УДК 531.38

О НОВОМ КЛАССЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА БАРНЕТТА-ЛОНДОНА

А.В.Зыза

Введение. Актуальность построения решений в динамике твердого тела в квадратурах объясняется двумя причинами. Первая причина – возможность исследования свойств движения гиростата в построенных решениях; вторая причина – изучение интегрального многообразия уравнений движения в окрестности построенного решения.

Полиномиальные решения уравнений движения гиростата в различных силовых полях представляют особый интерес, поскольку их аналоги построены в классической задаче о движении тяжелого твердого тела известными учеными В.А.Стекловым, Н.Ковалевским, Д.Н.Горячевым (см. обзор [1]). Полиномиальные решения для уравнений Кирхгофа-Пуассона класса Стеклова-Ковалевского-Горячева подробно исследованы в [2], а класса Докшевича в работе [3].

Так как правые части уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона при определенных условиях аналогичны правым частям уравнений Кирхгофа, то оказалось возможным построение полиномиальных решений и уравнений движения гиростата в магнитном поле [4, 5]. При этом последние работы посвящены построению решений класса Стеклова-Ковалевского-Горячева. Следовательно, представляет большой интерес и исследование условий существования полиномиальных решений класса Докшевича [6] в рассматриваемой задаче.

Постановка задачи. Преобразование уравнений движения. Рассмотрим движение гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Эффект Барнетта-Лондона состоит в том, что первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости тела [7]. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться к направлению вектора напряженности магнитного поля. При этом взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [8].

Следуя работам [9, 10], запишем уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right)\times\boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Первые интегралы уравнений (1) таковы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} = k. \tag{2}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$\left[\frac{1}{2}\left(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\right) - \left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]^{\bullet} = \left(B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{3}$$

поэтому уравнения (1) не имеют интеграла энергии.

В уравнениях (1)–(3) приняты обозначения: A – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s}$ – вектор обобщенного центра масс; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; k – постоянная интеграла; точка над переменными обозначает относительную производную.

Поскольку для уравнений (1) в общем случае допустимы только два первых интеграла (2), то для этих дифференциальных уравнений неприменима теория последнего множителя Якоби [1].

Если же для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \alpha E$ (E – единичная матрица), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда уравнения (1) будут описывать задачу о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил.

Пусть в (1), (2) матрицы A, B, C имеют диагональную структуру, $\boldsymbol{\omega} = \left(p, q, r\right)$, $\boldsymbol{\nu} = \left(\nu_1, \nu_2, \nu_3\right)$, $\boldsymbol{s} = \left(s_1, s_2, 0\right)$, $\boldsymbol{\lambda} = \left(\lambda_1, \lambda_2, 0\right)$.

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1) решений вида [6]

$$
\begin{gathered}
q=Q(p)=\sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \quad r^2=R(p)=\sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \quad \nu_1=\varphi(p)=\sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \\
\nu_2=\psi(p)=\sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \nu_3=r\kappa(p), \quad \kappa(p)=\sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j,
\end{gathered} \tag{4}
$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – постоянные, подлежащие определению.

Известно, что в задаче о движении тяжелого гиростата (B, C – нулевые матрицы) указанным классом полиномов можно описать решение А.И.Докшевича [6].

Подставим выражения (4) в скалярные уравнения, вытекающие из (1) и геометрический интеграл из (2)

$$
\dot{p}=\left(\varphi'(p)\right)^{-1}\left(\psi(p)-Q(p)\kappa(p)\right)\sqrt{R(p)}; \tag{5}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\psi'(p)\left(\psi(p)-Q(p)\kappa(p)\right)=\varphi'(p)\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right), \\
&\left(R(p)\kappa^2(p)\right)'\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right)=2\psi'(p)\kappa(p)\left(Q(p)\varphi(p)-p\psi(p)\right);
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
A_1\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right)=\psi'(p)\left[Q(p)\left(\left(A_2-A_3\right)+B_2\kappa(p)\right)+\right. \\
\left.+\psi(p)\left(\left(C_3-C_2\right)\kappa(p)-B_3\right)+s_2\kappa(p)+\lambda_2\right];
\end{gathered} \tag{7}
$$

$$
\left.\begin{gathered}
A_2Q'(p)\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right)=\psi'(p)\left[\left(C_1-C_3\right)\kappa(p)\varphi(p)+B_3\varphi(p)-\right. \\
\left.-B_1p\kappa(p)-s_1\kappa(p)+\left(A_3-A_1\right)p-\lambda_1\right], \\
A_3R'(p)\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right)=2\psi'(p)\left[\left(C_2-C_1\right)\varphi(p)\psi(p)+B_1\psi(p)p-\right. \\
\left.-B_2Q(p)\varphi(p)+\left(A_1-A_2\right)pQ(p)+\lambda_1Q(p)-\lambda_2p+s_1\psi(p)-s_2\varphi(p)\right];
\end{gathered}\right\} \tag{8}
$$

$$
\varphi^2(p)+\psi^2(p)+\kappa^2(p)R(p)=1. \tag{9}
$$

Здесь $A_i, B_i, C_i \left(i=\overline{1,3}\right)$ – диагональные элементы матриц A, B, C; штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной p. Уравнение (5) устанавливает зависимость p от времени t.

Одно новое частное решение класса А.И.Докшевича. Рассмотрим случай $n=2$, $m=4$, $l=2$, $n_1=2$, $m_1=0$. Тогда полиномы из (4) примут вид

$$
\begin{gathered}
q=Q(p)=b_2p^2+b_1p+b_0, \quad r^2=R(p)=c_4p^4+c_3p^3+c_2p^2+c_1p+c_0, \\
\nu_1=\varphi(p)=a_2p^2+a_1p+a_0, \quad \nu_2=\psi(p)=g_2p^2+g_1p+g_0, \quad \kappa(p)=f_0.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Подставим полиномы из (10) в уравнение (7). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левых и правых частях уравнения, заключаем, что тождество по p может быть только при выполнении условия

$$
\left(\left(C_3-C_2\right)f_0-B_3\right)g_2+\left(B_2f_0+\left(A_2-A_3\right)\right)b_2=0. \tag{11}
$$

С учетом равенства (11) первое динамическое уравнение (7) упрощается

$$
\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right)=A_1^{-1}\psi'(p)\left(d_1p+d_0\right), \tag{12}
$$

где

$$
\begin{gathered}
d_1=\left(\left(C_3-C_2\right)f_0-B_3\right)g_1+\left(B_2f_0+\left(A_2-A_3\right)\right)b_1, \\
d_0=\left(\left(C_3-C_2\right)f_0-B_3\right)g_0+\left(B_2f_0+\left(A_2-A_3\right)\right)b_0+\lambda_2+s_2f_0.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Исключим из уравнений (6), (8) разность $\left(p\kappa(p)-\varphi(p)\right)$ с помощью (12). Подставим в полученные уравнения и уравнения (9), (12) значения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (10), и потребуем их выполнения при всех p. Получим систему условий на параметры задачи и решения

$$
2g_2d_1+A_1a_2=0, \quad \left(1-k\right)f_0A_1-\left(2g_2d_0+g_1d_1\right)=0, \text{ где } k=\frac{a_1}{f_0},
$$

$$
\begin{gathered}
g_1 d_0 + A_1 a_0 = 0, \quad g_2 - b_2 f_0 - 2a_2 d_1 A_1^{-1} = 0, \quad 2A_1^{-1} f_0 d_1 c_4 - b_2 a_2 = 0, \\
g_1 - b_1 f_0 - \left(2a_2 d_0 + k f_0 d_1\right) A_1^{-1} = 0, \quad g_0 - b_0 f_0 - k f_0 d_0 A_1^{-1} = 0, \\
f_0 A_1^{-1} \left(3c_3 d_1 + 4c_4 d_0\right) - 2\left(k b_2 f_0 + b_1 a_2 - g_2\right) = 0, \\
f_0 A_1^{-1} \left(2c_2 d_1 + 3c_3 d_0\right) - 2\left(b_2 a_0 + k b_1 f_0 + b_0 a_2 - g_1\right) = 0, \\
f_0 A_1^{-1} \left(c_1 d_1 + 2c_2 d_0\right) - 2\left(b_1 a_0 + k b_0 f_0 - g_0\right) = 0, \\
2A_2 A_1^{-1} b_2 d_1 - a_2 \left(\left(C_1 - C_3\right) f_0 + B_3\right) = 0, \quad f_0 A_1^{-1} c_1 d_0 - 2b_0 a_0 = 0, \qquad (14) \\
A_2 A_1^{-1} \left(2b_2 d_0 + b_1 d_1\right) - \left(\left(C_1 - C_3\right) k f_0^2 - B_1 f_0 + B_3 k f_0 + A_3 - A_1\right) = 0, \\
A_2 A_1^{-1} b_1 d_0 - \left(\left(C_1 - C_3\right) f_0 a_0 - s_1 f_0 + B_3 a_0 - \lambda_1\right) = 0, \\
2A_3 A_1^{-1} c_4 d_1 - \left(\left(C_2 - C_1\right) g_2 - B_2 b_2\right) a_2 = 0, \\
A_3 A_1^{-1} \left(4c_4 d_0 + 3c_3 d_1\right) - 2\Big[\left(\left(C_2 - C_1\right) g_1 - B_2 b_1\right) a_2 + \left(\left(C_2 - C_1\right) g_2 - B_2 b_2\right) k f_0 + \\
+ B_1 g_2 + \left(A_1 - A_2\right) b_2 = 0, \\
A_3 A_1^{-1} \left(3c_3 d_0 + 2c_2 d_1\right) - 2\Big[\left(C_2 - C_1\right)\left(g_2 a_0 + k f_0 g_1 + g_0 a_2\right) - \\
- B_2 \left(b_2 a_0 + k b_1 f_0 + b_0 a_2\right) - s_2 a_2 + B_1 g_1 + s_1 g_2 + \left(A_1 - A_2\right) b_1 + \lambda_1 b_2 \Big] = 0, \\
A_3 A_1^{-1} \left(2c_2 d_0 + c_1 d_1\right) - 2\Big[\left(C_2 - C_1\right)\left(g_1 a_0 + k f_0 g_0\right) - B_2 \left(b_1 a_0 + k b_0 f_0\right) - \\
- k f_0 s_2 + B_1 g_0 + s_1 g_1 + \left(A_1 - A_2\right) b_0 + \lambda_1 b_1 - \lambda_2 \Big] = 0, \\
A_3 A_1^{-1} c_1 d_0 - 2\Big[\left(C_2 - C_1\right) g_0 a_0 - B_2 b_0 a_0 - s_2 a_0 + s_1 g_0 + \lambda_1 b_0 \Big] = 0, \\
a_0^2 + g_0^2 + c_0 f_0^2 - 1 = 0.
\end{gathered}
$$

Система условий (11), (13), (14) разрешима относительно параметров A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, b_2, b_0, например для случая $d_0 = 0$. При этом имеем

$$
\begin{gathered}
A_2 = A_3, \quad k = 2\left(2A_3 - A_1\right) A_3^{-1}, \quad f_0 = A_1 A_3 \left(2\left(4A_3 - 3A_1\right) B_2\right)^{-1}, \\
\left(C_3 - C_2\right) = -\frac{2}{3} \frac{B_2 \left[24 A_3^2 \left(B_2 - B_3\right) + A_1 A_3 \left(30 B_3 - 38 B_2 - B_1\right) + 3A_1^2 \left(5B_2 - 3B_3\right)\right]}{\left(2A_3 - A_1\right) A_1 A_3}, \\
\left(C_2 - C_1\right) = \frac{2}{3} \frac{B_2 \left[-8 A_1 A_3^2 \left(B_1 + 53 B_2\right) + 5 A_1^2 A_3 \left(B_1 + 62 B_2\right) + 3B_2 \left(64 A_3^3 - 25 A_1^3\right)\right]}{A_1^2 A_3 \left(2A_3 - A_1\right)}, \\
d_1 = \sqrt{3} A_1 \gamma \left(6B_2 \left(2A_3 - A_1\right)\left(4A_3 - 3A_1\right)^{-1}\right), \\
c_4 = -3B_2 b_2^2 \left(2A_3 - A_1\right)\left(4A_3 - 3A_1\right) \gamma_1^{-1}, \\
c_3 = 4\sqrt{3} B_2 \left(2A_3 - A_1\right)^2 \left(4A_3 - 3A_1\right) b_2 \left[B_2 \left(4A_3 - 3A_1\right)\left(9A_3 - 8A_1\right) - A_1 A_3 B_1\right] \left(A_3 \gamma \gamma_2\right)^{-1}, \\
c_2 = -\left(2A_3 - A_1\right) \cdot \Big[3 b_2 b_0 A_1 A_3^2 B_2 \left(4A_3 - 3A_1\right)\left(2B_2 \left(4A_3 - 3A_1\right) + A_3 B_1\right) + \\
+ 2\Big[-B_2^2 \left(4A_3 - 3A_1\right)^2 \left(6A_3 - 5A_1\right)\left(27 A_3^2 - 40 A_1 A_3 + 14 A_1^2\right) + B_1^2 A_1^2 A_3^2 \left(A_1 - 2A_3\right) + \\
+ B_1 B_2 A_1 A_3 \left(A_1 A_3 \left(244 A_1 - 341 A_3\right) + 3\left(52 A_3^3 - 19 A_1^3\right)\right)\Big]\Big] \left\{A_1 A_3^2 \left(2B_2 \left(4A_3 - 3A_1\right) + A_3 B_1\right) \gamma_1\right\}^{-1},
\end{gathered}
$$

$$c_1 = 4\sqrt{3}B_2(2A_3 - A_1)(4A_3 - 3A_1)(3A_3 - 2A_1)b_0(A_3\gamma)^{-1},$$
$$c_0 = \left[(2B_2(4A_3 - 3A_1))^2 - (b_0A_1A_3)^2\right](A_1A_3)^{-2},$$
$$g_2 = 3A_1A_3(2A_3 - A_1)b_2(2\gamma_1)^{-1}, \quad g_1 = \sqrt{3}A_1(3A_3 - 2A_1)(A_1 - 2A_3)\gamma^{-1},$$
$$g_0 = A_1A_3b_0(2(4A_3 - 3A_1)B_2)^{-1},$$
$$b_1 = \sqrt{3}(A_1 - 2A_3)\left[6B_2(12A_3^2 + 7A_1^2) - A_1A_3(110B_2 + B_1)\right](3A_3\gamma)^{-1}, \tag{15}$$
$$a_2 = \sqrt{3}A_1A_3b_2\gamma(2B_2(3A_1 - 4A_3)\gamma_1)^{-1}, \quad a_0 = 0,$$
$$a_1 = (2A_3 - A_1)A_1B_2^{-1}(4A_3 - 3A_1)^{-1},$$
$$\lambda_1 = \sqrt{3}\left[A_1A_3^2(4A_3 - 3A_1)b_2b_0(2B_2(4A_3 - 3A_1) + A_3B_1) + 4(A_3 - A_1)(2A_3 - A_1)(3A_3 - 2A_1)\gamma_2\right]\cdot$$
$$\cdot(6(A_1 - A_3)A_3b_2\gamma)^{-1},$$
$$\lambda_2 = \left(A_1A_3^2b_2b_0\left[2B_2(4A_3 - 3A_1) + A_3B_1\right] + 4(A_3 - A_1)(2A_3 - A_1)\gamma_2\right)\cdot$$
$$\cdot(6A_3B_2b_2(A_1 - A_3)(4A_3 - 3A_1))^{-1},$$
$$s_1 = \sqrt{3}(4A_3 - 3A_1)B_2\left[A_1A_3^2(4A_3 - 3A_1)b_2b_0(2B_2(4A_3 - 3A_1) + A_3B_1) +\right.$$
$$\left.+4(A_3 - A_1)(2A_3 - A_1)(3A_3 - 2A_1)\gamma_2\right]\left(3(A_3 - A_1)A_1A_3^2b_2\gamma\right)^{-1},$$
$$s_2 = \left[A_1A_3^2b_2b_0(4A_1^2 - 11A_1A_3 + 8A_3^2)(2B_2(4A_3 - 3A_1) + A_3B_1) +\right.$$
$$\left.+4(A_3 - A_1)(2A_3 - A_1)^2(4A_3 - 3A_1)\gamma_2\right]\left(3A_1A_3^2(A_3 - A_1)(2A_3 - A_1)(4A_3 - 3A_1)b_2\right)^{-1}.$$

Здесь

$$\gamma = \sqrt{A_1B_2(2A_3 - A_1)(4A_3 - 3A_1)(2B_2(3A_1 - 4A_3) - A_3B_1)},$$
$$\gamma_1 = 2B_2A_3(12A_3 - 19A_1) + A_1(15A_1B_2 - A_3B_1),$$
$$\gamma_2 = B_2(4A_3 - 3A_1)(6A_3 - 5A_1) - B_1A_1A_3.$$

Одним из условий действительности решения (10), (15) является система неравенств

$$|2B_2(4A_3 - 3A_1)| > |b_0A_1A_3|, \quad A_1B_2(2A_3 - A_1)(4A_3 - 3A_1)(2B_2(3A_1 - 4A_3) - A_3B_1) > 0. \tag{16}$$

Пример действительности решения (10) уравнений (5)-(8) при условиях (15), (16) таков: $A_1 = a$, $A_3 = \frac{5}{4}a,\ B_1 = 9b,\ B_2 = -b,\ B_3 = 2b,\ b_2 = d,\ b_0 = \frac{b}{a}\quad (a > 0,\ b > 0,\ d \neq 0)$.

Тогда параметры рассматриваемой задачи и решение (4) имеют вид

$$(C_3 - C_2) = -\frac{548}{45}\frac{b^2}{a}, \quad (C_2 - C_1) = \frac{260}{9}\frac{b^2}{a}, \tag{17}$$
$$\lambda_1 = \frac{(273a - 145bd)\sqrt{29}}{174d}, \quad s_1 = \frac{8\sqrt{29}(273a - 145bd)b}{435ad},$$
$$\lambda_2 = \frac{145bd - 312a}{48d}, \quad s_2 = \frac{(1595bd - 3744a)b}{180ad};$$
$$q = dp^2 + \frac{113\sqrt{29}}{145}p + \frac{b}{a}, \tag{18}$$

$$r^2 = -\frac{36}{65}d^2p^4 - \frac{10224\sqrt{29}}{9425}dp^3 - \frac{72\left(2028a + 145bd\right)}{9425a}p^2 - \frac{168\sqrt{29}}{145}\frac{b}{a}p + \frac{231}{25}\frac{b^2}{a^2},$$

$$\nu_1 = -\frac{3\sqrt{29}}{104}\frac{ad}{b}p^2 - \frac{3}{4}\frac{a}{b}p,\quad \nu_2 = -\frac{9}{52}\frac{ad}{b}p^2 - \frac{21\sqrt{29}}{116}\frac{a}{b}p - \frac{5}{16},$$

$$\nu_3 = -\frac{5}{16}\frac{a}{b}r,\quad \dot{p} = -\frac{\sqrt{29}}{12}pr.$$

Решение (17), (18) выражается через ультроэллиптические функции времени и характеризуется тремя линейными инвариантными соотношениями

$$p = \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2,\quad q = \beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2,\quad r = \sigma_0\nu_3.$$

При сопоставлении структуры решений А.И.Докшевича [6] и решения (18) приходим к выводу: порядок полиномов для $q = q(p)$, $r^2 = r^2(p)$, $\nu_1 = \nu_1(p)$ – одинаков; порядок полиномов $\nu_2 = \nu_2(p)$, $\nu_3 = \nu_3(p)$ меньше на единицу порядка решения [6].

РЕЗЮМЕ

У роботі отримано новий клас поліноміальних розв’язків рівнянь руху гіростата у магнітному полі. Умови існування цього класу виражені у вигляді системи алгебраїчних рівнянь на параметри задачі і розв’язку. Показано, що новий розв’язок залежить від сьоми незалежних параметрів.

SUMMARY

The present paper is devoted to the conditions of the existence of one class of polynomial solutions of the task on the gyrostat movement in the magnetic field. One new special solution of the examining class has been discovered and it depends on seven independent parameters.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела/ П.В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
2. Горр Г.В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой / Г.В.Горр, А.В.Зыза // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. - №6. – С.12-21.
3. Зыза А.В. Об одном классе полиномиальных решений уравнений Кирхгофа / А.В.Зыза // Вісник Донецького університету. Сер.А: Природничі науки. – 2006. – Вып.1. – С.40-46.
4. Миронова Е.Н. О решении уравнений движения тела в магнитном поле на основе полиномиальных решений / Е.Н.Миронова // Прикл.механика. – 2001. – Т.37, вып.2. – С. 105-113.
5. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В.Зыза // Механика твердого тела. – 2003. – Вып.33. – С.61-70.
6. Докшевич А.И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку / А.И.Докшевич // Механика твердого тела. – 1970. – Вып.2. – С.12-15.
7. Киттель Ч.Введение в физику твердого тела/ Ч. Киттель. – М.: Физмат-гиз, 1963. – 696 с.
8. Урман Ю.Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе/ Ю.Н.Урман// Докл. АН СССР. – 1984. – Т.276, №6. – С.1402-1404.
9. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В.Козлов // Изв.РАН. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С.28-33.
10. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле / В.А.Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – №4. – С.32-34.

Поступила в редакцию 26.04.2010 г..