

УДК 539.3

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ТОНКИЕ ОБОЛОЧКИ

*Р.М.Нагорная, В.А.Цванг*

Исследования напряженно-деформированного состояния оболочек под действием локальных динамических нагрузок проводились в работах [1-3]. В них рассмотрены оболочки частного вида (цилиндрические и сферические), а численные результаты получены лишь в точке приложения нагрузок.

В настоящей работе рассмотрены изотропные оболочки произвольной гауссовой кривизны ( $\lambda = K_1/K_2$ ,  $K_1, K_2$  – главные кривизны), подверженные действию внезапно приложенных динамических нагрузок, локализованных в малых областях.

Целью работы является аналитическое (асимптотическое для малых моментов времени) и численное решение класса задач о действии локальных динамических нагрузок на тонкие оболочки, основанное на ранее построенных фундаментальных решениях уравнений динамики оболочек [4].

Исследования проводятся в рамках уравнений классической теории оболочек [5], где инерция учтена в нормальном к срединной поверхности оболочки направлении

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_1 + \frac{Eh}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_1 + \nu K_2) \frac{\partial}{\partial x} u_3 = -F_1, \\ & \frac{Eh}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_1 + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_2 + \nu K_1) \frac{\partial}{\partial y} u_3 = -F_2, \\ & \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_1 + \nu K_2) \frac{\partial}{\partial x} u_1 + \frac{Eh}{1-\nu^2} (K_2 + \nu K_1) \frac{\partial}{\partial y} u_2 + \\ & + \left[ D \left( \nabla^2 \nabla^2 + \frac{12}{h^2} (K_1^2 + \nu K_1 K_2 + K_2^2) \right) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u_3 = F_3, \end{aligned} \quad (1)$$

$$D = Eh^3 (12(1-\nu^2))^{-1}, \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь  $u_j = u_j(x, y, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки в направлении координатных осей  $x, y, z$ ,  $F_i = F_i(x, y, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты вектора внешней силовой нагрузки;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $K_1, K_2$  – главные кривизны;  $h$  – толщина оболочки;  $\rho$  – массовая плотность материала;  $t$  – время.

Решения  $u_j^{(l)}$  ( $l = 1, 2, 3$ ) системы (1), соответствующие нагрузкам  $\bar{F}^{(l)}$  с компонентами  $\delta^{il} \delta(x, y) \delta(t)$ ,  $\delta^{il}$  – символ Кронекера,  $\delta(\ )$  – дельта-функция Дирака, а также внутренние силовые величины  $T_1^{(l)}, T_2^{(l)}, S^{(l)}, M_1^{(l)}, M_2^{(l)}, H^{(l)}, Q_1^{(l)}, Q_2^{(l)}$ , возникающие в оболочке под действием данных нагрузок, образуют тензор фундаментальных решений (тензор Грина [6]).

Для построения фундаментальных решений уравнений (1) были использованы метод интегральных преобразований Фурье и Лапласа, а также оригинальная методика обращения этих преобразований [4].

Приведем выражения фундаментальных решений уравнений (1) и соответствующих внутренних силовых величин при действии на оболочку силы  $\bar{F}^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \begin{Bmatrix} \cos((2n+1)\varphi) \\ \sin((2n+1)\varphi) \end{Bmatrix} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \begin{Bmatrix} U_{nk}(\lambda) \\ V_{nk}(\lambda) \end{Bmatrix} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+1/2} \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^k G_{k+1/2,2n+1}^{-1/2} \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}\right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$w = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} W_{nk}(\lambda) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^{k-1/2} G_{k+1/2,2n}^{-1} \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}\right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \times \begin{Bmatrix} \cos(2n\varphi) \\ \sin(2n\varphi) \end{Bmatrix} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \begin{Bmatrix} T_{1nk}(\lambda) \\ T_{2nk}(\lambda) \\ -S_{nk}(\lambda) \end{Bmatrix} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^{k-1/2} G_{k+1/2,2n}^{-1} \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ H \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \begin{Bmatrix} \cos(2n\varphi) \\ \sin(2n\varphi) \end{Bmatrix} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \begin{Bmatrix} M_{1nk}(\lambda) \\ M_{2nk}(\lambda) \\ H_{nk}(\lambda) \end{Bmatrix} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-1} \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^{k-3/2} G_{k+1/2,2n}^{-2} \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{Bmatrix} t^{-3/2} \sqrt{\mathfrak{a}} \sin(\mathfrak{a}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \begin{Bmatrix} \cos((2n+1)\varphi) \\ \sin((2n+1)\varphi) \end{Bmatrix} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \begin{Bmatrix} N_{1nk}(\lambda) \\ N_{2nk}(\lambda) \end{Bmatrix} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-3/2} \left(\frac{\mathfrak{a}}{2}\right)^{k-2} G_{k+1/2,2n+1}^{-5/2} \left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (2) – (6)

$$U_{nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \cos((2n+1)\vartheta) \cos \vartheta L_1(\vartheta) d\vartheta,$$

$$V_{nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \sin((2n+1)\vartheta) \sin \vartheta L_2(\vartheta) d\vartheta,$$

$$W_{nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \cos(2n\vartheta) d\vartheta,$$

$$T_{1nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^{k+1/2} \cos(2n\vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta,$$

$$T_{2nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^{k+1/2} \cos(2n\vartheta) \cos^2 \vartheta d\vartheta,$$

$$S_{nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^{k+1/2} \sin(2n\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$M_{1nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \cos(2n\vartheta) (\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta) d\vartheta,$$

$$M_{2nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \cos(2n\vartheta) (\sin^2 \vartheta + \nu \cos^2 \vartheta) d\vartheta,$$

$$H_{nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \sin(2n\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$N_{1nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \cos((2n+1)\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$N_{2nk}(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [K_\lambda(\vartheta)]^k \sin((2n+1)\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Здесь параметр  $\alpha = r^2/4t$ ;  $r, \varphi$  – полярные координаты на срединной поверхности оболочки с началом в точке приложения нагрузки;  $t$  – параметр времени;

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 2, & n=1,2,\dots; \end{cases}$$

$$L_1(\vartheta) = (\lambda + \nu) \cos^2 \vartheta + (2\lambda + \lambda\nu - 1) \sin^2 \vartheta;$$

$$L_2(\vartheta) = (2 + \nu - \lambda) \cos^2 \vartheta + (1 + \lambda\nu) \sin^2 \vartheta;$$

$$K_\lambda(\vartheta) = (\cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta)^2.$$

Представления (2) – (6) включают новую специальную функцию  $G_{\nu,\mu}^\gamma(z)$  гипергеометрического типа:

$$G_{\nu,\mu}^\gamma(z) \equiv G_{2,4}^{2,1} \left( z \left[ \begin{matrix} 1 - \frac{\nu}{2}, & 1 + \frac{\nu}{2} \\ -\frac{\nu+\gamma}{2} + \frac{\mu}{4}, & -\frac{\nu+\gamma-1}{2} + \frac{\mu}{4}, & -\frac{\nu+\gamma-1}{2} - \frac{\mu}{4}, & -\frac{\nu+\gamma}{2} - \frac{\mu}{4} \end{matrix} \right] \right).$$

Данная функция введена авторами в работе [7].

Представление компонент тензора Грина в виде (2) – (6) позволяет получать для них асимптотические формулы в начальные моменты времени. Например,

$$w \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\alpha} \cos \alpha \{1 + O(t)\} + \frac{r^4}{768\alpha^3} [2(1 - \lambda^2) \cos(2\varphi) - (1 - \lambda)^2 \cos(4\varphi)] \{1 + O(t^2)\} + \frac{r^4}{512\alpha^4} \sin \alpha [3 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 4(1 - \lambda^2) \cos(2\varphi) + (1 - \lambda)^2 \cos(4\varphi)] \{1 + O(t)\}. \quad (7)$$

В выражении (7) первый член представляет собой первое пластиночное приближение [8], а второй и третий – первое и второе оболочечные приближения.

Рассмотренные выше нагрузки  $\bar{F}^{(l)}$  имеют смысл сосредоточенных сил, действующих в направлении координатных осей  $x, y, z$ . Например,  $\bar{F}^{(3)}$  – сосредоточенная сила, нормальная к срединной поверхности оболочки.

Ниже приведены результаты численных и аналитических исследований нормального прогиба оболочки для случая сосредоточенной силы  $\bar{F}^{(3)}$ , полученные на основании формул (3), (7).

На рис.1 приведено сравнение значений нормального прогиба  $w$  оболочки, полученных численно по формуле (3) (кривая 1) со значениями, вычисленными по асимптотической формуле (7) (кривая 2). Вычисления производились при  $r = 1, \varphi = 0, \lambda = 0,5$ . Из графиков на рис.1 видно, что простые аналитические (асимптотические) формулы вида (7) дают практически одинаковый в сравнении с численным результатом на интервале времени  $(0, 0,07)$  и могут быть использованы для инженерных расчетов.

Задача об определении напряженно-деформированного состояния оболочки под действием силы  $\bar{F}_\mu$ , локализованной в области  $D$ , сводится к использованию формулы свертки фундаментального решения с внешней нагрузкой.

Рассмотрим случай внешней нагрузки  $\bar{F}_\mu(0,0,F_\mu)$ , распределенной внутри круговой площадки радиуса  $r_0$  с центром в начале координат  $x, y$  на срединной поверхности оболочки

$$F_{\mu} = \begin{cases} F_{\mu}^{*}(X, Y)\delta(t), & X^2 + Y^2 \leq R_0^2, \\ 0, & X^2 + Y^2 > R_0^2, \end{cases}$$

$$F_{\mu}^{*}(X, Y) = -\frac{1+\mu}{\pi R_0^2} \left[ 1 - \frac{X^2 + Y^2}{R_0^2} \right]^{\mu},$$

где  $X = Kx, Y = Ky, R_0 = Kr_0, K^4 = 12(1-\nu^2)K_2^2 h^{-2}$ .

В рассматриваемом случае формула представления решения, например, нормального прогиба оболочки  $w$ , имеет вид

$$w(x, y, t) = \int_D \int F_{\mu}^{*}(x - x_1, y - y_1, t) F_{\mu}^{*}(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

Здесь  $F_{\mu}^{*}(x, y, t)$  – фундаментальное решение уравнений теории тонких оболочек.

Представление нормального прогиба оболочки под действием локальной динамической нагрузки  $\bar{F}_{\mu}$  имеет вид

$$w(r, \varphi, t) = \frac{1+\mu}{2\pi\sqrt{\pi}R_0^{2(1+\mu)}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} W_{nk}(\lambda) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \times \\ \times \int_0^{2R_0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\hat{x}}{2}\right)^{k-1/2} G_{k+1/2, 2n}^{-1} \left(\frac{\hat{x}^2}{4}\right) [R_0^2 - r_1^2]^{\mu} \cos(2n\hat{\varphi}) r_1 dr_1 d\varphi_1,$$

где  $\hat{x} = \hat{r}^2/4t, x - x_1 = \hat{r} \cos \hat{\varphi}, y - y_1 = \hat{r} \sin \hat{\varphi}$ .

На рис.2 для точки  $x = y = 0$  срединной поверхности изображены графики изменения нормального прогиба  $w$  оболочек различной кривизны во времени. При этом  $R_0 = 1, \mu = 0$ , а кривые 1–5 соответствуют значениям параметра  $\lambda = 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0$ . Из графиков на рис.2 видна существенность влияния параметра отношения кривизны  $\lambda$  на характер и скорость затухания прогиба  $w$  во времени.

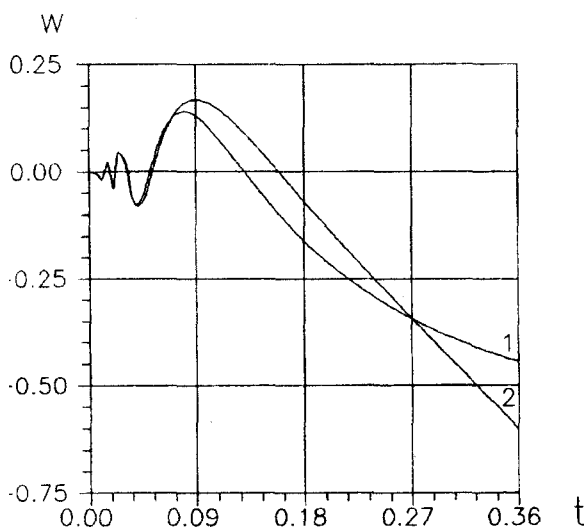


Рис. 1

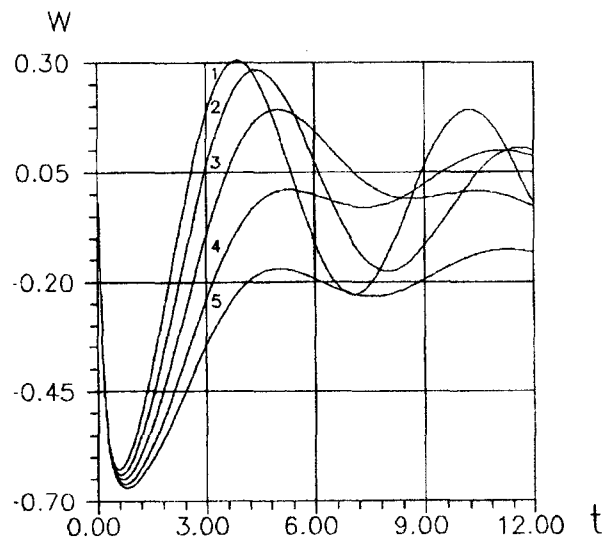


Рис.2

## РЕЗЮМЕ

За допомогою метода інтегральних перетворень Фур'є-Лапласа та теорії узагальнених функцій отримані у замкненій формі фундаментальні рішення рівнянь динамічної теорії тонких ізотропних оболонок. Розроблено нову методику обернення для інтегральних перетворень Фур'є-Лапласа. На цій основі одержані рішення задач про дію зосереджених та локальних динамічних навантажень на оболонки. Були зроблені аналітичні та чисельні дослідження напружено-деформованого стану оболонок. Рішення цієї задачі були порівняні з відомими (для окремих випадків) з літератури.

## SUMMARY

By the method of integral transforms of Fourier - Laplace and theory of generalized functions the fundamental solutions of dynamics equations thin shallow isotropic shells theory in closed form were obtained. New method of constructing of originals of Fourier - Laplace transform was developed. On this base the solutions of problems about action of concentrated and local dynamic loadings on shells were obtained. Analytical and numerical investigations of stress -strain state of shell were made. Solutions of this problem were compared with known ones (for special cases) from literature.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Агафонов А.В. Действие внезапно приложенной сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку. – Изв. АН СССР: Механика тв. тела. – 1965. – № 1. – С.148-150.
2. Медик М.А. О начальной реакции сферической оболочки на действие сосредоточенной силы. – Прикл. механика. – 1962. – 29. – № 4. – С.96-102.
3. Колодяжный А.В., Скоблик И.И. Локальное импульсное неосесимметричное деформирование упругой цилиндрической оболочки. – Пробл. машиностр. – 1987. – № 28. – С.3-6.
4. Нагорная Р.М., Цванг В.А., Шевченко В.П. Фундаментальные решения динамических уравнений теории пологих оболочек. – Изв. АН СССР: МТТ. – 1994. – № 3. – С.173-180.
5. Власов В.З. Избранные труды. Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. 280 с.
7. Матеріали вузівської наукової конференції професорсько-викладацького складу за підсумками науково-дослідницької роботи: математика, фізика, екологія. – Донецьк, квітень 1997 р. – С.86-87.
8. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 376 с.

*Надійшла до редакції 30.10.1997 р.*