

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ СЛОЕВ

Е.В.Алтухов, М.В.Фоменко

Введение. В обзорных статьях [1-6] проведен анализ основных методов и полученных на их основе решений частных задач теории упругости для слоистых пластин. В частности, отмечается, что актуальным является развитие известных и создание новых аналитических методов исследования напряженного состояния слоистых конструкций на основе уравнений трехмерной теории упругости. Трехслойные пластины занимают особое место среди многослойных тел. Для рассматриваемого класса задач важную роль сыграли однородные решения [7-12], предложенные в работе [13]. Симметричная деформация в трехслойной пластине с полостью в случае идеального контакта слоев исследовалась с использованием однородных решений в работах [9, 12].

В данной работе получены однородные решения уравнений упругого равновесия трехслойной пластины (задача растяжения-сжатия) с учетом скользящего контакта слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину симметричного строения относительно ее срединной плоскости (рис. 1). Внешние одинаковые и внутренний слои пластины находятся в условиях скользящего контакта и являются изотропными. Торцы пластины свободны от напряжений, а симметричная деформация вызвана внешними усилиями, приложенными к боковой поверхности.

Отнесем пластину к размерным координатам $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Тогда $|\tilde{x}_3| \leq (h_1 + h_2)$, причем h_1 – толщина внешних одинаковых слоев, $2h_2$ – толщина внутреннего слоя. Величины, относящиеся к внешним слоям, будем обозначать индексом (1), к внутреннему – индексом (2). Упругие характеристики материалов слоев обозначим через \tilde{G}_m, ν_m ($m=1,2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига, а ν_m – коэффициент Пуассона, m – номер слоя. Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \\ \lambda &= h/R, \quad h = h_1 + h_2, \quad \lambda_1 = h_1/h, \quad \lambda_2 = h_2/h, \\ u_{i(m)} &= \tilde{u}_{i(m)}/R, \quad \sigma_{ij(m)} = \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m=1,2; \\ G_m &= \tilde{G}_m/\tilde{G}_2, \quad G_1 = G. \end{aligned}$$

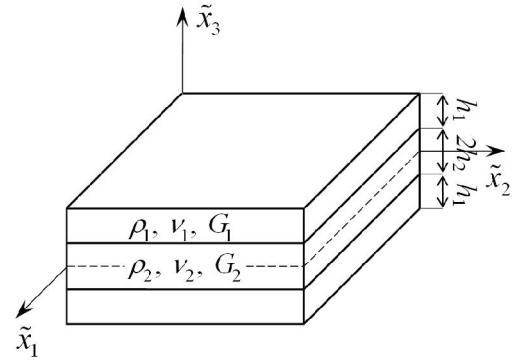


Рис. 1. Трехслойная пластина симметричного строения

Задача об упругом равновесии рассматриваемой трехслойной пластины сводится к интегрированию известных уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + D^2 u_{j(m)} + \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j=1,2), \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + D^2 u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом граничных условий

$$\begin{aligned} \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, 1) &= 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \\ u_{3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \quad \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{33(2)}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{13(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{13(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{23(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{23(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\theta_m = \partial_1 u_{1(m)} + \partial_2 u_{2(m)} + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_{3(m)}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i=1,3), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \nu_{0(m)} = \frac{1}{1-2\nu_m}.$$

Решение задачи. Однородные решения задачи (1), (2) можно представить в виде суммы бигармонического, вихревого и потенциального состояний

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)}^1(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)}^2(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)}^3(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1,3; m=1,2).$$

Бигармоническое решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_{1(1)}^1(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left((1 + \nu_1) F + F^* + \lambda^2 \left(\lambda_2 (\nu_1 - \nu_2) - \frac{\nu_1}{2} x_3 \right) x_3 D^2 F \right), \\ u_{2(1)}^1(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left((1 + \nu_1) F - F^* + \lambda^2 \left(\lambda_2 (\nu_1 - \nu_2) - \frac{\nu_1}{2} x_3 \right) x_3 D^2 F \right), \\ u_{3(1)}^1(x_1, x_2, x_3) &= \lambda (\lambda_2 (\nu_2 - \nu_1) + \nu_1 x_3) D^2 F, \\ u_{1(2)}^1(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1 \left((1 + \nu_2) F + F^* - \frac{\lambda^2 \nu_2}{2} x_3^2 D^2 F \right), \\ u_{2(2)}^1(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2 \left((1 + \nu_2) F - F^* - \frac{\lambda^2 \nu_2}{2} x_3^2 D^2 F \right), \\ u_{3(2)}^1(x_1, x_2, x_3) &= \lambda \nu_2 x_3 D^2 F, \end{aligned}$$

Гармоническая функция $F^*(x_1, x_2)$ связана с бигармонической $F(x_1, x_2)$

$$D^2 D^2 F = 0$$

соотношениями

$$\partial_2^2 F^* = -\partial_1^2 F^* = D^2 F.$$

Перемещения вихревого состояния имеют вид [7, 14]

$$\begin{aligned} u_{1(m)}^2(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2), \\ u_{2(m)}^2(x_1, x_2, x_3) &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2), \quad u_{3(m)}^2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{(1)k}(x_3) &= \cos \delta_k (1 - x_3), \quad p_{(2)k}(x_3) = \cos \delta_k x_3, \\ D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k / \lambda)^2 B_k(x_1, x_2) &= 0, \\ \{\delta_k\} &= \{\pi k / \lambda_1\} \cup \{\pi k / \lambda_2\}, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Потенциальное решение будем искать в следующей форме

$$\begin{aligned} u_{j(m)}^3(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j=1,2), \\ u_{3(i)}^3(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Из соотношений (1), (2), (4) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ удовлетворяет метагармоническому уравнению

$$D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma / \lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0,$$

а для неизвестных функций $n_{(m)}(x_3)$, $q_{(m)}(x_3)$ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} n''_{(m)} + \gamma^2 \left(1 + \nu_{0(m)}\right) n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q'_{(m)} &= 0, \\ q''_{(m)} + \frac{\gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)} + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda \left(1 + \nu_{0(m)}\right)} n'_{(m)} &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} q_{(1)}(1) + \lambda^{-1} n'_{(1)}(1) &= 0, \quad \gamma^2 \lambda^{-1} \left(\nu_{0(1)} - 1\right) n_{(1)}(1) + \left(\nu_{0(1)} + 1\right) q'_{(1)}(1) = 0, \quad q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2), \\ G \left[\gamma^2 \lambda^{-1} \left(\nu_{0(1)} - 1\right) n_{(1)}(\lambda_2) + \left(\nu_{0(1)} + 1\right) q'_{(1)}(\lambda_2) \right] &= \\ &= \gamma^2 \lambda^{-1} \left(\nu_{0(2)} - 1\right) n_{(2)}(\lambda_2) + \left(\nu_{0(2)} + 1\right) q'_{(2)}(\lambda_2), \\ q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n'_{(1)}(\lambda_2) &= 0, \quad q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n'_{(2)}(\lambda_2) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} n_1(x_3) &= H_1 \cos \gamma x_3 + H_2 \sin \gamma x_3 + H_3 x_3 \cos \gamma x_3 + H_4 x_3 \sin \gamma x_3, \\ q_1(x_3) &= Q_1 \sin \gamma x_3 + Q_2 \cos \gamma x_3 + Q_3 \left(x_3 \sin \gamma x_3 + k_{3(1)} \cos \gamma x_3 \right) + Q_4 \left(x_3 \cos \gamma x_3 - k_{3(1)} \sin \gamma x_3 \right), \\ n_2(x_3) &= H_5 \cos \gamma x_3 + H_6 x_3 \sin \gamma x_3, \\ q_2(x_3) &= Q_5 \sin \gamma x_3 + Q_6 \left(x_3 \cos \gamma x_3 - k_{3(2)} \sin \gamma x_3 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{3(m)} &= (3 - 4\nu_m) / \gamma, \\ Q_i &= A_i H_i, \quad A_i = (-1)^i \lambda^{-1} \gamma \quad (i = \overline{1, 6}). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя выражения (7) в граничные условия (6) и учитывая соотношения (8), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно H_i

$$\begin{aligned} \sin \gamma H_1 - \cos \gamma H_2 + (\sin \gamma + k_{1(1)} \cos \gamma) H_3 - (\cos \gamma - k_{1(1)} \sin \gamma) H_4 &= 0, \\ \cos \gamma H_1 + \sin \gamma H_2 + (\cos \gamma - k_{2(1)} \sin \gamma) H_3 + (\sin \gamma + k_{2(1)} \cos \gamma) H_4 &= 0, \\ \sin \gamma \lambda_2 H_1 - \cos \gamma \lambda_2 H_2 + (\lambda_2 \sin \gamma \lambda_2 + k_{3(1)} \cos \gamma \lambda_2) H_3 - (\lambda_2 \cos \gamma \lambda_2 - k_{3(1)} \sin \gamma \lambda_2) H_4 - \\ - \sin \gamma \lambda_2 H_5 + (\lambda_2 \cos \gamma \lambda_2 - k_{3(2)} \sin \gamma \lambda_2) H_6 &= 0, \\ \cos \gamma \lambda_2 H_1 + \sin \gamma \lambda_2 H_2 + (\lambda_2 \cos \gamma \lambda_2 - k_{2(1)} \sin \gamma \lambda_2) H_3 + (\lambda_2 \sin \gamma \lambda_2 + k_{2(1)} \cos \gamma \lambda_2) H_4 - \\ - G^{-1} \cos \gamma \lambda_2 H_5 - G^{-1} (\lambda_2 \sin \gamma \lambda_2 + k_{2(2)} \cos \gamma \lambda_2) H_6 &= 0, \\ \sin \gamma \lambda_2 H_1 - \cos \gamma \lambda_2 H_2 + (\lambda_2 \sin \gamma \lambda_2 + k_{1(1)} \cos \gamma \lambda_2) H_3 - (\lambda_2 \cos \gamma - k_{1(1)} \sin \gamma \lambda_2) H_4 &= 0, \\ \sin \gamma \lambda_2 H_5 - (\lambda_2 \cos \gamma \lambda_2 - k_{1(2)} \sin \gamma \lambda_2) H_6 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $k_{1(m)} = (1 - 2\nu_m) / \gamma$, $k_{2(m)} = 2(1 - \nu_m) / \gamma$.

Из условия равенства нулю определителя системы (9) получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений γ

$$F(\gamma) = K (\sin 2\gamma \lambda_1 + 2\gamma \lambda_1) (\sin 2\gamma \lambda_2 + 2\gamma \lambda_2) - 4 \left(\sin^2 \gamma \lambda_1 - (\gamma \lambda_1)^2 \right) \sin^2 \gamma \lambda_2 = 0, \quad (10)$$

где $K = G^{-1} (1 - \nu_1) / (1 - \nu_2)$.

Уравнение (10) не имеет чисто мнимых корней. Кроме того, по сравнению с идеальным контактом слоев [12], все корни данного трансцендентного уравнения являются комплексными. При $G \rightarrow 0$ корни уравнения (10) асимптотически приближаются к множеству корней уравнений

$$\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1 = 0, \quad \sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2 = 0.$$

Когда $G \rightarrow \infty$ спектр собственных значений γ трансформируется к совокупности корней, определяемых соотношениями

$$\sin \gamma\lambda_1 + \gamma\lambda_1 = 0, \quad \sin \gamma\lambda_2 - \gamma\lambda_1 = 0, \quad \gamma = \pi k / \lambda_2 \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

причем третье семейство корней будет двухкратным действительным. Если $\lambda_1 = 0$ ($\lambda_2 = 1$) или $\lambda_2 = 0$ ($\lambda_1 = 1$), то получаем известное [13] трансцендентное уравнение для однослоиной пластины.

Результаты численных исследований. Для нахождения комплексных корней характеристического уравнения (10) используются принцип аргумента, итерационный метод Ньютона и контурное численное интегрирование.

При различных значениях упругих и геометрических параметров в табл. 1 и 2 приведены значения первых пятнадцати корней γ_p уравнения (10), расположенных в первом квадранте. Столбцы табл. 1, обозначенные 1, соответствуют неидеальному контакту слоев, а 2 – результатам работы [12] (идеальный контакт).

Таблица 1

p	$G = 2; \lambda_2 = 0,9; \nu_1 = \nu_2 = 0,3$				$G = 1,2; \lambda_2 = 0,9; \nu_1 = \nu_2 = 0,3$			
	1		2		1		2	
	Re γ	Im γ	Re γ	Im γ	Re γ	Im γ	Re γ	Im γ
1	2,3390104	1,2545085	1,989366	1,029976	2,3394981	1,2528640	2,077017	1,103758
2	5,9774858	1,7688663	5,208613	1,459305	5,9665907	1,7504425	5,313008	1,527627
3	9,6794519	2,1188107	8,486697	1,824954	9,5871973	2,0616250	8,513780	1,786878
4	11,978353	5,7251517	11,716190	2,322081	13,402261	2,2673968	11,694850	2,017281
5	13,673109	2,1378269	14,292500	2,665442	13,797920	6,3605517	14,803210	2,220716
6	17,359003	1,8273156	17,152020	1,963979	17,231565	2,0902574	17,814930	2,298747
7	20,869627	1,6388707	20,632610	1,069796	20,797440	1,8938860	20,860200	2,184610
8	24,342237	1,5770627	22,422870	0	24,281030	1,8247976	24,033860	1,995489
9	27,815939	1,5989672	25,218340	1,211896	27,754973	1,8457428	27,295930	1,833282
10	31,301245	1,6545706	28,749470	1,487035	31,239446	1,9035701	30,605960	1,736355
11	34,798947	1,7077476	32,237810	1,615311	34,738108	1,9604586	33,954440	1,722413
12	38,306748	1,7381865	35,723070	1,690066	38,249897	1,9952369	37,353970	1,789098
13	41,819662	1,7375296	39,213900	1,743836	41,769937	1,9982147	40,836200	1,905990
14	43,152378	20,234539	42,711270	1,796088	43,776614	19,160138	44,441380	1,986224
15	45,330134	1,7087922	46,212980	1,856169	45,288969	1,9708283	48,095610	1,896647

Таблица 2

p	$K = 5,4; \lambda_1 / \lambda_2 = 1/2$		$K = 0,186; \lambda_1 / \lambda_2 = 1/2$		$K = 0,001 (G = 1000); \lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$		$K = 100 (G = 0,01); \lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$	
	Re γ	Im γ	Re γ	Im γ	Re γ	Im γ	Re γ	Im γ
1	3,1290183	1,7386271	2,1595141	1,8460086	0,4705510	0,4654260	4,0155869	2,2598334
2	5,8825914	2,9473246	4,8442332	1,0750962	6,2825487	0,0632318	4,4102269	2,2286560
3	8,4728280	2,2407473	9,3426175	0,8614093	8,4254955	4,5003096	10,485118	3,2027210
4	13,308699	2,7985945	12,755490	6,4637340	12,566052	0,0632342	10,940687	2,9930708
5	14,809397	4,4201318	14,135231	0,8879033	14,995746	5,5362874	16,814411	3,7035149
6	18,202022	2,5860261	18,808418	0,8648252	18,849344	0,0632347	17,332780	3,3884633
7	23,135796	2,8934404	22,561106	8,0350220	21,425350	6,2052559	23,110989	4,0524083
8	23,834664	5,6343772	23,559829	0,8736984	25,132582	0,0632348	23,686027	3,6551150
9	27,790787	2,7095836	28,246902	0,8654590	27,800132	6,7033916	29,394951	4,3222103
10	32,704372	2,8817360	32,185906	9,0445657	31,415799	0,0632349	30,021488	3,8551518
11	33,107682	6,5680294	32,985040	0,8698881	34,146903	7,1011542	35,672976	4,5431452
12	37,316947	2,7662577	37,678536	0,8656810	37,699006	0,0632349	36,346875	4,0143964
13	42,198664	2,8733714	41,737403	9,7946941	40,477182	7,4325197	41,947905	4,7307832
14	42,460115	7,2897132	42,410138	0,8683330	43,982206	0,0632350	42,665802	4,1461035
15	46,809536	2,7962698	47,107428	0,8657837	46,796838	7,7166056	48,221133	4,8942301

На рис. 2 и 3 представлены графики изменения реальной (рис. 2, *a* и рис. 3, *a*) и мнимой (рис. 2, *б* и рис. 3, *б*) частей первого собственного значения уравнения (10) в зависимости от относительной толщины внутреннего слоя λ_2 . Кривые 1-4 относятся к значениям параметра G , равном соответственно 0; 1; 10; 100. Здесь коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. На рис. 3 кривая 1 соответствует значениям коэффициентов Пуассона $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 0,5$, а кривая 2 – $\nu_1 = 0,5$, $\nu_2 = 0$. Значение относительной жесткости G принималось равным единице.

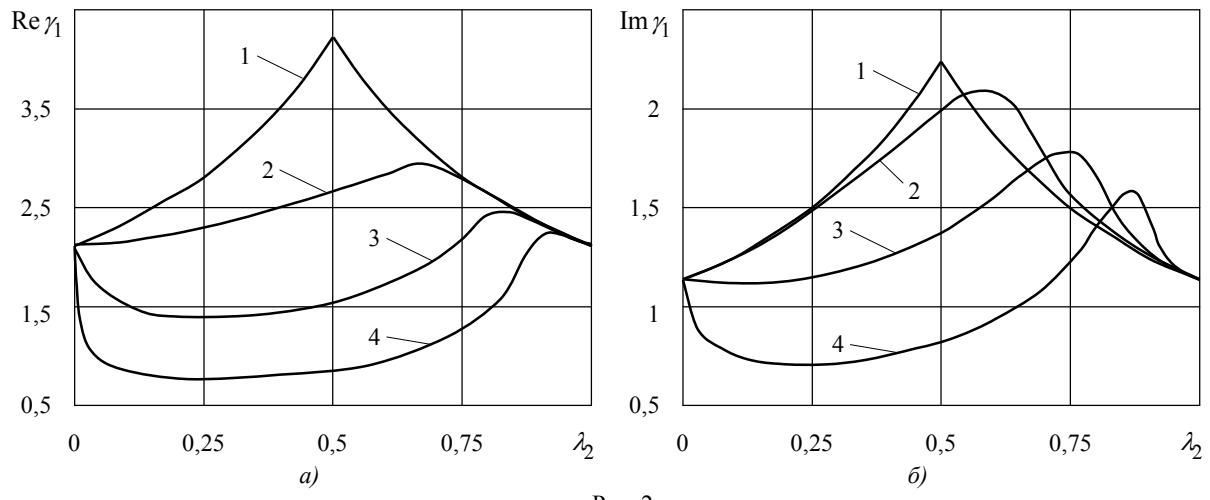


Рис. 2

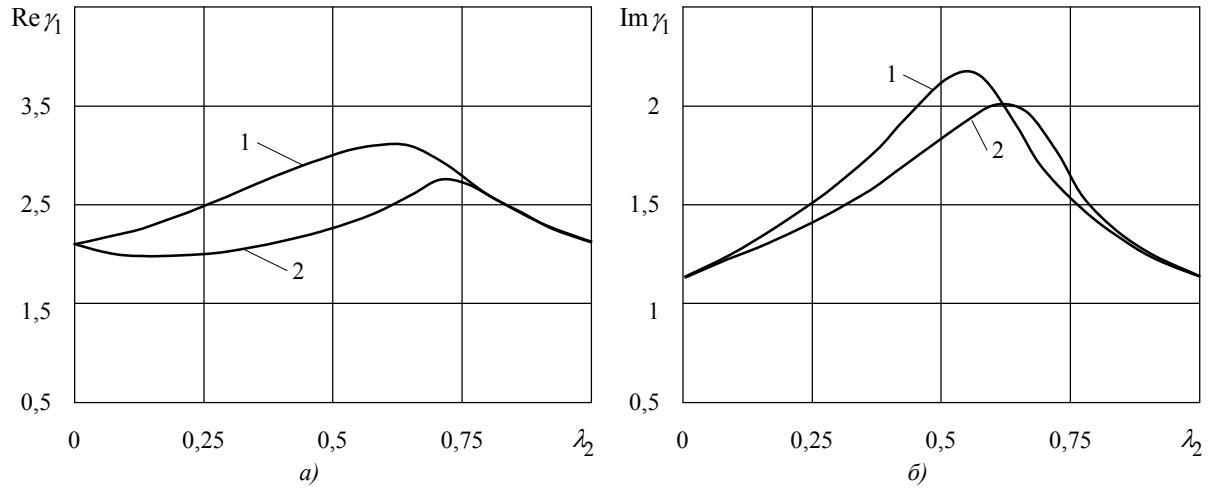


Рис. 3

Из приведенных таблиц и рисунков следует, что собственные значения потенциального решения отличаются от аналогичных в случае идеального контакта слоев [12]. Данные рис. 2 (кривая 2) свидетельствуют о том, что для неидеального контакта при одинаковых упругих характеристиках материалов слоев ($G = 1$, $\nu_1 = \nu_2$) невозможен переход к однослоиной пластине.

Первое собственное значение существенно зависит от упругих свойств слоев и их относительной толщины. В частности, с увеличением G происходит уменьшение $\operatorname{Re} \gamma_1$. Изменение $\operatorname{Im} \gamma_1$ носит более сложный характер (рис. 2 *б*). Максимального значения по модулю γ_1 достигает при $\lambda_2 = 0,5$ и $G = 0$. Менее заметное влияние на значение γ_1 оказывает изменение коэффициентов Пуассона (рис. 3).

Выводы. Получены однородные решения системы уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной пластины в случае свободных от напряжений плоских граней и скользящего контакта слоев. Как и при идеальном контакте слоев однородные решения состоят из бигармонического, вихревого и потенциального состояний.

Собственные значения и собственные функции вихревого решения находится в явном виде. Собственные функции потенциального решения также находятся в явном виде, а для определения собственных значений получено трансцендентное уравнение в форме, приспособленной для численных исследований.

На основании численных исследований изучена зависимость собственных значений потенциального решения от условий контакта, изменения относительных толщин и упругих характеристик материалов слоев пластины.

РЕЗЮМЕ

Розглянута просторова задача про рівновагу пружної тришарової пластиини. Торці пластиини вільні від напруг, а на межі поділу шарів виконуються умови ковзного контакту. Напівоберненим методом I. I. Воровіча отримані однорідні розв'язки рівнянь рівноваги у переміщеннях. Однорідні розв'язки складаються з бігармонійного, вихревого і потенційного станів.

SUMMARY

Spatial equilibrium problem of elastic three-layered plate is considered. The faces of plate are stresses-free and conditions of sliding contact are carried out on the interface of layers. Homogeneous solutions of equilibrium equations in displacements are got by the I.I.Vorovich's half-return method. Homogeneous solutions consist of biharmonic, rotational and potential states.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / В. Г. Пискунов // Механика композитных материалов. – 2003. – Т. 39, №1. – С. 3-24.
2. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56.
3. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. A review / H. Altenbach // Mechanics of composite materials. – 1998. – Vol. 34, N 3. – P. 243-252.
4. Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // Applied mechanics reviews. – 2003. – Vol. 56, N 3. – P. 287-308.
5. Carrera E. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates / E. Carrera, S. Brischetto // Applied mechanics reviews. – 2009. – Vol. 62, N 1. – P. 1-17.
6. Reddy J. N. Theories and computational models for composite laminates / J. N. Reddy, D. H. Jr. Robbins // Applied mechanics reviews. – 1994. – Vol. 47, N 6, pt. 1. – P. 147-169.
7. Ворович И. И. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты / И. И. Ворович, И. Г. Кадомцев // Прикл. математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870-876.
8. Ворович И. И. К теории неоднородных по толщине плит / И. И. Ворович, И. Г. Кадомцев, Ю. А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975, вып. 3. – С. 119-130.
9. Космодамианский А. С. Толстые многосвязные пластины / А.С. Космодамианский, В. А. Шалдыран. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
10. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
11. Устинов Ю. А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит / Ю. А. Устинов // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755-758.
12. Шалдыран В. А. К определению концентрации напряжений в трехслойной пластине с полостью / В. А. Шалдыран // Теоретическая и прикладная механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 3-16.
13. Лурье А. И. К теории толстых плит / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2-3. – С. 151-168.
14. Ворович И. И. Напряженное состояние толстой плиты / И. И. Ворович, О. С. Малкина // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 37, № 2. – С. 230–241.

Поступила в редакцию 18.03.2010 р.