УДК 519.21

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВИНЕРОВСКОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПО ЕГО ЗНАЧЕНИЯМ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Т.В.Земляк

Введение. В статье решается следующая задача: пусть (Ω,σ,P) – некоторое вероятностное пространство, на котором задано винеровское поле $w(x,y,z)$, $x\geq 0, y\geq 0$, $z\geq 0$. Предполагается, что мы наблюдаем винеровское поле $w(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$ (где S – поверхность прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина и высота которого равны d, c и h соответственно и грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям) и хотим восстановить поле в точке $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\notin S$. Под восстановлением понимается построение наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки для $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, основанной на значениях $w(x,y,z)$ при $(x,y,z)\in S$. Известно, что эта оценка задается формулой $\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})= M\{w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|F\}$ и ее ошибка вычисляется по формуле $d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=M\{(w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})-\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}))^2|F\}$, где $F=\sigma\{w(x,y,z),(x,y,z)\in S\}$. Целью работы является построение явных формул для $\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ и $d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$.

В работах [1,2] приведено решение задач восстановления винеровского поля на плоскости по его значениям на кривых некоторого типа. Заметим, что возможность упорядочить точки на кривой играет важную роль для построения явных формул в задачах на плоскости, в то время как на поверхности мы можем упорядочить точки лишь частично. Кроме того, в задачах в пространстве сильно усложняется структура рассматриваемых случайных векторов, которые в этом случае состоят из n случайных векторов, каждый из которых имеет свое распределение и, что самое главное, эти векторы зависимы между собой.

Основные результаты.

Лемма. *Пусть* $(\theta,\zeta)=(\theta,\xi_1,...\xi_n,\eta_1,.......\eta_m)$ – *гауссовский вектор с* $m_\theta=0$, $m_\zeta=0$, $D_{\theta\theta}=\mathrm{cov}(\theta,\theta)$, $D_{\zeta\zeta}=\mathrm{cov}(\zeta,\zeta)$, $D_{\theta\zeta}=\mathrm{cov}(\theta,\zeta)$, *случайные величины* θ *и* ξ_j, $j=\overline{1,n}$ *независимы с каждой из случайных величин* η_i, $i=\overline{1,m}$. *Тогда*

$$M\{\theta\,|\,G\}=\xi D^{+}_{\xi\xi}D_{\theta\xi}, \tag{1}$$

$$d_\theta=M\{[\theta-M(\theta\,|\,G)]^2\,|\,G\}=D_{\theta\theta}-D_{\theta\xi}{}^{*}D^{+}_{\xi\xi}D_{\theta\xi}, \tag{2}$$

где $G=\sigma\{\xi_j, j=\overline{1,n},\eta_i,i=\overline{1,m}\}$, $D_{\theta\xi}=\mathrm{cov}(\theta,\xi)$, $D_{\xi\xi}=\mathrm{cov}(\xi,\xi)$, $D^{+}_{\xi\xi}$ *– матрица, псевдообратная к матрице* $D_{\xi\xi}$.

Доказательство леммы. По теореме о нормальной корреляции из [3, стр.498] имеем:

$$M\{\theta\,|\,G\}=\zeta D^{+}_{\zeta\zeta}D_{\theta\zeta}, \tag{3}$$

где $D_{\zeta\zeta}=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(\xi,\xi)\ \mathrm{cov}(\xi,\eta)\\ \mathrm{cov}(\eta,\xi)\,\mathrm{cov}(\eta,\eta)\end{pmatrix}$, $D_{\theta\zeta}=(\mathrm{cov}(\theta,\xi),\mathrm{cov}(\theta,\eta))$.

Так как случайные величины θ и ξ_j, $j=\overline{1,n}$ независимы с каждой из случайных величин η_i, $i=\overline{1,m}$, то вектор $\mathrm{cov}(\theta,\eta)$ и матрица $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ – нулевые. Следовательно

$$D_{\zeta\zeta}=\begin{pmatrix}\mathrm{cov}(\xi,\xi) & O\\ O & \mathrm{cov}(\eta,\eta)\end{pmatrix} \text{ и } D_{\theta\zeta}=(\mathrm{cov}(\theta,\xi),O),$$

где O – нулевые матрицы соответствующего размера.

Очевидно, что $D^+_{\zeta\zeta} = \begin{pmatrix} D^+_{\xi\xi} & O \\ O & D^+_{\eta\eta} \end{pmatrix}$.

Подставляя в (3) вместо $D^+_{\zeta\zeta}$ и $D_{\theta\zeta}$ последние равенства, получим формулу (1) в утверждении леммы. Равенство (2) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть d_1, c_1, и h_1 – расстояния от точки $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ до граней прямоугольного параллелепипеда, ближайших координатным плоскостям. Обозначим $\alpha = d_1/d$, $\beta = c_1/c$, $\eta = h_1/h$. Тогда, учитывая эти обозначения и сделанные ранее замечания, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть точка $\tilde{T}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ лежит внутри прямоугольного параллелепипеда. Тогда (с вероятностью $P=1$) имеют место равенства:*

$$\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{i=1}^{26} \beta_i w_i\,, \tag{4}$$

$$d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = (dch)^{-1} d_1(d-d_1)c_1(c-c_1)h_1(h-h_1)\,, \tag{5}$$

где $\begin{cases}\beta_1=\alpha,\\ \beta_2=1-\alpha\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_3=\eta,\\ \beta_4=1-\eta\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_5=\gamma,\\ \beta_6=1-\gamma\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_7=-(1-\alpha)(1-\eta),\\ \beta_8=-\eta(1-\alpha),\\ \beta_9=-\alpha\eta,\\ \beta_{10}=-\alpha(1-\eta)\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_{11}=-(1-\alpha)(1-\gamma),\\ \beta_{12}=-(1-\alpha)\gamma,\\ \beta_{13}=-\alpha\gamma,\\ \beta_{14}=-\alpha(1-\gamma)\end{cases}$;

$\begin{cases}\beta_{15}=-(1-\eta)(1-\gamma),\\ \beta_{12}=-(1-\eta)\gamma,\\ \beta_{16}=-\eta\gamma,\\ \beta_{17}=-\eta(1-\gamma)\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_{19}=(1-\alpha)(1-\eta)(1-\gamma),\\ \beta_{20}=(1-\alpha)(1-\eta)\gamma,\\ \beta_{21}=(1-\alpha)\eta\gamma,\\ \beta_{22}=(1-\alpha)\eta(1-\gamma)\end{cases}$; $\begin{cases}\beta_{23}=\alpha(1-\eta)(1-\gamma),\\ \beta_{24}=\alpha(1-\eta)\gamma,\\ \beta_{25}=\alpha\eta\gamma,\\ \beta_{26}=\alpha\eta(1-\gamma)\end{cases}$

Здесь w_i, $i=\overline{1,6}$ – значения поля в точках $E_i, i=\overline{1,6}$ – ортогональных проекциях точки $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ на грани прямоугольного параллелепипеда; w_i, $i=\overline{7,18}$ – значения поля в точках $E_i, i=\overline{7,18}$, которые получаются при пересечении плоскостей, параллельных координатным плоскостям, которые проведены через точку $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ с ребрами прямоугольного параллелепипеда; $w_i, i=\overline{19,26}$ – значения поля в точках $E_i, i=\overline{19,26}$ – вершинах прямоугольного параллелепипеда.

Доказательство. Представим случайную величину $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ в виде суммы следующих случайных величин:

$$w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + w(\tilde{x},y_0,\tilde{z}) + w(x_0,\tilde{y},\tilde{z}) - w(x_0,y_0,\tilde{z}) + \\ + w(\tilde{x},\tilde{y},z_0) - w(\tilde{x},y_0,z_0) - w(x_0,\tilde{y},z_0) - w(x_0,y_0,z_0)\,, \tag{6}$$

где
$$\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) - w(\tilde{x},y_0,\tilde{z}) - w(x_0,\tilde{y},\tilde{z}) + w(x_0,y_0,\tilde{z}) - \\ - w(\tilde{x},\tilde{y},z_0) + w(\tilde{x},y_0,z_0) + w(x_0,\tilde{y},z_0) + w(x_0,y_0,z_0).$$

Так как все случайные величины в правой части (6), кроме $\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, измеримы относительно σ – алгебры F, то

$$\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) + w(\tilde{x},y_0,\tilde{z}) + w(x_0,\tilde{y},\tilde{z}) - w(x_0,y_0,\tilde{z}) + \\ + w(\tilde{x},\tilde{y},z_0) - w(\tilde{x},y_0,z_0) - w(x_0,\tilde{y},z_0) - w(x_0,y_0,z_0)\,, \tag{7}$$

где $\delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = M\{\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})|F\}$,

при этом $M\left\{(w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})-\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}))^2|F\right\}= M\left\{(\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})-\delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}))^2|F\right\}$.

Следовательно, для нахождения $\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$ достаточно найти $\delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})$.

Пусть $x_0 = x^0_{k(n)} < x^1_{k(n)} < \ldots < x^{k(n)}_{k(n)} = x_0 + d,\ n \ge 1$,

$y_0 = y^0_{k(m)} < y^1_{k(m)} < \ldots < y^{k(m)}_{k(m)} = y_0 + c,\ m \ge 1$,

$z_0 = z^0_{k(l)} < z^1_{k(l)} < \ldots < z^{k(l)}_{k(l)} = z_0 + h,\ l \ge 1$, разбиения отрезка $[0,1]$ такие, что

a) $1 \le k(1) < k(2) < \ldots < k(n) < \ldots$; $1 \le k(1) < k(2) < \ldots < k(m) < \ldots$;
$1 \le k(1) < k(2) < \ldots < k(l) < \ldots$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\le j\le k(n)}(x^j_{k(n)} - x^j_{k(n)}) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\le j\le k(m)}(y^j_{k(m)} - y^j_{k(m)}) = 0$,
$\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\le j\le k(l)}(z^j_{k(l)} - z^j_{k(l)}) = 0$;

c) для любого $j=\overline{1,k(n)}$ существует $r=\overline{1,k(n+1)}$ такое, что $x^j_{k(n)} = x^r_{k(n+1)}$; для любого $j=\overline{1,k(m)}$ существует $r=\overline{1,k(m+1)}$ такое, что $y^j_{k(m)} = y^r_{k(m+1)}$; для любого $j=\overline{1,k(l)}$ существует $r=\overline{1,k(l+1)}$ такое, что $z^j_{k(l)} = z^r_{k(l+1)}$.

Введем следующие обозначения: $x_i = x^i_{k(n)}$, $y_j = y^j_{k(m)}$, $z_k = z^k_{k(l)}$,

$w_{ijk} = w(x_i, y_j, z_k)$, $F_{k(n,m,l)} = \sigma\{w_{ijk} \in S, i=\overline{0,k(n)}, j=\overline{0,k(m)}, k=\overline{0,k(l)}\}$,

$\delta\overline{m}_{k(n,m,l)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = M\{\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})|F_{k(n,m,l)}\}$,

$d_{k(n,m,l)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = M\{(\delta w(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z})-\delta\overline{m}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}))^2|F_{k(n,m,l)}\}$.

Далее для упрощения записей переобозначим $k(n)$, $k(m)$ и $k(l)$ через n, m и l соответственно, и рассмотрим следующие случайные величины:

$w^l_{ij} = w(x_i, y_j, z_l)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $w^m_{ik} = w(x_i, y_m, z_k)$, $i=\overline{0,n}$, $k=\overline{0,l}$,

$w^n_{jk} = w(x_n, y_j, z_k)$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$,

$$\delta w^l_{ij} = w^l_{ij} - w^l_{0j} - w^l_{i0} + w^l_{00} - (w_{ij0} - w_{0j0} - w_{i00} + w_{000}), \tag{8}$$

$$\delta w^m_{ik} = w^m_{ik} - w^m_{0k} - w^m_{i0} + w^m_{00} - (w_{i0k} - w_{00k} - w_{i00} + w_{000}), \tag{9}$$

$$\delta w^n_{jk} = w^n_{jk} - w^n_{0k} - w^n_{j0} + w^n_{00} - (w_{0jk} - w_{00k} - w_{0j0} + w_{000}). \tag{10}$$

Пусть $G_{n\,ml} = \sigma\left\{\begin{array}{l} w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}, i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ k=\overline{0,l}, \\ \delta w^l_{ij},\ \delta w^m_{ik}, \delta w^n_{jk},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,l}, \end{array}\right\}$.

Очевидно, что $G_{n\,ml} = F_{n\,ml}$, $\forall\, n=1,2,\ldots$, $\forall\, m=1,2,\ldots$, $\forall\, l=1,2,\ldots$, так как все случайные величины, порождающие σ – алгебру $G_{n\,ml}$, представляют собой сумму или разность случайных величин, порождающих σ – алгебру $F_{n\,ml}$, и наоборот каждую случайную величину w_{ijk}, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ можно представить в виде суммы или разности случайных величин, порождающих σ – алгебру $G_{n\,ml}$. Следовательно

$$M\{\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|F_{nml}\} = M\{\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|G_{nml}\} \text{ и}$$
$$d_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = M\{(\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) - \delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}))^2|G_{nml}\}.$$

Таким образом, случайная величина $\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ должна представлять собой линейную комбинацию случайных величин $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$, δw_{ij}^l, $\delta w_{ik}^m, \delta w_{jk}^n$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$. Покажем, что коэффициенты перед случайными величинами $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ равны нулю.

Случайные величины $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ можно рассматривать как приращения винеровского поля по прямоугольному параллелепипеду, одна вершина которого имеет координаты $(i,j,0)$, $(i,0,k)$, или $(0,j,k)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ соответственно, а семь остальных – принадлежат координатным плоскостям, следовательно, случайные величины w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ приращения винеровского поля по таким прямоугольным параллелепипедам, которые не имеют общих внутренних точек с прямоугольными параллелепипедами, по которым берутся приращения δw_{ij}^l, $\delta w_{ik}^m, \delta w_{jk}^n$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$ и значит, каждая случайная величина $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ независима с каждой из случайных величин δw_{ij}^l, δw_{ik}^m, δw_{jk}^n, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,l}$. Кроме того, каждая из случайных величин $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ независима со случайной величиной $\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ и, следовательно, согласно лемме, коэффициенты перед случайными величинами $w_{ij0}, w_{i0k}, w_{0jk}$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $k=\overline{0,l}$ равны нулю. Для нахождения $\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = M\{\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})|G_{nml}\}$ воспользуемся теоремой о нормальной корреляции [3]. Для этого найдем решение системы

$$\operatorname{cov}(\delta\overline{w},\delta\overline{w})\overline{\beta} = \operatorname{cov}(\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\delta\overline{w}), \tag{11}$$

где $\delta\overline{w} = (\delta w, \delta\tilde{w}, \delta\hat{w})$, $\delta w = (\delta w_1^l, \delta w_2^l, \dots, \delta w_i^l, \dots, \delta w_n^l)$, $\delta w_i^l = (\delta w_{1i}^l, \delta w_{2i}^l, \dots, \delta w_{mi}^l)$, $i=\overline{1,n}$,

$$\delta\tilde{w} = (\delta w_1^n, \delta w_2^n, \dots, \delta w_k^n, \dots, \delta w_{l-1}^n),\quad \delta w_k^n = (\delta w_{1k}^n, \delta w_{2k}^n, \dots, \delta w_{mk}^n),\ k=\overline{1,l},$$

$$\delta\hat{w} = (\delta w_1^m, \delta w_2^m, \dots, \delta w_k^m, \dots, \delta w_{l-1}^m),\quad \delta w_k^m = (\delta w_{1k}^m, \delta w_{2k}^m, \dots, \delta w_{(n-1)k}^m),\ k=\overline{1,l},$$

$\overline{\beta}$ – неизвестный вектор, имеющий следующую структуру: $\overline{\beta} = (\beta, \tilde{\beta}, \hat{\beta})$,

где $\beta = (\beta_1^l, \beta_2^l, \dots, \beta_i^l, \dots, \beta_n^l)$, $\beta_i^l = (\beta_{1i}^l, \beta_{2i}^l, \dots, \beta_{mi}^l)$, $i=\overline{1,n}$,

$$\tilde{\beta} = (\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_k^n, \dots, \beta_{l-1}^n),\quad \beta_k^n = (\beta_{1k}^n, \beta_{2k}^n, \dots, \beta_{mk}^n),\ k=\overline{1,l},$$

$$\hat{\beta} = (\beta_1^m, \beta_2^m, \dots, \beta_k^m, \dots, \beta_{l-1}^m),\quad \beta_k^m = (\beta_{1k}^m, \beta_{2k}^m, \dots, \beta_{(n-1)k}^m),\ k=\overline{1,l}.$$

Решая систему (11) и учитывая равенство

$\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = R^+\operatorname{cov}(\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}),\delta\overline{w})\delta\overline{w}$, где R^+ – матрица псевдообратная к матрице $\operatorname{cov}(\delta\overline{w},\delta\overline{w})$, получим:

$$\delta\overline{m}_{nml}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \alpha\delta w(x_0+d,\tilde{y},\tilde{z}) + \eta\delta w(\tilde{x},y_0+c,\tilde{z}) + \gamma\delta w(\tilde{x},\tilde{y},z_0+h) -$$
$$-\alpha\eta\delta w(x_0+d,y_0+c,\tilde{z}) - \eta\gamma\delta w(\tilde{x},y_0+c,z_0+h) - \alpha\gamma\delta w(x_0+d,\tilde{y},z_0+h) + \tag{12}$$

$+\alpha\eta\gamma\delta w(x_0+d,y_0+c,z_0+h)$.

Вспоминая, что $k(n)$, $k(m)$ и $k(l)$ переобозначали через n, m и l, соответственно в равенстве (12) перейдем к пределу при $k(n)\to\infty$, $k(m)\to\infty$, $k(l)\to\infty$. Учитывая определение разбиения отрезка $[0,1]$, имеем:

$$G_{k(1,1,1)}\subseteq G_{k(2,1,1)}\subseteq\ldots\subseteq G_{k(n,m,l)}\subseteq\ldots\subseteq G \text{ и } G=\left\{\bigcup_{n=1,m=1,l=1}^{\infty}G_{k(n,m,l)}\right\}.$$

Следовательно, согласно теореме Леви из [3, стр.25] получим:

$$\delta\overline{m}_{k(n,m,l)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\xrightarrow[k(n),k(l),k(m)\to\infty]{}\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \text{ (с вероятностью } P=1).$$

Так как $M\left\{(\delta w-\delta\overline{m}_{k(n,m,l)})^2\right\}\le M\left\{(\delta w-\delta\overline{m}_{k(1,1,1)})^2\right\}$ для $\forall n=1,2,\ldots$, $\forall m=1,2,\ldots,\forall l=1,2,\ldots$, то $\lim\limits_{n,m,l\to\infty}\delta\,\overline{m}_{k(n,m,l)}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$.

Так как выражение в правой части (12) не зависит от n, m, l, то

$$\delta\overline{m}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\alpha\delta w(x_0+d,\tilde{y},\tilde{z})+\eta\delta w(\tilde{x},y_0+c,\tilde{z})+\gamma\delta w(\tilde{x},\tilde{y},z_0+h)-$$
$$-\alpha\eta\delta w(x_0+d,y_0+c,\tilde{z})-\eta\gamma\delta w(\tilde{x},y_0+c,z_0+h)-\alpha\gamma\delta w(x_0+d,\tilde{y},z_0+h)+$$
$$+\alpha\eta\gamma\delta w(x_0+d,y_0+c,z_0+h).$$

Формула (4) следует из последнего равенства и (8) – (10). Далее, учитывая, что ковариация случайной величины $\delta w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ с каждой из случайных величин в правой части (12) равна $d_1c_1h_1$, получим:

$$d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=d_1c_1h_1-d_1c_1h_1(\alpha+\eta+\gamma+\alpha\eta-\eta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\eta\gamma),$$

откуда $d(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=d_1c_1h_1(1-\alpha)(1-\gamma)(1-\eta)$.

Учитывая, что $\alpha=d_1/d$, $\beta=c_1/c$, $\gamma=h_1/h$, получим равенство (5) в утверждении теоремы.

Таким образом, из доказанной теоремы следует, что наилучшая в среднеквадратическом смысле оценка для $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ зависит от значений винеровского поля на поверхности прямоугольного параллелепипеда только в конечном числе точек.

РЕЗЮМЕ

У статті розв'язана наступна задача: нехай $w(x,y,z)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ – вінерівське поле у просторі та S – поверхня прямокутного паралелепіпеда. Побудована найкраща у средньоквадратичному значенні оцінка для $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\notin S$, яка базується на значеннях $w(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$, та обчислена її помилка.

SUMMARY

The following problem is solved in the paper: let $w(x,y,z)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ be the Wiener field in the space and S is surface of the rectangulare parallelepiped. The best valuation in everage quadratic sense for $w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\notin S$ based on the meaning $w(x,y,z)$, $(x,y,z)\in S$ is counstructed and its error is calculated.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевляков А.Ю. О восстановлении винеровского поля по его реализациям на кривой // Теория случайных процессов. – 1988. – Вып.16. – С.87-93.
2. Земляк Т.В. Восстановление винеровского поля на плоскости по его реализациям на замкнутой кривой некоторого типа // Вісник Донецького державного університету. – 1998. – №1. – Серія А: Природничі науки. – С.24-30.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Надійшла до редакції 03.09.1998 р.