

УДК 539.3

ОРТОТРОПНА ОБОЛОЧКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

В.П.Шевченко, Е.Н.Довбня

1. Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку постоянной толщины h , изготовленную из ортотропного материала так, что в каждой ее точке линии главных кривизн срединной поверхности совпадают с главными направлениями упругости материала. Система ортогональных координат (x, y, z) выбрана таким образом, что координаты x, y ориентированы вдоль линий главных кривизн срединной поверхности оболочки, а координата z направлена по нормали к ней. Оболочка ослаблена системой криволинейных разрезов произвольной конфигурации (рис.1), размеры которых велики по сравнению с толщиной оболочки, но малы по сравнению с ее другими линейными размерами. Это позволяет рассматривать задачу о равновесии тонкой оболочки с разрезами при помощи двумерной теории оболочек, в рамках которой трещины моделируются как математические разрезы срединной поверхности оболочки.

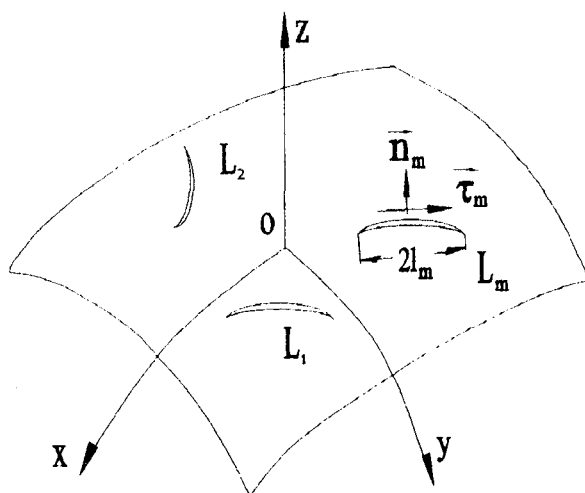


Рис. 1

Выбирая в качестве параметра длину дуги, запишем уравнение разрезов $L_m (m = \overline{1, N})$ в виде

$$x = \alpha_m(s), \quad y = \beta_m(s); \quad s \in [-\ell_m, \ell_m], \quad (1.1)$$

где ℓ_m – полудлина контура L_m , $\alpha_m(s)$, $\beta_m(s)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Срединная поверхность оболочки представляет собой многосвязную область, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами $L_m (m = \overline{1, N})$.

В силу линейности задачи напряженного состояния в оболочке можно представить в виде суммы напряженного состояния в оболочке без разрезов при заданной внешней нагрузке, которое считаем известным (в дальнейшем оно будет обозначаться величинами со звездочкой) и дополнительного (возмущенного) напряженного состояния, вызванного наличием разрезов.

Будем считать, что расстояние между разрезами и внешним контуром велико по сравнению с их размерами и возмущенное напряженное состояние практически не достигает внешней границы L_0 . Поэтому вместо нулевых граничных условий на контуре L_0 поставим упрощенные условия исчезновения возмущенного напряженного состояния при удалении от $L_m (m = \overline{1, N})$, а область, занимаемую оболочкой, будем считать бесконечной.

Для оболочек с концентраторами напряжений (отверстия, разрезы, включения и т. д.) экспериментально установлена локальность возмущенного напряженного состояния [1]. Внутри зоны возмущения, характеризующие его величины, представляют собой быстро затухающие функции координат, поэтому при решении задачи использовались уравнения напряженных состояний с большим показателем изменчивости, совпадающие с уравнениями пологих оболочек. Уравнения равновесия полой ортотропной оболочки в перемещениях имеют вид [2]

$$\sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j = -X_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где $L_{11} = \chi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $L_{22} = \chi^{-2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{(1-\nu)(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$;

$$L_{33} = \frac{(\lambda\chi^2)^2 + 2\nu\lambda\chi^2 + 1}{R_2^2 \chi^2} + \frac{h^2}{12} \left(\chi^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \chi^{-2} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(1-\mu + \mu\nu) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right);$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1 + \nu - \mu(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad L_{13} = L_{31} = \frac{\lambda\chi^2 + \nu}{R_2} \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{23} = L_{32} = \frac{1 + \nu\lambda\chi^2}{R_2 \chi^2} \frac{\partial}{\partial y};$$

$\chi^2 = \sqrt{E_1 / E_2}$; E_1, E_2 – модули Юнга; $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона; $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$; $\mu = 1 - 2(1 + \nu)G_{12} / E$; G_{12} – модуль сдвига для плоскостей, параллельных срединной поверхности оболочки; $E = \sqrt{E_1 E_2}$; $\lambda = R_2 / R_1$; R_1 и R_2 – радиусы главных кривизн оболочки; $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ – компоненты вектора перемещений; $X_1 = (1 - \nu^2)X / Eh$; $X_2 = (1 - \nu^2)Y / Eh$; $X_3 = (1 - \nu^2)Z / Eh$; X, Y, Z – проекции внешней нагрузки на оси координат.

Предположим, что берега разрезов свободны от нагрузки и в процессе деформирования оболочки не контактируют между собой. Тогда граничные условия имеют вид

$$T_{n_m} \Big|_{L_m} = 0; \quad S_{n\tau_m} \Big|_{L_m} = 0; \quad M_{n_m} \Big|_{L_m} = 0; \quad Q_{n_m} \Big|_{L_m} = 0 \quad (m = \overline{1, N}), \quad (1.3)$$

где $T_{n_m} = n_{1m}^2 T_1 + n_{2m}^2 T_2 + 2n_{1m} n_{2m} S$; $S_{n\tau_m} = (n_{2m}^2 - n_{1m}^2)S + n_{1m} n_{2m} (T_2 - T_1)$;

$$M_{n_m} = n_{1m}^2 M_1 + n_{2m}^2 M_2 + 2n_{1m} n_{2m} H; \quad H_{n\tau_m} = (n_{2m}^2 - n_{1m}^2)H + n_{1m} n_{2m} (M_2 - M_1);$$

$$N_{n_m} = n_{1m} N_1 + n_{2m} N_2;$$

$n_{1m}(s), n_{2m}(s)$ – направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали \vec{n}_m ; T_1, T_2, S – мембранные усилия; M_1, M_2, H – изгибающие и крутящий моменты; N_1, N_2 – перерезывающие силы.

Внутренние усилия и моменты можно выразить через перемещения u, v, w следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\chi^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda \chi^2 + \nu}{R_2} w \right); \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \chi^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1 + \nu \lambda \chi^2}{R_2 \chi^2} w \right); \\
 S &= \frac{Eh(1-\mu)}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad H = -D(1-\nu)(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\
 M_1 &= -D \left(\chi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_2 = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \chi^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\
 N_1 &= -D \left(\chi^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (1-\mu + \mu\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad N_2 = -D \left(\chi^{-2} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (1-\mu + \mu\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right),
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$.

Для обеспечения однозначности решения необходимо также выполнение дополнительных условий на концах разреза

$$[\bar{u}]_{L_m} \Big|_{s=\pm l_m} = 0; \quad [\theta_j]_{L_m} \Big|_{s=\pm l_m} = 0, \quad (j = 1, 2),
 \tag{1.5}$$

где $\bar{u} = (u, v, w)$ – вектор перемещений; $[f]_{L_m} = f^+ - f^-$ – скачок функции f на контуре L_m ; θ_1, θ_2 – углы поворота.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.2) при заданных граничных условиях (1.3), (1.5).

2. Наибольший эффект при решении дифференциальных уравнений в частных производных дает использование двумерного интегрального преобразования Фурье, которое позволяет свести дифференциальные уравнения в частных производных к линейным алгебраическим уравнениям. Однако в классическом анализе имеются довольно жесткие ограничения на использование преобразования Фурье. В частности, функции должны быть определены и необходимое число раз дифференцируемы на R^2 . Очевидно, что для рассматриваемой задачи перемещения и их производные не удовлетворяют этому условию. Использование теории обобщенных функций позволяет обойти эти ограничения.

Для описания перемещений, углов поворота и их производных введем сингулярную обобщенную функцию δ_{L_p} , сосредоточенную на контуре L_p и обладающую следующим свойством:

$$(f, \delta_{L_p}) = \int_{-l_p}^{l_p} f(\alpha_p(s), \beta_p(s)) \delta(x - \alpha_p(s), y - \beta_p(s)) ds,
 \tag{2.1}$$

где f – произвольная бесконечно дифференцируемая функция; $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ – двумерная δ – функция.

Соотношение (2.1) позволяет доопределить производную функции $f(x, y)$, имеющей скачки на кривых $L_p (p = \overline{1, N})$ и непрерывной в остальных точках на всю вещественную плоскость:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + \sum_{p=1}^N (n_{ip} [f]_{L_p}, \delta_{L_p}) \quad (i = \overline{1, 2}),
 \tag{2.2}$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}$ – обобщенные и классические производные.

Из соотношения (2.2) и свойств δ – функции следует, что производная в обобщенном смысле равна классической вне кривых L_p ($p = 1, N$).

В работах [3], [4] из уравнений статики пологих ортотропных оболочек (1.2) получены интегральные представления перемещений для оболочки, ограниченной кусочно-гладким контуром L

$$u_j(x, y) = u_j^*(x, y) + \int_L (T_n(\alpha(s), \beta(s)) u_n^{0j}(x - \alpha(s), y - \beta(s)) + S_{n\tau} u_\tau^{0j} + M_n \theta_n^{0j} + Q_n w^{0j} - u_n T_n^{0j} - u_\tau S_{n\tau}^{0j} - \theta_n M_n^{0j} - w Q_n^{0j}) ds, \quad (j = \overline{1,3}), \quad (2.3)$$

где u_{n_m} , u_{τ_m} – перемещения в направлениях нормали и касательной; θ_{n_m} – угол поворота; под L понимается сумма контуров, направление обхода которых выбирается так, чтобы область, занимаемая оболочкой, оставалась слева. Фундаментальные решения уравнений статики пологих ортотропных оболочек $f^{0j}(x, y)$ получены В.П.Шевченко, В.К.Хижняком [5] с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. Они характеризуют напряженное состояние в сплошной оболочке, возникающее под действием единичной сосредоточенной силы, направленной вдоль j -й координатной линии. Приведенные выше соотношения позволяют после соответствующих преобразований получить интегральные представления трансформант внутренних усилий и моментов.

3. При построении интегральных представлений трансформант усилий T_{n_m} , $S_{n\tau_m}$ и момента M_{n_m} с помощью интегральных представлений трансформант внутренних усилий и моментов не возникает принципиальных трудностей. Как известно [6], обобщенная перерезывающая сила Q_{n_m} на концах разреза L_m имеет особенность более высокого порядка, чем T_{n_m} , $S_{n\tau_m}$ и M_{n_m} . В случае прямолинейного разреза четвертое условие обычно интегрируется вдоль части контура L_m , и в результате ядра интегральных уравнений имеют особенность одного порядка. Однако в случае криволинейного контура при вычислении ядер четвертого интегрального уравнения возникают серьезные проблемы. Поэтому будем не просто интегрировать четвертое условие вдоль части контура L_m , а при выборе четвертой граничной величины вместо интеграла от перерезывающей силы N_{n_m} возьмем проекцию на ось Oz главного вектора нагрузки, действующей вдоль части контура L_m (этот прием использовал Sanders J.L. [7] при решении аналогичной задачи для оболочки с отверстием). То есть на контуре L_m будут заданы следующие функции:

$$\begin{aligned} F_{1m}(t) &= T_{n_m}(\alpha_m(t), \beta_m(t)); \quad F_{2m}(t) = S_{n\tau_m}(\alpha_m(t), \beta_m(t)); \\ F_{3m}(t) &= c^2 R_2 M_{n_m}(\alpha_m(t), \beta_m(t)); \\ F_{4m}(t) &= c^2 R_2 \left(P_z^{(m)}(s) + H_{n\tau_m}(\alpha_m(s), \beta_m(s)) \right) - \left(\beta_m(t) c_m^{(1)} + \lambda \alpha_m(t) c_m^{(2)} \right) + c_m, \\ & \quad (m = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $c_m^{(1)}$, $c_m^{(2)}$ и c_m – неизвестные постоянные интегрирования.

Введем новые неизвестные функции $\psi_{jp}(s)$ по формулам

$$\begin{aligned}
 \psi_{1p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left(\frac{\partial}{\partial s} [u_{n_p}]_{L_p} - k_p [u_{\tau_p}]_{L_p} + \frac{2(1-\lambda)}{R_2} n_{1p} n_{2p} [w]_{L_p} + \right. \\
 &+ R_2^{-1} \int_{-l_p}^s \left((\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2) \left([\theta_{n_p}]_{L_p} - 2k_p [w]_{L_p} \right) + k_p (1+\lambda) [w]_{L_p} \right) ds \Big); \\
 \psi_{2p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left(\frac{\partial}{\partial s} [u_{\tau_p}]_{L_p} + k_p [u_{n_p}]_{L_p} + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} [w]_{L_p} \right); \\
 \psi_{3p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \left(\frac{\partial}{\partial s} [\theta_{n_p}]_{L_p} + k_p \frac{\partial}{\partial s} [w]_{L_p} \right); \\
 \psi_{4p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} [w]_{L_p} - k_p [\theta_{n_p}]_{L_p} \right),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $k_m = \sqrt{(\alpha_m''(s))^2 + (\beta_m''(s))^2}$ – кривизна кривой L_m .

Возмущенное напряженно – деформированное состояние оболочки вблизи концов разрезов характеризуется коэффициентами интенсивности усилий и моментов. Они вычисляются по формуле

$$K_{jp}^{\pm} = \mp \lim_{s \rightarrow \pm l_p} l_p^{-1/2} \sqrt{l_p^2 - s^2} \psi_{jp}(s), \quad (j = \overline{1,4}, p = \overline{1,N}) \tag{3.3}$$

после решения системы граничных интегральных уравнений и характеризуют влияние геометрии оболочки, ее упругих свойств, формы разреза и внешней нагрузки на возмущенное напряженное состояние в окрестности вершины разреза. Неизвестные функции (3.2) содержат перемещения, углы поворота, их производные и интегралы от них. Первые слагаемые в правых частях соотношений (3.2) имеют на концах разреза особенность $O\left((l_p^2 - s^2)^{-1/2}\right)$.

Дополнительные слагаемые не имеют особенностей, следовательно, не влияют на характер поведения неизвестных функций при $s \rightarrow \pm l_p$ и на величину коэффициентов интенсивности усилий и моментов. Введение этих слагаемых позволяет получить в явном виде регулярные части ядер и неинтегральные добавки в интегральных уравнениях.

После соответствующих преобразований система граничных интегральных уравнений задачи об определении напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с криволинейными разрезами примет вид

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^N \int_{-l_p}^{l_p} \sum_{j=1}^4 K_{ij} \left((\alpha_m(t) - \alpha_p(s)) / \chi, \beta_m - \beta_p \right) \psi_{jp}(s) ds &= \pi F_{im}^*(t) + \\
 + \sum_{p=1}^N P_i \left((\alpha_m(t) - \alpha_p(l_p)) / \chi, \beta_m - \beta_p \right) \int_{-l_p}^{l_p} \left((\lambda n_{2p}(s) \alpha_p(s) - n_{1p} \beta_p) \psi_{3p}(s) - \right. & \\
 \left. - (\lambda n_{1p}(s) \alpha_p(s) + n_{2p} \beta_p) \psi_{4p}(s) \right) ds, \quad (t \in (-l_m, l_m), i = \overline{1,4}, m = \overline{1,N}). &
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ядра K_{ij} представим в виде суммы сингулярной и регулярной частей: $K_{ij} = K_{ij}^s + K_{ij}^r$.

Остальные ядра регулярны $K_{ij} = K_{ij}^r$. Сингулярные части ядер K_{ij}^s вычисляются с помощью теории вычетов и имеют особенность типа Коши

$$K_{ij}^s(x, y) = \frac{n_{1p} e_{ij} + n_{2p} f_{ij}}{\sqrt{1-d_j} (1-d_j \cos^2 2\varphi) r}, \quad (i, j = \overline{1,2}; i, j = \overline{3,4}) \quad (3.5)$$

где $d_1 = d_2 = \tilde{\mu}(1 + \nu)$, $d_3 = d_4 = -\tilde{\mu}(1 - \nu)$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2a}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Функции e_{ij} и f_{ij} зависят от угла $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, параметров ортотропии и направляющих косинусов n_{1m} и n_{2m} .

Методика вычисления регулярных частей ядер K_{ij}^r и неинтегральных добавок P_i аналогична приведенной в [4, 8]:

$$K_{ij}^r = 2c^2 r_i b_j r \sum_{n=lm=0}^{\infty} \sum_{m!} \frac{1}{m!} \operatorname{Re} G_{n,n+m-1}(rc\sqrt{i}) \left(\chi a_{mn}^{(i,j)} \sin(2n-1)\varphi + b_{mn}^{(i,j)} \cos(2n-1)\varphi \right) \\ (i = \overline{1,2}, j = \overline{3,4}; i = \overline{3,4}, j = \overline{1,2}); \\ K_{ij}^r = 2c^2 r_i b_j r \sum_{n=lm=0}^{\infty} \sum_{m!} \frac{1}{m!} \operatorname{Im} G_{n,n+m-1}(rc\sqrt{i}) \left(\chi a_{mn}^{(i,j)} \sin(2n-1)\varphi + b_{mn}^{(i,j)} \cos(2n-1)\varphi \right) \\ (i, j = \overline{1,2}; i, j = \overline{3,4}); \quad (3.6)$$

$$P_i = 2c^2 a r_i b_3 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \operatorname{Re} G_{n,n+m}(rc\sqrt{i}) \left(c_{mn}^{(i)} \sin 2n\varphi + \chi d_{mn}^{(i)} \cos 2n\varphi \right) \quad (i = \overline{1,2}); \\ P_i = 2c^2 a r_i b_3 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \operatorname{Im} G_{n,n+m}(rc\sqrt{i}) \left(c_{mn}^{(i)} \sin 2n\varphi + \chi d_{mn}^{(i)} \cos 2n\varphi \right) \quad (i = \overline{3,4}),$$

где $r_1 = r_2 = 1$; $r_3 = r_4 = -(1 - \mu)^{-1/2}$; $b_1 = -b_2 = 1$; $b_3 = b_4 = -(1 - \mu)(a(1 - \nu))^{-1}$;

$\varepsilon_n = 1$, при $n=0$; $\varepsilon_n = 2$, при $n \geq 1$. Коэффициенты $a_{mn}^{(i,j)}$, $b_{mn}^{(i,j)}$, $c_{mn}^{(i)}$ и $d_{mn}^{(i)}$ представляют собой тригонометрические интегралы от сильно осциллирующих функций. Они зависят от параметров ортотропии и направляющих косинусов n_{1m} и n_{2m} . Специальная функция $G_{n,\nu}(z)$ имеет вид:

$$G_{n,\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-n} K_{n+\nu}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\nu+k)}{(n-k)} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k}, \quad (n > 0, \operatorname{Re} \nu > -1),$$

где $K_{\nu}(z)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению системы $4N$ сингулярных интегральных уравнений типа Коши с неинтегральными добавками. В уравнениях, соответствующих моментам M_{n_m} и обобщенным перерезывающим силам Q_{n_m} добавки регулярные, а в уравнениях, соответствующих нормальным и касательным усилиям T_{n_m} , S_{n_m} неинтегральные добавки имеют на разрезе L_m логарифмическую особенность.

4. Система сингулярных интегральных уравнений типа Коши имеет множество решений в классе функций, неограниченных на концах отрезка интегрирования [9].

Из условий непрерывности перемещений и углов поворота в концах разрезов получим $5N$ линейно независимых интегральных уравнений:

$$\int_{-l_p}^{l_p} (n_{1p}(s)\psi_{3p}(s) + n_{2p}(s)\psi_{4p}(s)) ds = 0; \quad \int_{-l_p}^{l_p} (n_{2p}(s)\psi_{3p}(s) - n_{1p}(s)\psi_{4p}(s)) ds = 0;$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-l_p}^{l_p} \left(n_{1p}(s)\psi_{1p}(s) - n_{2p}(s)\psi_{2p}(s) - \frac{c^2(1-\mu)}{2(1-\nu)} \left(n_{1p}(s)\psi_{3p}(s) + n_{2p}(s)\psi_{4p}(s) \right) \right) \times \\
 & \times \left(\beta_p^2(s) - \lambda\alpha_p^2(s) + 2\beta_p(s)\beta_p(l_p) \right) + 2\lambda\alpha_p(s)(\beta_p(s) + \beta_p(l_p)) \times \\
 & \times \left(n_{1p}(s)\psi_{4p}(s) - n_{2p}(s)\psi_{3p}(s) \right) ds = 0; \\
 & \int_{-l_p}^{l_p} \left(n_{2p}(s)\psi_{1p}(s) + n_{1p}(s)\psi_{2p}(s) + \frac{c^2(1-\mu)}{2(1-\nu)} \left(n_{2p}(s)\psi_{3p}(s) - n_{1p}(s)\psi_{4p}(s) \right) \right) \times \quad (4.1) \\
 & \times \left(\beta_p^2(s) - \lambda\alpha_p^2(s) + 2\beta_p(s)\beta_p(l_p) \right) + 2\beta_p(s)(\alpha_p(s) - \alpha_p(l_p)) \times \\
 & \times \left(n_{1p}(s)\psi_{3p}(s) + n_{2p}(s)\psi_{4p}(s) \right) ds = 0; \\
 & \int_{-l_p}^{l_p} \left((\alpha_p n_{1p} + \beta_p n_{2p})\psi_{3p} - (n_{1p}\beta_p - n_{2p}\alpha_p)\psi_{4p} \right) ds = 0 \quad (p = \overline{1, N}).
 \end{aligned}$$

Соотношения (4.1) обеспечивают единственность решения системы сингулярных интегральных уравнений и позволяют определить постоянные интегрирования c_m ($m = \overline{1, N}$).

Для определения постоянных интегрирования $c_m^{(1)}$ и $c_m^{(2)}$ ($m = \overline{1, N}$) необходимы еще $2N$ дополнительных уравнений. Их можно получить из условия равенства нулю составляющих P_x и P_y главного вектора усилий, приложенных на контуре L_m .

В случае всестороннего растяжения на бесконечности изотропной пластины с дугообразным разрезом усилиями интенсивности p решение системы (3.4), (4.1) совпадает с известными результатами [10].

5. Получить точное аналитическое решение системы (3.4), (4.1) даже для изотропной оболочки практически невозможно, поэтому при решении конкретных задач следует использовать специальные квадратурные формулы или приближенно-аналитические методы. В качестве примера рассмотрена симметричная задача для оболочки с разрезом вдоль линии кривизны. Система граничных интегральных уравнений решена численно с помощью квадратурной формулы А.А.Корнейчука [11]. Проведенные исследования показали, что:

- Для оболочек положительной кривизны с увеличением длины трещины и кривизны оболочки наблюдается перегиб берегов разреза и вблизи его концов скачок угла поворота $[\theta_2] < 0$, в то время как в центральной части разреза $[\theta_2]$ остается положительным и увеличивается с ростом параметра $\beta = cl$ (l – полудлина разреза). На рис.2 приведен график изменения скачка угла поворота вдоль линии разреза для сферической оболочки, находящейся под действием растягивающей нагрузки. Кривые 1-3 соответствуют значениям параметра $\beta = 1; 2; 4$.

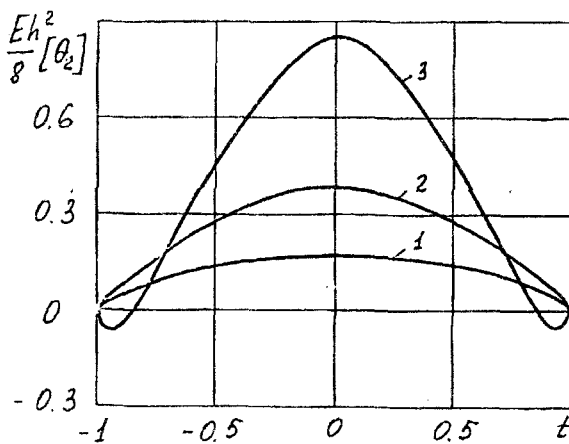


Рис. 2

- Для оболочек отрицательной кривизны перегиб берегов наблюдается при значительно меньших кривизнах оболочки и длинах разрезов, чем для оболочек положительной кривизны. Скачок угла поворота $[\theta_2]$ становится отрицательным сначала только вблизи концов разреза, а с ростом параметра β и по всей его длине. В центральной части разреза скачок угла поворота монотонно убывает с ростом параметра β . График изменения $[\theta_2]$ для псевдосферической оболочки приведен на рис. 3. Перегиб берегов вблизи концов разреза приводит к тому, что дополнительный коэффициент интенсивности моментов меняет знак и становится отрицательным.

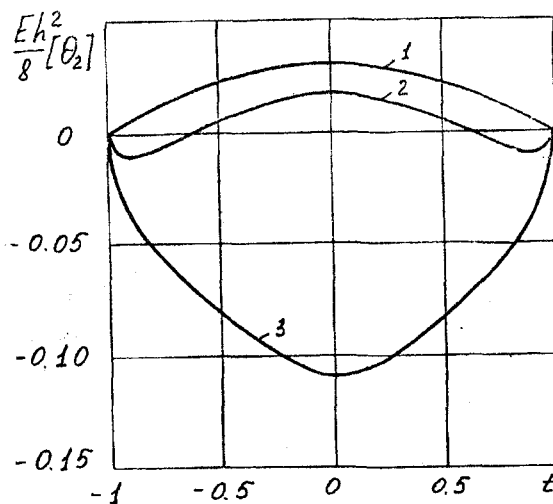


Рис. 3

- В случае моментной нагрузки изгибные напряжения в оболочке меньше соответствующих напряжений в идентично нагруженной тонкой пластине и убывают с увеличением длины разреза. Дополнительный коэффициент интенсивности усилий возрастает лишь до некоторого значения β . Для псевдосферической оболочки он начинает убывать при $\beta = 1$ и быстро становится отрицательным (для $[\nu]$ имеет место тот же эффект, что и для $[\theta_2]$ в случае растягивающей нагрузки). При малых β дополнительный коэффициент минимум на порядок меньше основного, но с увеличением длины разреза для обо-

лочек положительной кривизны с продольным или поперечным разрезом и цилиндрической оболочки с продольным разрезом дополнительные и основной коэффициенты становятся величинами одного порядка. При этом дополнительный коэффициент остается меньше основного. Для оболочек отрицательной кривизны с продольным или поперечным разрезом и цилиндрической оболочки с поперечным разрезом основной коэффициент при любых значениях β на порядок выше, чем дополнительный.

РЕЗЮМЕ

Розглянуто задачу дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної гаусової кривизни з криволінійними розрізами без додаткових обмежень на пружні параметри матеріалу оболонки. З допомогою теорії узагальнених функцій та двовимірного інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші. Ядра системи отримані за допомогою спеціальної функції $G_{n,\nu}(z)$. Систему інтегральних рівнянь розв'язано за допомогою спеціальних квадратурних формул.

SUMMARY

In the paper the problem of investigation of the stress state for an orthotropic shell of arbitrary Gaussian curvature with curvilinear slits is considered without additional restrictions to the shell material elastic parameters. With the help of the generalised functions theory and Fourier's two-dimensions integral transformation the considered problem is reduced to the simultaneous set of Cauchy's singular integral equations. The equations kernels are obtained by using special function $G_{n,\nu}(z)$. The integral equations system is solved numerically with the help of special quadrature formulas.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методы расчета оболочек. Т.1 Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями (Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. Н. и др.). – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: 1974. – 446 с.
3. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Напряженное состояние ортотропных оболочек, ослабленных трещинами // Доклады 3-го нац. конгр. "Теорет. и приложна механика" (Варна 1977). – София. – 1977. – Кн.1. – С.604-609.
4. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек (Учеб. пособие). – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1979. – 179 с.
5. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Действие сосредоточенных сил на анизотропные оболочки // Механика твердого тела. – 1972. – 4. – С.123-128.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
7. Sanders J. L. Cut – out in shallow shells // Trans. ASME, E 37. – 1970 – P.374-383.
8. Довбня Е.Н., Шевченко В.П. Система прямолинейных трещин в пологой ортотропной оболочке произвольной кривизны // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – 15. – С. 48-53.
9. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 511 с.
10. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка. – 1968. – 246 с.
11. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С.64-74.

Надійшла до редакції 10.11.1997 р.