

УДК 539.19

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА В СЛОИСТО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Н.И.Болонов, В.Г.Лобачев, Н.А.Пригода

Введение. Стратифицированные, т.е. разделенные по плотности, течения жидкости широко встречаются в природе и технике. Это смешивающиеся потоки разноплотностной жидкости в химическом реакторе, движение потоков воздуха в вентиляционных системах и т.д. В глобальных масштабах стратификация существенна при рассмотрении состояния атмосферы и океана.

Известные данные о стратификации океана и атмосферы [1, 2] показали, что они представляют существенно неоднородную среду, расслоенную на тонкие слои толщиной от десятка сантиметров до десятка метров. Горизонтальные размеры неоднородностей простираются на сотни метров и километры. Имея в виду слоистость строения атмосферы и океана и необходимость изучения некоторых течений, развивающихся в них, представляется целесообразным рассмотреть особенности построения моделей этих течений.

При устойчивой стратификации, когда турбулентное перемешивание вследствие больших затрат энергии на работу против архимедовых сил столь затруднено и в естественных условиях оно не может сколь-нибудь долго охватывать всю жидкость и концентрируется лишь в отдельных турбулентных слоях, разделяемых очень тонкими прослойками с микроскачками гидрофизических характеристик, мы приняли слоистую схему построения стратифицированного течения.

В дальнейшем рассмотрим течения в следе за цилиндром, в следе за диском и дискоструйной моделью. Течение в следе является течением со свободными границами, поэтому основной характеристикой его является «импульс», определяемый, например, для осесимметричного следа следующим интегральным соотношением;

$$2\pi \int_0^{\infty} \left[U(u_0 - U) + \overline{u^2} - \overline{v^2} \right] r dr = I, \tag{1}$$

где I – полная сила сопротивления (или импульс), действующая на тело.

В указанных выше течениях турбулентное поле скорости эволюционирует вниз по потоку от состояния сильно инерционной турбулентности, свойственной области вдали от источника. Инерционность турбулентности определяется турбулентным числом Рейнольдса $Re_{\lambda} = \frac{\sigma_u l_u}{\nu}$. Область сильно инерционной турбулентности характеризуется большими числами Re_{λ} , а область слабо инерционной турбулентности – малыми Re_{λ} .

В качестве масштаба длины здесь принимается величина $l_u(x)$, пропорциональная интегральному масштабу турбулентности, который при сильной турбулентности переходит в $L_u(x)$ – величину, пропорциональную масштабу энергосодержащих вихрей, а при слабой турбулентности – в $\lambda_u(x)$ – величину, пропорциональную масштабу диссипации. Существующие теоретические методы описания свободной турбулентности основаны, во-первых, на некоторых гипотезах об автомодельности соответствующих течений и, во-вторых, на исследовании полуэмпирических теорий турбулентности. Предположение об автомодельности поля скорости рассматриваемого течения позволяет представить характеристики турбулентности в форме

$$\begin{aligned} U &= u_0 + v_0(x)f(\zeta_u); \\ \overline{q^2} &= e_0^2(x)g(\zeta); \\ \overline{u^2} &= e_o^2(x)g_1(\zeta); \\ \overline{v^2} &= e_o^2(x)g_2(\zeta); \\ l_u &= b_u(x)h(\zeta); \\ \zeta_u &= r/b_u, \end{aligned} \tag{2}$$

где $v_0(x)$ и $b_u(x)$ – характерные масштабы скорости и длины, e_0 – масштаб скорости пульсационного движения.

Из интегрального условия (1) могут быть получены соотношения между масштабными параметрами

$v_0(x)$ и $b_u(x)$. Для течений с отличным от нуля избыточным импульсом $I \neq 0$, к которым относятся спутные течения в следе за цилиндром и диском при условии $v_0/u_0 \ll 1$, реализующемся в дальних сечениях потока, вкладом нормальных напряжений Рейнольдса в интеграл (1) можно пренебречь. Для этих течений масштабные параметры связаны соотношениями: $v_0 b_u = const$, (в следе за цилиндром); $v_0 b_u \sim x^{-1/3}$ (в следе за диском).

В плоском следе за цилиндром турбулентное число Рейнольдса (инерционность турбулентности) неизменно вниз по потоку, $Re_\lambda \sim \sigma_u \lambda_u = const$, а для следа за диском этот параметр – убывающая функция продольной координаты $Re_\lambda \sim x^{-1/6}$ [3].

Особо следует выделить класс течений с нулевым значением избыточного импульса. Условие $I=0$ означает уравновешенность силы сопротивления жидкости движению тела и силы тяги. На достаточно большом расстоянии от тела поле скорости в безимпульсном следе автомодельно в локальном смысле [3] (т.е. в области незначительного изменения турбулентного числа Рейнольдса). Тогда, пренебрегая вкладом $u^2 - v^2$ из (1) можно получить соотношение $v_0 b_u^2 \approx 0$, которое не внесет необходимой информации об эволюции масштабов $v_0(x)$ и $b_u(x)$.

В безимпульсном следе [3] дефект осредненной скорости убывает в 2 раза быстрее, чем пульсации скорости (в следе обтекаемого тела «законы» убывания этих характеристик одинаковы). На некотором расстоянии от тела генерация турбулентности за счет осредненного сдвига будет пренебрежимо мала, при этом вырождение неоднородного поля собственно турбулентности происходит без влияния на него поля осредненной скорости. Это свойство является принципиальным, отличающим турбулентный безимпульсный след от свободных течений типа струи или следа за препятствием.

В [3] показано, что инерционность турбулентности в безимпульсном следе является убывающей функцией продольной координаты независимо от его геометрии. В начальной стадии развитого безимпульсного следа значения Re_λ достаточно велики, поэтому рассматриваемый участок следа можно считать находящимся в условиях сильной турбулентности. При этом выполняется гипотеза автомодельности поля скорости, и законы изменения основных характеристик имеют вид, подобный виду степенных законов для обтекаемого тела, но с другим показателем степени.

В реальных условиях значения турбулентного числа Рейнольдса конечны, при этом гипотеза абсолютной автомодельности в безимпульсном следе является выполнимой. Однако, принимая во внимание характер изменения Re_λ вниз по потоку, эту гипотезу можно рассматривать выполнимой в конечном диапазоне изменения продольной координаты.

По мере роста продольной координаты турбулентное число Рейнольдса уменьшается. На некотором расстоянии от тела инерционность турбулентности ослабевает настолько, что гипотеза автомодельности перестает быть справедливой. При этом поле скорости в следе должно стать существенно неавтомодельным. При дальнейшем увеличении продольной координаты эта промежуточная область должна асимптотически перейти в дальнюю область, для которой характерны малые значения Re_λ .

В асимптотической области слабой турбулентности выполняется гипотеза автомодельности поля скорости и показатели степени в законах изменения основных характеристик могут рассматриваться как константы.

Существенное влияние на развитие указанных течений оказывает стратификация движущейся жидкости. Поэтому рассмотренные выше этапы эволюции безимпульсного следа будут иметь место только в тех областях, где стратификация является пассивной. Таковой, например, является начальная область развития следа, где силы инерции существенно превосходят силы плавучести.

В принятой модели течения стратификация создается за счет разности температур различных слоев жидкости. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть эволюцию поля температуры в турбулентном следе.

Динамика поля температуры в турбулентном следе самодвижущегося тела может существенно отличаться от эволюции поля скорости. Действительно, при движении тела в стратифицированной среде градиент температуры имеет место во всей области течения. В начальных сечениях на оси следа градиент мал из-за сильного перемешивания жидкости, а на границах течения большой. С развитием течения градиент температуры на оси восстанавливается. Таким образом, пульсации температуры могут (при $w^2 \neq 0$) постоянно генерироваться за счет градиента осредненной температуры. Поэтому следует ожидать, что в следе самодвижущегося тела поле пульсаций температуры будет вырождаться медленнее, чем поле скорости.

По аналогии с инерционностью турбулентности скоростного поля, характеризуемой турбулентным

числом Рейнольдса, можно ввести понятие инерционности турбулентности температурного поля, которая будет характеризоваться турбулентным числом Пекле $Pe_\lambda = \sigma_u l_T / a$.

Продолжая указанную аналогию, можно выделить область сильно инерционной турбулентности температурного поля, характеризующуюся большими значениями Pe_λ , и область слабой инерционности турбулентности температурного поля, характеризующуюся малыми значениями Pe_λ . В качестве масштаба длины «вихрей» здесь принимается величина $l_T(x)$, пропорциональная характерным масштабам: при сильной турбулентности $l_T(x)$ переходит в $L_{uT}(x)$ – величину, пропорциональную масштабу энергосодержащих температурных вихрей, а при слабой турбулентности – в $\lambda_T(x)$ – величину, пропорциональную масштабу диссипации температурных пульсаций.

В [3,4] показано, что поле температуры в течении с изменяющейся в занятой им пространстве инерционностью турбулентности абсолютно автомодельным быть не может. Автомодельность поля температуры можно рассматривать лишь в локальном смысле, т.е. в области, где инерционность турбулентности меняется незначительно.

Предположение об автомодельности (абсолютной или локальной) температурного поля позволяет представить характеристики турбулентности в форме:

$$\begin{aligned} \Theta &= T_0(x) \Phi(\zeta_T), \\ \overline{T'^2} &= S_0^2(x) \mathcal{G}(\zeta_T), \\ \overline{u_i T'} &= e_0(x) S_0(x) f(\zeta_T), \end{aligned} \quad (3)$$

где $T_0(x)$ – характерный безразмерный масштаб осредненной температуры; b_T – характерный масштаб длины температурного поля; S_0^2 – характерный масштаб пульсаций температуры; $\Phi(\zeta_T), \mathcal{G}(\zeta_T), f(\zeta_T)$ – безразмерные функции распределения односторонних моментов; $\zeta_T = r/b_T$ – автомодельная координата.

Если стратификация пассивная, т.е. влиянием сил плавучести можно пренебречь, имеет место две области автомодельного течения. В начальной области течения имеет место область сильной турбулентности $Re_\lambda \gg 1, Pe_\lambda \gg 1$, где автомодельность скалярного поля может быть абсолютной, т.е. выражаемой степенными законами с постоянными показателями.

По мере уменьшения вниз по потоку параметров Re_λ, Pe_λ температурное поле в следе, как и поле скорости, становится существенно неавтомодельным. На очень больших расстояниях от тела значения Re_λ, Pe_λ уменьшаются настолько, что турбулентность определяется молекулярными эффектами, при этом течение снова будет абсолютно автомодельным, а коэффициенты в степенных зависимостях будут постоянными, однако отличными от соответствующих показателей степени, свойственных сильной турбулентности.

Таким образом, рассматривая эволюции полей скорости и температуры в безымпulsive следе при пассивной стратификации среды, можно выделить две области, где течение можно считать абсолютно автомодельным. К ним относятся области в непосредственной близости за телом, где определяющими в течении будут молекулярные силы, а силами инерции можно пренебречь.

Ранее отмечалось существенное влияние стратификации среды на динамику поля скорости в безымпulsive следе. Естественно предположить, что стратификация будет оказывать существенное влияние на температурное поле. Причем это влияние будет оказываться как через поле скорости, так и благодаря внутренней перестройке поля температуры (имеется в виду изменение профиля осредненной температуры в следе).

Следует отметить, что весьма интересной с точки зрения анализа физических явлений является именно промежуточная область следа. В этой области можно выделить две принципиально отличающиеся стадии развития следа: переходную и основную. Переходная стадия характеризуется существенной неавтомодельностью. На переходной стадии выравниваются силы инерции и плавучести, происходит перестройка внутренней структуры течения. Основная стадия, являющаяся естественным продолжением переходной, характеризуется турбулентными числами Рейнольдса и Пекле, значения которых, по видимому, достаточны для существования универсальных характеристик следа. Конечная стадия развития следа при наличии стратификации существенно отлична от течения в однородной жидкости. Под действием сил плавучести турбулентные движения в следе подавляются и переходят в волновые [5].

Моделирование развития турбулентного следа. Для построения физической модели, удовлетворительно описывающей явления, происходящие в различных условиях, необходимо соблюдение критери-

ев подобия. Эти критерии могут быть получены из соответствующих уравнений тепла и импульса или с применением соответствующих теорем теории подобия.

Уравнения, описывающие стратифицированные течения, отличаются от таковых для течений однородной жидкости тем, что в них учитывается изменение плотности по вертикали. Часто для описания стратифицированных течений, в которых изменение плотности жидкости ρ' мало по сравнению со средней плотностью ρ_0 , используются уравнения движения и неразрывности в приближении Буссинеска (приближении свободной конвекции)[6]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + g_i \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

Рассматривая функции, входящие в уравнения переноса (4, 5) как случайные функции пространства и времени, их можно представить в форме суммы вероятностных средних значений и флуктуаций:

$$u_i = U_i + u'_i, P = \bar{P} + p', \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (6)$$

Подставив переменные в форме (6) в уравнения (4-5) и проведя осреднение, получим дифференциальные уравнения для вероятностных средних значений U_i и $\overline{u'_i u'_j}$:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + g_i \frac{\bar{\rho} - \rho_0}{\rho} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (8)$$

Уравнения для напряжений Рейнольдса могут быть получены известным путем [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} + \\ & + \frac{1}{\rho_0} \left(\overline{u'_i \frac{\partial P'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial P'}{\partial x_i}} \right) + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k^2} + \frac{g_i}{\rho_0} \overline{u'_j \rho'} + \frac{g_j}{\rho_0} \overline{u'_i \rho'} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Если характерные масштабы обозначить в виде: H – длина, U – скорость, ρ_0 – плотность, T_0 – температура, H/U – время, $\rho_0 gH$ – давление (g – ускорение силы тяжести), тогда из этих уравнений могут быть получены следующие критерии подобия:

$$Re = \frac{UH}{\nu} - \text{число Рейнольдса} \quad (10)$$

$$Fr = \frac{U}{\left(\frac{gH\Delta\rho}{\rho} \right)^{1/2}} - \text{число Фруда} \quad (11)$$

Часто вместо числа Фруда используют величину:

$$\bar{Ri} = \frac{1}{Fr^2} = \frac{g \Delta\rho H}{\rho U^2}, \quad (12)$$

которая называется глобальным числом Ричардсона потока[5].

Из уравнения (9) можно получить уравнение для интенсивности турбулентности $q^2 = \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k}$, которое для плоского течения, где все характеристики зависят только от вертикальной координаты, будет иметь вид

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} + \overline{u'_i w'} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_i u'_i w'}}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \overline{w' \frac{\partial p'}{\partial z}} + 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_i}}{\partial z} - \nu \frac{\partial^2 q^2}{\partial z^2} - g \overline{w' \rho'} = 0 \quad (13)$$

Из уравнения (13) можно получить еще один критерий подобия, называемый динамическим числом Ричардсона

$$R_f = \frac{g}{\rho} \frac{\overline{\rho' w'}}{\overline{u' w'} \frac{\partial U}{\partial z}}. \quad (14)$$

Имея в виду, что стратификация среды обусловлена только перепадом температур, изменение плотности в узком интервале температур определяется выражением

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0)], \quad (15)$$

где ρ_0 – плотность при T_0 , β_T – коэффициент теплового расширения. В этом случае систему уравнений (7-9) необходимо дополнить уравнениями для температуры и вторых моментов, содержащих пульсации температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_k \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k T'} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i T'} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i T'} + \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \overline{u'_k T'} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_k T'} + \\ & + \frac{1}{\rho_0} \overline{T' \frac{\partial P'}{\partial x_i}} - a u_i \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k^2} - \nu T' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2} - g_i \beta_T \overline{T'^2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{T'^2} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{T'^2} + 2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k T'^2} + 2a \left(\frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)^2 + a \frac{\partial^2 T'^2}{\partial x_k^2} = 0 \quad (18)$$

Физические свойства движущейся жидкости определяются числом Прандтля:

$$\text{Pr} = \nu / a. \quad (19)$$

Соотношение сил плавучести и инерции в локальной области стратифицированного потока характеризуется градиентным (локальным) числом Ричардсона Ri , которое записывается через вертикальные градиенты плотности $\partial \rho / \partial z$ и скорости $\partial U / \partial z$ в виде:

$$Ri = \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho / \partial z}{(\partial U / \partial z)^2} = \frac{N^2}{(\partial U / \partial z)^2}, \quad (20)$$

где $N = \left(\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{1/2}$ – частота Брента-Вяйсяля или частота плавучести (частота собственных внутренних колебаний в стратифицированной жидкости). Период Брента-Вяйсяля записывается в форме

$$T_n = \frac{2\pi}{\left(\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{1/2}} \quad (21)$$

Рассмотрим критерии подобия течения, развивающегося в слоисто-стратифицированной среде (рис. 1), являющейся простейшей моделью тонкой структуры стратификации. Жидкость имеет n^* – слоев одинаковой толщины H . Каждый слой состоит из зоны с линейным градиентом плотности толщиной δ и однородного слоя толщиной $H - \delta$. Пусть разность плотностей между слоями одинакова и равна $\Delta \rho$. В этом случае имеем линейный средний градиент плотности (слоистую модель линейной стратификации). Изменяя $\Delta \rho(z)$, можно создать слоистую модель стратификации с экспоненциальным или другим распределением плотности. При $\delta/H = 1$ стратификация непрерывная, при $\delta/H < 1$ – слоистая.

Рассмотрим стационарное обтекание потоком со скоростью u_0 и описанной выше стратификацией тела D , расположенного на расстоянии $0 < z_0 \leq \frac{H}{2}$ от центра ближайшей прослойки (рис. 1). Тогда течение будет определяться следующими девятью параметрами:

$$u_0, D, \mu, \rho, g, H, \delta, \Delta \rho, z_0, \quad (22)$$

где μ – динамическая вязкость.

Согласно π - теореме размерностей [8], из этих параметров можно составить шесть независимых критериев подобия и параметров рассматриваемого течения:

$$Re = \frac{u_0 D \rho}{\mu} \text{ – число Рейнольдса;} \quad (23)$$

$$Fr = \frac{u_0^2 \lambda_n}{g D^2} = \frac{u_0^2 \rho H}{g D^2 \Delta \rho} \text{ – число Фруда (глобальное);} \quad (24)$$

$$C = \frac{\lambda_n}{D} = \frac{\rho H}{\Delta \rho D}; B = \frac{H}{D}; \Delta = \frac{\delta}{H}; \Pi = \frac{2z_0}{H}. \quad (25-28)$$

Для температурно-стратифицированного течения к этим критериям необходимо добавить число Прандтля (16).

Масштаб стратификации λ_n построен аналогично работе [9], но по среднему градиенту плотности $\Delta\rho/H$:

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{H} \right)^{-1} = \frac{\overline{T_n}^2 g}{(2\pi)^2}, \quad (29)$$

где $\overline{T_n} = 2\pi / \sqrt{\Delta\rho g / \rho H}$ – средний период Брента-Вяйсяля слоисто-стратифицированной жидкости.

Рассмотрим предельные случаи, когда некоторые из критериев системы вырождаются.

1. $\Delta = 1 (\delta = H)$ – непрерывно-стратифицированная жидкость с линейным распределением плотности. Тогда (26) и (28) выпадают из рассмотрения. Определяющими критериями являются Re, Fr, C . Учитывая, что $\Delta\rho/H = \partial\rho/\partial z$, их можно записать через градиент плотности в таком же виде, как и в работе [9].

2. При $B \ll 1 (H \ll D)$ отношение $\Pi = \frac{2z_0}{H}$ не существенно и определяющими являются параметры Re, Fr, C, Δ . При $\Delta = 1$ имеем линейно-стратифицированную среду, при $\Delta = 0$ – слоисто-стратифицированную с бесконечно тонкими прослойками.

3. При $\Pi = 0, B \gg 1$ имеем двухслойную стратификацию. Критериями подобия будут Re, Fr, C, Δ . Высота слоя не является определяющей и ее можно исключить из критериев Fr, C, E , поделив их на $B = H/D$. Тогда получим:

$$Fr = \frac{\rho u_0^2}{g D \Delta \rho}; C = \frac{\rho}{\Delta \rho}; \Delta = \frac{\delta}{D}. \quad (30-32)$$

На рис. 2 показано изменение «действующего» градиента плотности $\frac{2[\rho(z) - \rho(0)]}{z}$, $\frac{v_{0H}}{v_{0M}} = M^{3/2}$ нормированного по среднему градиенту $\Delta\rho/H$, в зависимости от размера следа $b_z/H = 2z/H$, для случаев $2z_0/H = 0$ и $2z_0/H = 1$. В обоих случаях, при малых b_z/H , градиенты плотности в исследуемой области значительно отличаются от среднего. Это отличие уменьшается при увеличении числа слоев.

Обозначив параметры явления в натуре индексом «н», а модели «м», введя масштаб – $M = D_n/D_m$, получим из критериев подобия отношение параметров явления в натуре и на модели.

Для геометрических параметров имеем:

$$\frac{H_n}{H_m} = \frac{\delta_n}{\delta_m} = \frac{z_{0n}}{z_{0m}} = M. \quad (33)$$

Из равенства $C = idem$ получаем соотношение для разностей плотностей слоев:

$$\frac{\Delta\rho_n}{\Delta\rho_m} = \frac{\rho_n}{\rho_m}. \quad (34)$$

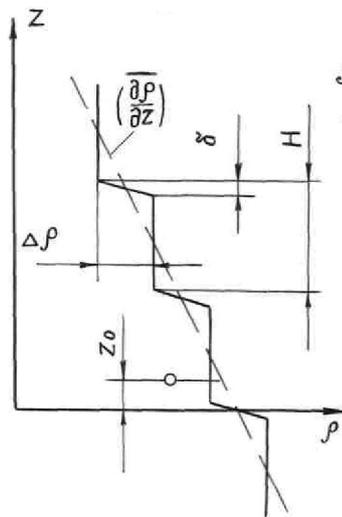


Рис.1. Модель слоисто-стратифицированной жидкости.

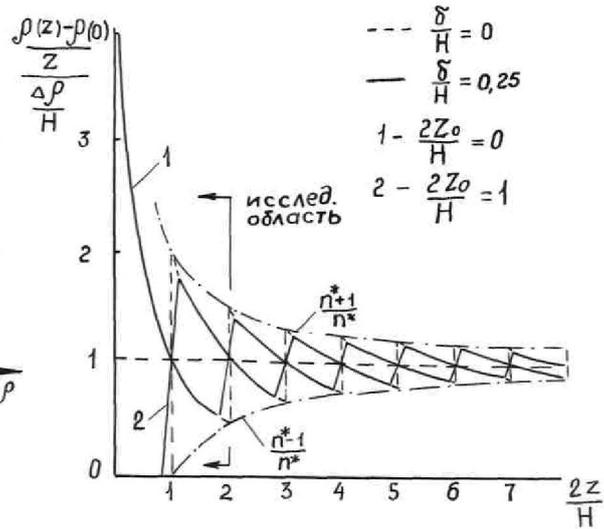


Рис.2. Изменение безразмерной величины $\frac{\rho(z)-\rho(0)}{z} \cdot \frac{z}{H} / \frac{\Delta \rho}{H}$ от координаты $\frac{z}{H}$.

При моделировании на той же жидкости, что и в натуре (воде) $\rho_H = \rho_M$. Тогда

$$\Delta \rho_H = \Delta \rho_M. \quad (35)$$

Из равенства чисел Фруда следует

$$\frac{u_{0H}}{u_{0M}} = M^{1/2}. \quad (36)$$

Из равенства чисел Рейнольдса получаем

$$\frac{v_{0H}}{v_{0M}} = M^{3/2}. \quad (37)$$

То есть для подобию по числу Рейнольдса необходимо, чтобы вязкость моделирующей жидкости была в $M^{3/2}$ раз меньше вязкости жидкости в натуре, что практически невозможно.

Известно, что в лабораторных условиях моделирование по числу Рейнольдса затруднительно, а зачастую и невозможно. Однако также известно, что характеристики течения в определенном диапазоне чисел Рейнольдса обладают подобием по этому параметру [10]. Изменение чисел Рейнольдса течения по длине происходит медленнее, чем числа Фруда [9]. Это определяет решающее влияние последнего на развитие течения в дальних сечениях.

Все сказанное выше в принципе допускает приближенное моделирование течения по числу Фруда в области автомодельности по числу Рейнольдса.

Для моделирования следа необходимо также геометрическое подобие тел, создающих спутное течение. Однако достичь этого не всегда удастся. Поэтому часто для моделирования следа используют модели не подобные геометрически моделируемым телам, но создающие подобное натурному распределение характеристик течения. При отсутствии геометрического подобия тела и его модели необходимо ввести дополнительный параметр, учитывающий отличие в форме тела и его модели в продольном сечении. В качестве такого критерия можно выбрать в первом приближении коэффициент сопротивления тела

$$C_D = \frac{F}{\rho u_0^2 S}, \quad (38)$$

который определяет общую энергию, подводимую в след за телом, движущимся со скоростью u_0 , в виде кинетической энергии среднего движения и турбулентности. Тогда число Фруда по аналогии с работой [11] можно записать в виде:

$$Fr_c = \frac{\rho u_0^2 C_D}{g \Delta \rho D}, \quad (39)$$

где коэффициент сопротивления C_D будет в некоторой степени учитывать отличие геометрии тела и его модели.

Рассмотрим основные характеристики турбулентного следа в стратифицированной среде на различных стадиях его развития.

На начальной стадии развития силы плавучести значительно меньше сил инерции и не влияют на динамические характеристики следа. С увеличением размера течения силы плавучести растут и на переходной стадии начинают воздействовать на его развитие.

Характеристики следа на переходной и основной стадиях во многом определяются закономерностями эволюции его на начальной стадии. Структура поля скорости в этой области не зависит от стратификации, в то время как тепловое поле определяется динамическим полем и характером стратификации среды. Поэтому выполним автомодельный анализ теплового поля следа на начальной стадии его развития при различных типах стратификации среды. В анализе используем закономерности вырождения скоростных характеристик, полученные для течений в однородной среде [4].

При больших турбулентных числах Рейнольдса ($Re_\lambda \gg 1$) и Пекле ($Pe_\lambda \gg 1$) на достаточном удалении от начала ($X/D \gg 1$) динамические и тепловые характеристики следа становятся автомодельными [10].

Закономерности вырождения интенсивности пульсаций температуры можно оценить из уравнения баланса этой величины. В приближении пограничного слоя для стационарного случая его можно получить из (17):

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + v \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y} + w \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial z} - a \left(\frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} \overline{v' T'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w' T'^2} \right) + \\ + 2 \left(\overline{v' T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} + \overline{w' T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right) + 2a \left[\left(\frac{\partial \overline{T'}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{T'}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{T'}}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

В уравнении (40) первые три члена представляют перенос, четвертый и пятый – соответственно молекулярную и турбулентную диффузию, шестой – порождение, седьмой – диссипацию интенсивности пульсаций температуры (ε_T).

Для плоского следа уравнение (40) упрощается:

$$u \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + w \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial z} - a \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial z^2} + \frac{\partial \overline{w' T'^2}}{\partial z} + 2 \overline{w' T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \varepsilon_T = 0 \quad (41)$$

Проинтегрируем уравнение (41) поперек следа. При этом диффузионные члены, определяющие перераспределение $\overline{T'^2}$ по сечению следа уходят:

$$\int_0^\infty \left(u \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + w \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial z} \right) dz + \int_0^\infty \overline{w' T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} dz + \int_0^\infty \varepsilon_T dz = 0 \quad (42)$$

Предполагая автомодельность течения на начальной стадии развития следа, введем автомодельные переменные:

$$\begin{aligned} \overline{T'^2} &= S_0(x) v(\xi, \zeta); \quad \overline{T} = \Delta T_0 \phi(\xi, \zeta); \\ \overline{v' T'} &= e_0(x) S_0(x) g(\xi, \zeta); \quad \overline{w' T'} = e_0(x) S_0(x) f(\xi, \zeta); \\ \varepsilon_T &= \varepsilon_{T_0}(x) p(\xi, \zeta); \quad \xi = \frac{y}{b_T}; \quad \zeta = \frac{z}{b_T}, \end{aligned} \quad (43)$$

где: $\Delta u_0(x)$, $e_0(x)$, $\Delta T_0(x)$, $S_0(x)$, $\varepsilon_{T_0}(x)$ – соответственно характерные масштабы скорости, интенсивности пульсаций скорости, температуры, интенсивности и скорости диссипации пульсаций температуры; b_T – размер следа.

Из уравнения неразрывности, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, получим выражение для вертикальной компоненты скорости:

$$w = -b_T(x) \frac{d\Delta u_0(x)}{dx} \int_0^\zeta g(\zeta) d\zeta. \quad (44)$$

Используя (44), можно показать, что второй член в первом интеграле уравнения (42) убывает быстрее первого и при $X/D \gg 1$ им можно пренебречь.

Используя (43) уравнение (41) перепишем в виде:

$$u_0 b_T(x) \frac{dS_0^2(x)}{dx} I_1 + 2e_0(x) S_0(x) \Delta T_0(x) I_2 + \varepsilon_0(x) b_T(x) I_3 = 0, \quad (45)$$

$$\text{где параметры } I_1 = \int_0^\infty v(\zeta) d(\zeta), \quad I_2 = \int_0^\infty f(\zeta) \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} d\zeta, \quad I_3 = \int_0^\infty p(\zeta) d\zeta \quad (46)$$

при наличии автомодельности не зависят от координаты X .

Следует отметить, что уравнение (6) справедливо и для осесимметричного следа. В этом случае осесимметричное поле скорости накладывается на плоское фоновое тепловое поле. Поэтому термическая структура следа имеет трехмерный характер, причем горизонтальные градиенты температуры сравнимы с вертикальными.

Проинтегрировав уравнение (40) по сечению следа, получим:

$$u_0 \int_0^\infty \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial x} dz dy + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(v' T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + w' T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) dz dy + \int_0^\infty \varepsilon_T dz dy = 0. \quad (47)$$

Или, введя аналогично (2) и (3) автомодельные переменные в форме

$$\begin{aligned} \bar{T}^2 &= S_0(x) v(\zeta, \xi); \quad \bar{T} = \Delta T_0(x) \varphi(\zeta, \xi); \quad u = u_0 + \Delta u_0(x) g(\zeta, \xi); \\ w' T' &= e_0(x) S_0(x) f(\zeta, \xi); \quad v' T' = e_0(x) S_0(x) \psi(\zeta, \xi); \\ \varepsilon_T &= \varepsilon_0(x) p(\zeta, \xi); \quad \zeta = z / b_T; \quad \xi = y / b_T, \end{aligned} \quad (48)$$

в предположении, что масштабы вертикальной и поперечной компонент скорости на начальной стадии развития следа одинаковы [4] уравнение (47) приводится к виду (45) с параметрами:

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty v d\zeta d\xi; \quad I_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\psi \frac{d\varphi}{d\xi} + f \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) d\zeta d\xi; \quad I_3 = \int_0^\infty p d\zeta d\xi \quad (49)$$

Отметим, что автомодельность теплового поля может существовать, если стратификация среды не имеет собственного линейного масштаба и единственным масштабом является размер течения. Это имеет место в случае линейной и двухслойной стратификации. В других случаях параметры (49) зависят от продольной координаты

В дальнейшем можно сделать оценку закономерностей вырождения $S(x)$ в начальной стадии вырождения следа. Изменение масштабов вдоль оси X представляется степенными зависимостями

$$b_T \sim x^n; \quad e_0 \sim x^{n-1}; \quad S_0 \sim x^m; \quad \varepsilon_{T_0} \sim x^p; \quad \Delta T_0 \sim x^k. \quad (50)$$

Подставляя их в уравнение (45) и, считая, что в начальной стадии развития члены уравнения вырождаются по одинаковым законам, можно получить связь показателей степени в выражениях (50):

$$\begin{aligned} m &= k; \\ p &= 2m - 1. \end{aligned} \quad (51-52)$$

Первое соотношение показывает, что масштабы средней температуры и интенсивности пульсаций температуры убывают по одинаковым законам. Из второго следует, что вырождение микро масштаба пульсаций температуры. Из второго следует, что вырождение микро масштаба

$$\lambda_T \sim \frac{S_0}{\varepsilon_0^{1/2}} \sim x^{1/2}, \quad (53)$$

не зависит от вида стратификации.

В дальнейшем, рассматривая вырождение параметров теплового поля следа при двухслойной и линейной стратификации и в случае источника тепла в однородной среде, можно показать, что:

- в двухслойной стратифицированной жидкости, когда масштаб температуры во всей области течения остается постоянным ($\Delta T_0 = const$), показатели степеней в (50) имеют следующие значения:

$$k = 0; m = 0; p = -1, \tag{54}$$

т.е. интенсивность пульсаций температуры на оси следа остается постоянной и не зависит от «закона» роста размера следа;

- в линейно стратифицированной среде масштаб температуры с ростом размера следа нарастает по «закону» $\Delta T_0 \sim x^n$, тогда показатели степеней в (50) принимают значения:

$$k = n; m = n; p = 2n - 1, \tag{55}$$

т.е. интенсивность пульсаций температуры в этом случае нарастает вдоль следа из-за увеличения перепада температуры на его границах;

- если тело является источником тепла, тогда для следа, развивающегося в однородной жидкости, масштаб температуры определяется из уравнения баланса тепла в виде, $S\Delta T_0 = const$, где S – площадь сечения следа. В этом случае показатели степеней в (50), например, для плоского случая, принимают значения:

$$k = -n; m = -n; p = -2n - 1, \tag{56}$$

т.е. интенсивность пульсаций температуры на оси следа уменьшается.

Выводы. «Законы» эволюции «энергетических» и структурных характеристик теплового поля (S_0, ε_0) плоского и осесимметричного следов за телом и осесимметричного следа с нулевым избыточным импульсом для случая линейной и двухслойной стратификации приведены в таблице 1. Для сравнения здесь же приведены «законы» для следа за телом, когда оно является источником тепла. Для безымпурсного следа все параметры выражены через показатель степени роста размера n . Из приведенного анализа видно, что «энергетические» характеристики теплового поля следа (исключая λ_T) при пассивной стратификации сильно зависят от ее вида.

Таблица 1. Показатели степени «законов» вырождения характеристик следа при различных типах стратификации (в таблице приняты следующие сокращения: ЛС – линейная стратификация; ДС – двухслойная стратификация; ИТ – источник тепла)

Тип следа		Плоский			Осесимметричный			Осесимметричный		
		I < 0			I < 0			I = 0		
Скоростное поле	b	1/2			1/3			n		
	ΔU_0	-1/2			-2/3			-2(1-n)		
	l_0	-1/2			-2/3			-(1-n)		
	ε_n	-2			-7/3			-(3-2n)		
Тепловое поле	λ_n	1/2			1/2			1/2		
	Тип страт-ции	ЛС	ДС	ИТ	ЛС	ДС	ИТ	ЛС	ДС	ИТ
Тепловое поле	Q	0	0	≠0	0	0	≠0	0	0	≠0
	ΔT_0	1/2	0	-1/2	1/3	0	-2/3	n	0	-2n
	S_0	1/2	0	-1/2	1/3	0	-2/3	n	0	-2n
	ε_0	0	-1	-2	-1/3	-1	-7/3	-(1-2n)	-1	-(1+4n)
	λ_T	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2

Турбулентный след на переходной и, в некоторой степени, на основной стадиях развивается под сильным воздействием архимедовых сил. В дальнейшем представляется целесообразным провести параметрический анализ коллапса турбулентного следа в линейно-стратифицированной и двухслойной средах аналогично тому, как это сделано в работе [12]. Как сказано выше, на начальной стадии развития след автомодельный. С увеличением размера следа растет потенциальная энергия жидкости в нем и уменьшается кинетическая энергия турбулентности. При определенном соотношении кинетической энергии турбулентности и потенциальной энергии среды, т.е. при определенном критическом значении числа Ричардсона, построенном по размеру течения и интенсивности пульсаций скорости, наступает коллапс – ограничение вертикального размера следа [12].

Изменение потенциальной энергии в турбулентном следе может быть представлено в виде:

$$w_n = \alpha_0 g \beta_z^3 \beta_y [1 - f(\beta)] \tag{57}$$

где $\beta = \alpha_0 / \alpha$ – коэффициент смешения в следе;

b_z, b_y – вертикальный и горизонтальный размеры следа;

$\alpha = \Delta\rho/b_z$ – «действующий» градиент плотности, при линейной стратификации равный градиенту плотности в невозмущенной среде ($\partial\rho/\partial z$);

$\alpha_0 = \partial\rho/\partial z|_{z=0}$ – градиент плотности в центре следа, который в случае двухслойной среды можно выразить через градиентный размер b_Δ : $\alpha_0 = \Delta\rho/b_\Delta$;

$f(\beta)$ – функция коэффициента смещения β , в автомодельном течении не зависящая от координаты X .

Кинетическую энергию турбулентного следа можно оценить из соотношения

$$w_k = \beta_y \beta_z \rho u^2 / 2. \quad (58)$$

Считая, что коллапс происходит при определенном соотношении w_n/w_k , получим

$$b_z^2 = \frac{A_1 \rho u^2}{[1 - f(\beta)] \alpha_0 g}. \quad (59)$$

Убывание интенсивности пульсаций скорости в следе можно оценить, используя зависимость

$$\sigma_u = \frac{db_z}{dt}, \quad (60)$$

применимую для автомодельного следа [3,10,4]. Ее можно записать в виде:

$$\frac{\sigma_u}{b_{z0}} \approx \frac{n}{t}, \quad (61)$$

где $t = x/u_0$ – время развития следа; b_{z0} – размер следа в однородной среде.

С учетом (61) перепишем (59) в виде:

$$\frac{b_z}{b_{z0}} = \frac{A_1^{1/2} n}{4\pi^2 [1 - f(\beta)]^{1/2}} \frac{1}{\left(\frac{t}{T_{n_g}}\right)}, \quad (62)$$

где
$$T_{n_g} = \frac{2\pi}{\left(\frac{g}{g_0} \frac{\Delta\rho}{b_z}\right)^{1/2}} = 1/N_g \quad (63)$$

«внутренний» период Брента-Вяйсяля, в случае линейной стратификации, равный собственному внутреннему периоду $T_{n_g} = 2\pi / \left(\frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^{1/2}$. Полагая в момент коллапса $b_z/b_{z0} = A_2$, можно получить соотношение для времени коллапса

$$t_k = \frac{A_1^{1/2} n}{4\pi [1 - f(\beta)]^{1/2}} T_{n_g}, \quad (64)$$

Подставляя t_k в закон роста размера следа $b/D = AC_D^n (x/D)^n$ и, учитывая, что $b_z/b_{z0} = A_2$, можно получить зависимость максимального размера следа b_{zH} от числа Фруда в случае двухслойной и линейной стратификации в виде:

$$b_{zH}/B = B_1 Fr^{2-n}; \quad b_{zH}/D = B_2 Fr^{n/2}. \quad (65-66)$$

Здесь B_1 и B_2 – постоянные, которые можно представить в виде: $B_1 = B_1' C^{2-n}$; $B_2 = B_2' C^n$, где B_1', B_2' – константы.

Внутренняя частота Брента-Вяйсяля следа в двухслойной стратификации является функцией числа Фруда:

$$N_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\rho} * \frac{\Delta\rho}{D}} B_1^{1/2} Fr^{-\frac{n}{2(2-n)}} = N_D B^{1/2} Fr^{-\frac{n}{2-n}}, \text{ где } N_D - \text{ частота Брента-Вайсяля, рас-}$$

считанная по диаметру тела,

Таким образом, характерные параметры коллапса следа определяются: время коллапса – периодом Брента-Вайсяля, максимальный размер – числом Фруда.

Для получения универсальных зависимостей изменения геометрических параметров следа во времени их следует нормировать по максимальному размеру следа или по числу Фруда в соответствующей степени, а время развития – по времени коллапса, или периоду Брента-Вайсяля $T_{n_e} = 1/N_e$, т.е.

$$b_i Fr^{-\frac{n}{2-n}} = A_i (N_e t)^n - \text{ для двухслойной стратификации,} \quad (67)$$

$$b_i Fr^{-\frac{n}{2}} = A_i (N t)^n - \text{ для линейной стратификации.} \quad (68)$$

«Законы» изменения различных характеристик турбулентного следа отличаются друг от друга. Поэтому будут различаться и их характерные величины, достигаемые в момент коллапса. Поэтому, если параметр l_i изменяется в однородной среде по степенному закону с показателем m , то формирование этого параметра следует

выполнять по $Fr^{\frac{m}{2-n}}$ в двухслойной среде и по $Fr^{\frac{m}{2}}$ – в линейно-стратифицированной. Эта нормировка может быть использована при интерпретации результатов экспериментов.

РЕЗЮМЕ

В статті розглянуто моделювання розвитку турбулентного сліду в шарувато-стратифікованому середовищі. Встановлено, що для отримання універсальних залежностей зміння геометричних параметрів сліду у часі їх необхідно нормувати по максимальному розміру сліду або по числу Фруда у відповідному степені, а час розвитку – по часу колапса, або періоду Брента-Вайсяля.

SUMMARY

In the article a turbulent wake in layer -stratified fluid evolution modeling was observed. It was determined that for universal dependences obtaining geometrical parameters of wake in time need to normalize by maximum wake magnitude or by Frude number in corresponding degree and evolution time – by collapse time or Brent-Vaisal period.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Федоров К.Н. Тонкая термохалинная структура вод океана / К.Н.Федоров. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 184 с.
2. Зацепин А.Г. Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости / А.Г. Зацепин, К.Н.Федоров, С.И.Воропаев, А.М.Павлов. – Изв. СССР, Физика атмосферы и океана, 1978, т.14, № 2, с.234-237.
3. Коловандин Б.А. Моделирование процессов турбулентного переноса в сдвиговых течениях несжимаемой жидкости с приложением к следам за подводными самодвижущимися объектами / Б.А.Коловандин // Автореферат на соискание ученой степени доктора технических наук. – Минск, ИТМО АН БССР им А.В Лыкова, 1983, 27 с., секретно.
4. Коловандин Б.А. Моделирование теплопереноса при неоднородной турбулентности / Б.А.Коловандин. – Минск: Наука и техника, 1980. – 183 с.
5. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях / Дж.Тернер. – М.: Мир, 1977. – 431 с.
6. Филипс О.М. Динамика верхнего слоя океана / О.М.Филипс // Пер. с англ. – М.: Мир, 1969. – 267 с.
7. Хинце И.О. Турбулентность / И.О.Хинце // Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И.Седов. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
9. Чашечкин Ю.Д. О характеристиках затопленных струй в неоднородных жидкостях / Ю.Д.Чашечкин. – Изв. АН СССР, 1980, т.254, № 2. – С.317-321.
10. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом / А.А.Таунсенд. – М.: Иностран. лит-ра, 1956. – 399 с.
11. Prych E.A. Turbulent wakes in density stratified fluids of finite extent / E.A.Prych, F.R.Harty, I.F.Kennedy – MIT Hydrodynamics Laboratory Report, 1964, No.65.
12. Merritt G.E. Wake growth and collapse in stratified flow / G.E. Merritt. – AIAA Pap., 1973, No.108, p.40.

Поступила в редакцию 28.04.2010 г.