

УДК 534.3

## ГЕНЕРАЦІЯ ШУМУ ОБМЕЖЕНОЮ ОБЛАСТЮ ТУРБУЛЕНТНОЇ ТЕЧІЇ В ЖОРСТКОСТІННОМУ КАНАЛІ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

А.О.Борисюк,

Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ

**Вступ.** Дослідження течій в каналах різних геометрій і розмірів є актуальною задачею в автомобіле- та літакобудуванні, нафто-газовій промисловості, архітектурі, медицині тощо. Значний інтерес тут становлять турбулізація течій і генерація шуму в місцях локальних неоднорідностей каналів, таких як налипання на стінках, зварювальні шви, стенози тощо. Пояснюється він тим, що в цьому випадку акустичне поле містить дані про параметри конструкції і середовища у зоні виникнення шумів, а отже існує можливість розроблення *неінвазивних* методів знаходження таких місць за аналізом зазначеного поля [1-6].

Розроблення таких методів може вестись за наявності теорій, які, адекватно описуючи реологію, динаміку і акустику течій в околі неоднорідності каналу, встановлювали б кількісний зв'язок між характеристиками потоку і згенерованого шуму.

Як показує, однак, аналіз наукової літератури, досконалих теорій такого роду поки немає. Існують лише роботи (див., наприклад, [2-4,7-10] і відповідні посилання в них), в яких вивчаються або поля динамічних параметрів течій за звуженнями труб, або ж згенеровані наперед заданими джерелами акустичні поля у жорсткостінних каналах (див., наприклад, [11-13]). При цьому, при вивченні акустичних полів, джерела моделюються лише об'ємними квадрупольми. Вплив же стінки каналу, яка спричиняє появу поверхневих диполів [11,14], не враховується.

Дана робота присвячена дослідженню акустичних полів. Тут розробляється загальна теорія генерації шуму обмеженою областю турбулентної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу і встановлюється кількісний зв'язок між характеристиками акустичного поля та параметрами каналу і течії в ньому. При цьому область турбулентності моделюється розподіленими в ній квадрупольними і дипольними джерелами (характеристики яких вважаються відомими), і розглядаються випадки рівномірного та нерівномірного розподілу джерел.

Стаття складається зі вступу, трьох розділів, списку цитованої літератури і додатку. У розділі 2 формулюється задача і записуються відповідні рівняння та граничні умови. У розділі 3 дається розв'язок задачі і проводиться його аналіз, а також наводяться загальні зауваження щодо розробленої теорії. Далі формулюються висновки проведеного дослідження (розділ 4) і наводяться списки цитованої літератури та прийнятих позначень (додаток).

**Постановка задачі.** Розглядається нескінченний прямий жорсткостінний канал кругового поперечного перерізу радіусу  $a$  (рис. 1), в якому з осередненою осью швидкістю  $U$  тече рідина густини  $\rho$  і в'язкості  $\nu$ . Течія характеризується малим числом Маха  $M = U / c_0 \ll 1$  ( $c_0$  – швидкість звуку в незбуреній рідині). У скінченному регіоні  $V_0$  течія турбулентна, і цей регіон створює в каналі акустичне поле. Необхідно знайти це поле і встановити кількісний зв'язок між його характеристиками та параметрами каналу і потоку.

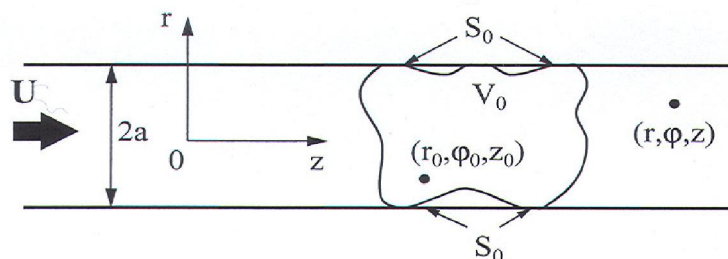


Рис. 1. Геометрія задачі

Згідно з теорією Лайтхіла [11] можна без втрати загальності вважати, що в'язкість рідини відіграє суттєву роль лише в області турбулентності, а згенерований шум поширюється в ідеальному стисливому середовищі. За цих умов шукане акустичне поле описується рівнянням Лайтхіла [11], в якому права частина містить як об'ємні квадрупольні  $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$ , так і зумовлені наявністю стінки поверхневі дипольні  $\partial F_i / \partial y_i$  джерела:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho_a = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_i}, \quad 0 < r < a, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad |z| < \infty. \quad (1)$$

Граничними умовами є відсутність радіальної швидкості на стінці каналу:

$$\left. \frac{\partial p_a}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2)$$

і умова випромінювання у нескінченність.

В (1) і (2) введено такі позначення:  $\rho_a$  і  $p_a$  – акустичні флуктуації густини й тиску, які зв'язані співвідношенням [12,13]:

$$p_a = c_0^2 \rho_a; \quad (3)$$

$T_{ij} \approx \rho u_i u_j$  та  $F_i = n_j (\tau_{ij} + p \delta_{ij})$  – напруження Лайтхіла та  $i$ -та компонента прикладених до стінки каналу сил ( $T_{ij}$  та  $F_i$  зникають відповідно за межами об'єму  $V_0$  і поверхні  $S_0$ , що його обмежує),  $u_i$  –  $i$ -та компонента швидкості рідини;  $n_j$  –  $j$ -та компонента зовнішньої нормалі до стінки каналу;  $\tau_{ij} = (2/3)\mu \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - 2\mu \varepsilon_{ij}$  – дотичні напруження;  $p$  – тиск;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\mu = \rho \nu$  – динамічна в'язкість рідини;  $\varepsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial y_j + \partial u_j / \partial y_i)$  – швидкості деформації. Крім цього, тут і надалі передбачається підсумовування по індексах, що повторюються.

У циліндричній системі координат, яка вводиться для розв'язування задачі, оператор Лапласа і права частина рівняння (1) мають такий вигляд [15,16]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} &= \frac{\partial^2 \rho u_r^2}{\partial r_0^2} + \frac{\partial^2 \rho u_z^2}{\partial z_0^2} + \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \rho u_\phi^2 + \left( \frac{\partial}{\partial r_0} \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) + \frac{2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left( \frac{\partial}{\partial r_0} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) \rho u_r u_\phi + 2 \frac{\partial^2 \rho u_r u_z}{\partial r_0 \partial z_0} + \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \phi_0 \partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \phi_0} \right) \right) \rho u_\phi u_z; \\ \frac{\partial F_i}{\partial y_i} &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} (r_0 F_r) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi_0} + \frac{\partial F_z}{\partial z_0}; \end{aligned}$$

де  $(y_1, y_2, y_3) = (r_0, \phi_0, z_0)$  – координати джерела (див. рис. 1).

**Акустичні густина і тиск.** Розв'язування задачі (1),(2) починається з того, що права частина рівняння (1) переписується формально у вигляді суми об'ємних джерел:

$$\frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a), \quad (4)$$

де  $\vec{r}_0 = (r_0, \phi_0, z_0) \in V_0$  – радіус-вектор об'ємного джерела в регіоні  $V_0$ ;  $t_0$  – пов'язаний з джерелом час;  $\vec{r}_{0a} = \vec{r}_0|_{r_0=a} = (a, \phi_0, z_0) \in S_0$  – радіус-вектор розташованого на поверхні  $S_0$  дипольного джерела;  $\delta(\dots)$  – дельта-функція Дірака.

Тоді, згідно з теоремою Гріна [14,15], акустичні флуктуації густини  $\rho_a$  в каналі визначаються сумою внесків джерел (4) в об'ємі  $V_0$  і флуктуацій густини  $\rho_a$  на поверхні  $S_0$ , яка цей об'єм оточує:

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a) \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0) + \\ &+ c_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint_{S_0} \left( G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0) \frac{\partial \rho_a(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial r_0} - \rho_a(\vec{r}_{0a}, t_0) \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial r_0} \right) dS_0(\vec{r}_{0a}), \quad (5) \end{aligned}$$

$$dV_0(\vec{r}_0) = r_0 dr_0 d\phi_0 dz_0, \quad dS_0(\vec{r}_{0a}) = a d\phi_0 dz_0.$$

Тут  $G$  – функція Гріна, яка задовольняє неоднорідне хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 G = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \quad (6)$$

граничну умову:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (7)$$

та умову випромінювання у нескінченність.

Внаслідок рівності нулеві нормальних похідних функцій  $\rho_a$  і  $G$  на стінці каналу (див. (2), (3), (7)), поверхневий інтеграл у співвідношенні (5) зникає, і воно набуває вигляду

$$\rho_a(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \left( \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F_i(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i} \delta(r_0 - a) \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0).$$

Переходячи в другому доданку (який визначає внесок поверхневих диполів) від об'ємного інтегралу до поверхневого, одержуємо загальний вираз для акустичних флуктуацій густини в каналі:

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 T_{ij}(\vec{r}_0, t_0)}{\partial y_i \partial y_j} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) dV_0(\vec{r}_0) + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \iint_{S_0} \frac{\partial F_i(\vec{r}_{0a}, t_0)}{\partial y_i} G(\vec{r}, t; \vec{r}_{0a}, t_0) dS_0(\vec{r}_{0a}). \end{aligned} \quad (8)$$

Тоді акустичний тиск знаходиться за формулою (3).

Співвідношення (3) і (8) встановлюють кількісний зв'язок між квадрупольями  $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$  і дипольями  $\partial F_i / \partial y_i$  та параметрами згенерованого ними акустичного поля в каналі. Крім цього, у (3) і (8) відображена також інформація про геометрію каналу і областей розподілу джерел  $\partial^2 T_{ij} / \partial y_i \partial y_j$  і  $\partial F_i / \partial y_i$ . Єдиним невідомим тут поки є функція Гріна  $G$ . Вона будується в наступному підрозділі.

**Функція Гріна.** Функція Гріна  $G$  будується через застосування до системи рівнянь (6), (7) часового перетворення Фур'є:

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) e^{i\omega(t-t_0)} d(t-t_0), \quad G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega$$

і подальше розкладання функції  $\tilde{G}$  в ряд по акустичних модах каналу  $\Psi_{nm}$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{nm} = & \left\{ \Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)} \right\}, \quad \Psi_{nm}^{(1)} = J_n(\alpha_{nm} r) \cos(n\phi), \quad \Psi_{nm}^{(2)} = J_n(\alpha_{nm} r) \sin(n\phi), \\ \tilde{G} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm} \Psi_{nm}(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm}^{(1)} \Psi_{nm}^{(1)}(r, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{G}_{nm}^{(2)} \Psi_{nm}^{(2)}(r, \phi). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут  $J_n$  – циліндричні функції Бесселя першого роду порядку  $n$ ;  $\alpha_{nm} = \zeta_{nm} / a$  – радіальні хвильові числа; а  $\zeta_{nm}$  – корені рівняння  $J_n'(\zeta_{nm}) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$

Підстановка ряду (9) в образи Фур'є рівняння (6):

$$\nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} = \frac{1}{2\pi c_0^2 r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0), \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0}$$

і граничної умови (7):

$$\left. \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0,$$

а також врахування ортогональності мод  $\Psi_{nm}$  :

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)} \Psi_{sq}^{(j)} r dr d\phi = \begin{cases} \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2, & (n, m) = (s, q), \\ 0, & (n, m) \neq (s, q), \end{cases} \quad \int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(1)} \Psi_{sq}^{(2)} r dr d\phi = 0, \quad j = 1, 2$$

і виконання умови випромінювання в нескінченність, дозволяє знайти невідомі коефіцієнти  $\tilde{G}_{nm}$ . Після цього співвідношення (9) набуває вигляду

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = -\frac{i}{4\pi c_0^2} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}}, \quad (10)$$

в якому квадрати норм мод  $\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2$  даються виразами

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a), & n = 0, \\ (\pi a^2 / 2) J_n^2(\alpha_{nm} a) [1 - (n^2 / \alpha_{nm}^2 a^2)], & n \geq 1, \end{cases} \quad \|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n \geq 1, \end{cases}$$

а  $k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \alpha_{nm}^2}$  є осьовими хвильовими числами.

Формула (10) є функцією Гріна рівняння Гельмгольца для нескінченного прямого жорсткостінного каналу кругового поперечного перерізу. Застосування до неї оберненого перетворення Фур'є дає шукану функцію Гріна хвильового рівняння:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = -\frac{i}{4\pi c_0^2} \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \phi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_{nm}|z-z_0|}}{k_{nm}} e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (11)$$

яка використовується у виразах (3) і (8) для акустичних флуктуацій тиску і густини.

У співвідношеннях (10) і (11) модуль різниці осьових координат  $|z - z_0|$  визначає випадки генерації шуму вниз і вгору за течією від одиничного джерела, розташованого у поперечному перерізі каналу  $z = z_0$ . Положення ж частоти  $\omega$  відносно критичних частот каналу  $\omega_{nm} = c_0 \alpha_{nm}$  визначає (через хвильові числа  $k_{nm}$  в експоненті  $\exp(ik_{nm}|z - z_0|)$ ) випадки однорідних:

$$\omega \geq \omega_{nm}, \quad e^{ik_{nm}|z-z_0|} = e^{i|k_{nm}||z-z_0|}$$

і неоднорідних

$$0 < \omega < \omega_{nm}, \quad e^{ik_{nm}|z-z_0|} = e^{-|k_{nm}||z-z_0|}$$

хвиль, а відтак межі інтегрування по частоті у формулах (3), (8) і (11).

Подальший аналіз співвідношень (10) і (11) показує, що функції  $\tilde{G}$  і  $G$  симетричні відносно площини  $z = z_0$  розташування одиничного джерела. Ця симетрія є наслідком дещо ідеалізованої постановки задачі, в якій ідеться про існування обмеженої області турбулентної течії, але нічого не сказано про причини її виникнення. В реальних ситуаціях така область може виникнути у разі наявності локального звуження каналу (зварювального шва, стенозу, тощо). Врахування такої неоднорідності при постановці відповідної початково-граничної задачі (через врахування відбиття шуму від неоднорідності та його проходження крізь неї в обидві сторони) спричинить значне ускладнення її розв'язку і виразів для відповідних функцій Гріна (при цьому буде втрачено їхню симетрію відносно площини  $z = z_0$ ). Проте побудова точних виразів функцій Гріна для такого роду задач – дуже складна проблема. Логічнішим же і реалістичнішим видається шлях прийняття фізично допустимих спрощувальних припущень, які б дозволили й надалі застосовувати вирази (10) і (11) для знаходження акустичного поля в окремих областях каналу (наприклад, далеко вниз або вгору за течією від його звуження).

**Акустична енергія.** Акустична енергія  $P$ , яка проходить крізь поперечний переріз каналу  $z = \text{const}$  на частоті  $\omega$ , визначається зі співвідношення [5,11]:

$$P(\omega)\delta(\omega - \omega') = \int_0^a \int_0^{2\pi} \langle \check{p}_a^*(r, \phi, z, \omega) \check{v}_{az}(r, \phi, z, \omega') \rangle r dr d\phi, \quad (12)$$

в якому дужки  $\langle \dots \rangle$  означають операцію осереднення за множиною реалізацій, зірочка вказує на комплексне спряження,  $\check{p}_a$  і  $\check{v}_{az}$  – образи Фур'є акустичного тиску (3) і осьової компоненти акустичної швидкості відповідно:

$$\check{p}_a(\vec{r}, \omega) = -\frac{i}{2} \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(q)}(r, \phi)}{\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2} \frac{1}{k_{nm}} \left[ \iiint_{V_0} \frac{\partial^2 \check{T}_{ij}(\vec{r}_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) e^{ik_{nm}|z-z_0|} dV_0(\vec{r}_0) + \right. \\ \left. + \iint_{S_0} \frac{\partial \check{F}_i(\vec{r}_{0a}, \omega)}{\partial y_i} \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) e^{ik_{nm}|z-z_0|} dS_0(\vec{r}_{0a}) \right], \quad \check{v}_{az} = \frac{1}{i\rho_0\omega} \frac{\partial \check{p}_a}{\partial z}, \quad (13)$$

$\partial^2 \check{T}_{ij} / \partial y_i \partial y_j$  і  $\partial \check{F}_i / \partial y_i$  – образи Фур'є квадрупольних і дипольних джерел, а  $\rho_0$  – густина незбуреної рідини.

Підстановка співвідношень (13) у формулу (12) дає загальний вираз для акустичної енергії, згенерованої нерівномірно розподіленими в об'ємі  $V_0$  квадрупольними і на поверхні  $S_0$  дипольними джерелами:

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm}(\omega) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \left[ \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k \partial y'_l} \times \right. \\ \times \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(r'_0, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)} dV_0(\vec{r}'_0) + \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y'_k} \times \\ \times \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) + 2 \text{Re} \left[ \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \times \right. \\ \left. \times \iint_{S_0} \frac{\partial^3 S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y'_k} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0)ik_{nm}(z'_0-z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}) \right] \right]. \quad (14)$$

Тут функція знаку  $\text{sign}(z - z_0)$  приймає позитивні значення, якщо оцінки енергії проводяться вниз за течією від розташованих у поперечному перерізі каналу  $z = z_0$  джерел, і негативні, якщо вгору за течією від них. Крім цього, у формулі (14) функції  $S_{ijkl}^T$  та  $S_{ik}^F$  є взаємними спектрами образів Фур'є відповідно напружень Лайтхіла  $T_{ij}$ :

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \check{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \check{T}_{kl}(\vec{r}'_0, \omega') \rangle,$$

та сил  $F_k$ :

$$S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \check{F}_i^*(\vec{r}_{0a}, \omega) \check{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle,$$

$\text{Re}(\dots)$  означає дійсну частину вказаної в дужках комплексної величини, а  $S_{ijk}^{TF}$  – взаємний спектр образів Фур'є напружень  $T_{ij}$  і сил  $F_k$ :

$$S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \check{T}_{ij}^*(\vec{r}_0, \omega) \check{F}_k(\vec{r}'_{0a}, \omega') \rangle.$$

Якщо джерела шуму розподілені *рівномірно* у займаних ними областях, формула (14) спрощується за рахунок спрощення виразів для спектрів  $S_{ijkl}^T$ ,  $S_{ik}^F$  і  $S_{ijk}^{TF}$ , які стають функціями лише відстані між джерелами і частоти [11]:

$$S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega) = S_{ijkl}^T(\vec{\xi}, \omega), \quad S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega) = S_{ik}^F(\vec{\xi}_{aa}, \omega), \quad S_{ijk}^{TF}(\vec{r}_0, \vec{r}'_{0a}, \omega) = S_{ijk}^{TF}(\vec{\xi}_a, \omega)$$

(тут  $\vec{\xi} = \vec{r}'_0 - \vec{r}_0$ ,  $\vec{\xi}_{aa} = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_{0a}$ ,  $\vec{\xi}_a = \vec{r}'_{0a} - \vec{r}_0$ ).

Аналіз співвідношення (14) показує, що енергія  $P$  не залежить від осової координати  $z$ , а отже не спадає зі збільшенням відстані від джерел (це природньо для жорсткостінного каналу, де немає втрат енергії). Крім того,  $P$  дорівнює сумі енергій  $P_{nm}$  акустичних мод каналу  $\Psi_{nm}$ . При цьому енергія окремої моди  $P_{nm}$  складається з трьох доданків. Перший з них являє собою акустичну енергію, згенеровану квадрупольми, другий – енергію, випромінєну дипольми, а третій доданок зумовлений взаємним внеском в акустичне поле квадруполів і диполів (тобто їх взаємодією).

Подальший аналіз формули (14) показує, що відносний внесок кожного доданку в енергію моди  $P_{nm}$  (а відтак і в акустичну енергію  $P$ ) різний у різних областях значень числа Маха  $M$ . Справді, якщо число  $M$  таке, що у згенерованому акустичному полі домінує внесок квадруполів, то у виразі для  $P_{nm}$  залишається лише перший доданок, і співвідношення (14) набуває такого вигляду:

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iiint_{V_0} dV_0(\vec{r}_0) \iiint_{V_0} \frac{\partial^4 S_{ijkl}^T(\vec{r}_0, \vec{r}'_0, \omega)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k \partial y_l} \Psi_{nm}^{(q)}(r_0, \phi_0) \times \\ \times \Psi_{nm}^{(q)}(r'_0, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dV_0(\vec{r}'_0). \quad (15)$$

Коли число Маха попадає в діапазон, де домінують диполі, то визначальним у виразі для  $P_{nm}$  є другий доданок, і замість співвідношення (15) маємо

$$P(\omega) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4 \|\Psi_{nm}^{(q)}\|^2 k_{nm} \rho_0 \omega} \iint_{S_0} dS_0(\vec{r}_{0a}) \iint_{S_0} \frac{\partial^2 S_{ik}^F(\vec{r}_{0a}, \vec{r}'_{0a}, \omega)}{\partial y_i \partial y_k} \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi_0) \times \\ \times \Psi_{nm}^{(q)}(a, \phi'_0) e^{-\text{sign}(z-z_0) i k_{nm} (z'_0 - z_0)} dS_0(\vec{r}'_{0a}). \quad (16)$$

Якщо ж внески диполів і квадруполів мають однаковий порядок, згенерована ними акустична енергія на частоті  $\omega$  визначається формулою (14).

**Загальні зауваження.** Співвідношення (3), (8), (14) разом із (10) та (11) являють собою загальний розв'язок задачі про генерацію шуму обмеженою областю турбулентної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. Вони встановлюють кількісний зв'язок між характеристиками згенерованого акустичного поля та параметрами каналу і потоку. При проведенні розрахунків за вказаними формулами дані для квадрупольних і дипольних джерел шуму та/або їхніх статистичних характеристик слід брати з наукової літератури чи експерименту, або ж із розв'язку відповідної задачі динаміки рідини.

**Висновки.** У даній роботі розроблено теорію генерації шуму обмеженою областю турбулентної течії в нескінченному прямому жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу. В цій теорії, на відміну від подібного роду теорій,

- турбулентна течія моделюється не лише розподіленими в ній квадрупольними, але й зумовленими наявністю стінки каналу поверхневими дипольними джерелами шуму,
- розглядаються випадки рівномірного і нерівномірного розподілу джерел.

Одержані при цьому результати та їх аналіз дозволяють зробити такі висновки.

1. Для розглянутого каналу методом нормальних мод побудовано функції Гріна рівняння Гельмгольца і хвильового рівняння (формули (10) і (11) відповідно).
2. Методом функцій Гріна одержано загальний розв'язок задачі (формули (3), (8) і (14)), який встановлює кількісний зв'язок між характеристиками акустичного поля (відповідно акустичні тиск, густина і енергія) та параметрами каналу і нерівномірно-/рівномірно- розподілених джерел шуму.

3. Встановлено, що енергія акустичного поля не спадає зі збільшенням відстані від джерел.
4. Показано, що акустична енергія дорівнює сумі енергій акустичних мод каналу (формула (14)). При цьому енергія окремої моди складається із трьох доданків. Перший являє собою енергію, згенеровану квадруполями, другий – енергію, випромінєну диполями, а третій зумовлений взаємодією квадруполів і диполів.
5. Для різних значень числа Маха проведено аналіз порядку цих доданків і одержано відповідні спрощені вирази для акустичної енергії (формули (15) і (16)).

## РЕЗЮМЕ

Разработана общая теория генерации шума ограниченной областью турбулентного течения в бесконечном прямом жесткостенном канале кругового поперечного сечения и установлена количественная связь между характеристиками генерируемого поля шума и параметрами канала и течения. Область турбулентности моделируется распределенными в ней квадрупольными и дипольными источниками (характеристики которых считаются известными), и рассматриваются случаи равномерного и неравномерного распределения источников. Установлено, что генерируемая акустическая энергия не убывает с возрастанием расстояния от источников и равна сумме энергий акустических мод канала. Энергия же отдельной моды состоит из трех слагаемых. Первое представляет собой энергию, генерируемую квадруполями, второе – энергию, излучаемую диполями, а третье обусловлено взаимодействием квадруполей и диполей. Для разных значений числа Маха течения проведен анализ порядка этих слагаемых и получены соответствующие упрощенные выражения для акустической энергии.

## SUMMARY

A general theory of noise generation by a limited region of turbulent flow in an infinite straight rigid channel of circular cross-section is developed, and the quantitative relationships between the characteristics of the noise field generated and the parameters of channel and flow are established. A turbulent flow is modelled by the distributed quadrupole and dipole sources (whose characteristics are assumed to be known), and the cases of uniform and non-uniform source distribution are considered. It is shown that the generated acoustic energy does not decrease as the distance from the sources increases, and is a sum of energies of the acoustic modes of channel. The acoustic mode energy consists of the three parts. The first part is the energy generated by the quadrupoles, the second one results from the dipoles, and the third one is due to interaction of the quadrupoles and dipoles. An order of magnitude analysis of these parts is carried out for different values of the flow Mach number, and the corresponding simplified expressions for the acoustic power are obtained.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Lees R.S. Jr. Phonoangiography: a new noninvasive diagnostic method for studying arterial disease / R.S. Lees, C.F. Dewey // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1970. – 67. – P.935-942.
2. Fluid mechanics of arterial stenosis / D.F. Young // J. Biomech. Eng. – 1979. – 101. – P.157-175.
3. Миролюбов С.Г. Гидродинамика стеноза / С.Г. Миролюбов // Современ. пробл. биомех. – 1983. – 1. – С.73-136.
4. Berger S.A. Flows in stenotic vessels / S.A. Berger, L.-D. Jou // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2000. – 32. – P.347-382
5. Borisyuk A.O. Noise field in the human chest due to turbulent flow in a larger blood vessel / A.O. Borisyuk // Flow, Turbulence and Combustion. – 1999. – 61. – P.269-284.
6. Borisyuk A.O. Experimental study of noise produced by steady flow through a simulated vascular stenosis / A.O. Borisyuk // J. Sound Vibr. – 2002. – 256. – P.475-498.
7. Clark C. The fluid mechanics of aortic stenosis. 1. Theory and steady flow experiments / C. Clark // J. Biomech. – 1976. – 9. – P.521-528.
8. Abdallah S.A., Hwang N.H.C. Arterial stenosis murmurs: an analysis of flow and pressure fields / S.A. Abdallah, N.H.C. Hwang // J. Acoust. Soc. Amer. – 1988. – 83. – P.318-334.
9. Borisyuk A.O. Experimental study of wall pressure fluctuations in a pipe behind a stenosis / A.O. Borisyuk // Int. J. Fluid Mech. Res. – 2003. – 30(3). – P.264-278.
10. Borisyuk A.O. Experimental study of wall pressure fluctuations in a pipe behind a cylindrical insertion with eccentricity / A.O. Borisyuk // Int. J. Fluid Mech. Res. – 2004. – 31(2). – P.160-175.
11. Blake W.K. Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration / W.K. Blake. – New York: Acad. Press Inc., 1986. – Vol.1, 2. – 974 p.
12. Davies H.G., Aerodynamic sound generation in a pipe / H.G. Davies, J.E. Ffowcs Williams // J. Fluid Mech. – 1968. – 32. – P.765-778.
13. Hardin J.C. Sound generation by a stenosis in a pipe / J.C. Hardin, D.S. Pope // AIAA Journal. – 1992. – 30. – P.312-317.
14. Голдстейн М.Е. Аэроакустика / М.Е. Голдстейн. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.
15. Morse P.M. Methods of Theoretical Physics / P.M. Morse, H. Feshbach. – New York: McGraw-Hill, 1953. – Vol.1. – 997 p.
16. Ffowcs Williams J.E. Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane / J.E. Ffowcs Williams, L.H. Hall // J. Fluid Mech. – 1970. – 40. – P.657-670.

Надійшла до редакції 30.04.2010 р.