

М Е Х А Н І К А

УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Е.В.Алтухов

Рассматривается изотропная пластина толщиной $2h$, ослабленная круговыми цилиндрическими полостями. Верхняя плоская грань пластины свободна от напряжений, а на нижней плоской грани компоненты вектора перемещений равны нулю. На этапе построения однородных решений граничные условия на боковой поверхности пластины во внимание не принимаются и считаются произвольными.

Задача сводится к интегрированию уравнений равновесия в перемещениях и закона Гука [1, 2].

$$\nu_1 \partial_i e + \Delta u_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

$$\sigma_{ii} = 2G(e_{ii} + \nu \nu_1 e), \quad \sigma_{ij} = G e_{ij} \quad (i \neq j) \quad (2)$$

с учетом однородных граничных условий на плоских гранях пластины

$$\sigma_{i,3}(x_1, x_2, h) = 0, \quad u_i(x_1, x_2, -h) = 0. \quad (3)$$

В соотношениях (1)-(3) приняты обозначения: u_i – компоненты вектора перемещений, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, e_{ij} – компоненты тензора деформаций, $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, $\nu_1 = (1 - 2\nu)^{-1}$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$.

Граничные условия (3) не позволяют рассмотреть отдельно случай симметричного и кососимметричного деформирования пластины относительно ее срединной плоскости. Потому в символическом виде решение уравнений (1) запишется так:

$$u_j = C u_{j0} - \frac{\nu_1}{2} x_3 \partial_j S e_0 + S u'_{j0} - \frac{1-\nu}{4} \frac{S - x_3 C}{D^2} \partial_j e'_0, \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

$$u_3 = S u'_{30} + \frac{\nu_1}{2} (S - x_3 C) e_0 + C u_{30} - \frac{1-\nu}{4} x_3 S e'_0.$$

Здесь $S = \frac{\sin x_3 D}{D}$, $C = \cos x_3 D$. Остальные обозначения приведены в монографии [2].

Неизвестные функции перемещений $u_{i0} = u_i(x_1, x_2, 0)$ и их производные по x_3 в срединной плоскости $u'_{i0}(x_1, x_2, 0)$ могут быть определены из граничных условий (3). В результате получается система линейных алгебраических уравнений шестого порядка в операторном виде. Оператор-определитель данной системы с точностью до несущественного постоянного множителя равен

$$L(D^2) = \cos 2hD \left[(3 - 4\nu) \cos^2 2hD - (2hD)^2 + \nu_1^{-2} \right] \quad (5)$$

и является целой функцией оператора $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Из соотношения (5) следует, что однородные решения состоят из вихревого и потенциального решений. Выразив функции u_{i0} и u'_{i0} через метагармонические функции, получим

$$\begin{aligned}
 2Gu_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2), \\
 2Gu_2 &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2), \\
 2Gu_3 &= \sum_{p=1}^{\infty} q_p(x_3) C_p(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $p_k(x_3) = \cos \delta_k x_3 - (-1)^k \sin \delta_k x_3$, $\delta_k = (2k-1)\pi/2h$.

$$\begin{aligned}
 n_p(x_3) &= -\left[\gamma_p^{-1} \sin \gamma_p(x_3+h) + (3-4\nu)^{-1} (x_3+h) \cos \gamma_p(x_3+h) + \right. \\
 &\quad \left. + b_p(x_3+h) \sin \gamma_p(x_3+h) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_p(x_3) &= (3-4\nu) \sin \gamma_p(x_3+h) + (3-4\nu)^{-1} \gamma_p(x_3+h) \sin \gamma_p(x_3+h) \\
 &\quad - b_p \gamma_p(x_3+h) \cos \gamma_p(x_3+h),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_p &= \left[2(1-\nu) \cos 2\gamma_p h - 2\gamma_p h \sin 2\gamma_p h \right] (3-4\nu)^{-1} \times \\
 &\quad \times \left[(1-\nu) \sin 2\gamma_p h - 2\gamma_p h \cos 2\gamma_p h \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Собственные числа γ_p и функции $B_k(x_1, x_2)$, $C_p(x_1, x_2)$ являются решением уравнений

$$(3-4\nu) \cos^2 2\gamma_p h - (2\gamma_p h)^2 + \nu_1^{-2} = 0, \tag{7}$$

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - \delta_k^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \tag{8}$$

$$D^2 C_p(x_1, x_2) - \gamma_p^2 C_p(x_1, x_2) = 0. \tag{9}$$

Подставляя соотношения (6) в уравнения закона Гука (2) получим выражения для напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_1 \partial_2 B_k(x_1, x_2) + \sum_{p=1}^{\infty} \left[s_p(x_3) C_p(x_1, x_2) + n_p(x_3) \partial_1^2 C_p(x_1, x_2) \right], \\
 \sigma_{22} &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) \partial_1 \partial_2 B_k + \sum_{p=1}^{\infty} \left[s_p(x_3) C_p + n_p(x_3) \partial_2^2 C_p \right], \\
 \sigma_{33} &= \sum_{p=1}^{\infty} t_p(x_3) C_p(x_1, x_2), \\
 \sigma_{12} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x_3) (\partial_2^2 - \partial_1^2) B_k + \sum_{p=1}^{\infty} n_p(x_3) \partial_1 \partial_2 C_p, \\
 \sigma_{13} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p'_k(x_3) \partial_2 B_k + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(x_3) \partial_1 C_p, \\
 \sigma_{23} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p'_k(x_3) \partial_1 B_k + \sum_{p=1}^{\infty} r_p(x_3) \partial_2 C_p.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $s_p(x_3) = 2\nu\gamma_p \left[b_p \cos \gamma_p(x_3+h) - (3-4\nu)^{-1} \sin \gamma_p(x_3+h) \right]$,

$$t_p(x_3) = (1 - 2\nu)(3 - 4\nu)^{-1} \gamma_p \sin \gamma_p (x_3 + h) + b_p \gamma_p \cos \gamma_p (x_3 + h) +$$

$$+ (3 - 4\nu)^{-1} \gamma_p^2 (x_3 + h) \cos \gamma_p (x_3 + h) + b_p \gamma_p^2 (x_3 + h) \sin \gamma_p (x_3 + h),$$

$$r_p(x_3) = -2(1 - \nu)(3 - 4\nu)^{-1} \cos \gamma_p (x_3 + h) + (1 - 2\nu) b_p \sin \gamma_p (x_3 + h) +$$

$$+ (3 - 4\nu)^{-1} \gamma_p (x_3 + h) \sin \gamma_p (x_3 + h) - b_p \gamma_p (x_3 + h) \cos \gamma_p (x_3 + h).$$

В формулах (6), (10) суммирование ведется по γ_p из первого квадранта γ -плоскости из-за симметрии корней уравнения (7) относительно координатных осей. Следует отметить, что все корни уравнения (7), за исключением одного действительного, являются комплексными. Для больших по модулю корней справедливы асимптотические формулы

$$y_p \approx 0,5 \ln 2(4a_1 p^2 \pi^2 - a_2), \quad x_p \approx p\pi(1 - 2a_1 y_p / \text{sh } y_p), \quad (11)$$

где $a_1 = 0,5(3 - 4\nu)^{-1}$, $a_2 = [4(1 - \nu)^2 + (1 - 2\nu)^2] (3 - 4\nu)^{-1}$, $x_p + iy_p = 2\gamma_p h$.

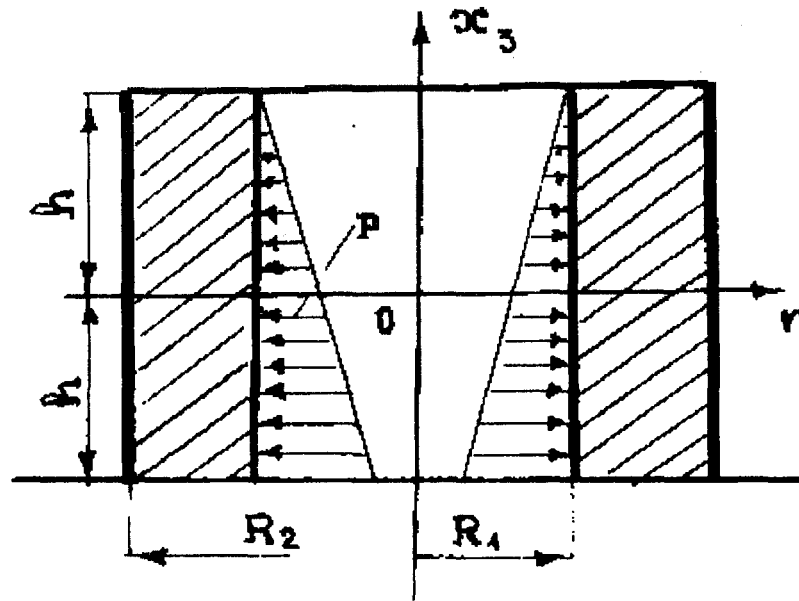
В таблице приведены значения величин x_p, y_p при различных значениях коэффициента Пуассона ν .

Значения величин x_p, y_p

p	ν=0,1		ν=0,2		ν=0,3		ν=1/3	
	x_p	y_p	x_p	y_p	x_p	y_p	x_p	y_p
1	1,091860	0,0	1,000559	0,0	0,912784	0,0	0,883916	0,0
2	2,602230	1,197646	2,591139	1,320424	2,570387	1,453791	2,560961	1,502425
3	5,937537	2,032454	5,926851	2,124556	5,913076	2,233102	5,907594	2,274317
4	9,157295	2,455237	9,149443	2,542839	9,139684	2,647190	9,135871	2,687032
5	12,344786	2,747273	12,338652	2,833231	12,331127	2,935997	12,328208	2,975310
6	15,517294	2,971732	15,512278	3,056889	15,506163	3,158870	15,503800	3,197918
7	18,681387	3,154415	18,677149	3,239119	18,72004	3,340649	18,670019	3,379543
8	21,840209	3,308586	21,836544	3,393005	21,832104	3,494251	21,830393	3,533047
9	24,995483	3,442009	24,992255	3,526237	24,988351	3,627292	24,986849	3,666023
10	28,148240	3,559640	28,145357	3,643734	28,141875	3,744652	28,140535	3,783337

Построенные однородные решения (6), (10) за счет выбора функций $B_k(x_1, x_2)$, $C_p(x_1, x_2)$ позволяют удовлетворить требуемым граничным условиям по боковой поверхности пластины. При этом они удовлетворяют уравнениям равновесия (1) и граничным условиям на плоских гранях пластины (3).

В качестве примера рассмотрим задачу о напряженном состоянии кругового цилиндрического резервуара ($R_1 \leq r \leq R_2, |x_3| \leq h$), заделанного в основании и наполненного жидкостью с объемным весом γ (рисунок). Давление жидкости на внутреннюю поверхность резервуара $P = \gamma(h - x_3)$.



Сечение резервуара

Строгое решение задачи сводится к интегрированию уравнений равновесия с учетом граничных условий

$$\sigma_{33}(r, h) = 0, \sigma_{r3}(r, h) = 0, u_r(r, -h) = 0, u_{3r}(r, -h) = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{rr}(R_1, x_3) = P_1, \sigma_{r3}(R_1, x_3) = 0, \sigma_{rr}(R_2, x_3) = 0, \sigma_{r3}(R_2, x_3) = 0, \quad (13)$$

где $P_1 = P/(2G)$.

В соотношениях (12) и (13) используются цилиндрические координаты (r, x_3) . Через u_r и σ_{r3} обозначены соответственно радиальные перемещения и касательные напряжения.

Из физических соображений следует, что напряженно-деформированное состояние исследуемого резервуара является осесимметричным. Поэтому вихревое решение отсутствует, а отличные от нуля компоненты тензора напряжений, соответствующие потенциальному решению, в данном случае таковы:

$$\sigma_{rr} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(s_p(x_3) + n_p(x_3) \frac{d^2}{dr^2} \right) C_p(r), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sum_{p=1}^{\infty} \left(s_p + n_p \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) C_p, \quad (14)$$

$$\sigma_{33} = \sum_{p=1}^{\infty} t_p(x_3) C_p(r), \quad \sigma_{r3} = \sum_{p=1}^{\infty} r_p(x_3) \frac{dC_p}{dr},$$

где $C_p(r) = X_p K_0(\gamma_p r) / K_0(\gamma_p R_1) + Y_p I_0(\gamma_p r) / I_0(\gamma_p R_2)$.

Для определения неизвестных коэффициентов X_p, Y_p необходимо выражение (14) для напряжений σ_{rr} и σ_{r3} подставить в граничные условия (13). Требуя затем ортогональности невязок граничных условий некоторой полной системе функций $\{\varphi_m(x_3)\}$ на отрезке $[-h, h]$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X_p и Y_p :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[s_{mp} + n_{mp} (\gamma_p^2 + F_1) \right] X_p + \left[s_{mp} + n_{mp} (\gamma_p^2 - D_1) \right] \frac{I_0(\gamma_p R_1)}{I_0(\gamma_p R_2)} Y_p \right\} &= P_{1m}, \\
 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left[s_{mp} + n_{mp} (\gamma_p^2 + F_2) \right] \frac{K_0(\gamma_p R_2)}{K_0(\gamma_p R_1)} X_p + \left[s_{mp} + n_{mp} (\gamma_p^2 - D_2) \right] Y_p \right\} &= 0, \\
 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p r_{mp} \left(X_p \frac{K_1(\gamma_p R_1)}{K_0(\gamma_p R_1)} - Y_p \frac{I_1(\gamma_p R_1)}{I_0(\gamma_p R_2)} \right) &= 0, \\
 \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p r_{mp} \left(X_p \frac{K_1(\gamma_p R_2)}{K_0(\gamma_p R_1)} - Y_p \frac{I_1(\gamma_p R_2)}{I_0(\gamma_p R_2)} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $F_i = R_i^{-1} \gamma_p K_1(\gamma_p R_i) / K_0(\gamma_p R_i)$, $D_i = R_i^{-1} \gamma_p I_1(\gamma_p R_i) / I_0(\gamma_p R_i)$

$$\{s_{mp}, n_{mp}, r_{mp}\} = \int_{-h}^h \{s_p, n_p, r_p\} \varphi_m dx_3, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad P_{1m} = \frac{1}{2} \int_{-h}^h P_1 \varphi_m dx_3.$$

После решения системы уравнений (15) напряжения в резервуаре могут быть вычислены по формулам (14).

РЕЗЮМЕ

Пропонується метод розв'язання тривимірних змішаних задач теорії пружності для ізотропних пластин. Він засновується на символічному методі А.І.Лур'є.

Припускається, що одна з плоских граней пластини затиснена, а друга – вільна від напруг. Одержані однорідні розв'язання для цього випадку. Розглянута тривимірна задача про напружений стан циліндричної оболонки, заповненою рідиною.

SUMMARY

A method is suggested to solve three-dimensional mixed problems of the elasticity theory for the isotropic plates. It is based on A.I.Lurie's symbolic method. It is intended that the one end facen of a plate is done up and another end facen of a plate is free from the –stresses. The homogeneous solutions are got for the present case. The three-dimensional problem for the stressing condition cylindrical shell with liquid is considered.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.

Надійшла до редакції 21.10.1997 р.