

УДК 539.375

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ И ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ ИЛИ ТРЕЩИНАМИ

*С.А Калоеров, Е.С.Горянская, Е.В.Авдюшина*

В работах [1-3] предложены методы решения задач о концентрации напряжений для анизотропной пластинки и полуплоскости с эллиптическими отверстиями и трещинами. На основе этих методов в данной статье получено решение задач для анизотропной пластинки или полуплоскости с бесконечным числом отверстий или трещин.

Рассмотрим вначале анизотропную пластинку с бесконечным рядом периодически расположенных вдоль оси  $Ox$  одинаковых эллиптических отверстий. Контуры отверстий одинаково нагружены самоуравновешенными внешними усилиями. На бесконечности действуют усилия  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ .

Выберем прямоугольную систему координат  $Oxy$  с началом в центре одного из отверстий, называемого основным. Обозначим полуоси отверстий через  $a, b$ ; угол между полуосью  $a$  и осью координат  $Ox$  и расстояние между центрами соседних отверстий соответственно через  $\varphi$  и  $h_x$  (рис. 1,а).

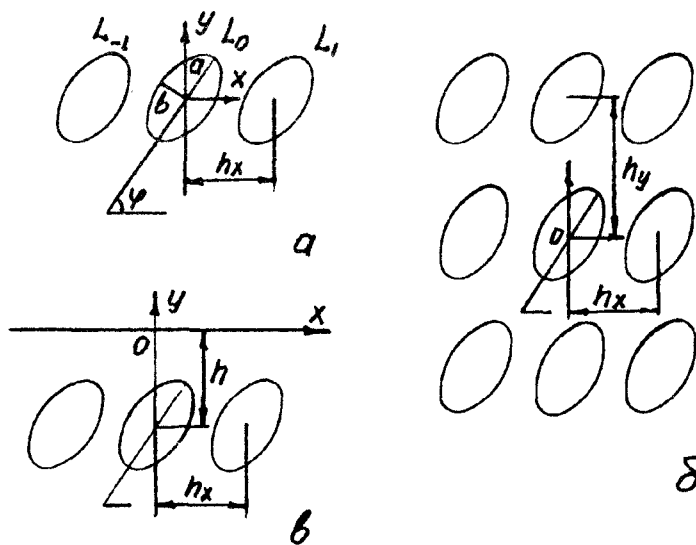


Рис.1

Определение напряженного состояния рассматриваемой пластинки сводится к нахождению из граничных условий на контуре основного отверстия комплексных потенциалов [4]

$$\Phi_j(z_j) = \Gamma_j z_j + \sum_{p=1}^{\infty} b_{jp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \zeta_{jm}^{-p}(z_j), \quad (1)$$

где [5]

$$\Gamma_j = \frac{\mu_j}{(\mu_j - \bar{\mu}_j)(\mu_j - \mu_{j+1})(\mu_j - \bar{\mu}_{j+1})} \left\{ \sigma_x^\infty + (\bar{\mu}_j + \mu_{j+1} + \bar{\mu}_{j+1}) \tau_{xy}^\infty + \right. \\ \left. + (\bar{\mu}_j \mu_{j+1} + \bar{\mu}_j \bar{\mu}_{j+1} + \mu_{j+1} \bar{\mu}_{j+1}) \sigma_y^\infty - \mu_j \mu_{j+1} \bar{\mu}_{j+1} + [a_{16} \sigma_x^\infty + \right. \\ \left. + 3a_{26} \sigma_y^\infty + (2a_{12} + a_{66}) \tau_{xy}^\infty] / 2a_{22} \right\}$$

$\zeta_{jm}$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей:

$$z_j = mh_x + R_j (\zeta_{jm} + m_j / \zeta_{jm}); \quad (2)$$

$$R_j = [a(\cos \varphi + \mu_j \sin \varphi) + ib(\sin \varphi - \mu_j \cos \varphi)] / 2; \quad (3)$$

$$m_j = [a(\cos \varphi + \mu_j \sin \varphi) - ib(\sin \varphi - \mu_j \cos \varphi)] / 2R_j;$$

$\mu_j$  – корни характеристического уравнения [6]

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0; \quad (4)$$

$a_{ik}$  – коэффициенты деформации материала пластинки;  $j$  - индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса  $j+1$  при  $j=2$  формально полагается равным 1.

Неизвестные постоянные  $b_{jp}$ , входящие в комплексные потенциалы (1), находятся из граничных условий [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (-\mu_j, i) \delta_j(t_j) \Phi'_j(t_j) = (X_n, Y_n) \quad (5)$$

на контуре основного отверстия, где

$$\delta_j = \frac{dx}{ds} + \mu_j \frac{dy}{ds} = \cos ny - \mu_j \cos nx;$$

$X_n, Y_n$  – проекции внешних усилий, приложенных к контурам отверстий.

Исходя из (5), составим функционал

$$J = \sum_{q=1}^Q \left\{ \left| \sum_{j=1}^2 (-\mu_j \delta_j \Phi'_j(z_j) - \bar{\mu}_j \bar{\delta}_j \overline{\Phi'_j(z_j)}) - X_n \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \sum_{j=1}^2 (\delta_j \Phi'_j(z_j) + \bar{\delta}_j \overline{\Phi'_j(z_j)}) - Y_n \right|^2 \right\}. \quad (6)$$

Здесь

$$\Phi'_j(z_j) = \Gamma_j + \sum_{p=1}^{\infty} b_{jp} \varphi'_{jp}(z_j); \quad \varphi'_{jp}(z_j) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p}{\zeta_{jk}^{p-1} R_j (\zeta_{jk}^2 - m_j)}; \quad (7)$$

$Q$  – количество точек на основном контуре.

Удовлетворяя условиям минимума функционала  $\partial J / \partial b_{jp} = 0$ , для определения постоянных  $b_{jp}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{q=1}^Q \sum_{s=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \left[ (\mu_s \delta_s \mu_j \delta_j + \delta_s \delta_j) b_{sp} \varphi'_{sp} \varphi'_{jn} + (\bar{\mu}_s \bar{\delta}_s \mu_j \delta_j + \bar{\delta}_s \delta_j) \bar{b}_{sp} \bar{\varphi}'_{sp} \varphi'_{jn} \right] =$$

$$= - \sum_{q=1}^Q \varphi'_{jn} \left[ \sum_{s=1}^2 (\mu_s \delta_s \mu_j \delta_j + \delta_s \delta_j) \Gamma_s + (\bar{\mu}_s \bar{\delta}_s \mu_j \delta_j + \bar{\delta}_s \delta_j) \bar{\Gamma}_s + (\mu_j \delta_j X_{nq} + \delta_j Y_{nq}) \right], \quad (8)$$

После решения системы (8) постоянные  $b_{jp}$ , а следовательно, и функции (1), станут известными, что позволит вычислять напряжения [6]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (\mu_j^2, 1, -\mu_j) \Phi'_j(z_j), \quad (9)$$

а в случае трещины – и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [2]

$$k_1^{\pm} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (\sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi),$$

$$k_2^{\pm} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} [(\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + 2\tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)] \quad (10)$$

Пусть теперь пластинка имеет бесконечное число бесконечных рядов одинаковых и одинаково нагруженных отверстий (двойкопериодическая задача) (рис. 1,б). Обозначим расстояние между центрами соседних отверстий по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно через  $h_x$  и  $h_y$ . В этом случае

$$\Phi'_j(z_j) = \Gamma_j + \sum_{p=1}^{\infty} b_{jp} \varphi'_{jp}(z_j), \quad (11)$$

где

$$\varphi'_{jp}(z_j) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{\zeta_{jkn}^{p-1} R_j(\zeta_{jkn}^2 - m_j)}; \quad (12)$$

$\zeta_{jmn}$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_j = mh_x + inh_y + R_j(\zeta_{jmn} + m_j / \zeta_{jmn}). \quad (13)$$

Система для определения неизвестных постоянных имеет вид (8).

Рассмотрим, наконец, анизотропную полуплоскость с бесконечным рядом одинаковых эллиптических отверстий с полуосями  $a$  и  $b$  или трещин вдоль прямолинейной границы. Контуры отверстий одинаково нагружены самоуравновешенными внешними усилиями. На бесконечности действуют усилия  $\sigma_x^{\infty}$ . Обозначим расстояние между центрами соседних отверстий через  $h_x$ , расстояние от границы полуплоскости до центров отверстий – через  $h$  (рис. 1,в). В данном случае [3]

$$\Phi'_j(z_j) = \Gamma_j + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \psi_{jp}(z_j) b_{jp} - \bar{r}_j \bar{\psi}_{jp}(z_j) \bar{b}_{jp} - \bar{s}_{j+1} \bar{\psi}_{j+1,p}(z_j) \bar{b}_{j+1,p} \right\}. \quad (14)$$

Здесь

$$\bar{r}_j = (\mu_{j+1} - \bar{\mu}_j) / (\mu_{j+1} - \mu_j), \quad \bar{s}_{j+1} = (\mu_{j+1} - \bar{\mu}_{j+1}) / (\mu_{j+1} - \mu_j), \quad (15)$$

$$\psi_{jp}(z_j) = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{p}{\zeta_{jil}^{p-1} R_j(\zeta_{jil}^2 - m_j)}; \quad \bar{\psi}_{jp}(z_j) = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{p}{\bar{\zeta}_{jil}^{p-1} \bar{R}_j(\bar{\zeta}_{jil}^2 - \bar{m}_j)}; \quad (16)$$

$\zeta_{jil}(z_j), \bar{\zeta}_{jil}(z_j)$  – переменные, определяемые из неявных зависимостей:

$$\begin{aligned} z_j &= z_{0j} + lh_x + R_j(\zeta_{jl} + m_j/\zeta_{jl}) \\ \bar{z}_j &= \bar{z}_{0j} + lh_x + \bar{R}_j(\bar{\zeta}_{jl} + \bar{m}_j/\bar{\zeta}_{jl}) \end{aligned} \quad (17)$$

$z_{0j} = -i\mu_j h$  – аффикс центра основного отверстия.

Определяя неизвестные коэффициенты  $b_{jp}$  из граничных условий (5) на контуре основного отверстия из условия минимума функционала (6), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^Q \sum_{s=1}^2 \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ (r_{jn} r_{sp} + s_{jn} s_{sp}) b_{sp} + (r_{jn} \bar{r}_{sp} + s_{jn} \bar{s}_{sp}) \bar{b}_{sp} \right\} = \\ &= \sum_{q=1}^Q \left\{ r_{jn} \left[ 2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 \mu_s \delta_s \Gamma_s + X_{nq} \right] + s_{jn} \left[ -2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^2 \delta_s \Gamma_s + Y_{nq} \right] \right\} \quad (j=1,2; n=1,2,3,\dots), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} r_{jn} &= -\mu_j \delta_j \psi_{jn}(z_j) + \bar{\mu}_j \bar{\delta}_j r_j \overline{\psi_{jn}(z_j)} + \bar{\mu}_{j+1} \bar{\delta}_{j+1} s_j \overline{\psi_{jn}(z_{j+1})} \\ s_{jn} &= \delta_j \psi_{jn}(z_j) - \bar{\delta}_j r_j \overline{\psi_{jn}(z_j)} - \bar{\delta}_{j+1} s_j \overline{\psi_{jn}(z_{j+1})} \end{aligned} \quad (19)$$

Проведены численные исследования распределения напряжений и изменения КИН для различных геометрических и упругих параметров пластин. Ниже описываются некоторые из полученных результатов для периодической задачи в случае трещин. При этом рассматривались пластинка с трещинами вдоль одной прямой (рис. 2,а), а также пластинка и полуплоскость с параллельными трещинами (рис. 2,б, 2,в). Предполагалось, что на бесконечности действуют растягивающие усилия интенсивности  $p$ , перпендикулярные линиям трещин. Материал тела считался изотропным или стеклопластиком с параметрами  $E_x = 14,9 \cdot 10^4$  МПа,  $E_y = 0,6 \cdot 10^4$  МПа,  $G_{xy} = 0,4 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_{xy} = 0,31$ . Приводимые значения КИН  $k_1$  даны с точностью до множителя  $p$  ( $k_2$  для описываемых случаев равен нулю). Полудлина трещин  $a$  считалась равной единице.

В случае периодической задачи для пластинки с трещинами вдоль одной линии (рис. 2,а) (в рассматриваемом случае анизотропия материала не влияет на значение КИН), когда расстояние  $h_x$  между центрами соседних трещин было равно 3; 2,5; 2,25; 2,1, значения  $k_1^{\pm}$  получались равными соответственно 1,277; 1,547; 1,981; 2,911. Как следует из этих результатов, при сближении трещин друг с другом КИН растет.

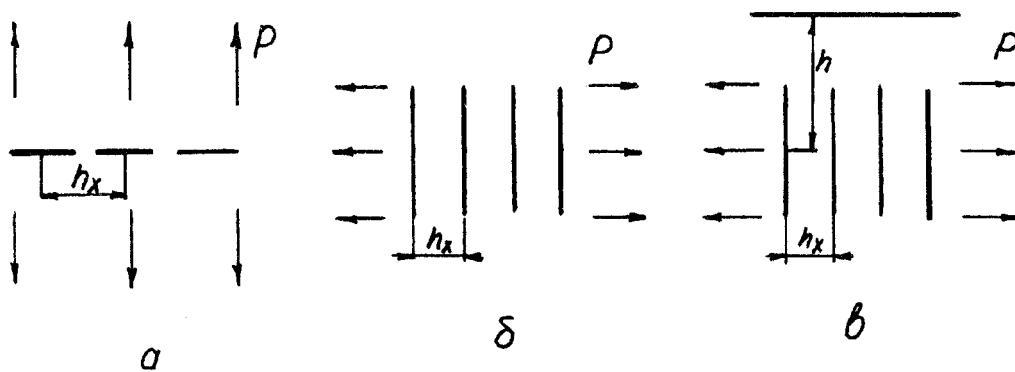


Рис. 2

В таблиці дані значення  $k_1^\pm$  для концев трещин в бесконечной пластинке (рис 2,б) и полуплоскости (рис. 2в) с бесконечным рядом параллельных трещин. При этом для полуплоскости расстояние между ее границей и центрами трещин считалось равным  $1,25a$ . Из данных таблицы видно, что при сближении трещин друг с другом КИН уменьшается. Влияние анизотропии на величину КИН существенно, если отношение  $E_x/E_y > 1$ .

$E_x/E_y$	КИН	Пластинка (рис.2,б)				Полуплоскость (рис.2,в)			
		$h_x$							
		$\infty$	2	1	0,5	$\infty$	2	1	0,5
1	$k_1^+$	1,000	0,581	0,417	0,294	1,386	0,597	0,430	0,321
	$k_1^-$	1,000	0,581	0,417	0,294	1,145	0,586	0,422	0,318
24,83	$k_1^+$	1,000	0,341	0,287	0,219	1,287	0,331	0,263	0,191
	$k_1^-$	1,000	0,341	0,287	0,219	1,093	0,329	0,257	0,177
0,04	$k_1^+$	1,000	0,702	0,519	0,394	1,310	0,726	0,509	0,374
	$k_1^-$	1,000	0,702	0,519	0,394	1,112	0,696	0,505	0,371

## РЕЗЮМЕ

З використанням теорії узагальнених комплексних потенціалів та метода найменших квадратів розв'язані періодичні задачі щодо напруженого стану платівки та півплощини з еліптичними отворами або тріщинами. Задачі зведено до систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих, що входять до шуканих функцій. Наведені результати чисельних досліджень для платівки і півплощини з нескінченним рядом прямолінійних тріщин.

## SUMMARY

With use of the theory of generalized complex potentials both the least squares method the periodic problems about stress state of a plate and half-plane with elliptic holes or cracks are solved. The problems are reduced to systems of the linear algebraic equations with respect to unknown constants which are included in unknown quantities of the function. The results of numerical researches for a plate and half-plane with infinite number of rectilinear cracks are given.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Калоеров С.А., Нескородев Н.М. Напряженное состояние анизотропной пластинки с двумя произвольно расположенными эллиптическими отверстиями или трещинами // Теорет и прикл. механика. – 1993. – Вып. 24. – С.33-43.
2. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С.46-56.
3. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В. Концентрация напряжений в анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами // Теорет и прикл. механика. – 1997. – Вып.27. – С.63-72.
4. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К., Донецк. – 1976. – 200 с.
5. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В. Решение основных задач теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости // Теорет и прикл. механика. – 1997. – Вып. 27. – С.44-63.
6. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М. – 1977. – 416 с.

Надійшла до редакції 24.10.1997 р.