

УДК 532.517.4

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

И.Л.Повх

, Е.Н.Кожсекина

Одной из основных проблем современной гидродинамики является снижение гидродинамического сопротивления. В работе [1] предложен метод снижения сопротивления, который заключается в замене цилиндрических труб, имеющих постоянное по длине круглое сечение, на трубы также круглые, но с переменным сечением по длине (волновые трубы). Изменяя геометрические параметры волновых труб (длину волны, ее амплитуду, длину и форму диффузорной и конфузорной частей), можно снизить сопротивление.

В отличие от цилиндрических труб, в которых потери энергии определяются только сопротивлением трения, постоянным по всей длине, в волновых трубах появляется еще и сопротивление формы. Поэтому для определения полного гидродинамического сопротивления необходимо знать поле давления. Изучать этот метод снижения сопротивления можно как теоретически, так и экспериментально. На сегодня наиболее эффективным инструментом теоретических исследований является математическое моделирование, позволяющее с применением современных численных методов и ЭВМ получить достоверные результаты при минимальных затратах.

В данной работе представлен алгоритм расчета турбулентного течения жидкости в трубах с переменным сечением.

Рассматривается область, имитирующая трубы переменного сечения при следующих допущениях: течение двумерное осесимметричное, стабилизированное и периодическое с периодом 1; жидкость несжимаемая, ньютоновская; массовые силы отсутствуют.

Так как расчетная область имеет цилиндрическую симметрию используется цилиндрическая система координат.

Все процессы описываются системой уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, которая замыкается уравнениями  $k$ - $\epsilon$  модели [2]. Уравнения записаны в дивергентной (консервативной) форме.

Для того чтобы учесть влияние на характеристики турбулентности кривизны линий тока, в работе используется модификация диссипативного члена в уравнении переноса диссипации кинетической энергии [3]. Модификация связана с коррекцией полуэмпирической константы  $C_{\epsilon 2}$  на поправочную функцию  $f_c = 1 - C_c R_{IT}$ , где  $C_c = 0,2$ - дополнительная полуэмпирическая константа, связанная с турбулентным числом Ричардсона  $R_{IT} = (E^2/\epsilon^2)(q/R_c^2)\partial(R_c q)/\partial R_c$ , где  $R_c$  – локальный радиус кривизны, который вычисляется по формуле

$1/R_c = 2V_r^2 / (Rq^2)$ ; где  $q = \sqrt{V_r^2 + Vz^2}$  – местная результирующая скорость. С учетом поправочной функции  $f_c$ , постоянные модели примут вид:

$$C_\mu = 0.09; C_{\epsilon 1} = 1.43; C_{\epsilon 2} = 1.92 f_c; \sigma_E = 1; \sigma_\epsilon = 1.13.$$

Уравнения  $k$ - $\epsilon$  модели не учитывают вязкие эффекты, свойственные пристеночным течениям вблизи стенки. Этот недостаток в нашей работе устраняется благодаря использованию метода пристеночных функций [2].

Система уравнений дополняется граничными условиями. На входе в расчетную область используется предположение о степенном законе распределения поля скорости. Распределение характеристик турбулентности находим в соответствии с зависимостями:

$$\epsilon = C_v^{3/4} E^{3/2} / L \text{ и } E = \tau_w / (\rho C_v^{1/2}).$$

Граничные условия для скорости записываются в следующем виде:

на входе и выходе трубы – условие периодичности:  $(0 \leq r \leq r_T), V_z(r, z) = V_z(r, z + 1), V_r(r, z) = V_r(r, z + 1)$ ; на оси – условие симметрии:  $(r = 0) V_r = 0, \partial V_z / \partial r = 0$ ; на твердой стенке – условия прилипания:  $(r = r_T) V_r = V_z = 0$ .

Для кинетической энергии пульсаций и диссипации кинетической энергии: на входе и выходе трубы – условия периодичности; на оси аппроксимируется экстраполяционными зависимостями по внутриполювым значениям. Скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций определяется с помощью метода пристеночных функций [2].

$$\varepsilon_{w+1} = v_t^3 / (\chi \Delta n)^4, \quad v_t = \chi \Delta n C_v^{1/4} E_{w+1}^{1/2}.$$

В соответствии с методом пристеночных функций также вычислялись члены уравнений k-ε модели, определяющие рост энергии турбулентных пульсаций и ее диссипацию в смежных с твердыми стенками узлах расчетной сетки. Скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций в этих узлах принималась равной среднему ее значению, вычисленному по контрольному объему с полюсом  $(w + 1)$ :

$$(\varepsilon / E)_{cp} = (C_v^{1/2} / \chi^2) (v_t / \Delta n^2) \ln(N \operatorname{Re} v_t / \chi),$$

где  $N$  – постоянная, зависящая от шероховатости стенки и определяемая экспериментально, в частности для гладкой стенки  $N = 8.8 \div 9.0$  [2].

Функция, определяющая рост энергии турбулентных пульсаций, полагалась равной  $f_2 = \tau_w^2 / v_t$ , где  $\tau_w = (V_{zw+1} v_t) / [\Delta n \ln(N \operatorname{Re} v_t) / \chi]$ .

В качестве начального поля давления в данной работе используется поле давления, рассчитанное предварительно, путем решения уравнения Пуассона для давления на основе заданного поля скорости, полученного с помощью решения исходных уравнений в преобразованных переменных (вихрь – функция тока).

Для удобства программирования вычислительного алгоритма исходные уравнения представим в обобщенном виде:

$$a \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_r \Phi) + \frac{\partial}{\partial z} (r V_z \Phi) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{rh}{\gamma_r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{rh}{\gamma_z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S + PP, \quad (1)$$

где  $\Phi = V_r, V_z, E, \varepsilon$ , а параметры  $a, h, \gamma_r, \gamma_z$  находятся из сопоставления форм записи исходных уравнений. В уравнениях переноса продольной и поперечной составляющих скорости слагаемое, учитывающее давление выделено в отдельный член  $PP$ .  $S$  – источник член. Учитывая дивергентную запись исходных уравнений, дискретизация расчетной области осуществляется методом контрольного объема на шахматной сетке. Интегрирование уравнений для переменных  $P, E$  и  $\varepsilon$  ведется по контрольному объему, представленному на рис. 1, а, для переменной  $V_z$  – на рис. 1, б, для  $V_r$  – на 1, в.

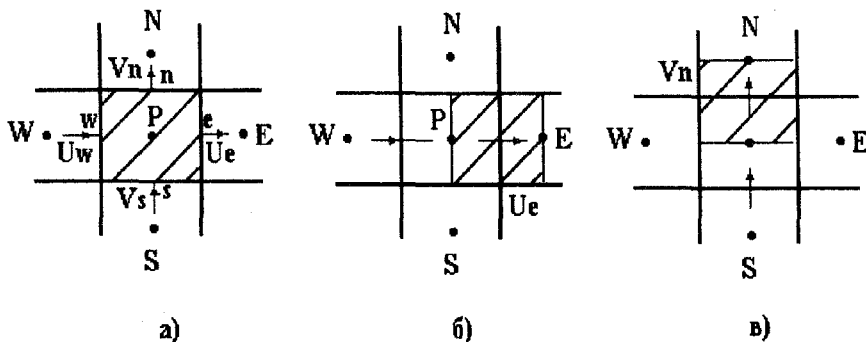


Рис. 1. Контрольные объемы для давления (а), продольной (б) и поперечной (в) составляющих скорости

Дискретный аналог уравнения (1) примет вид:

$$\overline{\Phi}_{i,k} = c_{i,k+1} \overline{\Phi}_{i,k+1} + c_{i,k-1} \overline{\Phi}_{i,k-1} + c_{i+1,k} \overline{\Phi}_{i+1,k} + c_{i-1,k} \overline{\Phi}_{i-1,k} + \frac{S\Delta V}{\Sigma} + \frac{PP\Delta V}{\Sigma}$$

$$c_{i,k+1} = \frac{a_{i,k+1}}{\Sigma}; c_{i,k-1} = \frac{a_{i,k-1}}{\Sigma}; c_{i+1,k} = \frac{a_{i+1,k}}{\Sigma}, c_{i-1,k} = \frac{a_{i-1,k}}{\Sigma},$$

$$a_{i,k+1} = \left[ -F_{i,j+1}, 0 \right] + D_{i,k+1} A(P_{i,k+1}); a_{i,k-1} = \left[ F_{i,j}, 0 \right] + D_{i,k-1} A(P_{i,k-1})$$

$$a_{i+1,k} = \left[ -F_{1,k}, 0 \right] + D_{i+1,k} A(P_{i+1,k}); a_{i-1,k} = \left[ F_{1-1,k}, 0 \right] + D_{i-1,k} A(P_{i-1,k})$$

$$F_{i,j+1} = \frac{(V_r r)_{i,k+1} + (V_r r)_{i,k}}{2} \frac{Z_{i+1,k} - Z_{i-1,k}}{2};$$

$$F_{i,j} = \frac{(V_r r)_{i,k} + (V_r r)_{i,k-1}}{2} \frac{Z_{i+1,k} - Z_{i-1,k}}{2};$$

$$F_{l,k} = \frac{(V_z r)_{i+1,k} + (V_z r)_{i,k}}{2} \frac{r_{i,k+1} - r_{i,k}}{2};$$

$$F_{i-1,k} = \frac{(V_z r)_{i-1,j} + (V_z r)_{i,k}}{2} \frac{r_{i,k+1} - r_{i,k}}{2};$$

$$A(P_{i,j+1}) = \left[ 0, 1 - \frac{0.1 |F_{i,j+1}|^5}{D_{i,j+1}} \right]; A(P_{i,j-1}) = \left[ 0, 1 - \frac{0.1 |F_{i,j-1}|^5}{D_{i,j-1}} \right];$$

$$A(P_{i+1,j}) = \left[ 0, 1 - \frac{0.1 |F_{i+1,j}|^5}{D_{i+1,j}} \right]; A(P_{i-1,j}) = \left[ 0, 1 - \frac{0.1 |F_{i-1,j}|^5}{D_{i-1,j}} \right].$$

где  $F$  – интенсивность конвекции;  $D$  – диффузионная проводимость. При получении разностной схемы была использована степенная аппроксимация. Сущность схемы со степенным законом заключается в том, что в разностной схеме диффузионная проводимость  $D$  домножается на функцию  $A(P) = [0; (1 - 0.1|P|^5)]$  [4].

Полученная в ходе дискретизации расчетной области система алгебраических уравнений решается на основе SIMPLER-процедуры [4]. Для того чтобы описать основные стороны метода, конечно-разностное уравнение для продольной  $V_z$  и поперечной  $V_r$  составляющих скорости перепишем в виде:

$$a_e V_{ze} = \sum_{nl} a_{nl} V_{znl} + b + PP. \quad (2)$$

$$a_e V_{re} = \sum_{nl} a_{nl} V_{rnl} + b + PP, \text{ где } b = S\Delta V. \quad (3)$$

Значения коэффициентов  $a_{nl}$  связаны с влиянием совместных конвективных и диффузионных процессов на гранях контрольного объема. Член  $PP$  представляет собой силу давления, действующую на контрольный объем. Уравнения количества движения можно решить только в том случае, если поле давления задано или каким-то образом найдено. Если при решении использовать неверное поле давления, найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. Выразим такое поле скорости, полученное с использованием приближенного поля давления  $P^*$  через  $V_z^*$  и  $V_r^*$ . Это поле скорости находится в результате решения следующих уравнений :

$$V_{Ze} = V_{Ze}^* + d_e [(RP')_P - (RP')_E] \quad (4)$$

$$Vr_n = Vr_n^* + d_n [(RP')_P - (RP')_N], \quad (5)$$

где

$$d_e = \frac{R_{N'} - R_{S'}}{2\pi^2 a_e}, \quad d_n = \frac{Z_{E'} - Z_{W'}}{2\pi^2 a_n}.$$

$P'$  – поправка давления. Уравнения (4)-(5) носят название поправочных формул для скорости. Для того чтобы получить уравнение для поправки давления, проинтегрируем уравнение неразрывности по контрольному объему (рис.1,а). Конечно-разностный аналог уравнения неразрывности примет вид:

$$\left[ (RV_r)_n - (RV_r)_s \right] (Z_e - Z_w) + \left[ (RV_z)_e - (RV_z)_w \right] (R_n - R_s) = 0. \quad (6)$$

После подстановки поправочных формул для скоростей и перегруппировки соответствующих членов получим следующее уравнение для сеточных значений  $P'$ :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b, \quad (7)$$

Граничным условием для уравнения (7) на оси и твердых стенках является равенство нулю нормального градиента давления на этих границах. Итак, мы получили все уравнения, необходимые для определения составляющих скорости и давления. Теперь можно рассмотреть весь алгоритм решения в целом. В этом методе для оценки давления  $P^*$  дополнительно решается уравнение для давления, причем коэффициенты этого уравнения совпадают с коэффициентами уравнения для поправки давления  $P'$ , а источник-ый член рассчитывается подобно массовому источнику ячейки при использовании фиктивных скоростей на гранях контрольного объема для  $P$ . Последние рассчитываются из уравнения изменения количества движения в пренебрежении членами, содержащими давление. Так, для грани  $e$ :

$$\tilde{V}_{Ze} = \left( \sum_{nl} a_{nl} V_{Znl} + b \right) / a_e. \quad (8)$$

Суммирование проводится по соседним узлам, в которых задаются скорости  $V_z$ . В этом случае уравнение (5) принимает вид:

$$V_{Ze} = \tilde{V}_{Ze} + d_e [(RP')_P - (RP')_E]. \quad (9)$$

По аналогии

$$Vr_n = \tilde{V}r_n + d_n [(RP')_P - (RP')_N], \quad (10)$$

$$\tilde{V}r_n = \left( \sum_{nl} a_{nl} Vr_{nl} + b \right) / a_n. \quad (11)$$

Легко заметить сходство между этими уравнениями и уравнениями (5)-(6). Здесь  $\tilde{V}_{Ze}$  и  $\tilde{V}r_n$  появляются вместо  $V_{Ze}^*$  и  $Vr_n^*$ , а само давление  $P$  занимает место  $P'$ . Отсюда следу-

ет, что если бы вывод уравнения (7) для поправки давления был выполнен с новыми соотношениями для скорости и давления, содержащими  $\tilde{V}_{Ze}$  и  $\tilde{V}_{m}$ , результатом было бы уравнение для давления, которое можно записать в виде:

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b, \quad (12)$$

где  $b$  определен соотношением:

$$b = [R_s \tilde{V}_{rs} - R_n \tilde{V}_{rn}] (Z_e - Z_w) + [R_w \tilde{V}_{Zw} - R_e \tilde{V}_{Ze}] (R_n - R_s)$$

Последовательность действий при использовании SIMPLER-процедуры подробно изложена в работе [4].

Тестовый расчет полей скорости и давления, проведенный для  $Re = 1.13 \cdot 10^5$  и при задании следующих геометрических параметров:  $a = 0.01$ ,  $lg = l_k = 0.5$  (длина диффузорной и конфузорной частей), показал, что алгоритм является устойчивым и позволяет с достаточной степенью достоверности проводить численный эксперимент по определению полей скорости и давления. Расчетные данные сравнивались с экспериментальными, полученными в работе [5]. На рис.2 приведены расчетные профили скорости, полученные в результате решения уравнений Рейнольдса в естественных переменных, преобразованных переменных и профили скорости, полученные в ходе эксперимента для симметричной по длине волны криволинейной трубы. Экспериментальная и расчетная кривые перепада давления представлены на рис.3.

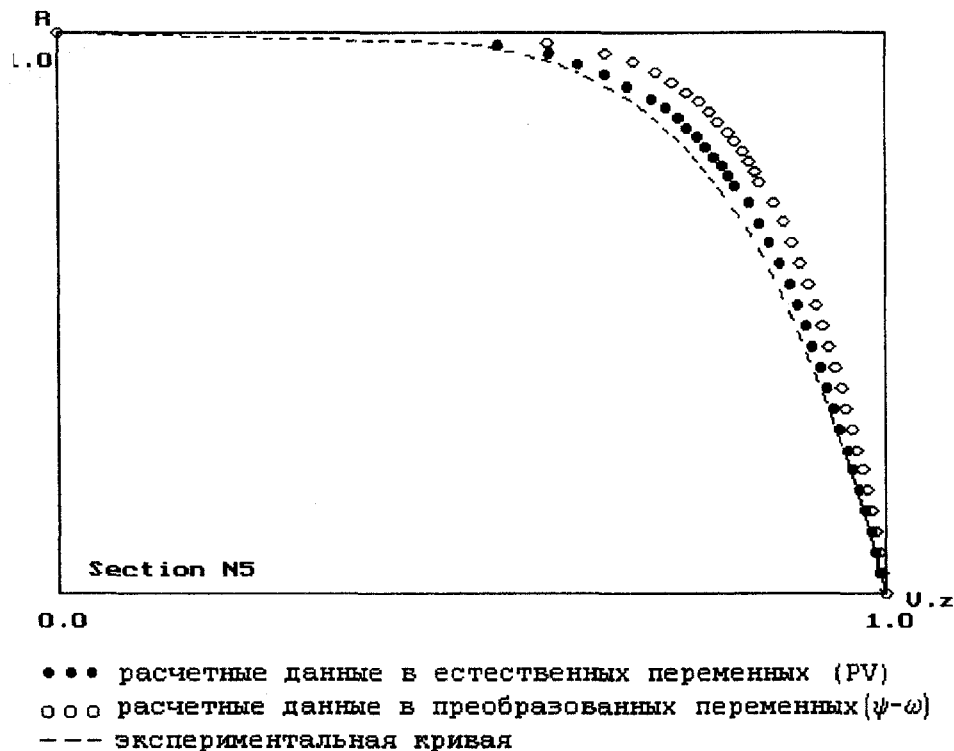


Рис. 2. Сравнение результатов численного эксперимента с результатами исследований других авторов [5]

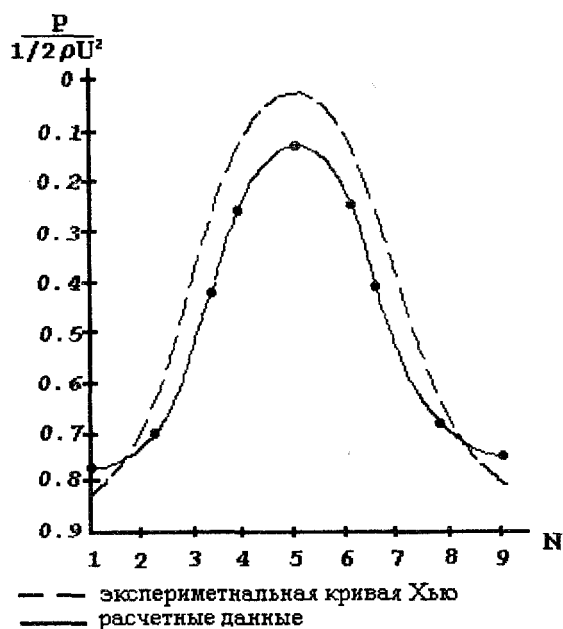


Рис. 3. График распределения давления по секциям

## РЕЗЮМЕ

Для розрахунку турбулентної течії в трубах змінного перерізу розглянут чисельний метод рішення рівнянь Нав'є-Стокса осереднених за Рейнольдсом і доповнених рівняннями модифікованої (К-ε) моделі. Чисельний метод рішення ґрунтується на повністю консервативній схемі кінцевих об'ємів з застосуванням степінної апроксимації. Одержані алгебраїчні рівняння були розраховані за допомогою SIMPLER-процедури. Тестовий розрахунок полів швидкості і тиску, який був проведений для  $Re=1.13 \cdot 10^5$  при завданні таких геометричних параметрів:  $a = 0.01$ ,  $l_g = l_k = 0.5$  (довжина дифузорної і конфузорної частини), показав, що алгоритм є стійкий і дозволяє з ним проводити чисельний експеримент за визначенням полів швидкості та тиску.

## SUMMARY

For account of turbulent current in pipes of a variable cut (PVC) numerical method of solution of the Navier-Stokes equations averaged on the Reynolds and supplemented by the equations of modified (k-ε) model is considered. The numerical method is based on the completely conservative scheme of final volumes with application of degree approximation. The obtained algebraic equations were solved on base of SIMPLER – procedure. Testing account of speed and pressure fields, conducted for  $Re=1.13 \cdot 10^5$  and for following geometrical parameters:  $a=0.01$ ,  $l_g=l_k=0.5$  (length of diffuser and cofusor parts), has shown, that the algorithm is steady and allows to perform numerical experiment for definition of speed and pressure fields.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Повх И.Л., Фиошин Н.В. Расчет полного сопротивления в трубах переменного сечения // Теор. и прил. механика. -Харьков: Вища школа, 1990. – Вып. 21. – С.120-124.
2. Введение в аэрогидродинамику контейнерного трубопроводного транспорта / Под ред. А.С.Гиневского. М.: Наука, 1986, с.232.
3. Ха К.,Лакшминараяна Б. Расчет двух- и трехмерных турбулентных следов при наличии кривизны и вращения. Пер. с англ.// Аэрокосм.техника. – 1984. – Т.2. – №4.– С.74-82.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатом издат, 1984, с-152.
5. Hsu S.T., Kennedy J.F. Turbulent flow in wawey pipes // J.Fluid Mech. 1971. v.47, pt3. – p. 481-502.

Надійшла до редакції 03.11.1997 р.