УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Р.М.Тригуб, Е.Н.Курганская, А.В.Товстолис.

Введение

Теоремы о приближении полиномами, обычно с дополнительными ограничениями того или иного рода, часто используются в классическом математическом анализе, понимаемом достаточно широко.

Совсем недавно I.F.Toland [1], в связи с одной задачей о спектре положительного оператора, доказал предложение о приближении функций на отрезке вещественной оси **R** полиномами с положительными коэффициентами. В связи с этим в § 1 настоящей статьи получена более общая теорема 1. Впервые изучается характеристика компактов в комплексной плоскости и функций на них, допускающих равномерное приближение полиномами с положительными коэффициентами. Полностью исследован случай, когда нулевая точка не является внутренней для компакта (см. теорему 2).

Экстремальным задачам теории приближений классов функций заданной гладкости посвящены монографии А.Ф.Тимана [2, гл.V] и Н.П.Корнейчука [3].

В настоящей работе методом статьи [4] получены асимптотически точные результаты о поточечном приближении классов W^r.

В § 2 изучается приближение полиномами на отрезке в метрике L_p с весом с особыми точками в концах отрезка (см. теорему 3).

В § 3 приближение целыми функциями конечной полустепени классов W^r на полуоси $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ (см. теорему 4).

§ 1. Приближение полиномами с положительными коэффициентами. Усиление теоремы С.Н.Мергеляна

Далее E – компакт в **C** со связным дополнением. Через $A(E)$ обозначим множество непрерывных функций на E и аналитических – во внутренних точках Е, если таковые имеются. По известной теореме С.Н.Мергеляна (см., напр., [5, гл. 5]) любая функция из $A(E)$ является равномерным пределом на E последовательности полиномов. Если к тому же коэффициенты приближающих полиномов можно брать лишь из заданного заранее множества $W \subset \mathbf{C}$, ôî запишем: $f \in A_W(E)$.

Начнем с необходимого условия.

Лемма 1. *Если* $\sup(E \cap \mathbf{R}_+) = h > 0$ *и* $f \in A_{W_\alpha}(E)$, *где*

$$W_\alpha = \left\{ z \in \mathbf{C}\colon |\arg z| \le \frac{\alpha}{2} \right\}, \qquad \alpha \in [0, \pi),$$

то функция f *допускает аналитическое продолжение в круг* $|z| < h$ *и в замыкании этого круга*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \; c_k \in W_\alpha, \; k \ge 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| h^k < \infty$$

Доказательство есть, по сути, в [6, теорема 3].

Теорема 1. *Пусть E – звездное множество относительно нуля и симметричное относительно* $\mathbf{R}$, *а состоит оно из единичного круга и конечного числа отрезков вне его, но* $E \cap \mathbf{R}_+ = [0,1]$. *Если* $f \in A(E)$ *и* $\forall z \in E$ $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, *то* $f \in A_{\mathbf{R}_+}(E)$.

Доказательство, в котором используются и классические результаты о диофантовых приближениях, будет опубликовано в отдельной статье.

Теорема 2. *Пусть теперь* $E \cap (0,+\infty) = \varnothing$, *а* $W_\alpha = \mathbf{R}_+ \cup e^{i\alpha}\mathbf{R}_+$, *где* $\alpha \in (-\pi,\pi)$, $\alpha \neq 0$.

I. *В случае* $0 \notin E$ $A_{W_\alpha}(E) = A(E)$. *Если* $0 \in E$, *то для того, чтобы функция f из* $A(E)$ *принадлежала* $A_{W_\alpha}(E)$, *необходимо и достаточно:* $f(0) \in W_\alpha$.

II. *Если еще компакт E симметричен относительно* $\mathbf{R}$, *то для того, чтобы* $f \in A_{\mathbf{R}_+}(E)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f \in A(E)$, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $\forall z \in E$, *а если* $0 \in E$, *то и* $f(0) \geq 0$.

Лемма 2. *Пусть замкнутое множество W из* $\mathbf{C}$ *удовлетворяет условию:* $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+$ $\lambda W \subset W$. *E – звездное относительно нуля множество. 0 – его внутренняя точка, а граница E не содержит ни одного прямолинейного отрезка, лежащего на луче, выходящем из нуля. Тогда функция f из $A(E)$ лежит в* $A_W(E)$ *тогда и только тогда, когда* $f^{(k)}(0) \in W$ $\forall k \geq 0$.

Необходимость – очевидна, а достаточность следует после применения метода суммирования Линделефа степенных рядов аналитических функций в их звезде Миттаг-Леффлера [7], (см. также [5, гл. VIII]).

Лемма 3. *Пусть* $E \cap (0,+\infty) = \varnothing$. *Тогда* $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ *два полинома* p^+ *и* q^+ *с положительными коэффициентами такие, что*

$$\max_E |z + z^{k+1} p^+(z)| < \varepsilon, \quad \max_E |-z + z^{k+1} q^+(z)| < \varepsilon.$$

Смысл этой леммы в том, что после умножения этих неравенств на cz^{m-1} любой одночлен вида cz^m, где $c \in \mathbf{R}$, можно аппроксимировать полиномом, начинающимся со сколь угодно большой степени z^{m+k}, с коэффициентами, противоположными по знаку с числом c (в первом случае) или совпадающими по знаку с числом c (во втором).

Приведем доказательство первого неравенства при $k = 1$. Очевидно, что при $|z| \leq 1$

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{2}z - \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Функция $h_\lambda(z) = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1-\lambda z}\right)$ при $\lambda > 0$ аналитична на $\mathbf{C} \backslash [1/\lambda, +\infty)$ $h'_\lambda(0) = 1$, $h_\lambda^{(k)}(0) \geq 0$ $\forall k \in \mathbf{N}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем достаточно большое λ так, чтобы при $z \notin [1/\lambda, +\infty)$ и $|z| \leq R = \max\{|z|, z \in E\}$ было $|h_\lambda(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что при любом $r \in (0, 1/\lambda)$ и некотором $\delta = \delta(r) > 0$ $E \subset K_{r,\delta} = \{z: |z| \leq r\} \cup \{z: r \leq |z| \leq R, |\arg z| \geq \delta\}$. Теперь к функции h_λ на множестве $K_{r,\delta}$ при $r = \frac{1}{2\lambda}$ применяем лемму 2:

$$\max_E |h_\lambda(z) - p_N^+(z)| \leq \max_{K_{r,\delta}} |h_\lambda(z) - p_N^+(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $p_N^+(z) = z + \sum_{k=2}^{N} \beta_k z^k$ и $\beta_k \ge 0\ \forall k \ge 2$.

Но тогда

$$\max_E |p_N^+(z)| \le \max_E |h_\lambda(z)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

Теперь докажем теорему 2 в случае I.

Не уменьшая общности, считаем, что $0 \in E$ и $f(0) = 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Мергеляна $\exists \{c_m\}_1^n$:

$$\max_E \left| f(z) - \sum_{m=1}^{n} c_m z^m \right| < \varepsilon.$$

Если $c_m \in W_\alpha$, то одночлен $c_m z^m$ оставляем на месте. В противном случае $c_m = a_m + e^{i\alpha} b_m$, где a_m и $b_m \in \mathbf{R}$, а $a_m b_m \neq 0$ или $-c_m \in W_\alpha$. Пусть таких коэффициентов N. Если $c_1 = a_1 + e^{i\alpha} b_1$, где $a_1 \ge 0$, а $b_1 < 0$, то применяем лемму 3 при $k \ge n$:

$$\max_E |e^{i\alpha} b_1 z - e^{i\alpha} z^{k+1} p^+(z)| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Вместо $c_1 z$ будет $a_1 z + e^{i\alpha} z^{k+1} p^+(z)$ с коэффициентами из W_α, а коэффициент при z^m ($m \in [2, n]$) равен c_m. Теперь берем $c_2 z^2$ и поступаем аналогично.

Утверждение I доказано.

В симметричном случае (см. II теоремы 2) и коэффициенты приближающих полиномов можно считать вещественными. Но $\mathrm{Re}\, W_\alpha = \mathbf{R}_+$ при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Теорема доказана. □

Результаты § 1 принадлежат Р.М.Тригубу.

§ 2. Приближение гладких функций на отрезке вещественной оси в интегральной метрике с весом

Пусть $p \ge 1$, $r \in \mathbf{N}$, а $W_p^r[-1, 1]$ – класс функций на $[-1, 1]$, у которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $\left\| f^{(r)} \right\|_p \le 1$. Эйлеровский 2π – периодический сплайн φ_r (см. [3]) приведен в конце статьи.

Т е о р е м а 3. I. $\forall f \in W_p^r[-1, 1]$, $\forall n \ge r-1$ $\exists$ *полином* p_n *степени* $\le n$, *такой, что*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{(1-x^2)^{r/2}} dx \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

II. *При* $p = 1$ $\forall n \ge r-1$ *и* $\forall \alpha \in \left[0, \frac{r}{2}\right]$ $\left(K_r = \|\varphi_r\|_\infty\right)$

$$\sup_{f \in W_1^r[-1,1]} \inf_{p_n} \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)-p_n(x)|}{(1-x^2)^{\alpha}} dx = \frac{K_r}{(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Это же асимптотическое равенство имеет место и для более широкого класса $V^r[-1,1]$ *функций, у которых производная* $f^{(r-1)}$ *с полной вариацией не больше единицы.*

Для доказательства I воспользуемся следующим предложением из [4].

Л е м м а 4. *Если* $f \in V^r[-1, 1]$ *и* $f^{(\nu)}(\pm 1) = 0$ *при* $\nu \le \frac{r-2}{2}$, *то*

$$f(\cos t) = (\sin t)^{r-1}(f_{1,r}(t) + f_{2,r}(t)),$$

где $f_{1,r}$ *и* $f_{2,r}$ *– 2π-периодические функции* $f_1^{(r-1)}(t) = (-1)^{r-1} f^{(r-1)}(\cos t)$, *а* $f_{2,r}^{(r-1)}$ *– абсолютно непрерывна.*

Поскольку в теореме $n \ge r - 1$, то, вычитая эрмитовский интерполяционный полином степени $\le r - 1$, можно добиться условий $f^{(\nu)}(\pm 1) = 0$ при $\nu \le \frac{r-2}{2}$, не выводя функцию из класса $W_p^r[-1, 1]$. Применяем лемму 4 и приближаем $f_{2,r}$ по теореме Джексона [2], [3], а $f_{1,r}$ – по теореме Л.В.Тайкова [3, гл. IV].

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_{1,r}^{(r)}(t)\right|^p dt = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|^p \left|f^{(r)}(\cos t)\right|^p dt \le \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| \left|f^{(r)}(\cos t)\right|^p dt =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \left|f^{(r)}(x)\right|^p dx = 2\left\|f^{(r)}\right\|_p^p \le 2.$$

$\forall n \ge 0\ \exists$ тригонометрические полиномы порядка $\le n$ такие, что

$$\left\|f_{2,r} - \tau_{2,n}\right\|_1 = o\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad \left\|f_{1,r} - \tau_{1,n}\right\|_1 \le \frac{2\left\|\varphi_r\right\|_q}{(n+1)^r}.$$

Имеем

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(\cos t)}{(\sin t)^{r-1}} - \tau_{1,n}(t) - \tau_{2,n}(t) \right| dt \le \frac{\left\|\varphi_r\right\|_q}{(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Еще учитывая, что при четном r, например, функция $f_{1,r}$ – нечетная, значит и $f_{2,r}$ – нечетная. Тогда и полиномы $\tau_{1,n}$ и $\tau_{2,n}$ можно считать нечетными, и сделав обратную замену $\cos t = x$, получим I. Оценка сверху в II следует из I при $p = 1$.

Для оценки снизу при $\alpha=0$ воспользуемся следующим результатом С.М.Никольского [8]. Для функции $\psi_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\max\{x,0\}^{r-1}$ из $V^r[-1, 1]$

$$\inf_{p_n} \int_{-1}^{1} |\psi_r(x) - p_n(x)| dx = \frac{K_r}{(n+1)^r} + O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}}\right).$$

Теорема 3 доказана. □

Этот результат получен совместно Р.М.Тригубом и Е.Н.Курганской.

Отметим еще, что приближение в метрике L_p (без веса) другим методом исследуется в работе [9].

§ 3. Приближение гладких функций на полуоси целыми функциями конечной полустепени

Приближение классов $W^r(\mathbf{R})$ целыми функциями экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) изучено так же хорошо, как и в случае периодических функций [2, гл. V]. На полуоси в качестве приближающих выступают функции, которые после замены $x \to x^2$ становятся четными ц.ф.э.т. Общие прямые и обратные теоремы для полуоси получены Ю.А.Брудным [2, гл. V]. Но до сих пор не было точных (хотя бы асимптотически) результатов.

Теорема 4. *$\forall r \in \mathbf{N}$ $\exists$ постоянная $\gamma = \gamma(r)$ такая, что $\forall f \in W^r(\mathbf{R}_+)$ и $\forall \sigma > 0$ $\exists$ четная ц.ф.э.т. $\le \sigma$ такая, что*

$$\left| f(x) - g_\sigma\left(\sqrt{x}\right) \right| \le \frac{2^r K_r}{\sigma^r} x^{\frac{r}{2}} + \frac{\gamma}{\sigma^{r+1}} x^{\frac{r-1}{2}}.$$

При этом константу $2^r K_r$ в главном члене уменьшить нельзя.

Введем обозначение: $W_0^r(E)$ – это множество функций из $W^r(E)$ с условием $f^{(\nu)}(0) = 0$ $\forall \nu \le r-1$ (при этом $0 \in E$).

Лемма 5. *Если $f \in W_0^r(\mathbf{R}_+)$, то $\forall x \in \mathbf{R}$*

$$f(x^2) = (2x)^r f_{1,r}(x) + (2x)^{r-1} f_{2,r}(x),$$

где $f_{1,r} \in W_0^r(\mathbf{R})$ и почти всюду $f_{1,r}^{(r)}(x) = f^{(r)}(x^2)$, а $f_{2,r} \in \gamma W_0^{r+1}(\mathbf{R})$ при некоторой константе γ, зависящей только от r.

Доказательство. При $r = 1$ можно взять

$$f_{1,1}(x) = \int_0^x f'(t^2)dt, \qquad f_{2,1}(x) = -2\int_0^x f_{1,1}(t)dt.$$

Далее переход от r к $r+1$ по индукции.

Если $f \in W_0^{r+1}(\mathbf{R}_+)$, то в силу предположения

$$f'(x^2) = (2x)^r f_{1,r}(x) + (2x)^{r-1} f_{2,r}(x),$$

где $f_{1,r} \in W_0^r(\mathbf{R})$ и почти всюду $f_{1,r}^{(r)}(x) = f^{(r+1)}(x^2)$, а $f_{2,r}' \in \gamma W_0^{r+1}(\mathbf{R})$. Умножая тождество на $2x$ и интегрируя, получим

$$f(x^2) = \int_0^x (2t)^{r+1} f_{1,r}(t)dt + \int_0^x (2t)^r f_{2,r}(t)dt.$$

Полагаем $f_{1,r+1}(x)=\int_0^x f_{1,r}(t)dt$. После интегрирования по частям в первом интеграле получим

$$f(x^2)=(2x)^{r+1}f_{1,r+1}(x)+\int_0^x (2t)^r G_{r+1}(t)dt,$$

где $G_{r+1}\in\gamma W_0^{r+1}(\mathbf{R})$. Пусть еще $G_{r+\nu+1}(x)=\int_0^x G_{r+\nu}(t)dt$. Тогда

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x (2t)^r G_{r+1}(t)dt=G_{r+1}(x)-\frac{r}{x}G_{r+2}(x)+\ldots+\frac{(-1)^r r!}{x^r}G_{2r+1}(x).$$

Осталось применить к каждому из слагаемых известную лемму Адамара. □

Для доказательства теоремы 4 применяем лемму 5 к функции

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k .$$

К слагаемым $F_{1,r}$ и $F_{2,r}$ применяем известные прямые теоремы о приближении на $\mathbf{R}$ ц.ф.э.т. $\le\sigma$ (см. [2]). Имеем

$$\left|F(x^2)-g_{1,\sigma}(x)(2x)^r-g_{2,\sigma}(x)(2x)^{r-1}\right|\le\left|F_{1,r}(x)-g_{1,\sigma}(x)\right|\left|2x\right|^r+$$

$$+\left|F_{2,r}(x)-g_{2,\sigma}(x)\right|\left|2x\right|^{r-1}\le\frac{\left|2x\right|^r K_r}{\sigma^r}+\gamma(r)\frac{\left|2x\right|^{r-1}}{\sigma^{r+1}}.$$

Осталось учесть, что функции $x^r\ F_{1,r}(x)$ и $x^{r-1}\ F_{2,r}(x)$ – четные и сделать обратную замену $x^2\to x$.

Отметим, что в отличие от случая отрезка [4] здесь оператор приближения линейный. Положим

$$\varphi_r(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}\cos(2k+1)x}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Тогда $\left\|\varphi_r^{(r)}\right\|_\infty=1$, наилучшее приближение ц.ф.э.т. $\le\sigma\le1$ равно K_r (см.[2]). Точность асимптотической формулы теоремы 4 проверяется на функциях $\psi_{r,\sigma}(x)=x^{\frac{r}{2}}\varphi_r(\sigma\sqrt{x})$. □

Теорема 4 получена А.В.Товстолисом, анонсирована в [10].

РЕЗЮМЕ

У статті вивчається питання про можливість рівномірного наближення функцій на множинах комплексної площини поліномами з додатніми коефіцієнтами. Отримано перший загальний результат.

Наведені нові теореми про наближення поліномами на відрізку реальної вісі в інтегральній метриці зі степенною вагою і поточечне наближення гладких функцій на піввісі цілими функціями кінечного напівступеня. Ці результати є асимптотично точними на класі диференційованих функцій.

Бібл. – 10 назв.

SUMMARY

In this paper there study the problem of possibility uniform approximation of functions on the sets of the complex plane by the polynomials with positive coefficients. The first general result is obtained.

Further we bring the new theorems of approximation by polynomials on the segment of real axis in the power weighted integral metric and of pointwise approximation of smooth functions on the half-axis by the entire functions of finite half-degree. These results are asymptotically exact on the class of differentiable functions.

Bibliography – 10 titles.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Toland I.F. Self-adjoint operators and cones, J. London Math. Soc., (2) 53 (1996), p.167-183.
2. *Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного.* – М.Физматгиз. 1960. – 624 с.
3. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. 1987. – 424 с.
4. Тригуб Р.М. Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке. – Матем. зам. – 54 (1993). – № 6. – С.113-121.
5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.II. – М.: Наука. 1968. – 624 с.
6. Тригуб Р.М. О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами. – Изв. вузов.: Математика. – № 1 (1977). – С.93-99.
7. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит. 1951.
8. Никольский С.М. О наилучшем приближении многочленами в среднем функции $|a - x|^S$. – Изв. АН СССР: Сер. матем. – 11 (1947). – С.139-180.
9. Моторный В.П., Моторная О.В. Наилучшее приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими полиномами в среднем. – Труды Матем. ин-та АН России. – 1995. – Т.210. – С.171-188.
10. Товстолис А.В., Тригуб Р.М. Поточечное приближение полиномами на отрезке и целыми функциями на внешности отрезками и полуоси. – Тез. докл. междунар. конф. “Теория приближения и задачи вычислительной математики”. Днепропетровск, 26-28 мая 1993 г. – С.183.

Надійшла до редакції 16.10.1997 р.