УДК 532.595

О ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю.Н. Кононов

Введение

Стратификация жидкости может возникнуть вследствие физического, химического, биологического и других воздействий, в результате чего происходит смещение центра тяжести и образование внутренних волн. В этой связи возникает задача о влиянии стратификации на движение твердого тела и устойчивость его движения.

Рассмотрим твердое тело, имеющее цилиндрическую полость произвольного поперечного сечения σ_0 и образующей, параллельной направлению поля массовых сил интенсивности $\vec{g}$. Предположим, что полость частично заполнена двухслойной идеальной жидкостью плотности ρ_1 и ρ_2, и твердое тело может двигаться поступательно в поле силы тяжести со скоростью $\vec{\upsilon}(t)$.

1. Колебания стратифицированной жидкости в поступательно движущемся цилиндрическом сосуде

Движение жидкости будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с твердым телом и расположенной так, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью раздела жидкостей в невозмущенном положении, а ось Oz направлена в сторону, противоположную вектору ускорения силы тяжести.

Обозначим через $\Phi_i(x,y,z,t)$ потенциал относительной скорости жидкости в τ_i полости $(i=1,2)$, через $\xi_1(x,y,t)$ свободную поверхность, а через $\xi_2(x,y,t)$ поверхность раздела жидкостей.

В рамках линейной теории волновых движений жидкости задача о колебании двухслойной идеальной жидкости в поступательно движущемся твердом теле может быть сформулирована следующим образом [1,2]:

$$\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } \tau_i;$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu}\right|_{S_{\delta ok}} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial z} = \left.\frac{\partial\xi_i}{\partial t}\right|_{\substack{z=h_1,\ i=1\\ z=0,\ i=2}}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + (g+\ddot{Z})\xi_1 = -\ddot{X}x - \ddot{Y}y \qquad \text{при} \quad z = h_1;$$

$$\frac{P_i}{\rho_i} = -\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + (g+\ddot{Z})\xi_2 + \ddot{X}x + \ddot{Y}y\right] \quad \text{при} \quad z = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}, \quad P_1 = P_2 \qquad \text{при} \quad z = 0;$$

Здесь P_i – динамическое давление; h_i – глубина заполнения τ_i полости, $\vec{\upsilon} = (\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z})$

Представим функции $\Phi_i(x, y, z, t)$ и $\xi_i(x, y, t)$ в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям $\Psi_n(x, y)$ [1]

$$\Phi_1 = \sum_n \Psi_n(x,y)\left[A_{1n}(t)e^{k_n z} + B_n(t)e^{-k_n z}\right]$$
$$\Phi_2 = \sum_n \Psi_n(x,y)A_{2n}(t)chk_n(z+h_2); \qquad (2)$$
$$\xi_i = \sum_n \Psi_n(x,y)\xi_{in}(t).$$

Подставляя соотношения (2) в формулы (1), получаем следующую систему уравнений для определения неизвестных функций A_{in}, ξ_{in}, B_n :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{1n} = k_n\left(A_{1n}e^{\chi_{1n}} - B_n e^{-\chi_{1n}}\right), \\ \dot{\xi}_{2n} = k_n A_{2n} sh\chi_{2n}; \\ \dot{A}_{1n}e^{\chi_{1n}} + \dot{B}_n e^{-\chi_{1n}} + (g+\ddot{Z})\xi_{1n} = -\alpha_n\ddot{X} - \beta_n\ddot{Y}; \\ A_{1n} - B_n = A_{2n} sh\chi_{2n}; \\ \rho_1(\dot{A}_{1n} + \dot{B}_n) - (\rho_2 - \rho_1)\left[(g+\ddot{Z})\xi_{2n} + \alpha_n\ddot{X} + \beta_n\ddot{Y}\right] = \rho_2\dot{A}_{2n}ch\chi_{2n}. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь

$$\chi_{in} = k_n h_i, \quad \alpha_n = C_n/N_n^2, \quad \beta_n = D_n/N_n^2,$$
$$C_n = \int_{\sigma_0} x\Psi_n ds, \quad D_n = \int_{\sigma_0} y\Psi_n ds, \quad N_n^2 = \int_{\sigma_0} \Psi_n^2 ds.$$

Разрешив систему уравнений (3) относительно ξ_{1n} и ξ_{2n}, имеем:

$$\ddot{\xi}_{1n} + k_n(g+\ddot{Z})th\chi_{1n}\xi_{1n} - \frac{\ddot{\xi}_{2n}}{ch\chi_{1n}} = -k_n th\chi_{1n}(\alpha_n\ddot{X} + \beta_n\ddot{Y}), \qquad (4)$$

$$\rho_1\frac{\ddot{\xi}_{1n}}{sh\chi_{1n}} - (\rho_1 cth\chi_{1n} + \rho_{2n}cth\chi_{2n})\ddot{\xi}_{2n} - k_n(\rho_2 - \rho_1)(g+\ddot{Z})\xi_{2n} =$$
$$= k_n(\rho_2 - \rho_1)(\alpha_n\ddot{X} + \beta_n\ddot{Y}). \qquad (5)$$

Таким образом, если задан закон движения твердого тела, то коэффициенты разложения формы свободной поверхности ξ_{1n} и внутренней поверхности ξ_{2n} находятся из решения системы дифференциальных уравнений (4),(5).

В случае полного заполнения полости следует положить $\xi_{1n} \equiv 0$ и рассматривать только уравнение (5).

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях стратифицированной жидкости в неподвижном сосуде ($X = Y = Z = 0$).

Пусть $\xi_{1n} = \xi_{1n}e^{i\sigma t}$ и $\xi_{2n} = \xi_{2n}e^{i\sigma t}$.

Из системы (4)-(5) уравнение частот будет иметь вид

$$\sigma^4\left(\rho_2 + \rho_1\frac{\omega_{1n}^2\omega_{2n}^2}{g^2k_n^2}\right) - \rho_2(\omega_{1n}^2 + \omega_{2n}^2)\sigma^2 + (\rho_2 - \rho_1)\omega_{1n}^2\omega_{2n}^2 = 0. \qquad (6)$$

Здесь $\omega_{in}^2 = gk_n th\chi_{in}$.

Легко показать, что при $\rho_2 > \rho_1$ существует два набора вещественных частот.

Пусть $h_2 = \infty$ (т.е. $h_2/a >> 1$, где a – характерный линейный размер полости), тогда $\omega_{2n}^2 = gk_n$ и из уравнения (6) получим

$$\sigma_{1n}^2 = gk_n, \quad \sigma_{2n}^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1 th\chi_{1n}}\omega_{1n}^2.$$

Пусть $h_1 = \infty$ ($h_1/a >> 1$), тогда $\omega_{1n}^2 = gk_n$ и из уравнения (6) получим

$$\sigma_{1n}^2 = gk_n, \quad \sigma_{2n}^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2 cth\chi_{2n}} gk_n.$$

И, наконец, при $h_2 = \infty$ и $h_1 = \infty$, имеем

$$\sigma_{1n}^2 = gk_n, \quad \sigma_{2n}^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} gk_n.$$

По аналогии с работой [2] можно показать, что для первой частоты отношение главных амплитуд колебаний поверхности раздела к главной амплитуде колебаний свободной поверхности не зависит от плотностей ρ_1, ρ_2 и имеет такое же значение, как будто бы жидкость была однородной. Для второй частоты $\sigma_{2n}^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1 th\chi_{1n}}\omega_{1n}^2$ ($h_2 = \infty$) имеет место совершенно другая ситуация: во-первых, при данной длине волны частота пропорциональна разности плотностей; во-вторых, отношение амплитуды главных колебаний поверхности раздела к амплитуде главных колебаний свободной поверхности обратно пропорционально разности плотностей двух жидкостей и если эта разность мала, то внутренние волны будут значительно больше волн на свободной поверхности.

В случае полного заполнения собственные частоты колебания внутренней поверхности имеют только одну вторую частоту

$$\sigma_{2n}^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 cth\chi_{2n} + \rho_1 cth\chi_{1n}} gk_n.$$

2. Вывод уравнений поступательного движения твердого тела, содержащего стратифицированную жидкость

Запишем теорему об изменении количества движения системы тело + жидкость [3]

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{K}. \tag{7}$$

Здесь $\vec{Q} = M\vec{\upsilon} + \sum_{i=1}^{2} \rho_i \int_{\tau_i} \overline{U_i} d\tau,$ (8)

$\vec{K}$ – главный вектор внешних сил; M – масса системы; $\overline{U_i} = \nabla\Phi_i$

Подставив (8) в (7), в рамках линейной теории получим

$$M\ddot{X} = K_x - \rho_1 \sum_n C_n k_n \left[\dot{A}_{1n}\left(e^{\chi_{1n}} - 1\right) - \dot{B}_n\left(e^{-\chi_{1n}} - 1\right)\right] - \rho_2 \sum_n C_n k_n \dot{A}_{2n} sh\chi_{2n};$$

$$M\ddot{Y} = K_y - \rho_1 \sum_n D_n k_n \left[\dot{A}_{1n}\left(e^{\chi_{1n}} - 1\right) - \dot{B}_n\left(e^{-\chi_{1n}} - 1\right)\right] - \rho_2 \sum_n D_n k_n \dot{A}_{2n} sh\chi_{2n}; \tag{9}$$

$$M\ddot{Z} = K_z.$$

или

$$\begin{cases} M\ddot{X} = K_x - \sum_n C_n\left[\rho_1\ddot{\xi}_{1n} + (\rho_2 - \rho_1)\ddot{\xi}_{2n}\right] \\ M\ddot{Y} = K_y - \sum_n D_n\left[\rho_1\ddot{\xi}_{1n} + (\rho_2 - \rho_1)\ddot{\xi}_{2n}\right] \\ M\ddot{Z} = K_z. \end{cases} \tag{10}$$

Система дифференциальных уравнений (4)-(5), (10) описывает поступательное движение твердого тела со стратифицированной жидкостью.

3. Задача Л.Н. Сретенского в случае стратифицированной жидкости

В качестве первого примера рассмотрим горизонтальные колебания цилиндрического сосуда со стратифицированной жидкостью под действием силы упругости. Эту задачу часто называют задачей Л.Н.Сретенского.

Уравнения (4)-(5) и (10) в этом случае принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_{1n} + \omega_{1n}^2\xi_{1n} - \dfrac{\ddot{\xi}_{2n}}{ch\chi_{1n}} = -\alpha_n k_n th\chi_{1n}\ddot{X}; \\ \rho_1\dfrac{\ddot{\xi}_{1n}}{sh\chi_{1n}} - (\rho_1 cth\chi_{1n} + \rho_2 cth\chi_{2n})\ddot{\xi}_{2n} - (\rho_2 - \rho_1)gk_n\xi_{2n} = k_n(\rho_2 - \rho_1)\alpha_n\ddot{X}; \\ M\ddot{X} + CX = -\sum_n C_n\left[\rho_1\ddot{\xi}_{1n} + (\rho_2 - \rho_1)\ddot{\xi}_{2n}\right] \end{cases} \tag{11}$$

где C – коэффициент жесткости пружины.

Запишем характеристическое уравнение для системы (11)

$$\frac{C}{\sigma^2} - M = \sigma^2\sum_n C_n\frac{\rho_1(\Delta_{1n} - \Delta_{2n}) + \rho_2\Delta_{2n}}{\Delta_n}\alpha_n k_n. \tag{12}$$

Здесь

$$\Delta_n = (\omega_{1n}^2 - \sigma^2)\left[(\rho_1 cth\chi_{1n} + \rho_2 cth\chi_{2n})\sigma^2 - (\rho_2 - \rho_1)\omega_{2n}^2 cth\chi_{2n}\right] + \frac{2\rho_1}{sh2\chi_{1n}}\sigma^4;$$

$$\Delta_{1n} = \left(\rho_1 + \rho_2\frac{th\chi_{1n}}{th\chi_{2n}}\right)\sigma^2 + \left(\omega_{1n}^2 - \frac{\sigma^2}{ch\chi_{1n}}\right)(\rho_1 - \rho_2);$$

$$\Delta_{2n} = (\omega_{1n}^2 - \sigma^2)(\rho_1 - \rho_2) + \frac{\rho_1}{ch\chi_{1n}}\sigma^2.$$

Необходимое условие устойчивости положения равновесия рассматриваемой механической системы состоит в требовании действительности всех корней характеристического уравнения (12). Однако исследование этого уравнения на предмет действительности корней связано с определенными трудностями. В этой связи вычислим потенциальную энергию системы

$$\Pi = MgZ^* + \frac{1}{2}CX^2 + \Pi_0,$$

где Z^* – аппликата центра тяжести стратифицированной жидкости;
Π_0 – произвольная константа.

$$MZ^* = \rho_1\int_{\tau_1} zd\tau + \rho_2\int_{\tau_2} zd\tau = \rho_1\int_{\tau_{10}} zd\tau + \rho_2\int_{\tau_{20}} zd\tau + \frac{\rho_1}{2}\int_{\sigma_0}\xi_1^2 ds + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}\int_{\sigma_0}\xi_2^2 ds.$$

С учетом последнего соотношения в представлении (2) имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} g \sum_n \left[\rho_1 \xi_{1n}^2 + (\rho_2 - \rho_1) \xi_{2n}^2 \right] + \frac{1}{2} C X^2 .$$

Потенциальная энергия будет определенно положительной при $\rho_2 > \rho_1$. Следовательно, положение равновесия цилиндрического сосуда, частично заполненного стратифицированной идеальной жидкостью и находящегося под действием горизонтальной силы упругости, будет устойчивым, если более тяжелая жидкость будет находиться внизу сосуда.

4. Вертикальные колебания цилиндрического сосуда со стратифицированной жидкостью

Рассмотрим вертикальные колебания цилиндрического сосуда со стратифицированной жидкостью под действием силы упругости, направленной вертикально. Уравнения (4)-(5) и (10) в этом случае можно записать в виде

$$\xi_{1n}'' + \nu_{1n}^2 (1 + \varepsilon \cos 2\tau) \xi_{1n} + \nu_{2n}^2 (1 + \varepsilon \cos 2\tau) \xi_{2n} = 0; \tag{13}$$

$$\xi_{2n}'' + \tilde{\nu}_{1n}^2 (1 + \varepsilon \cos 2\tau) \xi_{1n} + \tilde{\nu}_{2n}^2 (1 + \varepsilon \cos 2\tau) \xi_{2n} = 0. \tag{14}$$

Здесь $\nu_{1n}^2 = 4 g a_n b_n \, sh\chi_{1n} / \omega^2$, $\nu_{2n}^2 = 4 g a_n (\rho_2 - \rho_1) / \omega^2$; $\tilde{\nu}_{1n}^2 = 4 g a_n \rho_1 / \omega^2$,

$\tilde{\nu}_{2n}^2 = 4 g a_n ch\chi_{1n} (\rho_2 - \rho_1) / \omega^2$; $b_n = \rho_1 cth\chi_{1n} + \rho_2 cth\chi_{2n}$,

$a_n = k_n / [ch\chi_{1n} (\rho_1 th\chi_{1n} + \rho_2 cth\chi_{2n})]$, $\ddot{Z} = \varepsilon g \cos \omega t$, $\omega t = 2\tau$, $\omega = C/M$.

Таким образом, как и для случая однородной жидкости [1], уравнения колебаний твердого тела и стратифицированной жидкости распадаются, и задача сводится к вынужденным колебаниям твердого тела со стратифицированной жидкостью, т.е. к системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (13)-(14). В случае полного заполнения ($\xi_{1n} \equiv 0$) стоячие внутренние волны описываются уравнениями Матье (14) и при определенных значениях параметров будут иметь увеличивающуюся со временем амплитуду колебаний. Однако это не будет влиять на движение твердого тела.

РЕЗЮМЕ

Виведені рівняння поступального руху твердого тіла, що має циліндричну порожнину, частково заповнену ідеальною стратифікованою рідиною. Одержано частотне рівняння власних коливань ідеальної стратифікованої рідини. Розглянуті горизонтальні і вертикальні коливання твердого тіла зі стратифікованою рідиною. Показане, що в першому випадку положення рівноваги буде стійке, якщо більш важка рідина буде знаходитися внизу судини, а в другому – дослідження стійкості зводиться до дослідження рівнянь Матье.

SUMMARY

Equations rectilinear of a motion of a rigid body,having a cylindrical cavity, partially by a filled ideal stratified liquid are obtained. A frequency equation of own fluctuations of an ideal stratified liquid is received. Horizontal and vertical fluctuations of a rigid body with stratified liquid are considered. Is shown, that in first case the situation of balance will be stability, if the heavier liquid will be below of a vessel, and in second - the research of stability is reduced to research of equations Mathieu.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., 1966.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., 1965.

Надійшла до редакції 27.10.1997 р.