МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ОСЦИЛЛЯЦИЯМИ

Б.В.Бондарев, А.А.Симогин

1. Введение. В данной работе получены оценки близости реализаций решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с быстрыми случайными осцилляциями и решения задачи Коши для соответствующего уравнения Ито.

Рассмотрим в слое $D_{n+1}^{(T)}=[0,T]\times R_n$ задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial U_\varepsilon(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}U_\varepsilon(t,x)+A(t,x,U_\varepsilon(t,x))+B(t,x,U_\varepsilon(t,x))\eta(t/\varepsilon), \tag{1}$$
$$U_\varepsilon(0,x)=u_0(x),$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, $L_{t,x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ – равномерно эллиптический оператор, $\eta(t)$ – центрированный стационарный в узком смысле случайный процесс, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания, с коэффициентом перемешивания $\varphi(t)$, $A(t,x,y)$ и $B(t,x,y)$ некоторые неслучайные функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$|A(t,x,y_1)-A(t,x,y_2)|+|B(t,x,y_1)-B(t,x,y_2)|\le L|y_1-y_2|. \tag{2}$$

Пусть коэффициенты оператора $L_{t,x}$ и функции $A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$ принадлежат классу $H^{l,l/2}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$, а функция $u_0(x)$ классу $H^{l+2}\left(\overline{R_n}\right)$ тогда существует и единственно классическое решение задачи (1) из класса функций $H^{l+2,l/2+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ [1].

2. Некоторые вспомогательные результаты. Относительно процесса $\eta(t)$ потребуем выполнения условий

$$M\eta(t)=0\,,\ D\int_0^T\eta(u)du=1\,,P\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta(t)|>R\right\}\le C_1\exp\{C_2R\}$$
$$0<\sigma=M\left(\int_0^T\eta(u)du\right)^2+2\sum_{j=1}^{\infty}M\int_0^T\eta(u)du\int_{jT}^{(j+)T}\eta(u)du<+\infty\,, \tag{3}$$

В работе [2] приведены условия, достаточные для слабой сходимости процесса $\zeta_\varepsilon(t)=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int_0^{t/\varepsilon}\eta(u)du$ к $w(t)$, $t\in[0,T]$. (Здесь $w(t)$, $t\in[0,T]$, стандартный винеровский процесс.)

В тоже время, опираясь на результат известной теоремы А.В.Скорохода [3] стр.13, в работе [4] получены условия, при выполнении которых на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ можно построить процесс $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$, имеющий одинаковые конечномерные распределения с $\zeta_\varepsilon(t)$. Причем $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ будет уже сходиться по вероятности к $w(t)$ в каждой точке отрезка $[0,T]$. А также в работе [4] найдена оценка скорости сходимости по вероятности нормированного интеграла $\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)$ к $w(t)$, $t\in[0,T]$ в метрике пространства $C_{[0,T]}$.

На основании результата работы [4] можно в частности получить оценку для вероятности выхода за уровень величины $\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)\right|$. А именно справедлив результат.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 [4]: для некоторого r, $2<r<5$, справедливо $\varphi(s)\le As^{-g}$, где $g>j(u)(j(u)-1)$, $u=(2+5r)/2(5-r)$, $j(u)=2\min\{k\in N:2k\ge u\}$. Функция $\beta(\varepsilon)$ такая, что $\frac{\beta(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, $\mu(\varepsilon)=C_0\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{r/2-1}M\left|\int_0^T\eta(u)du\right|^r\right)^{1/(r+1)}$. Тогда при $R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)>1$ верно следующее неравенство

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)\right|>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu(\varepsilon)+ \tag{4}$$

$$+\frac{C_3}{R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon))^2}{2T}\right\},\ C_3=\frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Аналогичный результат можно получить для процесса $\eta'(u)=|\eta(u)|-M|\eta(u)|$. Не трудно убедиться в том, что процесс $\eta'(t)$, $t\ge 0$, является стационарным в узком смысле случайным процессом с нулевым средним, который удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания.

Лемма 2. Если для процесса $\eta'(t)$, $t\ge 0$, выполнены условия леммы 1,тогда если $\mu'(\varepsilon)$ и σ' определены аналогично $\mu(\varepsilon)$ и σ, верна следующая оценка:

$$P\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sigma}}\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(t)|-M|\eta(t)|)dt>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\mu'(\varepsilon)+ \tag{5}$$

$$+\frac{C_3}{R-\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R-\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon))^2}{2T}\right\},\ C_4=C_1e^{bC_2}.$$

3. Оценки близости для реализаций решений уравнения с быстрыми осцилляциями и уравнения Ито.

Вместе с задачей (1) рассмотрим задачу Коши с теми же начальными условиями, сформулированную для уравнения

$$\frac{\partial Y_\varepsilon(t,x)}{\partial t}=L_{t,x}Y_\varepsilon(t,x)+A(t,x,Y_\varepsilon(t,x))+B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon),\ Y_\varepsilon(0,x)=u_0(x), \tag{6}$$

здесь $U_0(t,x)$ – решение задачи

$$\frac{\partial U_0(t,x)}{\partial t} = L_{t,x}U_0(t,x) + A(t,x,U_0(t,x)),\ U_0(0,x) = u_0(x). \tag{7}$$

Решения задач (6) и (7) существуют и единственны в классе функций $H^{l+2,\, l/2+1}\left(\overline{D_{n+1}^{(T)}}\right)$ [1].

Пусть поле $\widetilde{Y}_\varepsilon(t,x)$ построено на одном вероятностном пространстве с $w(t)$ и является решением задачи

$$\frac{\partial \widetilde{Y}_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = L_{t,x}\widetilde{Y}_\varepsilon(t,x) + A\left(t,x,\widetilde{Y}_\varepsilon(t,x)\right) + B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon),\ \widetilde{Y}_\varepsilon(0,x) = u_0(x).$$

Относительно решений задач (6) и (7) справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Путь существуют и единственны решения задач (1), (6) и (7), а также

а) выполнено условие (2);

б) $\int_0^T \left(\int_{R_n} \left| L^*_{t,x} B(t,x,U_0(t,x)) \right|^2 dx \right)^{1/2} dt \le A_1$, $L^*_{t,x}$ – оператор, сопряженный к $L_{t,x}$,

$$\int_0^T \left(\int_{R_n} \left| \frac{\partial B(t,x,U_0(t,x))}{\partial t} \right|^2 dx \right)^{1/2} \le A_2,$$

$$\sup_{0\le t\le T} \left(\int_{R_n} \left| B(t,x,U_0(t,x)) \right|^2 dx \right)^{1/2} \le A_3;$$

в) выполнены условия леммы 1, тогда справедлива оценка:

$$P\left\{ \sup_{0\le t\le T} \int_{R_n} \left| \frac{Y_\varepsilon(t,x) - U_0(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}} \right| dx > R \right\} \le \left(1 + \frac{3}{\varepsilon}C_1\right) \exp\left\{ -\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}} \right\} + \mu(\varepsilon) +$$

$$+ \frac{C_3}{R/N_1 - \beta(\varepsilon) - \mu(\varepsilon)} \exp\left\{ -\frac{(R/N_1 - \beta(\varepsilon) - \mu(\varepsilon))^2}{2T} \right\}, \tag{8}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение, следующее случайное поле: $\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x) = \dfrac{Y_\varepsilon(t,x) - U_0(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)}{\partial t} = L_{t,x}\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A(t,x,Y_\varepsilon(t,x)) - A(t,x,U_0(t,x)) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} B(t,x,U_0(t,x))\eta(t/\varepsilon), \qquad \xi_\varepsilon^{(1)}(0,x) = 0. \tag{9}$$

Классическое решение задачи Коши (9) в силу сделанных предположений можно записать [1] формулой:

$$\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)\left(A(s,y,Y_\varepsilon(s,y)) - A(s,y,U_0(s,y)) \right) dy ds + \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y) B(s,y,U_0(s,y)) \eta(s/\varepsilon) dy ds,$$

здесь $z(t,x,s,y)$ – единственное фундаментальное решение задачи Коши [1] такое, о $z(t,x,s,y)$, $\int_{R_n} z(t,x,s,y)dy = 1$ и $z(t,x,s,y) \le C(t-s)^{-n/2} \exp\left\{-\mu \frac{|x-y|^2}{t-s}\right\}$. Из по- іеднего неравенства вытекает оценка $\int_{R_n} z(t,x,s,y)dx \le C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}$. Далее из (10) следует

$$\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)\right| \le L\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(s,y)\right|dyds + \tag{11}$$

$$+\left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)B(s,y,U_0(s,y))\eta(s/\varepsilon)dyds\right|.$$

Далее

$$\int_{R_n}\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(s,y)\right|dydsdx \le C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t \int_{R_n}\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(s,y)\right|dyds. \tag{12}$$

Пусть $\zeta_\varepsilon = \sup\limits_{0\le t\le T}|\zeta_\varepsilon(t)|$. Для второго слагаемого в правой части (11) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{R_n}\left|\int_0^t \int_{R_n} z(t,x,s,y)B(s,y,U_0(s,y))\eta(s/\varepsilon)dyds\right|dx \le \sqrt{\sigma}\zeta_\varepsilon\left[A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right] \tag{13}$$

Обозначим $\xi_\varepsilon^{(1)}(t) = \int_{R_n}\left|\xi_\varepsilon^{(1)}(t,x)\right|dx$, $\xi_\varepsilon^{(1)} = \sup\limits_{0\le t\le T}\xi_\varepsilon^{(1)}(t)$. Из (11) с учетом неравенств (12) и (13) получаем оценку

$$\xi_\varepsilon^{(1)}(t) \le LC\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t \xi_\varepsilon^{(1)}(s)ds + \sqrt{\sigma}\zeta_\varepsilon\left(A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right). \tag{14}$$

Из (14), применив лемму Гронуолла, получаем

$$\xi_\varepsilon^{(1)} \le \exp\left\{LCT\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}\left[\sqrt{\sigma}\zeta_\varepsilon\left(A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right)\right].$$

Учитывая результат леммы 1, из последнего следует оценка (8), где

$$N_1 = \sqrt{\sigma}\exp\left\{LCT\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}\left(A_3 + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right).$$

Лемма 4.При выполнении условий леммы 3 справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx > R\right\} \le \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\} +$$

$$+\frac{C_3}{R/N_2-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)}\exp\left\{-\frac{(R/N_2-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon))^2}{2T}\right\} + \mu(\varepsilon) + \mu'(\varepsilon) + \tag{15}$$

$$+\frac{C_3\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)-\mu'(\varepsilon)))^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\} + \left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}.$$

Доказательство. Пусть теперь $\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)=\dfrac{U_\varepsilon(t,x)-Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$, а $\xi_\varepsilon^{(2)}(t)$ и $\xi_\varepsilon^{(2)}$ определены как в лемме 1. Из (1) и (6) следует оценка

$$\left|\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)\right|\le L\int_0^t\int_{R_n}z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(2)}(t,x)\right|dyds+L\int_0^t|\eta(s/\varepsilon)|\int_{R_n}z(t,x,s,y)\left|\xi_\varepsilon^{(2)}(s,y)\right|dyds+ \tag{16}$$

$$+L\int_0^t|\eta(s/\varepsilon)|\int_{R_n}z(t,x,s,y)\left|\frac{Y_\varepsilon(s,y)-U_0(s,y)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dyds.$$

Проинтегрировав (16) по x и применив лемму Гронуолла, получаем

$$P\left\{\xi_\varepsilon^{(2)}>R\right\}\le P\left\{L\exp\left\{CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^T(|\eta(s/\varepsilon)|-M|\eta(s/\varepsilon)|)ds+\right.\right. \tag{17}$$

$$\left.+CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(T+Tb)\right\}\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{Y_\varepsilon(s,y)-U_0(s,y)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dy$$

$$\left.\left(\int_0^T(|\eta(s/\varepsilon)|-M|\eta(s/\varepsilon)|)ds+bT\right)>R\right\}.$$

Учитывая оценку (5) из неравенства (17) получим (15), где

$$N_2=N_1L(1+Tb)\exp\left\{CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(1+T+Tb)\right\}$$

Лемма доказана.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Ито

$$\partial_tV_\varepsilon(t,x)=L_{t,x}V_\varepsilon(t,x)dt+A(t,x,V_\varepsilon(t,x))dt+\sqrt{\varepsilon\sigma}B(t,x,U_0(t,x))dw(t), \tag{18}$$
$$V_\varepsilon(0,x)=u_0(x),$$

здесь $w(t)$ стандартный винеровский процесс. У задачи (18) существует и единственно "сильное" классическое решение (см. например[6] и [7]) из класса функций, для которых $\sup\limits_{(t,x)\in D_{n+1}^{(t)}}X^2(t,x)<\infty$ при выполнении условий: матрица $a_{ij}(t,x), i,j=\overline{1,n}$ симметрична и положительно определена, коэффициенты оператора $L_{t,x}$ ограничены и непрерывны по t ($a_{ij}(t,x), i,j=\overline{1,n}$ непрерывны по t равномерно относительно переменной x) имеют одну непрерывную ограниченную гельдерову по x производную; функции $A(t,x,u)$ и $B(t,x,u)$ удовлетворяют условию $F_{1,\alpha}$ [7].

Лемма 5. Пусть существуют и единственны решения задач (6) и (18). Тогда в условиях леммы 3 верна следующая оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde{Y}_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}+\frac{\mu(\varepsilon)}{N_1} \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим $\xi_\varepsilon^{(3)}(t,x)=\dfrac{\tilde{Y}_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Очевидно, что

$$\xi_\varepsilon^{(3)}\le\exp\left\{LCT\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}\left(A_3+C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right)\sqrt{\sigma}\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{\zeta}_\varepsilon(t)-w_\varepsilon(t)\right|.$$

С учетом оценки теоремы 1работы [4] получаем неравенство (19). *Лемма доказана.*

Используя результаты (15) и (19) можно оценить вероятность выхода за уровень нормированной разности реализаций решений задач (1) и (18), т.е. оценить близость траекторий полей $U_\varepsilon(t,x)$ и $V_\varepsilon(t,x)$ в метрике пространства L_1.

Теорема 1. Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (18) тогда выполнение условий леммы 3 влечет за собой справедливость оценки

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\times$$
$$\times\left(\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right)+\frac{N_1+1}{N_1}\mu(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon) \tag{20}$$
$$+\frac{C\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{\left(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))\right)^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\}+$$
$$+\frac{N_2C_3}{R-(N_2+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))}\exp\left\{-\frac{\left(R-(N_2+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))\right)^2}{2TN_2^2}\right\}.$$

Доказательство. Не трудно видеть, что

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde U_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde U_\varepsilon(t,x)-\tilde Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)\right\}+$$
$$+P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde Y_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}\le$$
$$\le P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-Y_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R-\beta(\varepsilon)-\mu(\varepsilon)\right\}+$$
$$+P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{\tilde Y_\varepsilon(t,x)-V_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)\right\}.$$

Отсюда и из неравенств (15) и (19) получаем оценку (20).*Теорема доказана.*

Рассмотрим наряду с задачей (1) задачу Коши с тем же начальным условием для уравнения Ито вида

$$\partial_t X_\varepsilon(t,x)=L_{t,x}X_\varepsilon(t,x)dt+A(t,x,U_0(t,x))dt+\sqrt{\varepsilon\sigma}B(t,x,U_0(t,x))dw(t) \tag{21}$$
$$X_\varepsilon(0,x)=u_0(x),$$

Проводя выкладки, повторяющие доказательства лемм 3-5 и теоремы 1, нетрудно убедиться в том, что верна соответствующая оценка скорости сходимости траекторий решений задач (1) и (21).

Теорема 2. Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (21), а также выполнены условия леммы 3, тогда справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}\int_{R_n}\left|\frac{U_\varepsilon(t,x)-X_\varepsilon(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right|dx>R\right\}\le\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_4\right)\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma'}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+$$
$$\mu'(\varepsilon)+\left(1+\frac{3}{\varepsilon}C_1\right)\times\times\left(\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}}\right\}+\exp\left\{-\frac{C_2\beta(\varepsilon)\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\varepsilon}N_1}\right\}\right)+\frac{N_3+1}{N_3}\mu(\varepsilon)+$$

$$\frac{N_4 C_3}{R-(N_4+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon))} \times \times \exp\left\{-\frac{(R-(N_4+1)(\beta(\varepsilon)+\mu(\varepsilon)))^2}{4TN_4^2}\right\}+$$

$$\frac{C_3\sqrt{\varepsilon\sigma'}}{\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon))} \exp\left\{-\frac{(1-\sqrt{\varepsilon\sigma'}(\beta(\varepsilon)+\mu'(\varepsilon)))^2}{2T\varepsilon\sigma'}\right\}, \text{ где}$$

$$N_3=\sqrt{\sigma}\left(A_3+CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(A_1+A_2)\right),$$

$$N_4=N_3\exp\left\{CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(1+T+Tb)\right\}CL\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(1+T+Tb).$$

РЕЗЮМЕ

Знайдені оцінки швидкості збіжності реалізації класичного розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з швидкими випадковими осциляціями до розв'язку рівняння Іто в рівномірній метриці за ймовірністю.

SUMMARY

For the rate of convergence of realization of classic solution of Cauchy problem for the parabolic equation with quick random oscillations to a solution of Ito equation in a uniform metric in probability, estimates are obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Порпер Ф.О., Эйдельман С.Д. Двухсторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения. – Успехи мат. наук. – 1984, т.39, № 2, – С.107-156.
2. Давыдов А.В. Принцип инвариантности для стационарных процессов. – Теория вероятностей и ее применения. – 1970. – 15, №3. – С.498-509.
3. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. – 216с.
4. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. Диффузионная аппроксимация нормированных интегралов со слабой зависимостью и ее применения. – Украинский математический журнал. – 1994, т.46, №11. – С.1448-1466.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. – 568 с.
6. Розовский Б.Л. О стохастических уравнениях в частных производных. – Математический сборник. – 1975, т.96(138), №2, – С.314-341.
7. Махно С.Я. Граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных. – Теория случайных процессов. – 1984, вып. 12. – С.48-56.

Надійшла до редакції 01.09.1998 р.