УДК 531.36

# ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

*А.С.Суйков,*
*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г.Донецк*

**Введение.** Наиболее распространенные на сегодняшний день методы получения оценок области притяжения для автономных систем основываются на использовании функций Ляпунова [1]. К этой группе методов относятся, в частности, широко известные методы, иногда называемых методами Ла Салля, подразумевающие использование заранее известных функций Ляпунова, а также методы Зубова, в которых функция Ляпунова строится в процессе получения оценки. Построение функций Ляпунова специального вида с целью получения оценок областей притяжения также является характерной чертой метода максимальных функций Ляпунова [2, 3].

Использование функций Ляпунова, возникших в задачах устойчивости, для оценки областей притяжения требует определенной осторожности. В отличие от локальных по сути задач устойчивости, для которых определяющими являются лишь начальные члены в разложении функции Ляпунова, получение хороших оценок области притяжения требует целенаправленного выбора функции Ляпунова и учета влияния членов высоких порядков вне малой окрестности нуля. Несмотря на определенный интерес к оптимизационным подходам в задачах оценки области притяжения [3-6], в литературе этот вопрос часто обходится стороной.

Целью данной работы является получение оптимальных в некотором смысле оценок области притяжения для одной хорошо известной, в том числе сложностью исследования областей устойчивости и притяжения, динамической системы — уравнения Дуффинга, а также рассмотрение методики получения таких оценок.

**Функции Ляпунова и оценка области притяжения.** Для автономной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x = f(x), \qquad x \in R^n,\ f(0) = 0 \tag{1}$$

функцией Ляпунова называется любая функция V(x), непрерывная в некоторой окрестности нуля и обладающая в той же окрестности следующими свойствами:

- $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x \neq 0$;
- $\dot{V}(0) = 0$, $\dot{V}(x) \leq 0$ при $x \neq 0$.

Здесь через $\dot{V}$ обозначена производная $V$ по времени t в силу системы (1):

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

Существование функции Ляпунова является достаточным условием устойчивости нулевого решения системы (1). Если кроме того $\dot{V}$ является знакоопределенной в некоторой окрестности нуля, то нулевое решение будет асимптотически устойчивым, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} x(t;x_0) = 0 \quad \forall x_0 : |x_0| < \varepsilon;$$

здесь через $x(t;x_0)$ обозначено частное решение (1), выходящее из точки $x_0$, т.е. такое что $x(0;x_0) = x_0$ [7].

Асимптотическая устойчивость означает стремление к нулю решений из достаточно малой окрестности нуля. Однако зачастую на практике существенным является вопрос о том насколько малой эта окрестность должна быть. Для системы (1) областью притяжения называется множество

$$S = \left\{x_0 : \lim_{t\to\infty} x(t;x_0) = 0\right\} \tag{2}$$

Как правило, точное нахождение множества $S$ для конкретной системы невозможно. Поэтому ставится задача построения оценки множества $S$. Под оценкой области притяжения понимается любое множество $S^* \subset S$, инвариантное относительно системы (1) и содержащее нуль.

Пусть для системы (1) известна функция Ляпунова $V$ со знакоопределенной производной. Тогда множество $S^*$ будет оценкой области притяжения, если

$$\forall x \in S^0, x \neq 0 \;\; \text{имеет место} \;\; V(x) < c \;\; \text{и} \;\; \dot{V}(x) < 0, \tag{3}$$

где $c > 0$ — некоторая константа.

Получаемая оценка зависит как от выбора числа $c$, так и от самой функции Ляпунова. Число $c$ имеет смысл выбирать наибольшим возможным; его точное значение определяется функцией Ляпунова. В то же время выбор функции Ляпунова $V$ в (3) является произвольным.

Рассмотрим семейство функций $V(x, p)$ с параметром $p \in R^m$. Пусть при всех $p \in P$ функция $V_p(x) = V(x, p)$ является функцией Ляпунова для уравнения (1), т.е. является знакоопределенной и имеет знакоопределенную производную. Тогда можно поставить задачу найти параметры $p^*$ такие, что

$$Q[V(x, p^*)] = \max_{p \in P} Q[V(x, p)], \tag{4}$$

где $Q$ — функционал, определяющих качество получаемой оценки. Обозначим через $S_p$ оценку области притяжения, соответствующую функции $V_p$ и максимально возможному для этой функции числу $c$.

Распространенным подходом [6] является выбор параметров $p$ исходя из требований задач устойчивости либо удобства вычислений. В частности, используется априорное задание знакоопределенной части $\dot{V}$ и минимизация нормы коэффициентов "хвоста" этой функции:

$$P = \left\{ p : \dot{V}(x, p) = -x^T A x + \sum_{i+j+\ldots+k \geq 3} g_{ij\ldots k} x_1^i x_2^j \ldots x_n^k \right\} \quad Q[V(x, p)] = \sum_{i+j+\ldots+k \geq 3} g_{ij\ldots k}^2, \tag{5}$$

где $A$ — заранее заданная положительно-определенная матрица, например единичная, а $g_{ij\ldots k} = g_{ij\ldots k}(p)$ — соответствующие коэффициенты в разложении $\dot{V}$. Несмотря на относительную простоту, такой подход нельзя назвать удовлетворительным, поскольку критерии подобного рода в общем случае не связаны с видом и прочими характеристиками получаемой оценки.

Поскольку область притяжения (и ее оценка) характеризуют допустимые начальные возмущения, при которых система (1) возвращается в пределе к стационарному режиму, можно записать следующее требование к функционалу $Q$: пусть $p_1$ и $p_2$ — пара допустимых наборов параметров функции Ляпунова, и пусть $S_{p_1} \neq S_{p_2}$. Тогда

$$S_{p_1} \subset S_{p_2} \Rightarrow Q[V(x, p_1)] < Q[V(x, p_2)]. \tag{6}$$

Следует отметить что функционал (5) требованию (6) в общем случае не удовлетворяет.

Естественным и достаточно распространенным в литературе критерием, соответствующем условию (6), является выбор в качестве $Q$ меры получаемой оценки $S_p$. Именно такой выбор функционала качества оценки рассматривается в настоящей работе.

**Постановка задачи**. Однородное уравнение Дуффинга имеет вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \delta \frac{du}{dt} + \beta u + \alpha u^3 = 0. \tag{7}$$

Будем предполагать что $\delta > 0$, $\beta > 0$, $\alpha < 0$. Заменой $t = \sqrt{\beta}\tau$, $u = \dfrac{\beta}{\sqrt{|\alpha|}} y$ приводим уравнение (7) к виду

$$\ddot{y} + a\dot{y} + y - y^3 = 0, \tag{8}$$

где $a = \dfrac{\delta}{\sqrt{\beta}}$, а точкой обозначено дифференцирование по $\tau$. При сделанных предположениях нулевое решение этого уравнения асимптотически устойчиво. Уравнение (8) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - x_1 + x_1^3 \end{aligned} \tag{9}$$

где $x = (y, \dot{y})$.

**Методика вычислений.** Поскольку точное вычисление числа $c$, за исключением случаев простейших систем и квадратичных функций Ляпунова, не представляется возможным, вычисление проводились численными методами.

Вычисление значения $Q[V(x,p)]$ производится в два этапа. На первом этапе вычисляется оценка максимального числа $c$ для заданной функции, на втором оценивается собственно значение $c$. Оценка $c$ производится путем последовательного сужения интервала $(c_{\min}, c_{\max})$ так, чтобы на каждой итерации $c_{\min} \le c < c_{\max}$. Для получения нового значения $c_{\min}$ либо $c_{\max}$ выполняется бисекция интервала $c_m = \frac{1}{2}(c_{\min} + c_{\max})$ и для значения $c = c_m$ проверяется выполнение условий (3) в точках сетки

$$G = \{x_1 = ih, x_2 = jh, \ldots, x_n = kh; \quad i, j, \ldots, k \in Z, h > 0\}. \tag{10}$$

Далее для решения оптимизационной задачи (4) использовалась реализация симплексного метода Нелдера-Мида [8] из пакета GNU Scientific Library.

**Полиномиальные функции Ляпунова.** Рассмотрим функцию Ляпунова в виде полинома с неопределенными коэффициентами

$$V_m(x) = V_m^{(2)}(x) + V_m^{(4)}(x) + \ldots + V_m^{(m)}(x), \qquad V_m^{(p)}(x) = \sum_{i+j+\ldots+k=p} b_{ij\ldots k}^{(p)} x_1^i x_2^j \ldots x_n^k, \tag{11}$$

ее производную в силу системы также можно записать в полиномиальном виде

$$\dot{V}_m(x) = \dot{V}_m^{(2)}(x) + \dot{V}_m^{(3)}(x) + \ldots + \dot{V}_m^{(m+2)}(x), \tag{12}$$

где $\dot{V}_m^{(p)}(x)$ содержит слагаемые p-го порядка в представлении $\dot{V}_m(x)$. Поскольку нулеворе решение системы (8) является асимптотически устойчивым по первому приближению, то для того чтобы $V$ была функцией Ляпунова для уравнения (8), достаточно выбрать $\dot{V}_m^{(2)}(x)$ определенно-отрицательной и вычислить соответствующим образом коэффициенты $V_m^{(2)}(x)$ [9]. В качестве параметров оптимизации $p_i$ рассматриваются перенумерованные соответствующим образом коэффициенты $b_{ij\ldots k}^{(m)}$ полинома (11), соответственно множество $P$ определяется условием отрицательной определенности $\dot{V}_m^{(2)}$, которое для рассматриваемой системы имеет простой вид $b_{20} < 0$, $b_{20}b_{02} - b_{11}^2 > 0$.

Построение полиномиальных функций производится последовательным повышением степени $m$ полинома, при этом в качестве начальных значений для оптимизации $V_{m+2}$ берутся коэффициенты оптимальной $V_m$, дополненные соответствующим количеством нулей: $b_{ij\ldots k}^{(m+2)} = b_{ij\ldots k}^{m}$ при $i + j + \ldots + k \le m$, $b_{ij\ldots k}^{(m+2)} = 0$ при $i + j + \ldots + k = m + 2$. В качестве начальных для квадратичной функции выбираются такие $b_{ij\ldots k}^{(2)}$, которые бы обеспечивали $\dot{V}_2^{(2)}(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Приведем результаты, полученные для системы (8) при $a = 1$. Для квадратичной функции $V_2$ максимум $Q$ достигается при следующих значениях коэффициентов:

$$b_{20} = 1.76 \qquad b_{11} = 1.74 \qquad b_{02} = 0.873$$

площадь оценки при этом составляет $Q[V_2] = 6.42$. Эти значения являются начальными для функции $V_4$. В результате решения соответствующей оптимизационной задачи (4) для $V_4$ получаем такие значения коэффициентов:

$$b_{20} = 1.80, \quad b_{11} = 1.78, \quad b_{02} = 0.892, \quad b_{40} = 0.00237,$$
$$b_{31} = 0.0140, \quad b_{22} = -0.0711, \quad b_{13} = 0.00881, \quad b_{04} = 0.0180,$$

соответствующее им значение $c_4 = 1.858$, площадь оценки $Q[V_4] = 6.95$. Наконец, для функции $V_6$ получаем следующие значения:

$$b_{20} = 1.790, \quad b_{11} = 1.76, \quad b_{02} = 0.883, \quad b_{40} = -0.00606,$$

$b_{31} = 0.0337$, $b_{22} = -0.124$, $b_{13} = 0.00601$, $b_{04} = -0.00730$,
$b_{60} = 0.275$, $b_{51} = 0.0100$, $b_{42} = 0.0356$, $b_{33} = -0.000745$,
$b_{24} = -0.00380$, $b_{15} = 0.00831$, $b_{06} = 0.00390$,

соответствующее значение $c = 1.78$, площадь оценки $Q[V_6] = 8.78$.Производя вычисления для функций $V_8$ и $V_{10}$, отмечаем, что дальнейшее увеличение порядка полинома до 8 и 10 не позволяет увеличить площадь оценки выше 8.80. По этой причине $V_6$ можно считать окончательным результатом оценки области притяжения с использованием полиномиальных функций.

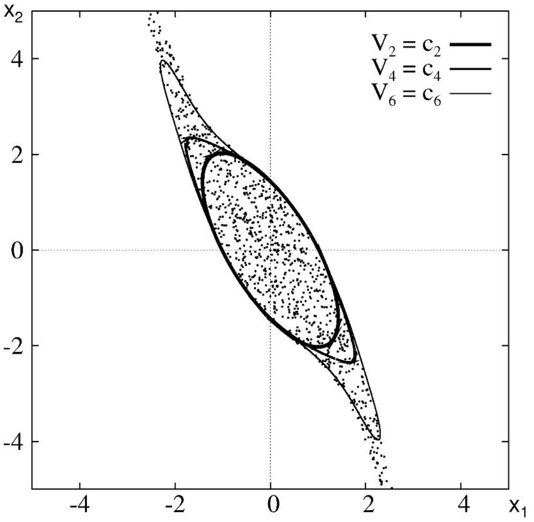

Рис. 1

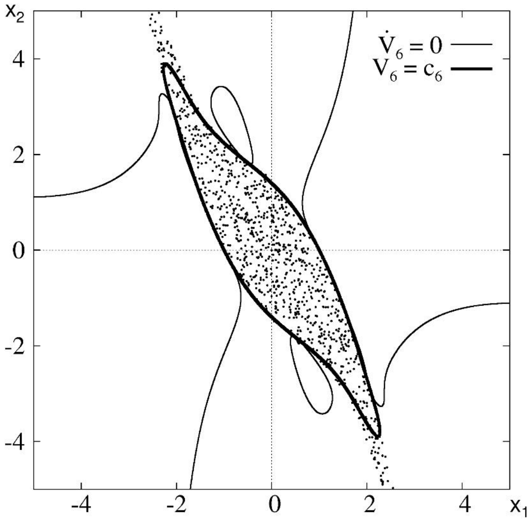

Рис. 2

На рис.1 показаны оценоки области притяжения, соответствующие функциям $V_2$, $V_4$ и $V_6$. Серыми точками указана истинная область притяжения; такое представление для области притяжения было получено путем численного интегрирования системы (8), при этом каждая точка соответствует одному начальному значению. На рис. 2 вместе с оценкой $V_6(x) = c_6$ изображены линии $\dot{V}_6 = 0$. Отметим весьма точное соответствие границе истинной области притяжения в ее центральной части.

Выбор коэффициентов оптимальной $V_m$ в качестве начальных значений для получения $V_{m+2}$ является существенным для получения хорошей оценки области притяжения. В частности, решение задачи (4) для полиномиальной функции 6-го порядка $V_{6*}$ с начальными значениями $b_{20} = 1.5$, $b_{11} = 1.0$, $b_{02} = 1.0$, $b_{ij} = 0$ при $i + j = 4$ или $i + j = 6$ дает оценку с $Q[V_{6*}] = 6.63$, что достаточно далеко от полученного последовательным увеличением степени полинома $Q[V_6] = 8.78$.

**Функция Ляпунова специального вида.** Серьезным препятствием для увеличения порядка полиномиальных функций Ляпунова, а также качества $Q$ оценки при использовании численных алгоритмов является большое количество параметров оптимизации в полиномах высших степеней. Количество параметров влияет не только на вычислительную сложность алгоритмов, но и на количество и характер локальных минимумов, что существенно уменьшает эффективность градиентных методов оптимизации.

В связи с этим обстоятельством перспективным видится использование более специфических для рассматриваемой системы функций Ляпунова вместо весьма общих полиномов. В частности, это касается функций Ляпунова в виде связки интегралов, или близких к ним.

Для уравнения (8) в общем случае неизвестны первые интегралы. Однако если положить $\delta = 0$, то соответствующая механическая система будет консервативной, и для нее можно записать интеграл энергии $\frac{1}{2}(y^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^4) = const$. Дополняя это выражение подходящими, получаем следующую функцию Ляпунова

$$V_s(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^4) + x_1x_2(g_0 + g_1x_1^2) + x_1^4(h_0 + h_1x_1^2), \tag{13}$$

где $g_0$, $g_1$, $h_0$ и $h_1$ рассматриваются в качестве параметров оптимизации. Решая задачу (4) для этой функции, получаем максимум $Q$ при следующих значениях параметров:

$g_0 = 0.640$ $\qquad g_1 = 0.241$

$h_0 = 0.348$ $\qquad h_1 = 0.0342$

Вид соответствующей оценки изображен на рис. 3.

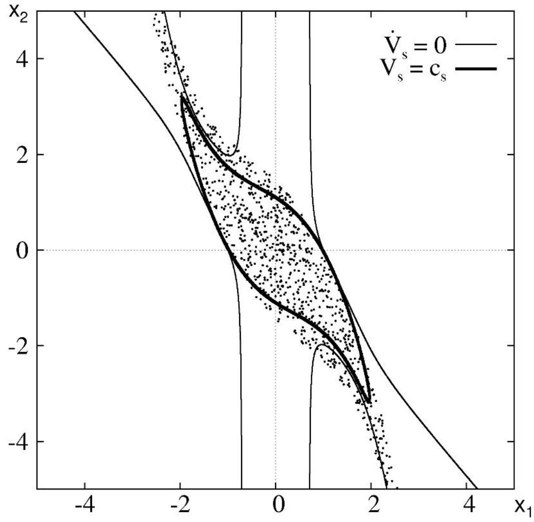

Рис. 3

Следует отметить, что функция (13) имеет гораздо более простой вид и содержит меньшее количество параметров, чем полиномиальная функция той же степени, однако дает оценку сравнимую с полиномиальными функциями 6-го и 8-го порядков. В то же время, возможность построения такой функции сильно зависит от вида конкретной системы, в то время как полиномиальные функции являются в известном смысле универсальными.

**Заключение.** В работе даны оценки областей притяжения для однородного уравнения Дуффинга с использованием полиномиальных функций Ляпунова и функции Ляпунова, близкой к связке интегралов. Эти оценки позволяют сделать некоторые выводы касательно выбора функций Ляпунова, используемых для получения оценок областей притяжения.

Полученные результаты указывают на важность корректного выбора функции Ляпунова при решении задачи об оценке области притяжения. В противовес локальным задачам устойчивости, рассмотрение начальных возмущений вне малой окрестности нуля требует учета членов высших порядков в разложении правых частей уравнений и функции Ляпунова. Кроме того, при получения оптимальных оценок члены высших порядком могут играть определяющую роль.

Предложенная в работе методика численного получения приближенных оценок области притяжения может быть использована не только для однородного уравнения Дуффинга, но для других автономных динамических систем весьма общего вида.

**РЕЗЮМЕ**

Розглянуто проблему оцінки області тяжіння для однорідного рівняння Дуфінга. Оцінка будується за допомогою функції Ляпунова. Ставиться задача вибору оптимальної з точки зору міри відповідної оцінки області притягання функції серед параметричного сім'ї функцій Ляпунова. Запропоновано алгоритм чисельного розв'язку оптимізаційної задачі для динамічних систем з фіксованими коефіцієнтами. Проведено обчислення для поліноміальних функцій Ляпунова різного порядку та функції Ляпунова типу зв'язки інтегралів. Розглянута методика може застосовуватись до аналізу автономних систем з фіксованими коефіцієнтами.

**SUMMARY**

The problem of estimating the region of attraction is considered for unforced Duffing equation. Lyapunov functions are used to obtain the estimates, and the problem of choosing a single function giving the best estimate among a parametric family of Lyapunov function candidates is stated. The criterion for the best Lyapunov function is defined using measure of the resulting estimate. A numerical algorithm for obtaining such estimate is provided, and optimal functions are selected among polynomial functions from 2nd till 6th degree, as well as among a specific family of combination-of-integrals type Lyapunov functions. The presented technique can be used on a wide class of fixed-parameter autonomous dynamic systems.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Genesio R. On the Estimation of Asymptotic Stability Regions: State of the Art and New Proposals / R.Genesio, M.Tartaglia, A. Vicino // IEEE Transactions on Automatic Control, vol.30, no.8, 1985, pp. 747-755.
2. Vannelli A. Maximal Lyapunov Functions and Domains of Attraction for Autonomous Nonlinear Systems / A. Vannelli, M. Vidyasagar // Automatica, vol.21, no.1, 1985, pp. 69-80.
3. Topcu U. Robust Region-of-Attraction Estimation / U. Topcu, A.Packard, P. Seiler, G. Balas // IEEE Transactions on Automatic Control, vol.55, issue 1, 2010, pp.137-142.

4. Kaslik E. Gradual approximation of the domain of attraction by gradual extension of the 'embryo' of the transformed optimal Lyapunov function / E. Kaslik, A. M. Balint, St. Balint // Nonlinear Studies, vol.10, no.1, 2003, pp. 67-78.
5. Weissenberger S. Stability-boundary approximations for relay control systems via a steepest-ascent contruction of Lyapunov functions / Weissenberger S. // Trans. ASME J. Basic Eng., vol. 82, 1966, pp. 419-428.
6. Hachicho O. A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions / O. Hachicho // J. Franklin Institute, vol.344, 2007, pp. 535-552.
7. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М.:Мир, 1980. – 299 с.
8. Nelder J.A. A simplex method for function minimization / J. A. Nelder, R. Mead // Computer Journal, 1965, vol 7, pp.308–313
9. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / Малкин И.Г. – М.:Наука, 1966. – 530 с.


*Поступила в редакцию 05.05.2010 г.*