УДК 519.21

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СХЕМЕ АВТОРЕГРЕССИИ I ПОРЯДКА

К.Б.Селяков

Рассмотрим скалярную процедуру авторегрессии $U_k = \beta U_{k-1} + \varepsilon_k$, $k = 1,2,\ldots$ в которой β – неизвестный неслучайный параметр, $U_0 = \varepsilon_0$, ε_k, $k = 1,2,\ldots$ – независимые одинаково распределенные величины со средним нуль, дисперсией σ^2 и функцией распределения – $G(x)$. Будем предполагать, что $|\beta|<1$. Пусть $\hat{\beta}_n$ – оценка параметра β, причем для нормированного уклонения $\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_n - \beta)$, $n = 1,2,\ldots$ верна оценка из [2]. В дальнейшем будем считать, что известна априорная оценка β, т.е. существует $\Lambda: |\beta| \le \Lambda < 1$. Предположим, что наблюдается последовательность $\{U_k\}_0^n$. Пусть $\hat{\varepsilon}_n = U_k - \hat{\beta}_n U_{k-1}$ $(k = 1,\ldots,n)$ – оценка неизвестных $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$,

$\hat{G}_n(x) = \frac{1}{n}$ (число $\hat{\varepsilon}_k < x$, $k = 1,\ldots,n$) – оценка неизвестной функции распределения $G(x)$. Естественно считать статистику $\hat{G}_n(x)$ оценкой эмпирической функции распределения $G_n(x)$, построенной непосредственно по $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$. В [1] было установлено сближение по вероятности в равномерной метрике эмпирических функций $\hat{G}_n(x)$ к $G_n(x)$, а именно: если $\sup\limits_x |G''(x)| < \infty$, то $\sup\limits_x |\hat{G}_n(x) - G_n(x)| \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$.

В данной работе изучается скорость сближения $\hat{G}_n(x)$ к $G_n(x)$.

Теорема. *При сделанных предположениях, а также если:*

$\{\varepsilon_k\}_0^n : \mathrm{M}|\varepsilon_k|^m \le \frac{\sigma^2}{2}\mathrm{H}^{m-2} m!$, $m \ge 2$, H>0- *известна*; $\mathrm{M}e^{z(\varepsilon_k^2 - M\,\varepsilon_k^2)} \le e^{z^2\sigma_1^2}$;

$\sup\limits_x |G'(x)| \le K_1 < \infty$; $\sup\limits_x |G''(x)| \le K_2 < \infty$; $R>0$, $\varepsilon>0$, $0<\tilde{\varepsilon}<|\sigma|\,(\sqrt{2}-1)$, то

$$P\{\sup_x \sqrt{n}\,|\hat{G}_n(x) - G_n(x)| > 6\varepsilon\} \le 2\exp\{-(R-1)\tilde{\varepsilon}^2\} +$$

$$+ 6\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1 - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\} + (6n-2)\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81$$

$$+ \frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\} + \exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}\left(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2K_2R^2} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)^2\} + 2\exp\{-\frac{n^2}{n-1}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2K_1^2R^2}(1-\Lambda)^2\} +$$

$$+ \exp\{-(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)n}{4R^2K_2} - \tilde{\varepsilon}^2\} + (2N_n+1)(3^{m_n}+1)[2\exp\{-n^{0.25\gamma}\varepsilon + 3K_1e\} +$$

$$+4n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81 + \frac{|\sigma|}{\sqrt{n^\gamma(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}] + (N_n-2)\exp\{-\varepsilon N_n n^{-0.5} + e + 1\} +$$

$$+ 2\exp\{-\frac{n^{2\gamma+1}}{n-1}(\frac{1-\Lambda}{2\sigma})^2(\frac{\varepsilon - \sqrt{n}N_n^{-1}}{6K_1})^2\} +$$

$$+2n\exp\{-\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}n^{-0.5+\gamma}3^{m_n}\frac{(1-\Lambda^2)^2}{2}(|\sigma|(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}n^{-0.5+\gamma}3^{m_n})^{-1}+1.62H)^{-1}\}+$$

$$+\exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}n^{\gamma-0.5}3^{m_n}-\sigma^2)^2\}+\exp\{-\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{27K_2}n^{\gamma+1}3^{m_n}-\tilde{\varepsilon}^2\}+$$

$$+\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\}+2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}+$$

$$+2\exp\{-(n^{0.5-\gamma}-1)\tilde{\varepsilon}^2\},\ \text{где}\ 3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}},\ N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}.$$

Доказательство. Воспользуемся **идеей доказательства** из [1].

Пусть $\Delta_k(x)=\begin{cases}1,\varepsilon_k<x\\0,\varepsilon_k\ge x\end{cases}$, тогда $G_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k(x)$,

а т.к. $\hat{\varepsilon}_k=\varepsilon_k-(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1}$, то $\hat{G}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k(x+(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1})$.

Поэтому $\sqrt{n}(\hat{G}_n(x)-G_n(x))=z_{1n}(x)+z_{2n}(x)$, где

$$z_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x+(\hat{\beta}_n-\beta_1)U_{k-1})-G(x+(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1})-\Delta_k(x)+G(x)]$$

$$z_{2n}(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[G(x+(\hat{\beta}_n-\beta)U_{k-1})-G(x)].$$ **Рассмотрим** $z_{2n}(x)$.

Разлагая в ряд Тейлора, имеем:

$$P\{\sup_x|z_{2n}(x)|>2\varepsilon\}\le P\{\sup_x|G'(x)|R\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}|>\varepsilon\}+$$

$$+P\{\sup_x|G''(x)|R^2\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}^2>\varepsilon\}+P\{\sqrt{n}|\hat{\beta}_n-\beta|>R\}.$$

Обозначим $\frac{\varepsilon}{K_1R}=\delta$, тогда

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}|>\delta\}=P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}>\delta\}+\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-U_{k-1})>\delta\}.$$

Построим оценку первого слагаемого:

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}>\delta\}=P\{\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\}>e^{zn\delta}\}\le e^{-zn\delta}M\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\},z>0.$$

Пусть F_k – расширяющийся поток σ – **алгебр, порожденных** ε_k, $k=0,\ldots,n$.

Тогда $M\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\}=M[M\exp\{z\sum_{k=1}^{n}U_{k-1}\}/F_{n-2}]=$

$$=M[\exp\{z\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}+z(1+\beta)U_{n-2}\}M(\exp\{z\varepsilon_{n-1}\}/F_{n-2})].$$

Пусть $\varphi(z)=M(e^{z\varepsilon_{n-1}}/F_{k-2})$.

Легко увидеть, что $M(\exp\{z\varepsilon_{k-1}\}/F_{k-2})\le 1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{z^mM|\varepsilon_{k-1}|^m}{m!}\le\exp\{z^2\sigma^2\}$, если $0<z<\frac{1}{2H}$.

Таким образом $M\exp\{z\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}\} \le \varphi(z)\varphi((1+|\beta|)z)\ldots\varphi((1+|\beta|+\ldots|\beta|^{n-2})z) \le$

$\le\exp\{\sigma^2 z^2(n-1)(1-\Lambda)^{-2}\}$. Тогда $P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}>\delta^2\} \le \exp\{\sigma^2 z^2(\frac{1}{1-\Lambda})^2(n-1)-zn\delta\}$.

Минимизируя по $\frac{1}{2H}>z>0$, получим:

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}>\frac{\varepsilon}{K_1 R}\}\le\exp\{-\frac{n^2}{n-1}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2 K_1^2 R^2}(1-\Lambda)^2\}.$$

Легко убедиться, что такая же оценка верна и для $P\{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}>\frac{\varepsilon}{K_1 R}\}$.

В результате получаем оценку: $P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}| > \frac{\varepsilon}{K_1 R}\} \le 2\exp\{-\frac{n^2\varepsilon^2(1-\Lambda)^2}{(n-1)4\sigma^2 K_1^2 R^2}\}$.

Далее $P\{\frac{1}{2}\sup_x |G''(x)|\, R^2\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2>\varepsilon\}\le P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2>\frac{2\varepsilon}{R^2 K_2}\}$.

В силу того, что $\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2=2\beta\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2+\beta^2\sum_{k-1}^{n} U_{k-1}^2-\beta^2 U_{n-1}^2$

имеем $(1-\beta^2)\sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2=2\beta\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2-\beta^2 U_{n-1}^2 \le 2\beta\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2$.

Тогда $P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} U_{k-2}^2>\frac{2\varepsilon}{R^2K_2}\} \le P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n} U_{k-2}\varepsilon_{k-1}>\delta\}+P\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2>\delta\}$,

где $\delta=\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2R^2K_2}$. Рассмотрим второе слагаемое: $P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2>\delta\sqrt{n}\}\le$

$\le\exp\{-z(\delta\sqrt{n}-M\varepsilon_0^2)\}[M\exp\{\frac{z}{n}(\varepsilon_0^2-M\varepsilon_0^2)\}]^2\le\exp\{\frac{\sigma_1^2 z^2}{n}-z\varepsilon\sqrt{n}+zM\varepsilon_0^2\}$.

Минимизируя по z >0 получим:

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{k-1}^2>\delta\sqrt{n}\}\le\exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}\left(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2K_2R^2}-\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)^2\}.$$

Для первого слагаемого имеем: $P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}\varepsilon_k>\delta\sqrt{n}\}\le P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}+$

$+P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}\varepsilon_k-\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}^2>\delta n-\tilde{\varepsilon}^2\}\le P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}+$

$+\sum_{k=0}^{n-2} P\{|U_k|>\frac{\sqrt{n}}{2H}\}+\exp\{-\delta n+\tilde{\varepsilon}^2\}M\prod_{k=1}^{n-1} I(|U_{k-1}|\le\frac{\sqrt{n}}{2H})\exp\{\frac{U_{k-1}\varepsilon_k}{\sqrt{n}}-\frac{\sigma^2U_{k-1}^2}{n}\}$,

где $I(|U_{k-1}|\le\frac{\sqrt{n}}{2H})$ – индикатор события

$$|U_{k-1}|\le \frac{\sqrt{n}}{2H}\cdot M\{I(|U_{n-1}|\le \frac{\sqrt{n}}{2H})\exp\{\frac{U_{n-1}\varepsilon_n}{\sqrt{n}}-\frac{\sigma^2}{n}U_{n-1}^2\}/F_{n-1}\}\le$$

$$\le\exp\{-\frac{\sigma^2U_{n-1}^2}{n}\}[1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{U_{n-1}^m}{m!}H^{m-2}\frac{m!\sigma^2}{2n^{m/2}}]\le\exp\{-\frac{\sigma^2U_{n-1}^2}{n}\}[1+\frac{\sigma^2U_{n-1}^2}{n}]\le 1 \text{ и т.д.}$$

Тогда

$$P\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}\varepsilon_k>\delta\sqrt{n}\}\le P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}+\sum_{k=1}^{n-1}P\{|U_{k-1}|>\frac{\sqrt{n}}{2H}\}+$$

$$+\exp\{-0.5\delta n\text{-}\tilde{\varepsilon}^2\}.$$

Из [2] получим оценку: $P\{\frac{\sigma^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}U_{k-1}^2\le\tilde{\varepsilon}^2\}\le\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2$.

Теперь по [3] найдем оценку

$$P\{|U_k|>\frac{\sqrt{n}}{2H}\}\le 2\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

из [2] $P\{\sqrt{n}\,|\hat{\beta}_n\text{-}\beta|>R\}\le 2\exp\{-(R-1)\tilde{\varepsilon}^2\}+2\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\}+$

$+2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}$. Таким образом

$$P\{\sup_x|z_{2n}(x)>2\varepsilon\}\le 2\exp\{-(R-1)\tilde{\varepsilon}^2\}+4\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\}+$$

$$+(4n-2)\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\beta^2}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}+\exp\{-\frac{n}{4\sigma_1^2}\left(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)}{2K_2R^2}-\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right)^2\}+$$

$$+2\exp\{-\frac{n^2}{n-1}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2K_1^2R^2}(1-\Lambda)^2\}+\exp\{-(\frac{\varepsilon(1-\Lambda^2)n}{4R^2K_2}-\tilde{\varepsilon}^2\}.$$

Теперь перейдем к оценке $z_{1n}(x)$.

Рассмотрим $z_n(x,\eta_n,U)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x+\eta_nU_{k-1})-G(x+\eta_nU_{k-1})-\Delta_k(x)+G(x)]$,

где η_n неслучайная, и заметим, что $\forall\ \varepsilon>0\ P\{\sup_x|z_{1n}(x)|>4\varepsilon\}\le$

$$\le P\{\sup_x\sup_{|\eta_n|<n^{-\gamma}}|z_n(x,\eta_n,U)|>4\varepsilon\}+P\{\sqrt{n}\,|\,\hat{\beta}_n\text{-}\beta|>n^{0.5-\gamma}\},\ 0.4<\gamma<0.5.$$

Найдём оценку для $P\{\sup_x\sup_{|\eta_n|<n^{-\gamma}}|z_n(x,\eta_n,U)|>4\varepsilon\}$. Пусть m_n и N_n – натуральные числа, такие, что $3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}}$, $N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}$. Разделим отрезок $[-n^{-\gamma}, n^{-\gamma}]$ на 3^{m_n} частей точками $\eta_{sn}=-n^{-\gamma}+2n^{-\gamma}3^{-m_n}s$, $s=0,1,\dots,3^{m_n}$, а действительную ось на N_n-частей точками $-\infty=x_0<x_1,\dots x_{N_n-1}<x_{N_n}=+\infty$, где $G(x_i)=iN_n^{-1}$. Используя идею доказательства предложения 1 из [4], перейдем от верхней грани по континууму значений x и η_n к верхней грани по ко-

нечным множествам: $x \in \{x_i,\ i=0,1,...,N_n\}$, $\eta_n \in \{\eta_{sn},\ s=0,1,...,3^{m_n}\}$. Для этого рассмотрим случайные величины из [1] $\tilde{v}_{sk} = U_{k-1}(1-2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1} I_{(U_{k-1}>0)})$,

$\hat{v}_{sk} = U_{k-1}(1-2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1} I_{(U_{k-1}<0)})$ и векторы $\tilde{v}_s = (\tilde{v}_{s1},...,\tilde{v}_{sn})$, $\hat{v}_s = (\hat{v}_{s1},...,\hat{v}_{sn})$. Тогда для x, η_n таких, что $x_r \le x \le x_{r+1}$, $0 \le \eta_{jn} - \eta_n \le 2n^{-\gamma}3^{-m_n}$ имеем

$$x_r + \eta_{jn}\tilde{v}_{jk} \le x + \eta_n U_{k-1} \le x_{r+1} + \eta_{jn}\hat{v}_{jk},\ k=1,...,n,$$

и, вследствие монотонности $G(x)$, $\Delta_k(x)$,

$$z_n(x,\eta_n,U) \ge z_n(x_r,\eta_{jn},\tilde{v}_j) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_r) - G(x_r) - \Delta_k(x_{r+1}) + G(x_{r-1})] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [G(x_r + \eta_{jn}\tilde{v}_{jk}) - G(x_{r+1} + \eta_{jn}\hat{v}_{jk})];$$

$$z_n(x,\eta_n,U) \le z_n(x_{r+1},\eta_{jn},\hat{v}_j) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_{r+1}) - G(x_{r+1}) - \Delta_k(x_r) + G(x_{r+2})] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [G(x_{r+1} + \eta_{jn}\hat{v}_{jk}) - G(x_r + \eta_{jn}\tilde{v}_{jk})],$$

следовательно, $P\{\sup\limits_{x}\ \sup\limits_{|\eta_n|<n^{-\gamma}} |z_n(x,\eta_n,U)| > 4\varepsilon\} \le$

$$\le P\{\sup_{i\le N_n-1}\ \sup_{s\le 3^{m_n}} |z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon\} + \tag{1}$$

$$+ P\{\sup_{i\le N_n}\ \sup_{s\le 3^{m_n}} |z_n(x_i,\eta_{sn},\tilde{v}_s)| > \varepsilon\} + \tag{2}$$

$$+ P\{\sup_{i\le N_n-2} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})] > \varepsilon\} + \tag{3}$$

$$+ P\{\sup_{i\le N_n-1}\ \sup_{s\le 3^{m_n}} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [G(x_{r+1} + \eta_{sn}\hat{v}_{sk}) - G(x_r + \eta_{sn}\tilde{v}_{sk}) > \varepsilon]\}. \tag{4}$$

Рассмотрим (1): $P\{\sup\limits_{i\le N_n-1}\ \sup\limits_{s\le 3^{m_n}} |z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon\} \le$

$$\le \sum_{i=0}^{N_n-1}\sum_{s=0}^{3^{m_n}} P\{|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} + \sum_{k=1}^{n} P\{|U_{k-1}| > n^{\frac{\gamma}{2}}\}.$$

$$P\{|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)| > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} \le P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s) > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} +$$

$+ P\{-z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s) > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\}$. Теперь

$$P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s) > \varepsilon,\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}\} \le \exp\{-z\varepsilon\}(M\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_{i+1} + \eta_{sn}\hat{v}_{sk}) -$$

$$-G(x_{i+1} + \eta_{sn}\hat{v}_{sk}) - \Delta_k(x_{i+1}) + G(x_{i+1})]\},\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=1,..,n).$$

Заметим, что так как $|1-2n^{-\gamma}3^{-m_n}\eta_{sn}^{-1}| \le 3$ для любого s, то $\max(|\tilde{v}_{sk}|,|\hat{v}_{sk}|) \le 3|U_{k-1}|$.

Тогда если $\eta_{sn}\hat{v}_{sk} > 0$, то $M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s),\ |U_{k-1}| \le n^{\frac{\gamma}{2}},\ k=\overline{1,n}/F_{n-1}\} \le$

$\leq \exp\{3\frac{z^2}{n}e^{\frac{z}{\sqrt{n}}}\sup_x G^{/}(x)n^{-0.5\gamma}\}\exp\{z\, z_{n-1}(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s), |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}}, k=\overline{1,n}/F_{n-1}\}$.

Если $\eta_{sn}\hat{v}_{sk}<0$, то $M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s), |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}}, k=\overline{1,n}/F_{n-1}\}\leq$

$\leq\exp\{3\sup_x G^{/}(x)\frac{2z^2}{n}n^{\frac{-\gamma}{2}}+z\, z_{n-1}(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s), |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}}, k=\overline{1,n}/F_{n-1}\}$.

Пусть $C=\max(2,\exp\{\frac{z}{\sqrt{n}}\})$, тогда $M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)/F_{n-1}\}\leq$

$\leq\exp\{3K_1Cz^2n^{-\frac{\gamma}{2}-1}+z\, z_{n-1}(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)\}$, и после n-й итерации получаем

$M\exp\{z\, z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)\}\leq\exp\{3K_1Cz^2n^{-\frac{\gamma}{2}}\}$. Таким образом,

$P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)>\varepsilon, |U_k|\leq n^{\frac{\gamma}{2}}, k=\overline{1,n}\}\leq\exp\{-z\varepsilon+3K_1Cz^2n^{-\frac{\gamma}{2}}\}$. Положим $z=n^{\frac{\gamma}{4}}$ и получим $P\{z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)>\varepsilon, |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}}, k=\overline{1,n}\}\leq\exp\{-n^{\frac{\gamma}{4}}\varepsilon+3K_1e\}$.

Аналогично $P\{-z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)>\varepsilon, |U_{k-1}|\leq n^{\frac{\gamma}{2}}, k=\overline{1,n}\}\leq\exp\{-n^{\frac{\gamma}{4}}\varepsilon+3K_1e\}$.
Теперь, согласно [3],

$$\sum_{k=1}^{n}P\{|U_{k-1}|>n^{0.5\gamma}\}\leq 2n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

Таким образом

$$P\{\sup_{i\leq N_n-1}\sup_{s\leq 3^{m_n}}|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\hat{v}_s)|>\varepsilon\}\leq N_n(3^{m_n}+1)[2\exp\{-n^{0.25\gamma}\varepsilon+3K_1e\}+$$
$$+2n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}], 3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}}, N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}.$$

Легко проверить, что для (2) верна следующая оценка:

$$P\{\sup_{i\leq N_n}\sup_{s\leq 3^{m_n}}|z_n(x_{i+1},\eta_{sn},\tilde{v}_s)|>\varepsilon\}\leq(N_n+1)(3^{m_n}+1)[2\exp\{-n^{0.25\gamma}\varepsilon+3K_1e\}+$$
$$+2n\exp\{-\frac{n^{0.5\gamma}(1-\Lambda)^{0.5}}{8H^2|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n^{\gamma}(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}], 3^{m_n}\sim n^{\frac{\gamma}{4}}, N_n\sim n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{4}}.$$

Рассмотрим (3): $P\{\sup_{i\leq N_n-2}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_{i+1})-G(x_{i+1})-\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})]>\varepsilon\}\leq$

$$\leq\sum_{i=0}^{N_n}P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_{i+1})-G(x_{i+1})-\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})]>\varepsilon\}.$$

$P\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}[\Delta_k(x_{i+1})-G(x_{i+1})-\Delta_k(x_i)+G(x_{i+2})]>\varepsilon\}\leq$

$\le \exp\{-z\varepsilon\} M \exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})]\} = I_1$.

Заметим, что $M\exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})]\}/F_{n-1}\} =$

$= \exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+2})] + \frac{z}{\sqrt{n}} (G(x_{i+2}) - G(x_{i+1}))\}[1 + (\exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \} - 1)*$

$*(G(x_{i+1}) - G(x_i))] \le \exp\{N_n^{-1} \frac{z}{\sqrt{n}} (\exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \} +$

$+1)\}\exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) + \Delta_k(x_i) - G(x_{i+2})]\}$ и после n -й итерации получим:

$I_1 \le \exp\{-\varepsilon z + z N_n^{-1} \sqrt{n} (\exp\{ \frac{z}{\sqrt{n}} \} + 1)\}$.

Положим $z = N_n n^{-0.5}$, тогда

$P\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [\Delta_k(x_{i+1}) - G(x_{i+1}) - \Delta_k(x_i) + G(x_{i+1})] > \varepsilon\} \le \exp\{-\varepsilon N_n n^{-0.5} + e + 1\}$.

Применяя к разности под знаком суммы в (4) формулу Тейлора,

получаем, что $\sup_{i \le N_n - 1} \sup_{s \le 3^{m_n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [G(x_{r+1} + \eta_{sn} \hat{v}_{sk}) - G(x_r + \eta_{sn} \tilde{v}_{sk})] \le$

$\le \sup_{i \le N_n - 1} \sqrt{n} [G(x_{i+1}) - G(x_i)] + \sup_x G'(x) \sup_{s \le 3^{m_n}} (\frac{1}{\sqrt{n}} | \sum_{k=1}^{n} \eta_{sn} \tilde{v}_{sk} | + \frac{1}{\sqrt{n}} | \sum_{k=1}^{n} \eta_{sn} \hat{v}_{sk} |) +$

$+ 0.5 \sup_x |G''(x)| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \eta_{sn}^2 (\nu_{sk}^2 + \nu_{sk}^2)$.

Чтобы оценить последнее выражение сверху, заметим, что

$\mathrm{Max}(| \sum_{k=1}^{n} \eta_{sn} \tilde{v}_{sk} |, | \sum_{k=1}^{n} \eta_{sn} \hat{v}_{sk} |) \le n^{-\gamma} \left| \sum_{k=1}^{n} U_{k-1} \right| + 2n^{-\gamma} 3^{-m_n} \sum_{k==1}^{n} |U_{k-1}|$, а так как

$|1 - 2n^{-\gamma} 3^{-m_n} \eta_{sn}^{-1}| \le 3$ для любого s, то $\max(|\tilde{v}_{sk}|, |\hat{v}_{sk}|) \le 3|U_{k-1}|$ и, следовательно,

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \eta_{sn}^2 (\nu_{sk}^2 + \nu_{sk}^2) \le 18 n^{-0.5-2\gamma} \sum_{k=1}^{n} U_{K-1}^2$. Таким образом (4) не превосходит

$P\{2K_1 n^{-0.5-\gamma} | \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}| + 4K_1 n^{-0.5-\gamma} 3^{-m_n} \sum_{k=1}^{n} |U_{k-1}| + 9K_2 n^{-0.5-2\gamma} \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2 > \varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}\} \le$

$\le P\{n^{-0.5-\gamma} | \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}| > \frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{6K_1}\} + P\{n^{-0.5-\gamma} 3^{-m_n} \sum_{k=1}^{n} |U_{k-1}| > \frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{12K_1}\} +$

$+ P\{n^{-0.5-2\gamma} \sum_{k=1}^{n} U_{k-1}^2 > \frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{27K_2}\} \le 2\exp\{- \frac{n^{2\gamma+1}}{n-1} (\frac{1-\Lambda}{2\sigma})^2 (\frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{6K_1})^2\} +$

$+ P\{n^{-0.5-\gamma} 3^{-m_n} \sum_{k=1}^{n} |U_{k-1}| > \frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{12K_1}\} + \exp\{- \frac{n}{4\sigma_1^2} (\frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{27K_2} n^{\gamma-0.5} 3^{m_n} - \sigma^2)^2\} +$

$+ \exp\{- \frac{\varepsilon - \sqrt{n} N_n^{-1}}{27K_2} n^{\gamma+1} 3^{m_n} - \tilde{\varepsilon}^2\} + \exp\{- \frac{n}{48H^2} [1 - \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2 (\sqrt{2} - 1)^2}]^2\} +$

$$+\, 2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2\,|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

Теперь оценим $P\{n^{-0.5-\gamma}3^{-m_n}\sum_{k=1}^{n}|U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\} \le$

$$\le \sum_{k=1}^{n} P\{|U_{k-1}| > \frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\, n^{-0.5+\gamma}3^{m_n}\} \le 2n\exp\{-\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\, n^{-0.5+\gamma}3^{m_n} *$$

$$* \frac{(1-\Lambda^2)^2}{2}(|\sigma|(\frac{\varepsilon-\sqrt{n}N_n^{-1}}{12K_1}\, n^{-0.5+\gamma}3^{m_n})^{-1} + 1.62H)^{-1}\}.$$

И из [2] $P\{\sqrt{n}\,|\,\hat{\beta}_n - \beta| > n^{0.5-\gamma}\} \le 2\exp\{-(n^{0.5-\gamma}-1)\tilde{\varepsilon}^2\} +$

$$+2\exp\{-\frac{n}{48H^2}[1-\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\sigma^2(\sqrt{2}-1)^2}]^2\} + 2n\exp\{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2\,|\sigma|}(0.81+\frac{|\sigma|}{\sqrt{n(1-\Lambda^2)}})^{-1}\}.$$

Теорема доказана.

Автор искренне благодарен проф. Бондареву Б.В. за постановку задачи и помощь, оказанную в процессе работы.

РЕЗЮМЕ

Розглядається схема авторегресії $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ ($k=1,..,n$), де β – невідомий та невипадковий параметр, а ε_k – незалежні, однаково розподілені випадкові елементи з середнім нуль, обмеженою дисперсією та невідомою функцією розподілу $G(x)$. $\hat{G}(x)$ є оцінкою для $G(x)$. Знайдено експоненційні оцінки для ймовірності виходу величини $\sup_x \sqrt{n}\,|\hat{G}_n(x) - G_n(x)|$ за убуваючий рівень

SUMMARY

Let $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ ($k=1,..,n$) are n observations of autoregressive scheme, where β is unknown nonrandom parameter and ε_k are independent identically distributed random variables with zero mean, finite variance and unknown distribution function $G(x)$. The estimate $\hat{G}(x)$ of $G(x)$ is considered. It's founded exponantional estimate for the exit's probability $\sup_x \sqrt{n}\,|\hat{G}_n(x) - G_n(x)|$ from downing level.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М.В. Оценка возмущений в схеме авторегрессии. – Теория вероятностей и ее применения,1982, т. 17, в. 4. – С.805-810.
2. Бондарев Б.В. Нерівність С.Н.Бернштейна для оцінки параметру авторегрессії першого порядку. – Теорія ймовірностей та математична статистика. Вип. 55, 1996, С.13-19.
3. V.V.Yarinski. Exponential inequalities for sums of random vectors. J.Multivar. Anal. 6 (1976), N.4, pp. 473-499.
4. Муганцева Л.А. Проверка нормальности в схемах одномерной и многомерной регрессии. Теория вероятностей и ее применения, 1977, т. 22, в. 3, с. 603-614.

Надійшла до редакції 02.09.1998 р.