

М Е Х А Н І К А

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ТОНКИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Л.Е.Авраменко, В.П.Шевченко

Термоупругость пластин и оболочек занимает важное место в механике разрушений. И если поведение пластин и изотропных оболочек при действии на них различных температурных воздействий достаточно хорошо изучено [1-4], то ортотропные и анизотропные оболочки, в силу сложности решений, изучены в меньшей степени. В данной работе решена задача термоупругости для ортотропной оболочки при действии движущегося локального источника тепла.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим уравнения теплопроводности для тонкой ортотропной оболочки толщины  $2h$  произвольной гауссовой кривизны, по поверхности которой движется по закону

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau) \tag{1}$$

локальный источник тепла, тепловой поток которого распределяется по закону

$$q(x, y, \tau) = q_0 e^{-k_0 [(x-x(\tau))^2 + (y-y(\tau))^2]} \tag{2}$$

где  $q_0 = q(0)$  – удельный тепловой поток,  $k_0$  – коэффициент сосредоточенности теплового потока, характеризующий форму кривой нормального распределения.

Уравнения теплопроводности [5] в безразмерной системе координат  $x' = x/h, y' = y/h, z' = z/h, \tau' = \tau a/h^2, t' = t/t^0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}^2 T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_2^* T_2 - \frac{\partial T_1}{\partial \tau'} &= -(\mu_1 t'_1 + \mu_2 t'_2 + W'_1), \\ \nabla_{\lambda}^2 T_2 - 3(1 + \mu_1) T_2 - 3\mu_2 T_1 - \frac{\partial T_2}{\partial \tau'} &= -3(\mu_1 t'_2 + \mu_2 t'_1 + W'_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Для исследования напряженно- деформированного состояния оболочки система (3) дополняется уравнениями равновесия в перемещениях [4].

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + (k_1 + \nu_2 k_2) \frac{\partial w}{\partial x'} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \right) = \\ &= \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial x'} \\ &\frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + (k_1 \nu_1 + k_2) \frac{\partial w}{\partial y'} \right) + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \right) = \\ &= \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial T_1}{\partial y'} \\ &\frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \nu_1 \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} \right) + \\ &+ \frac{2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left( \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \nu_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x'} + \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 \nu_2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 \right) \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{1-\nu_1\nu_2} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (k_1 + k_2 \nu_2) + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (k_1 \nu_1 + k_2) \right) w + \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}} \frac{4}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} = \\
 & = \frac{2}{1-\nu_1\nu_2} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} k_1 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} k_2 (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \right) T_1 - \\
 & - \frac{2}{1-\nu_1\nu_2} \frac{1}{3} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2} \right). \tag{4}
 \end{aligned}$$

Здесь  $u, v, w$  – перемещения в направлении осей координат  $x', y', z'$ ;  $E_1, E_2, G_{1,2}$  – модули упругости для поверхностей, параллельных срединной поверхности оболочек;  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона для главных направлений;  $\alpha_1, \alpha_2$  – температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений.

Введем замену:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad B = \frac{2G_{12}}{\sqrt{E_1 E_2}}, \quad A_1 = A \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \quad A_2 = A \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, \quad B_1 = A_1 \nu_2 + B, \quad B_2 = A_2 \nu_1 + B, \\
 c_1 &= (k_1 + \nu_2 k_2), \quad c_2 = (k_1 \nu_1 + k_2), \quad d_1 = (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2), \quad d_2 = (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2), \quad C_1 = A_1 c_1, \\
 C_2 &= A_2 c_2, \quad D_1 = A_1 d_1, \quad D_2 = A_2 d_2, \quad F_1 = A_1 / 3, \quad F_2 = A_2 / 3, \quad P_1 = A_1 k_1 d_1, \quad P_2 = A_2 k_2 d_2, \\
 P &= P_1 + P_2, \quad O_1 = A_1 k_1 c_1, \quad O_2 = A_2 k_2 c_2, \quad O = O_1 + O_2, \quad R_1 = F_1 d_1, \quad R_2 = F_2 d_2, \\
 L_1 &= A_1 k_1 + A_2 k_2 \nu_1, \quad L_2 = A_1 k_1 \nu_1 + A_2 k_2, \quad J = F_1 \nu_2 + F_2 \nu_1 + 4B / 3.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения (5) примут вид:

$$\begin{aligned}
 A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + B_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x' \partial y'} + C_1 \frac{\partial w}{\partial x'} &= D_1 \frac{\partial T_1}{\partial x'}, \quad A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + C_2 \frac{\partial w}{\partial y'} = D_2 \frac{\partial T_1}{\partial y'}, \\
 F_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + F_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \left( L_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + L_2 \frac{\partial v}{\partial y'} \right) + O w &= P T_1 - R_1 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x'^2} - R_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial y'^2}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Уравнения (3), (5) – система уравнений термоупругости для ортотропных оболочек в безразмерной системе координат.

Выражения для усилий, моментов и перерезывающих сил с учетом замены имеют вид:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= A_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x'} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y'} + c_1 w - d_1 T_1 \right], \quad N_2 = A_2 \left[ \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + c_2 w - d_2 T_1 \right], \\
 M_1 &= -F_1 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_1 T_2 \right], \quad M_2 = -F_2 \left[ \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} + d_2 T_2 \right], \\
 S &= B \left[ \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \right], \quad H = -\frac{2}{3} B \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial y'}, \\
 Q_1 &= -F_1 \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x'^3} + \nu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2} + d_1 \frac{\partial T_2}{\partial x'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x' \partial y'^2}, \\
 Q_2 &= -F_2 \left[ \nu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'} + \frac{\partial^3 w}{\partial y'^3} + d_2 \frac{\partial T_2}{\partial y'} \right] - \frac{2}{3} B \frac{\partial^3 w}{\partial x'^2 \partial y'}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Пусть начальная температура и температура среды на поверхности оболочки  $t_c^\pm$  равна нулю и на оболочку действует локальный источник тепла (2). Данный источник тепла является моделью простой газовой горелки, используемой в сварочных процессах. Пламя горелки рассматривается как нормально – круговой источник тепла [7]. Тогда

$$\begin{aligned} W'_1 &= W_1^* e^{-k_0 \left[ (x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2 \right]} S_+[\tau'], \\ W'_2 &= W_2^* e^{-k_0 \left[ (x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2 \right]} S_+[\tau'], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $S_+[\tau']$  – функция Хевисайда.  $S_+[\tau'] = 1$  при  $\tau' > 0$  и  $S_+[\tau'] = 0$  при  $\tau' \leq 0$ ,  $W_1^* = W_1(0)$ ,  $W_2^* = 0$  – мощности источников средней температуры и температурного момента.

Нужно найти компоненты напряженно – деформированного состояния оболочки и исследовать влияние ортотропных свойств материала на изменения этих компонент.

Применяя к уравнениям (3), (5) преобразование Фурье по  $(x', y')$  и Лапласа по  $\tau'$  приходим к системе линейных алгебраических уравнений в пространстве трансформант.

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \mu_1 + s) \tilde{T}_1 + \mu_2^* \tilde{T}_2 &= \tilde{f}_1(\xi, \eta, s), \\ (\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 3(1 + \mu_1) + s) \tilde{T}_2 + 3\mu_2 \tilde{T}_1 &= 3\tilde{f}_2(\xi, \eta, s), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (A_1 \xi^2 + B \eta^2) \tilde{u} + B_1 \xi \eta \tilde{v} + C_1 i \xi \tilde{w} &= D_1 i \xi \tilde{T}_1, \quad (A_2 \eta^2 + B \xi^2) \tilde{v} + B_2 \xi \eta \tilde{u} + C_2 i \eta \tilde{w} = D_2 i \eta \tilde{T}_1, \\ L_1 i \xi \tilde{u} - L_2 i \eta \tilde{v} + (F_1 \xi^4 + F_2 \eta^4 + J \xi^2 \eta^2 + O) \tilde{w} &= P \tilde{T}_1 + (R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2) \tilde{T}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\lambda_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\xi, \eta, s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} W'_i e^{-s\tau' + i(\xi x' + \eta y')} d\tau' dx' dy' = \\ &= \frac{W_i^*}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k_0 \left[ (x'-x'(\tau'))^2 + (y'-y'(\tau'))^2 \right]} e^{-s\tau' + i(\xi x' + \eta y')} d\tau' dx' dy'. \end{aligned} \quad (10)$$

После решения системы (8) – (10), получим выражения трансформант для компонент температурного поля и напряженно – деформированного состояния оболочки.

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1,2}(\xi, \eta, s) &= \sum_{i=1}^2 b_{i,i+2} \frac{1}{\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + s + a_i}, \\ \tilde{u} &= \frac{i}{\Delta} \left[ (P_1 + P_2) \tilde{T}_1 + P_3 \tilde{T}_2 \right], \quad \tilde{v} = \frac{i}{\Delta} \left[ (P_4 + P_5) \tilde{T}_1 + P_6 \tilde{T}_2 \right], \quad \tilde{w} = \frac{1}{\Delta} \left[ P_7 \tilde{T}_1 + P_8 \tilde{T}_2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} \left\{ (3 + 4\mu_1) \mp \sqrt{(3 + 4\mu_1)^2 - 4\mu_0} \right\}, \quad \mu_0 = 3(\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_2 \mu_2^*), \quad \Delta = P_9 + P_{10}, \\ b_i &= \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left( (3(1 + \mu_1) - a_i) \tilde{f}_1 - 3\mu_2^* \tilde{f}_2 \right), \quad b_{i+2} = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left( 3(\mu_1 - a_i) \tilde{f}_2 - 3\mu_2 \tilde{f}_1 \right), \\ P_1 &= p_{11} \xi^7 + p_{12} \xi^5 \eta^2 + p_{13} \xi^3 \eta^4 + p_{14} \xi \eta^6, \quad P_2 = p_{21} \xi^3 + p_{22} \xi \eta^2, \\ P_3 &= p_{31} \xi^5 + p_{32} \xi^3 \eta^2 + p_{33} \xi \eta^4, \quad P_4 = p_{41} \xi^6 \eta + p_{42} \xi^4 \eta^3 + p_{43} \xi^2 \eta^5 + p_{44} \eta^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_5 &= p_{51}\xi^2\eta + p_{52}\eta^3, \quad P_6 = p_{61}\xi^4\eta + p_{62}\xi^2\eta^3 + p_{63}\eta^5, \quad P_7 = p_{71}\xi^4 + p_{72}\xi^2\eta^2 + p_{73}\eta^4, \\
 P_8 &= p_{81}\xi^6 + p_{82}\xi^4\eta^2 + p_{83}\xi^2\eta^4 + p_{84}\eta^6, \quad P_{10} = p_{101}\xi^4 + p_{102}\xi^2\eta^2 + p_{103}\eta^4, \\
 P_9 &= p_{91}\xi^8 + p_{92}\xi^6\eta^2 + p_{93}\xi^4\eta^4 + p_{94}\xi^2\eta^6 + p_{95}\eta^8,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= D_1BF_1, \quad p_{12} = D_1A_2F_1 + D_1BJ - B_1D_2F_1, \\
 p_{13} &= D_1A_2J + D_1BF_2 - B_1D_2J, \quad p_{14} = D_1A_2F_2 - B_1D_2F_2, \\
 p_{21} &= D_1BO - C_1BP, \quad p_{22} = D_1A_2O + C_1D_2L_2 + B_1C_2P - C_1A_2P - D_1C_2L_2 - B_1D_2O, \\
 p_{31} &= -C_1BR_1, \quad p_{32} = B_1C_2R_1 - C_1A_2R_1 - C_1BR_2, \quad p_{33} = B_1C_2R_2 - C_1A_2R_2, \\
 p_{41} &= D_2A_1F_1 - B_2D_1F_1, \quad p_{42} = D_2A_1J + D_2BF_1 - B_2D_1J, \\
 p_{43} &= D_2A_1F_2 + D_2BJ - B_2D_1F_2, \quad p_{44} = D_2BF_2, \\
 p_{51} &= D_2A_1O + C_2D_1L_1 + B_2C_1P - C_2A_1P - D_2C_1L_1 - B_2D_1O, \quad p_{52} = D_2BO - C_2BP, \\
 p_{61} &= B_2C_1R_1 - C_2A_1R_1, \quad p_{62} = B_2C_1R_2 - C_2A_1R_2 - C_2BR_1, \quad p_{63} = -C_2BR_2, \\
 p_{71} &= A_1BP - D_1BL_1, \quad p_{73} = A_2BP - D_2BL_2, \\
 p_{72} &= A_2A_1P + B_2D_1L_2 + B^2P + B_1D_2L_1 - D_2A_1L_2 - D_1A_2L_1 - B_2B_1P, \\
 p_{81} &= A_1BR_1, \quad p_{82} = A_2A_1R_1 + BA_1R_2 + B^2R_1 - B_2B_1R_1, \\
 p_{83} &= A_2A_1R_2 + BA_2R_1 + B^2R_2 - B_2B_1R_2, \quad p_{84} = A_2BR_2, \\
 p_{91} &= A_1BF_1, \quad p_{92} = A_2A_1F_1 + BA_1J + B^2F_1 - B_2B_1F_1, \\
 p_{93} &= A_2A_1J + BA_1F_2 + BA_2F_1 + B^2J - B_2B_1J, \\
 p_{94} &= A_2A_1F_2 + BA_2J + B^2F_2 - B_2B_1F_2, \quad p_{95} = A_2BF_2, \\
 p_{101} &= A_1BO - C_1BL_1, \quad p_{103} = A_2BO - C_2BL_2, \\
 p_{102} &= A_2A_1O + B_2C_1L_2 + B^2O + B_1C_2L_1 - C_2A_1L_2 - C_1A_2L_1 - B_2B_1O.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Применяя к выражениям (6) преобразования Фурье и Лапласа, получаем трансформанты для усилий, моментов и перерезывающих сил:

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_j &= A_j \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta} (P_{Nj1} + P_{Nj2}) - d_j \right] \tilde{T}_1 + \frac{1}{\Delta} P_{Nj3} \tilde{T}_2 \right\}, \quad \tilde{S} = B \frac{1}{\Delta} \left\{ [P_{S1} + P_{S2}] \tilde{T}_1 + P_{S3} \tilde{T}_2 \right\}, \\
 \tilde{M}_j &= F_j \left\{ \frac{1}{\Delta} P_{Mj1} \tilde{T}_1 + \left[ \frac{1}{\Delta} P_{Mj2} - d_j \right] \tilde{T}_2 \right\}, \quad \tilde{H} = B \frac{2}{3\Delta} \left\{ P_{H1} \tilde{T}_1 + P_{H2} \tilde{T}_2 \right\}, \\
 \tilde{Q}_j &= (-i) \left\{ F_j \left[ \frac{1}{\Delta} P_{Qj1} \tilde{T}_1 + \left[ \frac{1}{\Delta} P_{Qj2} - d_j \left( \frac{\xi}{\eta} \right) \right] \tilde{T}_2 \right] + B \frac{2}{3\Delta} \left\{ P_{Qj3} \tilde{T}_1 + P_{Qj4} \tilde{T}_2 \right\} \right\}, \quad j = \overline{1,2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 P_{N11} &= \xi P_1 + \nu_2 \eta P_4, \quad P_{N12} = \xi P_2 + \nu_2 \eta P_5 + c_1 P_7, \quad P_{N13} = \xi P_3 + \nu_2 \eta P_6 + c_1 P_8, \\
 P_{N21} &= \nu_1 \xi P_1 + \eta P_4, \quad P_{N22} = \nu_1 \xi P_2 + \eta P_5 + c_2 P_7, \quad P_{N23} = \nu_1 \xi P_3 + \eta P_6 + c_2 P_8,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{S1} &= \xi P_4 + \eta P_1, \quad P_{S2} = \xi P_5 + \eta P_2, \quad P_{S3} = \xi P_6 + \eta P_3, \\
 P_{M11} &= (\xi^2 + \nu_2 \eta^2) P_7, \quad P_{M12} = (\xi^2 + \nu_2 \eta^2) P_8, \\
 P_{M21} &= (\nu_1 \xi^2 + \eta^2) P_7, \quad P_{M22} = (\nu_1 \xi^2 + \eta^2) P_8, \\
 P_{H1} &= \xi \eta P_7, \quad P_{H2} = \xi \eta P_8, \\
 P_{Q11} &= \xi (\xi^2 + \nu_2 \eta^2) P_7, \quad P_{Q12} = \xi (\xi^2 + \nu_2 \eta^2) P_8, \quad P_{Q13} = \xi \eta^2 P_7, \quad P_{Q14} = \xi \eta^2 P_8, \\
 P_{Q21} &= \eta (\nu_1 \xi^2 + \eta^2) P_7, \quad P_{Q22} = \eta (\nu_1 \xi^2 + \eta^2) P_8, \quad P_{Q23} = \xi^2 \eta P_7, \quad P_{Q24} = \xi^2 \eta P_8.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Выражения (11) – (15) – решение задачи в пространстве трансформант.

Применяя к (11) – (15) формулы обращения для преобразований Фурье и Лапласа, находим выражения для оригиналов исходных функций. Методику вычисления оригиналов рассмотрим на примере прогиба.

$$\tilde{w} = \frac{1}{\Delta} [P_7 \tilde{T}_1 + P_8 \tilde{T}_2] = \frac{1}{\Delta} \frac{b_i P_7 + b_{i+2} P_8}{\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + s + a_i}. \tag{16}$$

Применим к (16) формулу обращения для преобразования Лапласа и формулу свертки. Получим

$$\bar{w} = \int_0^{\tau'} \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 (b_i P_7 + b_{i+2} P_8) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} d\tau_0.$$

Далее применим формулу обращения для преобразования Фурье

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\tau'} \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 (b_i P_7 + b_{i+2} P_8) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} e^{-i(\xi x' + \eta y')} d\tau_0 d\xi d\eta = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\tau'} \frac{b_i (p_{71} \xi^4 + p_{72} \xi^2 \eta^2 + p_{73} \eta^4) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} e^{-i(\xi x' + \eta y')} d\xi d\eta d\tau_0}{p_{91} \xi^8 + p_{92} \xi^6 \eta^2 + p_{93} \xi^4 \eta^4 + p_{94} \xi^2 \eta^6 + p_{95} \eta^8 + p_{101} \xi^4 + p_{102} \xi^2 \eta^2 + p_{103} \eta^4} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\tau'} \frac{b_{i+2} (p_{81} \xi^6 + p_{82} \xi^4 \eta^2 + p_{83} \xi^2 \eta^4 + p_{84} \eta^6) e^{-(\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a_i) \tau_0} e^{-i(\xi x' + \eta y')} d\xi d\eta d\tau_0}{p_{91} \xi^8 + p_{92} \xi^6 \eta^2 + p_{93} \xi^4 \eta^4 + p_{94} \xi^2 \eta^6 + p_{95} \eta^8 + p_{101} \xi^4 + p_{102} \xi^2 \eta^2 + p_{103} \eta^4},
 \end{aligned}$$

где

$$b_i = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left( (3(1 + \mu_1) - a_i) \bar{f}_1(\xi, \eta, \tau' - \tau_0) - 3\mu_2^* \bar{f}_2(\xi, \eta, \tau' - \tau_0) \right),$$

$$b_{i+2} = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left( 3(\mu_1 - a_i) \bar{f}_2(\xi, \eta, \tau' - \tau_0) - 3\mu_2 \bar{f}_1(\xi, \eta, \tau' - \tau_0) \right),$$

$$\bar{f}_i(\xi, \eta, \tau' - \tau_0) = W_i^* \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_0 [(x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2]} \left[ e^{i(\xi x' + \eta y')} dx' dy' \right]$$

Используем свойство четных функций и введем  $x' = r \cos \varphi$ ,  $y' = r \sin \varphi$ ,  $\xi = \rho \cos \theta$ ,  $\eta = \rho \sin \theta$ ,

тогда

$$w = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\tau'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tau'} b_i \frac{\rho \theta_7 e^{-((\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 + a_i) \tau_0}}{\rho^4 \theta_9 + \theta_{10}} \cos(r \rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r \rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho d\theta d\tau_0 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\tau'} b_{i+2} \frac{\rho^3 \theta_8 e^{-((\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 + a_i) \tau_0}}{\rho^4 \theta_9 + \theta_{10}} \cos(rp \cos \varphi \cos \theta) \cos(rp \sin \varphi \sin \theta) d\rho d\theta d\tau_0,$$

здесь

$$\theta_7 = p_{71} \cos^4 \theta + p_{72} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + p_{73} \sin^4 \theta,$$

$$\theta_8 = p_{81} \cos^6 \theta + p_{82} \cos^4 \theta \sin^2 \theta + p_{83} \cos^2 \theta \sin^4 \theta + p_{84} \sin^6 \theta,$$

$$\theta_9 = p_{91} \cos^8 \theta + p_{92} \cos^6 \theta \sin^2 \theta + p_{93} \cos^4 \theta \sin^4 \theta + p_{94} \cos^2 \theta \sin^6 \theta + p_{95} \sin^8 \theta,$$

$$\theta_{10} = p_{101} \cos^4 \theta + p_{102} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + p_{103} \sin^4 \theta.$$

Далее учитываем:

$$\frac{1}{\rho^4 (\rho^4 + \theta_{10}/\theta_9)} = -\sqrt{\frac{\theta_9}{\theta_{10}}} Jm \frac{1}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}},$$

$$\cos(rp \cos \varphi \cos \theta) \cos(rp \sin \varphi \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) J_{2n}(rp) \cos(2n\theta).$$

В результате получаем

$$w = -\frac{1}{\pi^2} Jm \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta_7 \cos(2n\theta)}{\sqrt{\theta_9 \theta_{10}}} \int_0^{+\infty} \frac{b_i \rho J_{2n}(rp) e^{-(\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 \tau_0}}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} d\rho d\theta d\tau_0 +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \int_0^{\tau'} e^{-a_i \tau_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta_8 \cos(2n\theta)}{\theta_9} \int_0^{+\infty} \frac{b_{i+2} \rho J_{2n}(rp) e^{-(\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \rho^2 \tau_0}}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} d\rho d\theta d\tau_0.$$

Воспользуемся выражением из [6], получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho J_{2n}(rp) d\rho}{\rho^2 + i\sqrt{\theta_{10}/\theta_9}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (r\sqrt{i})^{2(n+l)} (n+l)!}{2^{2(n+l)+1} l!(2n+l)!} \left( \frac{\theta_{10}}{\theta_9} \right)^{\frac{n+l}{2}} \exp\left( \tau_0 \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \right) \times$$

$$\times \Gamma\left( -(n+l), i\tau_0 \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta) \right),$$

где  $r^2 = (x' - x'(\tau' - \tau_0))^2 + (y' - y'(\tau' - \tau_0))^2$ ,  $\Gamma(n, z)$  – неполная Гамма – функция.

Используя разложение Гамма – функции [6] и теорему о свертке, выражение для прогиба перепишем в виде:

$$w = \frac{1}{2\pi^2} Jm \sum_{i=1}^2 b_i^* \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+l)}}{4^{(n+l)} l!(2n+l)!} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left( [(c + \ln i) \tau_{10} + \tau_{20}] \mathcal{F}_1(w_1) + \tau_{10} \mathcal{F}_2(w_1) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{30} \mathcal{F}_3(w_1) \right) - \sum_{m=1}^{n+l} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{40} \mathcal{F}_4(w_1) \right\} -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^2 b_{i+2}^* \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(2n\varphi) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+l)}}{4^{(n+l)} l!(2n+l)!} \times \quad (17)$$

$$\times \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left( [(c + \ln i)\tau_{10} + \tau_{20}] t_1(w_2) + \tau_{10} t_2(w_2) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{30} t_3(w_2) \right) - \sum_{m=1}^{n+l} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{40} \theta_4(w_2) \right\},$$

где  $b_i^* = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left( (3(1 + \mu_1) - a_i) W_1^* - 3\mu_2^* W_2^* \right), b_{i+2}^* = \frac{(-1)^i}{a_1 - a_2} \left( 3(\mu_1 - a_i) W_2^* - 3\mu_2 W_1^* \right),$

$$\tau_{10} = \int_0^{\tau'} \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} \text{Int}_0 d\tau_0, \tau_{20} = \int_0^{\tau'} \ln(\tau_0) \tau_0^p e^{-a_i \tau_0} \text{Int}_0 d\tau_0,$$

$$\tau_{30} = \int_0^{\tau'} \tau_0^{p+q} e^{-a_i \tau_0} \text{Int}_0 d\tau_0, \tau_{40} = \int_0^{\tau'} \tau_0^{-m} e^{-a_i \tau_0} \text{Int}_0 d\tau_0, \quad (18)$$

$$t_1(w_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l+p-1}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+1}{2}} \theta_7 t^p \cos 2n\theta d\theta, t_2(w_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t \right) \theta_{10}^{\frac{n+l+p-1}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+1}{2}} \theta_7 t^p \cos 2n\theta d\theta,$$

$$t_3(w_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+q-1}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+q+1}{2}} \theta_7 t^{p+q} \cos 2n\theta d\theta, t_4(w_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l-m-1}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l-m+1}{2}} \theta_7 t^{-m} \cos 2n\theta d\theta,$$

$$t_1(w_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l+p}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+2}{2}} \theta_8 t^p \cos 2n\theta d\theta, t_2(w_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t \right) \theta_{10}^{\frac{n+l+p}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+2}{2}} \theta_8 t^p \cos 2n\theta d\theta,$$

$$t_3(w_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+q}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+q+2}{2}} \theta_8 t^{p+q} \cos 2n\theta d\theta, t_4(w_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l-m}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l-m+2}{2}} \theta_8 t^{-m} \cos 2n\theta d\theta,$$

где  $t = (\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta), \text{Int}_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0^2 + y_0^2)^{(n+l)+\frac{\beta}{2}} e^{-k_0 [(x'-x_0-x'(\tau'-\tau_0))^2 + (y'-y_0-y'(\tau'-\tau_0))^2]} dx_0 dy_0.$

Выражения (17) – (18) – оригинал для прогиба  $w(x', y', \tau')$ .

Применим эту методику к компонентам температурного поля и напряженно- деформированного состояния оболочки, получим решение задачи. Приведем выражения для усилий:

$$N_j(x', y', \tau') = -A_j \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i^* [\text{Im}(G(N_{j3}) - G(N_{j1})) - GT(N_{j3})] + \sum_{i=1}^2 b_{i+2}^* \text{Re}(G(N_{j2})) + d_j T_1 \right\},$$

$$S_j(x', y', \tau') = B \left\{ \sum_{i=1}^2 b_i^* [\text{Im}(G(S_3) + G(S_1)) - GT(S_3)] - \sum_{i=1}^2 b_{i+2}^* \text{Re}(G(S_2)) \right\}, \quad j = \overline{1,2}. \quad (19)$$

Здесь

$$G(N_{jk}) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos 2n\varphi \cdot L(N_{jk}, 0), \quad k = \overline{1,3}$$

$$G(S_k) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sin 2n\varphi \cdot L(S_k, 0), \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 GT(N_{jk}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\tau'} \frac{e^{-a_i\tau_0}}{\tau_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta(z)}{\theta_9 t} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-\frac{t_0^2}{4\tau_0 t}} e^{-k_0(r'-r_0)^2} dx_0 dy_0 d\theta d\tau_0 - \\
 &- \frac{4}{\pi^2} \cos 2\varphi \int_0^{\tau'} e^{-a_i\tau_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta(z) \cos 2\theta}{\theta_9} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \gamma \left( 2, \frac{r_0^2}{4\tau_0 t} \right) e^{-k_0(r'-r_0)^2} \frac{dx_0 dy_0}{r_0^2} d\theta d\tau_0 - \\
 &- \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cos 2n\varphi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4^{(n+l)} l!(2n+l)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+l+1)} \cos 2n\theta d\theta \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \times \frac{d^{n+l+1}}{d\tau_0^{n+l+1}} (e^{-a_i\tau_0} \text{Int}_0) d\tau_0, \\
 GT(S_k) &= \frac{4}{\pi^2} \sin 2\varphi \int_0^{\tau'} e^{-a_i\tau_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta(z) \sin 2\theta}{\theta_9} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-k_0(r'-r_0)^2} \gamma \left( 2, \frac{r_0^2}{4\tau_0 t} \right) \frac{dx_0 dy_0}{r_0^2} d\theta d\tau_0 + \\
 &+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin 2n\varphi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{4^{(n+l)} l!(2n+l)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta(z)}{\theta_9} t^{-(n+l+1)} \sin 2n\theta d\theta \int_0^{\tau'} \ln \tau_0 \frac{d^{n+l+1}}{d\tau_0^{n+l+1}} (e^{-a_i\tau_0} \text{Int}_0) d\tau_0, \quad (21)
 \end{aligned}$$

где  $(r'-r_0)^2 = [(x'-x_0 - x'(\tau'-\tau_0))^2 + (y'-y_0 - y'(\tau'-\tau_0))^2]$ ,

$$\begin{aligned}
 L(z, \beta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i)^{(n+l)}}{4^{(n+l)} l!(2n+l+\beta)!} \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \left[ [(c + \ln i)\tau_{1\beta} + \tau_{2\beta}] t_1(z) + \tau_{1\beta} t_2(z) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-i)^q}{qq!} \tau_{3\beta} t_3(z) \right] + \right. \\
 &+ \left. \sum_{m=1}^{n+l} \frac{(m-1)!}{(-i)^m} \tau_{4\beta} t_4(z) \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \tau_{1\beta} &= \int_0^{\tau'} \text{Int}_{\beta} \tau_0^{\beta} e^{-a_i\tau_0} d\tau_0, \quad \tau_{2\beta} = \int_0^{\tau'} \ln(\tau_0) \text{Int}_{\beta} \tau_0^{\beta} e^{-a_i\tau_0} d\tau_0, \\
 \tau_{3\beta} &= \int_0^{\tau'} \text{Int}_{\beta} \tau_0^{p+q} e^{-a_i\tau_0} d\tau_0, \quad \tau_{4\beta} = \int_0^{\tau'} \text{Int}_{\beta} \tau_0^{-m} e^{-a_i\tau_0} d\tau_0, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_1(z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+k-2}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta, \quad t_2(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \sqrt{\frac{\theta_{10}}{\theta_9}} t \right) \theta_{10}^{\frac{n+l+p+k-2}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+k}{2}} \theta(z) t^p d\theta, \\
 t_3(z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l+p+q+k-2}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l+p+q+k}{2}} \theta(z) t^{p+q} d\theta, \quad t_4(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta_{10}^{\frac{n+l-m+k-2}{2}} \theta_9^{\frac{-n+l-m+k}{2}} \theta(z) t^{-m} d\theta
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \theta(N_{j1}) &= \left[ (\sigma_{1j} p_{21} + c_j p_{71}) \cos^4 \theta + (\sigma_{1j} p_{22} + \sigma_{2j} p_{51} + c_j p_{72}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \right. \\
 &+ \left. (\sigma_{2j} p_{52} + c_j p_{73}) \sin^4 \theta \right] \cos 2n\theta, \\
 \theta(N_{j2}) &= \left[ (\sigma_{1j} p_{31} + c_j p_{81}) \cos^6 \theta + (\sigma_{1j} p_{32} + \sigma_{2j} p_{61} + c_j p_{82}) \cos^4 \theta \sin^2 \theta + \right. \\
 &+ \left. (\sigma_{1j} p_{33} + \sigma_{2j} p_{62} + c_j p_{83}) \cos^2 \theta \sin^4 \theta + (\sigma_{2j} p_{63} + c_j p_{84}) \sin^6 \theta \right] \cos 2n\theta,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \theta(N_{j3}) &= \left[ \sigma_{1j} p_{11} \cos^8 \theta + (\sigma_{1j} p_{12} + \sigma_{2j} p_{41}) \cos^6 \theta \sin^2 \theta + (\sigma_{1j} p_{13} + \sigma_{2j} p_{42}) \cos^4 \theta \sin^4 \theta + \right. \\ &+ \left. (\sigma_{1j} p_{14} + \sigma_{2j} p_{43}) \cos^2 \theta \sin^6 \theta + \sigma_{2j} p_{44} \sin^8 \theta \right] \cos 2n\theta, \\ \theta(S_1) &= \left[ (p_{21} + p_{51}) \cos^3 \theta \sin \theta + (p_{22} + p_{52}) \cos \theta \sin^3 \theta \right] \sin 2n\theta, \\ \theta(S_2) &= \left[ (p_{31} + p_{61}) \cos^5 \theta \sin \theta + (p_{32} + p_{62}) \cos^3 \theta \sin^3 \theta + (p_{33} + p_{63}) \cos \theta \sin^5 \theta \right] \sin 2n\theta, \\ \theta(S_3) &= \left[ (p_{11} + p_{41}) \cos^7 \theta \sin \theta + (p_{12} + p_{42}) \cos^5 \theta \sin^3 \theta + (p_{13} + p_{43}) \cos^3 \theta \sin^5 \theta + \right. \\ &+ \left. (p_{14} + p_{44}) \cos \theta \sin^7 \theta + \sigma_{2j} p_{44} \sin^8 \theta \right] \sin 2n\theta, \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения (19) – (24) – оригиналы для усилий ортотропной оболочки.

Рассмотрим случай, когда источник тепла движется вдоль оси  $x'$  с постоянной скоростью  $v'$ . Положим в (1)  $x(\tau) = v\tau$ ,  $y(\tau) = 0$ . Введем подвижную систему координат  $x_1' = x' - v'\tau'$ ,  $y_1' = y'$ . Тогда в выражениях (19)– (24)  $(r'-r_0)^2 = [(x_1' - x_0 + v'\tau')^2 + (y_1' - y_0)^2]$ .

**Анализ результатов численных исследований.** Для численных исследований влияния ортотропии на напряженно – деформированное состояние оболочки рассматривался стеклопластик косоугольной намотки, обладающий сильной анизотропией и имеющий следующие термомеханические свойства:  $E_1 = 3,673 \cdot 10^3$  МПа,  $E_2 = 9,807 \cdot 10^2$  МПа,  $G_{12} = 3,923 \cdot 10^2$  МПа,  $\nu_1 = 0,2798$ ,  $\nu_2 = 0,0747$ ,  $\alpha_1 = 0,7 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ ,  $\alpha_2 = 3,8 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ ,  $a_{11} = 2,79 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $a_{22} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , где  $a_{ii} = \frac{\lambda_{ii}}{c\rho}$  – коэффициенты температуропроводности вдоль главных направлений. Пусть  $\lambda_{33} = \lambda_{22}$ , тогда  $\lambda_1 = 2,306$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

При проведении численных расчетов для изотропного материала положим:  $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$ ,

$$E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad \alpha = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

На рис. 1 показано влияние ортотропии на распределение мембранных усилий  $N_1$ . Поверхность 1 соответствует изотропной оболочке, поверхность 2 – ортотропной оболочке при  $k_0 = 10$ ,  $B_i^\pm = 0.1$ .

На рис. 2 показано распределение мембранных усилий  $N_1$  (сплошная линия) и  $N_2$  (штриховая линия) для изотропного материала (кривые 1) и ортотропного при  $\varphi = 0$  (кривые 2) и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (кривые 3). Здесь рассматривался симметричный теплообмен с параметрами  $B_i^\pm = 0.01$  и локальный источник с коэффициентом сосредоточенности  $k_0 = 10$ .

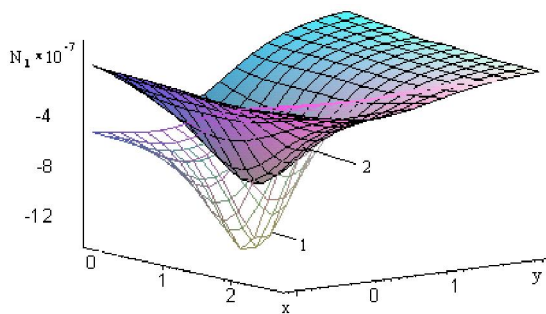


Рис. 1

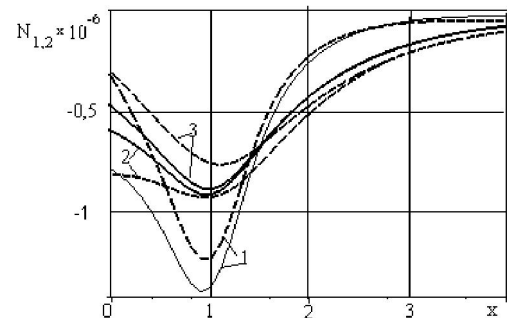


Рис. 2

Из рис. 1,2 видно, что в отличие от изотропных оболочек в ортотропных оболочках направление распространения тепла существенно влияет на распределение усилий.

На рис. 3 показано распределение усилий  $N_1$  (сплошная линия) и  $N_2$  (штриховая линия) для ортотропного материала при  $\varphi = 0$  в зависимости от величины параметров теплообмена. Здесь рассматривался симметричный теплообмен с параметрами

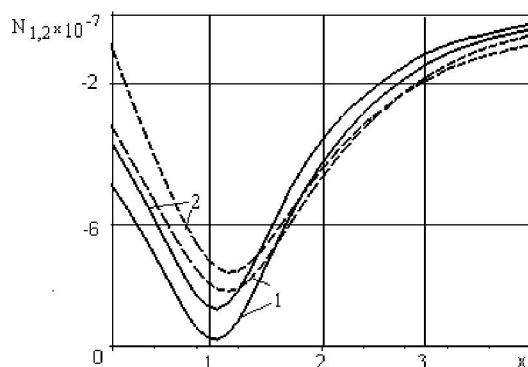


Рис. 3

$B_i^\pm = 0.01$  (кривые 1),  $B_i^\pm = 0.1$  (кривые 2) и  $B_i^\pm = 1$  (кривые 3), коэффициент сосредоточенности  $k_0 = 10$ . Здесь и выше  $k_1 = k_2 = 0.025$ ,  $\tau' = 1$ ;  $\nu = 1$ .

Анализ результатов позволяет сделать вывод о том, что при определении термоупругих характеристик в ортотропных оболочках необходимо учитывать ортотропные свойства материала, а также величину теплообмена с окружающей средой.

## РЕЗЮМЕ

Розв'язана задача термопружності для тонких ортотропних оболонок ненегативної кривини при дії локального джерела тепла, що рухається по поверхні оболонки. Брався лінійний розподіл температури по товщині оболонки та конвективний теплообмін за законом Ньютона з її бокових поверхів. Рішення отримано за допомогою інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа. Досліджено вплив термомеханічних властивостей матеріалу, а також величини й характеру теплообміну з навколишнім середовищем на напружено – деформований стан оболонки

## SUMMARY

The problem of thermoelasticity for a thin orthotropic shells is solved at action moving on a surface of a shell of the local source of heat. Linear distribution of temperature on thickness of a shell and convection heat exchange under the law of Newton from its lateral surfaces was supposed. With the help of integrated transformations Fourier and Laplace the decision is received. Dependence influence a thermomechanic parameters of shell, parameters of heat exchange on a stress-strain state of a shell.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко А.Д. Термоупругость / А.Д.Коваленко. – К.: Наук. думка, 1975. – 302 с.
2. Коляно Ю.М. Температурные напряжения от объемных источников / Ю.М.Коляно, А.Н.Кулик. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
3. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С.Подстригач, Ю.М.Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
4. Авраменко Л.Є. Теплопровідність та термопружність ізотропних оболонок під дією рухомого зосередженого джерела тепла / Л.Є.Авраменко // *Машинознавство*, 2007. – Вып.2. – С.14-22.
5. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С.Подстригач, Ю.М.Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
6. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. – М.: Мир, 1971. – 1108 с.
7. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н.Н.Рыкалин. – М.: Матгиз, 1951. – 296 с.

*Поступила в редакцию 14.11.2009 г.*