УДК 539.3:534.1

СИМЕТРИЧНІ НОРМАЛЬНІ ХВИЛІ В ОТОЧЕНОМУ ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ ОРТОТРОПНОМУ ПРУЖНОМУ ШАРІ

В. І Сторожев, О.М.Копичко, В. А.Шпак

У роботах [1-3] побудовані і досліджені дисперсійні рівняння для нормальних хвиль в ізотропному пружному шарі, вміщеному в ідеальну стисливу і в'язку рідину. В даній роботі розглядається відкрита в більшості аспектів проблема дисперсії пружних хвиль для розташованого в ідеальній рідині прямолінійно – ортотропного шару.

Досліджуване дисперсійне співвідношення будується для хвиль у структурі, утвореній пружним шаром

$$V = \{(x_1, x_2) \in S, |x_3| \le h\}$$

і рідиною, яка займає області

$$V^+ = \{(x_1, x_2) \in S, x_3 > h\},\ V^- = \{(x_1, x_2) \in S, x < -h\}.$$

Тут x_j $(j = \overline{1,3})$ – безрозмірні декартові координати, віднесені до нормуючого параметру R^*; S – координатна площина Ox_1x_2.

Розповсюдження зв'язаних нормальних хвиль в описаній структурі вздовж напрямку в площині шару V, що характеризується вектором $\vec{n} = (n_1, n_2)$, описується крайовою задачею, яка включає рівняння динамічного деформування шару

$$\widetilde{L}_{1j}\widetilde{U}_1 + \widetilde{L}_{2j}\widetilde{U}_2 + \widetilde{L}_{3j}\widetilde{U}_3 = 0 \ (j = \overline{1,3}),\ (x_1, x_2, x_3) \in V; \tag{1}$$

рівняння нерозривності і балансу імпульса для стисливої рідини

$$(\rho_0 a_0)^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{P} + div\widetilde{\vartheta} = 0; \tag{2}$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\vartheta} + grad\widetilde{P} = 0 \tag{3}$$

та крайові умови на границях контакту плоских граней шару з рідиною

$$(\widetilde{\sigma}_{13})_{x_3=\pm h} = (\widetilde{\sigma}_{23})_{x_3=\pm h} = (\widetilde{\sigma}_{33} + \widetilde{P})_{x_3=\pm h} = 0; \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{U}_3\right)_{x_3=\pm h} = (\widetilde{\vartheta}_3)_{x_3=\pm h}. \tag{5}$$

У співвідношеннях (1)–(5) $\widetilde{U}_j = \widetilde{U}_j(x_1, x_2, x_3, t)$ – безрозмірні компоненти вектора динамічних пружних зміщень точок шару, віднесені до R^*; $\widetilde{\sigma}_{ij} = \widetilde{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ – безрозмірні компоненти тензора напружень у шарі, віднесені до нормуючого параметру c_*; $\widetilde{P} = \widetilde{P}(x_1, x_2, x_3, t)$ – тиск в ідеальній стисливій рідині; $\widetilde{\overline{\vartheta}}$ –вектор швидкості руху рідини з безрозмірними компонентами $\widetilde{\vartheta}_j = \widetilde{\vartheta}_j(x_1, x_2, x_3, t)$; ρ_0 та a_0 –відповідно щільність і швидкість об'ємних хвиль у рідині. Диференціальні оператори рівнянь руху (1) мають вигляд

$$\tilde{L}_{ij} = \tilde{L}_{ij}(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_t),$$

де

$$\begin{aligned}
&\tilde{L}_{11} = c_{11}\partial_1{}^2 + c_{66}\partial_2{}^2 + c_{55}\partial_3{}^2 - \rho\partial_t{}^2,\\
&\tilde{L}_{22} = c_{66}\partial_1{}^2 + c_{22}\partial_2{}^2 + c_{44}\partial_3{}^2 - \rho\partial_t{}^2,\\
&\tilde{L}_{33} = c_{55}\partial_1{}^2 + c_{44}\partial_2{}^2 + c_{33}\partial_3{}^2 - \rho\partial_t{}^2,\\
&\tilde{L}_{12} = \tilde{L}_{21} = (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2,\\
&\tilde{L}_{23} = \tilde{L}_{32} = (c_{23} + c_{44})\partial_2\partial_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут c_{ij} – безрозмірні пружні сталі, віднесені до параметру c_*; $\partial_j \left(j = \overline{1,3}\right), \partial_t$ – відповідно оператори частинного диференціюван-ня по змінним x_j і t.

Введемо для характеристик досліджуваних гармонічних хвиль з круговою частотою ω зображення

$$\begin{aligned}
&\tilde{U}_j = \mathrm{Re}\left[U_j(x_3)\exp i(k(n_1x_1 + n_2x_2) - \omega t)\right],\\
&\tilde{\vartheta}_j = \mathrm{Re}\left[\vartheta_j(x_3)\exp i(k(n_1x_1 + n_2x_2) - \omega t)\right],\\
&\tilde{P} = \mathrm{Re}\left[P(x_3)\exp i(k(n_1x_1 + n_2x_2) - \omega t)\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

З використанням (7) отримуємо із (1)–(5) граничну задачу відносно комплексних амплітудних компонент нормальної хвилі

$$\begin{aligned}
&L_{1j}(ikn_1, ikn_2, \partial_3, -i\omega)U_1(x_3) + L_{2j}(ikn_1, ikn_2, \partial_3, -i\omega)U_2(x_3) +\\
&+ L_{3j}(ikn_1, ikn_2, \partial_3, -i\omega)U_3(x_3) = 0 \left(j = \overline{1,3}\right),\\
&-i\omega\left(\rho_0 a_0{}^2\right)^{-1} P(x_3) + ik(n_1\vartheta_1(x_3) + n_2\vartheta_2(x_3)) + \vartheta_3{}'(x_3) = 0\\
&-i\omega\rho_0\vartheta_j(x_3) + ikn_jP(x_3) = 0 \ \left(j = \overline{1,2}\right), \ -i\omega\rho_0\vartheta_3(x_3) + P'(x_3) = 0;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\left(ikn_1U_3(x_3) + U_1{}'(x_3)\right)_{x_3 = \pm h} = 0,\\
&\left(ikn_2U_3(x_3) + U_2{}'(x_3)\right)_{x_3 = \pm h} = 0,\\
&\left(ikn_1c_{13}U_1(x_3) + ikn_2c_{23}U_2(x_3) + c_{33}U_3{}'(x_3)\right)_{x_3 = \pm h} + P(x_3) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Окремо вивчаємим варіантом співвідношень (8), (9) є їх форма при $k = 0$, яка відповідає задачі визначення критичних частот (частот запирання) бігучих нормальних хвиль досліджуваного типу. Аналіз критичних частот є загальноприйнятим попереднім етапом дослідження дисперсійних співвідношень. У цьому випадку із задачі (8), (9) маємо

$$\begin{aligned}
&c_{55}U_1{}''(x_3) + \Omega^2U_1(x_3) = 0, \ c_{44}U_2{}''(x_3) + \Omega^2U_2(x_3) = 0,\\
&c_{33}U_3{}''(x_3) + \Omega^2U_3(x_3) = 0,\\
&\vartheta_3{}'(x_3) - i\omega\left(\rho_0a_0{}^2\right)^{-1} P(x_3) = 0, P'(x_3) - i\omega\rho_0\vartheta_3(x_3) = 0;
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\left(U_2{}'(x_3)\right)_{x_3=\pm h} = 0,\\
&\left(U_3{}'(x_3)\right)_{x_3=\pm h} = 0, \qquad\qquad (11)\\
&\left(c_{33}U_3{}'(x_3)+P(x_3)\right)_{x_3=\pm h} = 0.
\end{aligned}$$

Співвідношення (10), (11) дозволяють визначити такі множини критичних частот симетричних по товщині шару хвиль:

– критичні частоти бігучих хвиль першого типу, які при виникненні характеризуються тільки зміщеннями вздовж координатного напрямку Ox_1

$$\Omega_m{}^{(1)} = m\pi c_{55}^{1/2}/2h \quad \left(m=\overline{0,\infty}\right).$$

– критичні частоти бігучих хвиль другого типу, які при виникненні характеризуються тільки зміщеннями вздовж координатного напрямку Ox_2

$$\Omega_m{}^{(2)} = m\pi c_{44}^{1/2}/2h \quad \left(m=\overline{0,\infty}\right).$$

Крім того, із третього, четвертого, п'ятого та восьмого співвідношень (8), (9) отримуємо формальне рівняння, яке не має дійсних розв'язків і описує у випадку вільного шару без оточуючої рідини третю гілку критичних частот бігучих нормальних хвиль, що є при виникненні на частоті запирання вертикально поляризованими хвилями зсуву.

Співвідношення (8), (9) для пружно-еквівалентних напрямків розповсюдження мають особливу форму, яка вказує на існування в даній структурі незв'язних з хвильовими рухами в рідині мод нормальних SH-хвиль та мод, аналогічних модам P-SV-хвиль Лемба. Так, для напрямку Ox_1 задача (8), (9) має вигляд

$$\begin{aligned}
&c_{55}U_1'' + \left(\Omega^2 - c_{11}k^2\right)U_1 + ik\left(c_{13}+c_{55}\right)U_3' = 0,\\
&c_{44}U_2'' + \left(\Omega^2 - c_{66}k^2\right)U_2 = 0, P'' + \left(\frac{\omega^2}{a_0{}^2} - k^2\right)P = 0, \qquad (12)\\
&ik\left(c_{13}+c_{55}\right)U_1' + c_{33}U_3'' + \left(\Omega^2 - c_{55}k^2\right)U_3 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(U_1' + ikU_3\right)_{x_3=\pm h} = 0, \left(U_2'\right)_{x_3=\pm h} = 0,\\
&\left(ikc_{13}U_1 + c_{33}U_3' + P\right)_{x_3=\pm h} = 0, \left(\omega^2\rho_0U_3 - P'\right)_{x_3=\pm h} = 0, \qquad (13)
\end{aligned}$$

а для напрямку Ox_2 відповідно має вигляд

$$\begin{aligned}
&c_{55}U_1'' + \left(\Omega^2 - c_{66}k^2\right)U_1 = 0,\\
&c_{44}U_1'' + \left(\Omega^2 - c_{22}k^2\right)U_2 + ik\left(c_{23}+c_{44}\right)U_3' = 0, \qquad (14)\\
&ik\left(c_{23}+c_{44}\right)U_2' + c_{33}U_3'' + \left(\Omega^2 - c_{44}k^2\right)U_3 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(U_2' + ikU_3\right)_{x_3=\pm h} = 0, \left(\omega^2\rho_0U_3 - P'\right)_{x_3=\pm h} = 0,\\
&\left(ikc_{23}U_2 + c_{33}U_3' + P\right)_{x_3=\pm h} = 0, \left(U_1'\right)_{x_3=\pm h} = 0. \qquad (15)
\end{aligned}$$

У довільному випадку при напрямках розповсюдження, що не співпадають з пружно-еквівалентними, дисперсійні рівняння для симетричних нормальних хвиль досліджуваного типу одержуємо з граничних співвідношень (9) на основі зображень розв'язків динамічних рівнянь (8)

$$\begin{aligned}
&U_1 = a_1 \cos\sigma_1 x_3 + a_2 \cos\sigma_2 x_3 + a_3 \cos\sigma_3 x_3,\\
&U_2 = a_1\alpha_1 \cos\sigma_1 x_3 + a_2\alpha_2 \cos\sigma_2 x_3 + a_3\alpha_3 \cos\sigma_3 x_3,\\
&U_3 = a_1\beta_1 \cos\sigma_1 x_3 + a_2\beta_2 \cos\sigma_2 x_3 + a_3\beta_3 \cos\sigma_3 x_3,\\
&P^{\pm} = a_4 \exp(\pm\sigma_4 x_3);
\end{aligned} \tag{16}$$

в яких

$$\sigma_4 = \left(k^2 - \Omega^2 / a_0^2\right)^{1/2}, \ \sigma_m = -i\lambda_m, \tag{17}$$

$$\Delta_{1m} = -\left(\alpha_{22} + \lambda_m^2\right)\alpha_{13} + \alpha_{12}\alpha_{23}, \ \Delta_{2m} = -\left(\alpha_{11} + \lambda_m^2\right)\alpha_{23} + \alpha_{21}\alpha_{13},$$

$$\Delta_{3m} = \left(\alpha_{11} + \lambda_m^2\right)\left(\alpha_{22} + \lambda_m^2\right) - \alpha_{12}\alpha_{21}, \ \alpha_{mm}\tilde{\alpha}_{mm}k^2 + \Omega^2 \ \left(m = \overline{1,3}\right):$$

$$\alpha_{12} = k^2\tilde{\alpha}_{12}, \ \alpha_{21} = k^2\tilde{\alpha}_{21}, \ \alpha_{p3} = ik\tilde{\alpha}_{p3}, \ \alpha_{3p} = ik\tilde{\alpha}_{3p},$$

$$\tilde{\alpha}_{11} = -\left(n_1^2 c_{11} + n_2^2 c_{66}\right), \ \tilde{\alpha}_{22} = -\left(n_1^2 c_{66} + n_2^2 c_{22}\right), \ \tilde{\alpha}_{33} = -\left(n_1^2 c_{55} + n_2^2 c_{44}\right),$$

$$\tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{21} = -n_1 n_2 \left(c_{12} + c_{66}\right), \ \tilde{\alpha}_{p3} = \tilde{\alpha}_{3p} = n_p\left(c_{p3} + c_{6-p,6-p}\right), \ p = \overline{1,2}$$

λ_m – розв'язки бікубічного характеристичного рівняння

$$\det\begin{Vmatrix} \lambda^2 + \alpha_{11} & \alpha_{12} & \lambda\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \lambda^2 + \alpha_{22} & \lambda\alpha_{23} \\ \lambda\alpha_{13} & \lambda\alpha_{23} & \lambda^2 + \alpha_{33} \end{Vmatrix} = 0,$$

що відносяться до різних гілок його коренів.

Дорівнюючи нулю функціональний визначник однорідної лінійної системи відносно сталих коефіцієнтів a_j $\left(j = \overline{1,4}\right)$, яка випливає з співвідношень (9), одержуємо дисперсійне рівняння виду

$$\Delta(k,\omega) = \rho_0\omega^2\sigma_4^{-1}\begin{vmatrix} \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \sin\sigma_1 h \cdot \sin\sigma_2 h \cdot \sin\sigma_3 h, \tag{18}$$

де $\Delta(k,\omega)$– дисперсійний визначник для симетричних нормальних хвиль в ортотропному шарі з вільними гранями.

$$\Delta(k,\omega) = \begin{vmatrix} \theta_{31}\sin\sigma_1 h & \theta_{32}\sin\sigma_2 h & \theta_{33}\sin\sigma_3 h \\ \theta_{21}\sin\sigma_1 h & \theta_{22}\sin\sigma_2 h & \theta_{23}\sin\sigma_3 h \\ \theta_{11}\cos\sigma_1 h & \theta_{12}\cos\sigma_2 h & \theta_{13}\cos\sigma_3 h \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Тут

$$\theta_{1m} = ikn_1 c_{13} + ikn_2 c_{23}\Delta_{2m}\sigma_m^{-1} + c_{33}\Delta_{3m},$$

$$\theta_{2m} = ikn_2\Delta_{3m}\sigma_m^{-1} - \Delta_{2m}, \ \theta_{3m} = ikn_1\sigma_m^{-1} - \sigma_m,$$

$$\chi_m = \Delta_{3m}\sigma_m^{-1} \quad (m = \overline{1,3}).$$

Для пружно-еквівалентних напрямків Ox_r $\left(r = \overline{1,2}\right)$ дисперсійні рівняння, які описують спектр P-SV хвиль в структурі, що розглядається, мають вигляд

$$\Delta^{(a)}(\omega,k) - \rho_0\omega^2\sigma_4^{-1}\left(\chi_1\nu_2 - \chi_2\nu_1\right)\sin\sigma_r h \sin\sigma_3 h = 0. \tag{20}$$

В рівняннях (20) $\Delta^{(a)}$–дисперсійний визначник для нормальних симметричних P-SV хвиль вздовж пружно-еквівалентних напрямків у площині ортотропного шару з вільними гранями

$$\Delta^{(a)}(\omega,k)=\chi_1\xi_3\sin\sigma_r h\cos\sigma_3 h-\chi_3\xi_1\cos\sigma_r h\sin\sigma_3 h, \tag{21}$$

$$\xi_m=\left[c_2c_3\left(\sigma_m{}^2-a_{11}\right)-k^2\left(c_3+c_4\right)c_4\right]/\left[ik\left(c_3+c_4\right)\right],$$

$$v_m=\left(\sigma_m^2-a_{11}\right)\sigma_{12}^{-1}\sigma_m^1,\ \chi_m=ikv_m-\sigma_m\quad\left(m=\overline{1,2}\right),$$

$$a_{11}=-c_1k^2+\Omega^2,\ a_{22}=-c_3k^2+\Omega^2,\ a_{12}=ik\left(c_3+c_4\right),$$

$$c_1=c_{rr},\ c_2=c_{33},\ c_3=c_{3+r,3+r},\ c_4=c_{r3}.$$

Через σ_r,σ_3 в співвідношеннях (20) позначена пара коренів характеристичного рівняння

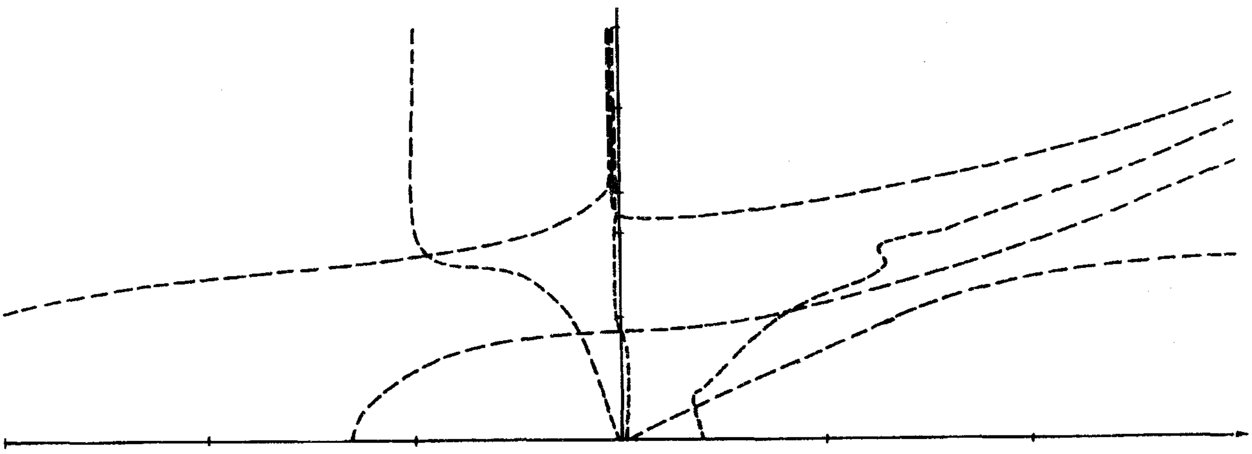
$$\sigma^4+\left(a_{11}+a_{22}-a_{12}^2\right)\sigma^2+a_{11}a_{22}=0.$$

Значення индексу $r=1,2$ відповідає варіанту пружно-еквівалентного напрямку розповсюдження нормальної хвилі Ox_r

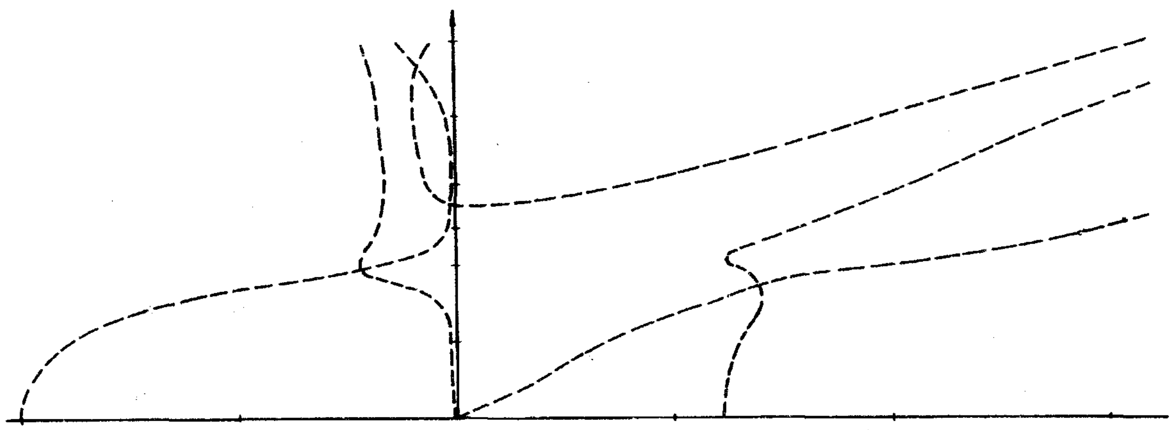
На мал.1,2 наведені результати чисельних розрахунків гілок дисперсійних спектрів симетричних нормальних хвиль у пружно-эквівалентних напрямках шару з кристалу сегнетової солі, що оточений водою. Фізико-механічні сталі шару та рідини відповідно наведені в роботах [2] і [4]. Безрозмірні хвильові числа $\widetilde{k}$ віднесені до товщини шару. Нормований узагальнений частотний параметр Ω має вигляд

$$\Omega=2\omega\rho C^*/(\rho^* C_{33})/\pi.$$

Зображені моди зв'язаних нормальних хвиль являють собою трансформовані дійсні та комплексні гілки дисперсійного спектру для вільного контактуючого з вакуумом шару. Наявність рідинних напівпросторів веде до виникнення уявних складових тих мод, які у вільному шарі є дійсними модами бігучих хвиль. У розглянутому випадку зазначені уявні складові характеризують ефект затухання "псевдобігучих" нормальних хвиль, пов'язаний з радіаційним розсіянням енергії хвильових рухів в оточуючу рідину. Зокрема, як випливає з результатів розрахунків, коефіцієнт затухання нижчої моди "псевдобігучих" хвиль з нульовою частотою запирання зростає при збільшенні частоти хвилі та надалі стабілізується за своїм значенням.



Мал. 1



Мал. 2

РЕЗЮМЕ

Проведено детальное численно-аналитическое исследование симметрических вытекающих волн. Нормальные волны распространяются вдоль произвольного направления в плоскости пластины. Описано влияние параметров жидкости на комплексные ветви спектра.

SUMMARY

The full spectrum of symmetric normal waves in strongly anisotropic layer placed in ideal liquid is investigated. The solutions of dispersion equations for a layer having free boundaries are taken as an initial approximation to carry out numerical calculations. Some particular cases of dispersion relations are formed. The results of numerical calculations of normal waves spectrum for a layer of Seignette crystal placed in water are described.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Scoch V A. Der schalldurchgang durch platten (sound transmision in plates)// Acoustica.– 1952. – No2. – P.1-17.
2. Меркулов Л.Г. Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости // Акуст. журн. – 1964. – 10, №2. – С.206-212.
3. Zhu Z., Wu J. The propagation of Lamb waves in a plate bordered with a viscous liquid // J. Acoust. Soc. Am. – 1995. – 98, № 2, Pt.1. – P.1057-1064.
4. Космодамианский А.С., Сторожев В.И., Шпак В.А. Спектр симметрических нормальных волн в ортотропном слое. – Теорет. и прикл. механика. – 1988. – Вып.19. – С.116-121.
5. Абрамова О.П., Сторожев В.И., Шпак В.А. Дисперсия нормальных волн в отротропном слое с закрепленными границами. – Акуст. журн. – 1995. – 41, №6. – С.1-5.

Надійшла до редакції 06.11.1997 р.