая в акции, тогда $1- u_1(t)$ – доля капитала на банковском счете. Будем рассматривать лишь самофинансируемые стратегии [2], т.е. такие, в которых нет притока капитала извне и нет его оттока, а все изменения могут происходить лишь за счет собственных внутренних средств, находящихся на банковском счете и в акциях. Тогда стоимость$(X_t)_{t\ge0}$ инвестиционного портфеля в момент времени $t \ge 0$ будет описываться уравнением

$$dX_t = (1-u_1(t))X_t r dt + u_1(t) X_t \mu dt + u_1(t)\sigma X_t dW_t\,. \tag{3}$$

Пусть $u_2(t,x)$ характеризует интенсивность потребления, тогда стоимость инвестиционного портфеля $(\xi_t)_{t\ge0}$ с учетом потребления будет описываться стохастическим дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} d\xi_t &= (1-u_1(t))\xi_t r dt + u_1(t)\xi_t \mu dt - u_2(t,\xi_t)dt + u_1(t)\sigma\xi_t dW_t, \\ \xi_t\big|_{t=s} &= y > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Задача в [1] состояла в максимизации среднего значения общей дисконтирован-ной полезности

$$J_{s,y}(u_1,u_2) = E_{s,y}\int_s^T e^{-\rho t}F[u_2(t,\xi_t)]dt, \tag{5}$$

где $F(x)$ – заданная функция полезности, $\rho > 0$ – степень дисконтирования, $y=\xi_t/_{t=s}$ – стоимость инвестиционного портфеля в начальный момент времени s на управлении $(u_1(t),u_2(t,x))$, где $0 \le u_1(t) \le 1$, $u_2(t,x) \ge 0$.

В предположении $F(x) = x^\gamma$, $0 < \gamma < 1$ Р. Мертон в [1] показал, что оптимальными будут управления

$$u_1^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)}, u_2^*(t,x) = [e^{\rho t}g(t)]^{\frac{1}{\gamma-1}}x,$$

где

$$g(t) = e^{-\rho t}[\frac{1-\gamma}{\rho - z\gamma}(1-e^{\frac{(\rho - z\gamma)(T-t)}{1-\gamma}})]^{1-\gamma}. \tag{6}$$

Здесь $z = \dfrac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r$. Причем

$$\max_{u_1,u_2} J_{s,y}(u_1,u_2) = g(s)y^\gamma. \tag{7}$$

Несмотря на многочисленные применения модели Р. Мертона, все же более реалистичной следует считать модель, согласно которой эволюция цен акций описывается случайным процессом

$$S_t^\varepsilon = S_0 \exp\{\mu t + \sigma\zeta_\varepsilon(t)\}, \tag{8}$$

или

$$\frac{dS_t^\varepsilon}{S_t^\varepsilon} = \mu dt + \sigma\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\eta(t/\varepsilon)dt,$$

где

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\eta(s/\varepsilon)ds = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\eta(s)ds.$$

Здесь $\eta(t)$ – некоторый стационарный случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий какому-либо из условий слабой зависимости [5], [6]; $\varepsilon > 0$ –малый параметр.

При достаточно широких предположениях [6] последовательность $\{\zeta_\varepsilon(t), t \in [0,T]\}$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к стандартному винеровскому процессу $\{W_t, t \in [0,T]\}$, т.е. возмущения (8) будут "физическим" белым шумом, который превращается в белый шум лишь в пределе, а в допредельном случае может существовать достаточно сильная зависимость между возмущениями в близкие моменты времени.

Если эволюция стоимости инвестиционного портфеля будет описываться процессом (8), то аналогом (4) будет уравнение

$$d\xi_t^\varepsilon = (1-u_1(t))\xi_t^\varepsilon r dt + u_1(t)\xi_t^\varepsilon \mu dt - u_2(t,\xi_t^\varepsilon)dt + u_1(t)\sigma\xi_t^\varepsilon d\zeta_\varepsilon(t),$$
$$\xi_t^\varepsilon|_{t=0} = y > 0. \tag{9}$$

Задача будет состоять в нахождении ε-оптимальных управлений системой (9) в смысле функционала качества

$$J^{\varepsilon}(u_1,u_2) = E\int_0^T [e^{-\rho t}u_2(t,\xi_t^{\varepsilon})]^{-\gamma}\,dt, \tag{10}$$

где $0<\gamma<+\infty$. Наша цель – найти управления $0\le u_1^*\le 1, u_2^*\ge 0$, указать величину $J_0>0$ и функцию $p(\varepsilon)$ так, чтобы

$$J_{\varepsilon} = \min_{0\le u_1\le 1, u_2\ge 0} J^{\varepsilon}(u_1,u_2) \le J^{\varepsilon}(u_1^*,u_2^*) \le J_0 + p(\varepsilon). \tag{11}$$

Причем $J_{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} J_0$, $p(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. В силу того, что предельным при $\varepsilon\to 0$ для уравнения (9) будет ([7], с.242) уравнение

$$d\xi_t^0 = (1-u_1(t))\xi_t^0 r dt + u_1(t)\xi_t^0\mu dt + \frac{\sigma^2 u_1^2(t)}{2}\xi_t^0 dt - u_2(t,\xi_t^0)dt + \sigma u_1(t)\xi_t^0 dW_t,$$
$$\xi_t^0\big|_{t=0} = y > 0, \tag{12}$$

тогда в качестве ε-оптимальных управлений системой (9) имеет смысл попробовать оптимальные управления системой (12) с тем же самым функционалом качества. Оптимальные управления в данном случае находятся в явном виде, в явном виде также выписываются J_0 и $p(\varepsilon)$.

Дальнейший план изложения следующий: будет изучаться представление $\zeta_{\varepsilon}(t) = W_{\varepsilon}(t) + \rho_{\varepsilon}(t), t\in[0,T]$, где $W_{\varepsilon}(t), t\in[0,T]$ – семейство стандартных винеровских процессов, а $\rho_{\varepsilon}(t), t\in[0,T]$ стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$ в определенном смысле с необходимой для дальнейших исследований скоростью; следующий этап посвящен нахождению оптимальных управлений системой (12) с функционалом качества (10); в заключении будет найдена оценка вида (11).

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, являющийся обобщением известного неравенства Гельдера на случай "m"-случайных величин.

Лемма. *Пусть* $p_i>0, i=\overline{1,m}$ *и* $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i = 1$, *тогда, если* $\sum_{i=1}^{m} E|\xi_i|^{p_i} < +\infty$, *то справедливо*

$$\left|E\prod_{i=1}^{m}\xi_i\right| \le \prod_{i=1}^{m}\left(E|\xi_i|^{p_i}\right)^{1/p_i}. \tag{13}$$

Из неравенства (13) в частности при $p_1 = \ldots = p_m = 1/m$ вытекает неравенство

$$E|\xi_1\ldots\xi_m| \le \left(E|\xi_1|^m\right)^{1/m}\ldots\left(E|\xi_m|^m\right)^{1/m}. \tag{14}$$

Пусть $\eta(t), t\ge 0$ – стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания [5] с коэффициентом перемешивания $\varphi(\tau)\to 0$ при $\tau\to +\infty$ таким, что

$$0 < c = \int_0^{+\infty}\varphi^{1/2}(\tau)d\tau < +\infty.$$

Будем также предполагать, что выполнено условие Крамера [5], т.е.

$$E|\eta(t)|^m \le \frac{b^2 H^{m-2} m!}{2}, m\ge 2, b>0 \tag{15}$$

и

$$0 < 1 = 2\int_0^{+\infty} E\eta(0)\eta(t)dt < +\infty. \tag{16}$$

В работе [8] получено представление

$$\zeta_\varepsilon(t) = W_\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t), t \in [0,T], \tag{17}$$

где $W_\varepsilon(t), t \in [0,T]$ – некоторое семейство стандартных винеровских процессов, случайный процесс $\rho_\varepsilon(t)$ в равномерной метрике по вероятности стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (15), (16), (17), *тогда при* $z > 0$, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{64H^2c^2z^2}$ *справедлива оценка*

$$E\left|e^{-z\zeta_\varepsilon(t)} - e^{-zW_\varepsilon(t)}\right| \le 7\sqrt{\varepsilon}zbce^{Tz^2}. \tag{18}$$

Доказательство. В силу того, что случайный процесс $\eta(t), t \ge 0$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания [5], имеем

$$\sup_{A \in F_0^t, B \in F_{t+\tau}^{+\infty}} \left|P(B/A) - P(B)\right| = \varphi(\tau) \to 0, \tau \to +\infty, \tag{19}$$

где F_0^t – σ-алгебра, порожденная процессом $\eta(s), 0 \le s \le t$, $F_{t+\tau}^{+\infty}$ – σ-алгебра, порожденная процессом $\eta(s), t+\tau \le s < +\infty$. И, если $E|\eta(t)|^p < +\infty, p > 1$, то при $s \ge t$ имеет место оценка

$$E\left|E\left\{\eta(s)/F_0^t\right\}\right|^p \le 2^p\left[\varphi(s-t)\right]^{p-1}E|\eta(s)|^p. \tag{20}$$

Действительно, пусть сначала $\eta(s)$ представима как конечная сумма вида

$$\eta_n(s) = \sum_j \lambda_j \chi(B_j),$$

где $\chi(B_j)$ – индикатор множества B_j. Пусть $A \in F_0^t$, $\eta(s)$ – $F_{t+\tau}^{+\infty}$ – измерима, тогда

$$\begin{aligned}
&\left|E\left\{\eta_n(s)/F_0^t\right\}\right| \le \sum_j |\lambda_j| \left|P(B_j/A_i) - P(B_j)\right| \le \\
&\le \left(\sum_j |\lambda_j|^p \left[P(B_j/A_i) + P(B_j)\right]\right)^{1/p} \left(\sum_j \left|\left[P(B_j/A_i) - P(B_j)\right]\right|\right)^{1/q} \le \\
&\le \left(\sum_j |\lambda_j|^p \left[P(B_j/A_i) + P(B_j)\right]\right)^{1/p} \times
\end{aligned} \tag{21}$$

Здесь [5] $\bigcup_+ B_j$ – объединение тех множеств B_j, для которых разность $P(B_j/A_i) - P(B_j) \ge 0$, $\bigcup_- B_j$ – объединение множеств B_j, для которых $P(B_j/A_i) - P(B_j) < 0$. Из (21) с учетом (19) получим

$$\left|E\left\{\eta_n(s)/F_0{}^t\right\}\right| \le \left(\sum_j \left|\lambda_j\right|^p \left[P\left(B_j/A_i\right)+P\left(B_j\right)\right]\right)^{1/p} \left[2\varphi(\tau)\right]^{1/q}.$$

Отсюда имеем

$$E\left|E\left\{\eta_n(s)/F_0{}^t\right\}\right|^p \le \sum_i\sum_j \left|\lambda_j\right|^p \left[P\left(B_j/A_i\right)+P\left(B_j\right)\right]P\left(A_i\right)\left[2\varphi(\tau)\right]^{p/q} \le$$
$$\le 2\sum_j \left|\lambda_j\right|^p P\left(B_j\right)\left[2\varphi(\tau)\right]^{p/q}. \qquad (22)$$

Из (22) с учетом $1/q = \dfrac{p-1}{p}$ имеем оценку (20). Чтобы доказать оценку (20) полностью, надо построить последовательность $\eta_n(s)$, которая представима как конечная сумма и для которых

$$E\left|\eta_n(s)-\eta(s)\right|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Далее пусть

$$\mu_t = \int_0^{+\infty} E\left\{\eta(s)/F_0{}^t\right\}ds - V_0,$$

$$V_t = \int_t^{+\infty} E\left\{\eta(s)/F_0{}^t\right\}ds,\ t \ge 0.$$

Случайный процесс V_t в условиях теоремы 1 определен. Действительно, в силу (20) имеем

$$\int_t^{+\infty} E\left|E\left\{\eta(s)/F_0{}^t\right\}\right|ds \le \int_t^{+\infty}\left(E\left|E\left\{\eta(s)/F_0{}^t\right\}\right|^2\right)^{1/2} ds \le$$
$$\le \int_t^{+\infty}\left(E\left|\eta(s)\right|^2\cdot 2^2\varphi(s-t)\right)^{1/2} ds \le 2bc < +\infty.$$

Более того, при $m \ge 2$ справедлива оценка

$$E\left|V_t\right|^m \le \frac{4b^2c^2(2Hc)^{m-2}m!}{2},$$
$$EV_t = 0, \qquad (23)$$

где

$$c = \int_0^{+\infty}\varphi^{1/2}(\tau)d\tau < +\infty.$$

Действительно, в силу (14) имеем

$$E\left|V_t\right|^m \le \int_t^{+\infty}\ldots\int_t^{+\infty} E\left|E\left\{\eta(s_1)/F_0{}^t\right\}\ldots E\left\{\eta(s_m)/F_0{}^t\right\}\right|ds_1\ldots ds_m \le$$
$$\le \left(\int_t^{+\infty}\left(E\left|E\left\{\eta(s)/F_0{}^t\right\}\right|^m\right)^{1/m} ds\right)^m \le \left(\int_t^{+\infty}\left(2^m\left[\varphi(s-t)\right]^{m-1}E\left|\eta(s)\right|^m\right)^{1/m} ds\right)^m \le$$

$$\le 2^m \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^m E|\eta(s)|^m .$$

Откуда в силу условия Крамера имеем оценку (23). Так как

$$\int_0^{+\infty} E\left|E\left\{\eta(s)/F_0^{\,t}\right\}\right| ds = \int_0^{t} E\left|E\left\{\eta(s)/F_0^{\,t}\right\}\right| ds + \int_t^{+\infty} E\left|E\left\{\eta(s)/F_0^{\,t}\right\}\right| ds \le$$

$$\le \int_0^{t} E|\eta(s)| ds + \int_t^{+\infty} E\left|E\left\{\eta(s)/F_0^{\,t}\right\}\right| ds < +\infty,$$

то убеждаемся в том, что мартингал μ_t также определен. Из [8] следует, что процесс $\int_0^t \eta(s) ds$ является спиралью, процесс μ_t – квадратично интегрируем мартингал и спираль. Поскольку μ_t – спираль, то его квадратическая характеристика $\langle \mu, \mu \rangle_t$ также является спиралью. Воспользовавшись леммой 2 и леммой 3 из [8] имеем

$$E\mu_t^{\,2} = tE\mu_1^{\,2} = t .$$

Следует отметить, что

$$\varepsilon \cdot E\langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon} = 2t \int_0^{+\infty} E\eta(0)\eta(s) ds = t$$

и у мартингала $\sqrt{\varepsilon}\mu_{t/\varepsilon}$ непрерывные траектории, т.е.

$$\sqrt{\varepsilon}\mu_{t/\varepsilon} = W_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} W(t/\varepsilon),$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Процесс

$$\rho_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \cdot V_{t/\varepsilon},$$

где V_t – стационарный в узком смысле случайный процесс, удовлетворяющий условию (23).

В силу (23) имеем

$$\left(E\left|e^{-z \cdot \zeta_\varepsilon(t)} - e^{-zW_\varepsilon(t)}\right|\right)^2 \le Ee^{-2z \cdot W_\varepsilon(t)} E\left|e^{-z \cdot \sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon}} - 1\right|^2 \le$$

$$\le e^{2Tz^2} E\left[e^{-2z \cdot \sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon}} - 2e^{-z \cdot \sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon}} + 1 \right] =$$

$$= e^{2Tz^2} \left[1 + (-2z\sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon}) + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(-2z\sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon})^m}{m!} - 2 + 2z\sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon} - 2\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(-z\sqrt{\varepsilon} V_{t/\varepsilon})^m}{m!} + 1 \right] \le$$

$$\le e^{2Tz^2} \left[\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(2z\sqrt{\varepsilon}|V_{t/\varepsilon}|)^m}{m!} + 2\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(z\sqrt{\varepsilon}|V_{t/\varepsilon}|)^m}{m!} \right] \le$$

$$\le 3e^{2Tz^2} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(2z\sqrt{\varepsilon})^m 4b^2c^2z^2(2Hc)^{m-2}}{2} \le$$

$$\le 48e^{2z^2T} b^2c^2z^2\varepsilon \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(4z\sqrt{\varepsilon}Hc)^{m-2}}{2} \le 48\varepsilon b^2c^2z^2e^{2Tz^2} .$$

Оценка (18) получена.

Теорема 1 доказана. □

Рассмотрим задачу оптимального управления для уравнения

$$d\xi_s^0 = \left[(1-u_1(s))r + u_1(s)\mu + \frac{\sigma^2 u_1^2(s)}{2}\right]\xi_s^0 ds - u_2(s,\xi_s^0)ds + \sigma u_1(s)\xi_s^0 dW_s,$$

$$\xi_s^0\big|_{s=t} = y > 0$$

с функционалом качества

$$J_{t,y}(u_1,u_2) = E_{t,y}\int_t^T [e^{-\rho s}u_2(s,\xi_s{}^0)]^{-\gamma} ds,$$

где $0<\gamma<+\infty$. Уравнение динамического программирования для системы (12) с функционалом качества (10) будет ([9], с.224) иметь вид

$$0 = W_s +$$

$$+\min_{0\le u_1\le 1, u_2\ge 0}\left\{\left(\frac{u_1{}^2\sigma^2 y^2}{2}W_{yy} + \left[r - u_1 r + u_1\mu + \frac{u_1{}^2\sigma^2}{2}\right]yW_y\right) - u_2(s,y)W_y + e^{\rho\gamma s}[u_2(s,y)]^{-\gamma}\right\},$$

$$y>0, W(T,y)=0. \tag{24}$$

Оптимальное управление $0 \le u_1^* \le 1$ минимизирует выражение в круглых скобках. Проведя элементарные выкладки, получим

$$u_1^* = -(\mu - r)W_y\left[\sigma^2\left(yW_{yy} + W_y\right)\right]^{-1}.$$

Будем искать решение (24) в виде

$$W(s,y) = g(s)y^{-\gamma}, \tag{25}$$

где $0<\gamma<+\infty$. Тогда нетрудно убедиться в том, что

$$u_1^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}, u_2^*(s,y) = y\left[g(s)e^{-\rho\gamma s}\right]^{-\frac{1}{1+\gamma}}. \tag{26}$$

Подставив выражения (25), (26) в (24), получим

$$0 = g'(s) - g(s)\left[r\gamma + \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}\right] + (1+\gamma)[g(s)]^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} e^{\frac{\gamma\rho s}{1+\gamma}}, g(T) = 0. \tag{27}$$

Нетрудно убедиться в том, что решением (27) будет

$$g(s) = e^{\rho\gamma s}k^{-(1+\gamma)}\left[1 - e^{-(T-s)k}\right]^{1+\gamma}, \tag{28}$$

где $k = \dfrac{-\rho\gamma + r\gamma + (\mu-r)^2/2\sigma^2}{1+\gamma}$. Действительно, сделав замену

$$\left[g(s)e^{-\rho\gamma s}\right]^{\frac{1}{1+\gamma}} = h(s), g(s) = [h(s)]^{1+\gamma}e^{\rho\gamma s},$$

получим уравнение

$$h'(s) - kh(s) + 1 = 0, h(T) = 0.$$

Его решением будет

$$h(s) = k^{-1}\left[1 - e^{-(T-s)k}\right].$$

Откуда и следует (28).

Таким образом,

$$J(u_1^*, u_2^*) = J_0 = W(s,y)\big|_{s=0} = g(0)y^{-\gamma}, 0<\gamma<+\infty,$$

где

$$g(0) = k^{-(1+\gamma)}\left[1 - e^{-Tk}\right]^{1+\gamma}, u_1^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}, u_2^*(s, y) = yk\left[1 - e^{-(T-s)k}\right]^{-1}, k \neq 0.$$

Подставив оптимальные управления u_1^*, u_2^* в уравнения (9), (12), имеем их решения

$$\xi_t^{\varepsilon} = y\exp\left\{\left[(1-u_1^*)r + u_1^*\mu - k\right]t + \sigma u_1^*\zeta_\varepsilon(t)\right\}\left(\frac{1-e^{-(T-t)k}}{1-e^{-Tk}}\right),$$

$$\xi_t^{0} = y\exp\left\{\left[(1-u_1^*)r + u_1^*\mu - k\right]t + \sigma u_1^* W(t)\right\}\left(\frac{1-e^{-(T-t)k}}{1-e^{-Tk}}\right).$$

Пусть

$$\tilde{\xi}_t^{0} = y\exp\left\{\left[(1-u_1^*)r + u_1^*\mu - k\right]t + \sigma u_1^* W_\varepsilon(t)\right\}\left(\frac{1-e^{-(T-t)k}}{1-e^{-Tk}}\right).$$

Тогда в силу того, что

$$\left|E[\xi_t^{\varepsilon}]^{-\gamma} - E[\xi_t^{0}]^{-\gamma}\right| = \left|E[\xi_t^{\varepsilon}]^{-\gamma} - E[\tilde{\xi}_t^{0}]^{-\gamma}\right|,$$

имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_1^*, u_2^*) &= \int_0^T e^{\rho\gamma s}k^{-\gamma}\left[1-e^{-(T-s)k}\right]^{\gamma} E[\xi_s^{\varepsilon}]^{-\gamma}\,ds - \\ &- \int_0^T e^{\rho\gamma s}k^{-\gamma}\left[1-e^{-(T-s)k}\right]^{\gamma} E[\xi_s^{0}]^{-\gamma}\,ds + J_0 \le J_0 + p(\varepsilon), \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$J_0 = \int_0^T e^{\rho\gamma s}k^{-\gamma}\left[1-e^{-(T-s)k}\right]^{\gamma} E[\xi_s^{0}]^{-\gamma}\,ds,$$

$$p(\varepsilon) \ge \int_0^T e^{\rho\gamma s}k^{-\gamma}\left[1-e^{-(T-s)k}\right]^{\gamma}\left|E[\xi_s^{\varepsilon}]^{-\gamma} - E[\xi_s^{0}]^{-\gamma}\right| ds.$$

В силу предыдущих оценок, имеет место неравенство

$$k^{-\gamma}\left[1-e^{-(T-s)k}\right]^{\gamma}\left|E[\xi_s^{\varepsilon}]^{-\gamma} - E[\xi_s^{0}]^{-\gamma}\right| \le \frac{1}{(ky)^{\gamma}}\left[1-e^{-kT}\right]^{\gamma} E\left|e^{-\gamma\sigma u_1^*\zeta_\varepsilon(s)} - e^{-\gamma\sigma u_1^* W_\varepsilon(s)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{(ky)^{\gamma}}\left[1-e^{-kT}\right]^{\gamma} \cdot 7\sqrt{\varepsilon}bc\frac{\mu - r}{\sigma}\exp\left\{\left[k\gamma + \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right]T\right\}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $e^{\rho\gamma s}$ и проинтегрировав в пределах от 0 до T, убеждаемся в том, что в качестве $p(\varepsilon)$ можно взять

$$p(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\frac{7bc(\mu - r)}{\sigma\rho\gamma(ky)^{\gamma}}\left[e^{\rho\gamma T} - 1\right]\left[1-e^{-kT}\right]^{\gamma}\exp\left\{\left[k\gamma + \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right]T\right\}, k \neq 0. \tag{30}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $\eta(t)$ – стационарный в узком смысле случайный процесс с* *нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания* $\varphi(\tau)$ *таким, что*

$$c = \int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau)d\tau < +\infty,$$

причем

$$E|\eta(t)|^m \le \frac{b^2 H^{m-2} m!}{2}, m \ge 2.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если* $0 < \gamma < +\infty$. *такое, что* $\frac{\mu - r}{\sigma^2} \le \gamma, \rho\gamma \ne r\gamma + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}$, *то при*

$$0 < \varepsilon < \frac{\sigma^2}{64H^2c^2(\mu - r)^2}$$

справедливо

$$E\int_0^T e^{-\rho s} u_2^*(s, \xi_s^{\varepsilon})ds \ge T\left(\frac{1}{T}\left[\frac{g(0)}{y^\gamma} + p_1(\varepsilon)\right]\right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{31}$$

Здесь ξ_s^{ε} *– решение* (9) *на оптимальных управлениях* (12) *таких, что*

$$u_1^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}, u_2^*(s, y) = y\left[g(s)e^{-\rho\gamma s}\right]^{-\frac{1}{1+\gamma}},$$

где

$$g(s) = e^{\rho\gamma s} k^{-(1+\gamma)}\left[1 - e^{-(T-s)k}\right]^{1+\gamma},$$

$$p_1(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\frac{7bc(\mu - r)}{\sigma\rho\gamma(ky)^\gamma}\left[e^{\rho\gamma T} - 1\right]\left[1 - e^{-kT}\right]^\gamma \exp\left\{\left[k\gamma + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2}\right]T\right\},$$

$$k = \frac{-\rho\gamma + r\gamma + (\mu - r)^2/2\sigma^2}{1 + \gamma}.$$

2. *Если* $0 < \gamma < +\infty$. *такое, что* $\frac{\mu - r}{\sigma^2} \le \gamma, \rho\gamma = r\gamma + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}$, *то при*

$$0 < \varepsilon < \frac{\sigma^2}{64H^2c^2(\mu - r)^2}$$

справедливо

$$E\int_0^T e^{-\rho s} u_2^*(s, \xi_s^{\varepsilon})ds \ge T\left(\frac{1}{T}\left[\frac{T^{1+\gamma}}{y^\gamma} + p_2(\varepsilon)\right]\right)^{-\frac{1}{\gamma}}. \tag{32}$$

Здесь ξ_s^{ε} *– решение* (9) *на оптимальных управлениях* (12), *которые в этом случае*

$$u_1^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}, u_2^*(s, y) = y[T - s]^{-1},$$

где

$$p_2(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\,\frac{7bc(\mu-r)T^{\gamma}}{\sigma\rho\gamma\cdot y^{\gamma}}\left[e^{\rho\gamma T}-1\right]\exp\left\{\left[r+\frac{(\mu-r)^2}{\gamma\sigma^2}+\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right]T\right\}.$$

Доказательство. В силу того, что $y=x^{-\gamma},0<\gamma<+\infty,x>0-$ выпуклая вниз функция, имеем

$$x^{-\gamma}\geq a^{-\gamma}-\gamma\cdot a^{-\gamma-1}(x-a). \qquad (33)$$

При $y>0$ с вероятностью 1

$$e^{-\rho s}u_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})>0{,}0\leq s<T.$$

Взяв в качестве $a=e^{-\rho s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})$, из (33) получим

$$e^{\rho\gamma s}E[u_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})]^{-\gamma}\geq e^{\rho\gamma s}[Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})]^{-\gamma},$$

откуда

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{\rho\gamma s}E[u_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})]^{-\gamma}ds\geq\frac{1}{T}\int_0^T e^{\rho\gamma s}[Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})]^{-\gamma}ds. \qquad (34)$$

Далее пусть $f(s)=e^{-\rho s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon}),a=\frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds,$ тогда из (33) имеем

$$[f(s)]^{-\gamma}\geq a^{-\gamma}-\gamma\cdot a^{-\gamma-1}(f(s)-a).$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до T и поделив результат на T, получим

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[e^{-\rho s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})\right]^{-\gamma}ds\geq\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\rho s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})ds\right)^{-\gamma}. \qquad (35)$$

Из (34) и (35) следует неравенство

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{\rho\gamma s}E[u_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})]^{-\gamma}ds\geq\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{\rho\gamma s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})ds\right)^{-\gamma}. \qquad (36)$$

В силу (29), (30), (36) имеем

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\rho s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})ds\right)^{-\gamma}\geq\frac{1}{T}\left[\frac{g(0)}{y^{\gamma}}+p_1(\varepsilon)\right],$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\rho s}Eu_2^*(s,\xi_s^{\varepsilon})ds\geq\left(\frac{1}{T}\left[\frac{g(0)}{y^{\gamma}}+p_1(\varepsilon)\right]\right)^{-\frac{1}{\gamma}},$$

т.е. получено неравенство (31). Первая часть теоремы 2 доказана.

Приступим к доказательству второй части.

В данном случае

$$k=0,h(s)=T-s,g(s)=(T-s)^{1+\gamma}e^{\rho\gamma s},$$

$$u_1^*=\frac{\mu-r}{\gamma\sigma^2},u_2^*(s,y)=y[T-s]^{-1}.$$

Подставив u_1^*,u_2^* в уравнения (9), (12), запишем их решения

$$\xi_t^{\varepsilon} = y\exp\left\{\left[(1-u_1^*)r + u_1^*\mu\right]t + \sigma u_1^*\zeta_{\varepsilon}(t)\right\}\left(\frac{T-t}{T}\right),$$

$$\xi_t^{0} = y\exp\left\{\left[(1-u_1^*)r + u_1^*\mu\right]t + \sigma u_1^* W(t)\right\}\left(\frac{T-t}{T}\right).$$

Аналогично (29) имеем

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon}(u_1^*, u_2^*) &= \int_0^T e^{\rho\gamma s}(T-s)^{\gamma} E[\xi_t^{\varepsilon}]^{-\gamma}\, ds - \\ &- \int_0^T e^{\rho\gamma s}(T-s)^{\gamma} E[\xi_t^{0}]^{-\gamma}\, ds + J_0 \le J_0 + p_2(\varepsilon), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$J_0 = \int_0^T e^{\rho\gamma s}(T-s)^{\gamma} E[\xi_t^{0}]^{-\gamma}\, ds,$$

$$p_2(\varepsilon) \ge \int_0^T e^{\rho\gamma s}(T-s)^{\gamma} \left|E[\xi_t^{\varepsilon}]^{-\gamma} - E[\xi_t^{0}]^{-\gamma}\right| ds.$$

В этом случае имеет место неравенство

$$\begin{aligned} (T-s)^{\gamma}\left|E[\xi_t^{\varepsilon}]^{-\gamma} - E[\xi_t^{0}]^{-\gamma}\right| &\le \left(\frac{T}{y}\right)^{\gamma} \exp\left\{\left[r + \frac{(\mu-r)^2}{\gamma\cdot\sigma^2}\right]T\right\}\times \\ \times E\left|e^{-\gamma\sigma u_1^*\zeta_{\varepsilon}(s)} - e^{-\gamma\sigma u_1^* W_{\varepsilon}(s)}\right| &\le \left(\frac{T}{y}\right)^{\gamma} 7\sqrt{\varepsilon}bc\frac{\mu-r}{\sigma}\exp\left\{\left[r + \frac{(\mu-r)^2}{\gamma\cdot\sigma^2} + \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right]T\right\}. \end{aligned}$$

Умножив обе части последнего неравенства на $e^{\rho\gamma s}$ и проинтегрировав в пределах от 0 до T, убеждаемся в том, что в качестве $p_2(\varepsilon)$ можно взять

$$p_2(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{7bc(\mu-r)T^{\gamma}}{\sigma\rho\gamma\cdot y^{\gamma}}\left[e^{\rho\gamma T} - 1\right]\exp\left\{\left[r + \frac{(\mu-r)^2}{\gamma\cdot\sigma^2} + \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2}\right]T\right\}. \tag{38}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют выкладки, проделанные при доказательстве первой части теоремы, с учетом (37) и (38).

Таким образом, применив управления u_1^*, u_2^*, оптимальные для предельной системы (12) при управлении системой (9), мы гарантируем себе среднюю дисконтированную полезность от потребления, не меньшую, чем

$$T\left(\frac{1}{T}\left[\frac{T^{1+\gamma}}{y^{\gamma}} + p_2(\varepsilon)\right]\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Для первого же случая, т.е. когда $\rho\gamma \neq r\gamma + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}$, средняя дисконтированная полезность будет не меньше

$$T\left(\frac{1}{T}\left[\frac{g(0)}{y^\gamma} + p_1(\varepsilon)\right]\right)^{-\frac{1}{\gamma}}.$$

Теорема 2 доказана. □

РЕЗЮМЕ

Р.Мертон в роботі [1] вивчав модель споживання і розміщування з неперервним часом. В [1] досліджувалась можливість максимізування середнього значення дисконтированої корисності та були здобуті оптимальні керування. В даній роботі ці результати узагальнюються для більш загальної моделі. Виявлено, що оптимальні керування граничною системою ε-оптимальними для початкової системи. Здобуті нижні оцінки для середньої дисконтированої корисності.

SUMMARY

The continuos-time consuption-portfolio model was studied in the paper by R.Merton [1]. R.Merton studied the maximization of the mean discounted utiluty. He obtained the optimal control for his system. The present paper extends these results for more general model. We show that the optimal control for limit system will be ε-optimal for the initial one. The low estimstes are obtained for mean discounted utility.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merton R.C. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-TimeModel. – Journal of Economic Theory, 3, p. 373-413, 1971.
2. Ширяев А.Н. Стохастические проблемы финансовой математики. – Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т.1. – Вып. 5. – С.780-820.
3. Samuelson P.A. Rational theory of warrant pricing. – Industrial Management Review, 1965, 6 (Spring), p. 13-31.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
5. Ибрагимов И.Л., Линник И.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
6. Давыдов Ю.А. О сходимости распределений порожденными стационарными случайными процессами. – Теория вероятн. и ее примен. – 1968. – Т.13. – Вып.4. – С.730-737.
7. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастическое исчисление. – Итоги науки и техники. – 1989. – Т.45. – С.5-253.
8. Чикин Д.О. Функциональная предельная теорема для стационарных процессов. Мартингальный подход. – Теория вероятн. и ее примен. – 1989. – Т.34. – Вып.4. –С.731-741.
9. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

Надійшла до редакції 30.09.1997 р.