УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОТВЕРСТИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Р.Н.Нескородев

Введение. Одним из методов исследования напряженно-деформированного состояния двумерных многосвязных анизотропных сред с криволинейными контурами является использование функций, конформно отображающих внешность единичного круга на рассматриваемые области. Для определения отображающих функций областей, ограниченных многоугольниками, используется интеграл Кристоффеля-Шварца. При помощи этого интеграла приближенное значение отображающей функции можно выписать в виде ряда [1]. Сохраняя заданное число членов этого ряда можно получать конформное отображение внешности единичного круга на внешность фигуры, близкой к заданной.

При изучении анизотропных сред возникают дополнительные трудности, обусловленные необходимостью рассмотрения дополнительных областей, получающихся из основной области в результате аффинного преобразования [2].

В этих областях вместо заданных контуров получаются другие. Это приводит к необходимости строить отображающие функции, соответствующие контурам в дополнительных областях, что существенно усложняет процедуру исследований.

Точное решение двумерных задач с отверстием известно только для случая, когда контур отверстия является эллиптическим или круговым. Это связано с тем, что функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура является наиболее простой. Если форма отверстия мало отличается от кругового или эллиптического, то для такого контура в работе [2] предложен приближенный метод, позволяющий свести рассмотрение этой задачи к ряду задач для кругового или эллиптического контура. Другой приближенный метод, основанный на построении отображающих функций внешности единичного круга на внешность контуров в дополнительных областях и установлении зависимостей между соответствующими точками при аффинном и конформном преобразованиях, предложен в статье [3]. Этим методом решен ряд задач для многосвязных областей с криволинейными границами [4]. В работе [5] предложен приближенный метод решения задач для пластины с отверстиями произвольной формы, основанный на аппроксимации границы области криволинейными элементами, в качестве которых выбраны части эллиптических контуров. Недостатком последнего метода является невозможность определения компонент напряженного состояния вблизи мест стыкования контуров.

В данной работе предлагается способ построения гладкого контура произвольной конфигурации с заданной кривизной в любой точке. Метод основан на аппроксимации граничного контура криволинейными элементами, в качестве которых выбираются части контуров окружностей с гладким соединением. Подбором радиусов этих окружностей можно аппроксимировать любую часть граничного контура. В дополнительных областях круговым контурам будут соответствовать эллиптические.

Построение границы области произвольной конфигурации. Предлагается способ построения границы области с помощью криволинейных элементов, в качестве которых используются части круговых контуров с гладким стыкованием. Алгоритм построения такого контура проиллюстрируем на примере, который представлен на рис.1. В основе контура, приведенного на рисунке, лежат части трех окружностей радиуса r_k, центры которых расположены в точках p_k $(k=1,2,3)$. Далее эти окружности, изображенные пунктирными линиями будем именовать по имени их центра – p_k.

Окружности p_k соединяются касательными кривыми f_1f_2, f_3f_4, f_5f_6, образуя замкнутый контур, составляющий границу внешней области. Кривые f_1f_2, f_3f_4, f_5f_6 являются частями круговых контуров заданной кривизны. Предельное положение этих кривых – касательные прямые t_1t_2, t_3t_4, t_5t_6 которые имеет кривизну равную нулю.

На рис. 2 дана схема построения касательной кривой f_1f_2. Найдем координаты точек касания t_1 и t_2. Считаем, что обход по касательной осуществляется от точки t_1 к точке t_2. Радиусы окружностей p_1t_1 и p_2t_2 направлены по нормали к прямой t_1t_2.

© Нескородев Р.Н.

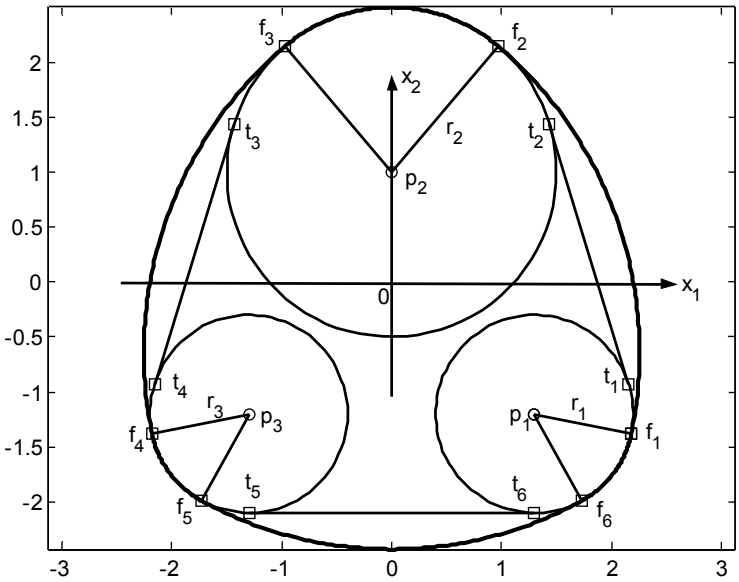

Рис. 1

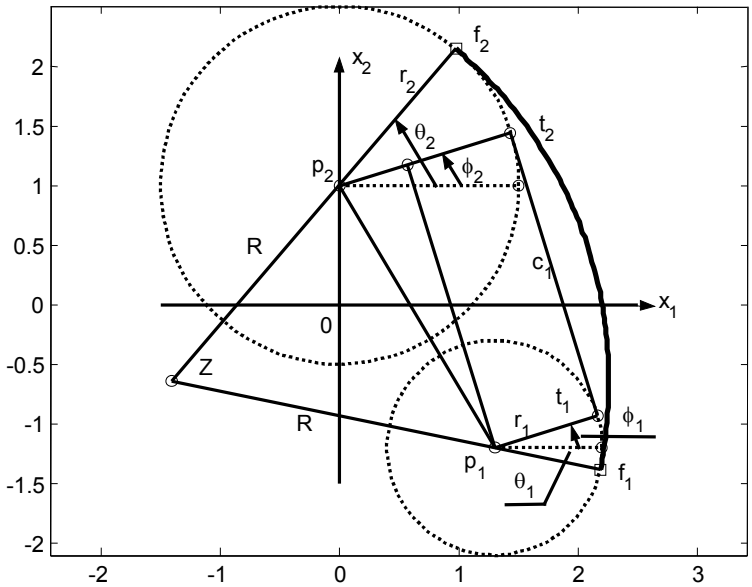

Рис. 2

Единичная нормаль n к прямой, соединяющей точки t_1 и t_2 приведена на рис. 3, а формула для ее вычисления имеет вид

$$n = \cos(nx_2) + i\cos(nx_1) = \frac{dx_2}{ds} - i\frac{dx_1}{ds} = -i\frac{dt}{ds} = i\frac{t_1 - t_2}{|t_1 - t_2|}.$$

Здесь $ds = c_1 = |t_1 - t_2| = \sqrt{|p_1 - p_2|^2 - |r_1 - r_2|^2}$, что следует из рис. 2. Координаты точек t_1 и t_2 определяются из уравнений

$$t_1 = p_1 + nr_1 = p_1 + ir_1\frac{t_1 - t_2}{c_1}, \quad t_2 = p_2 + nr_2 = p_2 + ir_2\frac{t_1 - t_2}{c_1},$$

и имеют вид

$$t_1 = \frac{p_1c_1 + ip_1r_2 - ir_1p_2}{c_1 - i(r_1 - r_2)}, \quad t_2 = \frac{p_2c_1 + ip_1r_2 - ir_1p_2}{c_1 - i(r_1 - r_2)}.$$

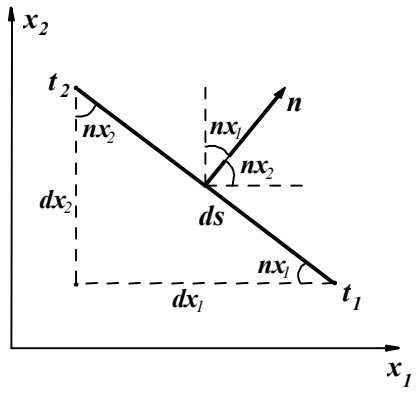

Рис. 3

Таким образом, найдены координаты точек t_1 и t_2 лежащие на касательной линии, соединяющей окружности p_1 и p_2. Очевидно, что кривизна этой линии равна нулю. Если необходимо, чтобы линия $f_1 f_2$, соединяющая окружности p_1 и p_2 была частью окружности заданной кривизны K_1, нужно провести соответствующие построения (рис. 2). Для выполнения этих построений воспользуемся уравнениями круговых контуров p_1, p_2 и Z, которые запишем в комплексной форме:

$$t = p_1 + r_1\sigma, \quad t = p_2 + r_2\sigma, \quad t = Z + R\sigma, \quad (1)$$

где t – аффикс точки на окружности, а $\sigma = e^{i\theta}$ – аффикс точки на единичном круге. Координата центра касательной окружности Z подлежит определению, а радиус R определяется через заданную кривизну K по формуле $R = 1/K$.

Зная координаты точек t_1 и t_2 из первых двух уравнений (1) найдем

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* = e^{i\phi_1} = \frac{t_1 - p_1}{r_1} = \frac{t_2 - p_2}{r_2}, \quad \phi_1 = \phi_2 = -i\ln\frac{t_1 - p_1}{r_1}.$$

Этот угол будем рассматривать как начальное приближение при определении углов θ_1 и θ_2. Если кривизна касательной линии, соединяющей окружности p_1 и p_2 не равна нулю, то точками касания будут точки, помеченные на рис. 1 и рис. 2 аффиксами f_1 и f_2. Из соотношений (1), для точек f_1 и f_2 находим

$$f_1 = p_1 + r_1\sigma_1, \quad f_2 = p_2 + r_2\sigma_2, \quad f_1 = Z + R\sigma_1, \quad f_2 = Z + R\sigma_2, \quad (2)$$

где $\sigma_1 = e^{i\theta_1}$, $\sigma_2 = e^{i\theta_2}$, а θ_1 и θ_2 – углы соответствующие точкам касания f_1 и f_2.

Уравнения (2) и сопряженные им позволяют выразить величины Z и σ_2 через σ_1 по формулам:

$$Z = p_1 + (r_1 - R)\sigma_1, \quad \sigma_2 = \frac{p_1 - p_2 + (r_1 - R)\sigma_1}{r_2 - R}, \quad (3)$$

и получить уравнение для нахождения σ_1

$$k_1\sigma_1^2 + k_2\sigma_1 + k_3 = 0,$$

где

$$k_1 = (\overline{p_1} - \overline{p_2})(R - r_1), \quad k_3 = (p_1 - p_2)(R - r_1),$$
$$k_2 = (r_2 - R)^2 - (p_1 - p_2)(\overline{p_1} - \overline{p_2}) - (r_1 - R)^2.$$

После определения величины $(\sigma_1)_{1,2} = e^{i(\theta_1)_{1,2}}$, находим

$$(\theta_1)_{1,2} = -i\ln(\sigma_1)_{1,2}.$$

Из двух значений $(\theta_1)_{1,2}$ выбираем то, которое ближе к ϕ_1. После определения величины σ_1 из формул (3) находятся Z и σ_2, а из соотношений (2) все остальные компоненты.

Построение касательной линии, иллюстрированное на рис. 2, обобщается на отрезки $f_3 f_4$, $f_5 f_6$.

Таким образом, будем считать, что граница области, изображенной на рис. 1 составлена из элементов $f_1 f_2$, $f_2 f_3$, $f_3 f_4$, $f_4 f_5$, $f_5 f_6$, $f_6 f_1$. Отображающие функции для элементов $f_2 f_3$, $f_4 f_5$, $f_6 f_1$ заданы формулами

$$z = Z_{2\cdot k} + R_{2\cdot k}\varsigma_{2\cdot k} + M_{2\cdot k}/\varsigma_{2\cdot k} \quad (k = 1,2,3). \quad (4)$$

Здесь введены обозначения $Z_{2\cdot k} = p_k$, $R_{2\cdot k} = r_k$, $M_{2\cdot k} = 0$, $\varsigma_{2\cdot k} = r_{2\cdot k}\sigma$, $r_{2\cdot k} \geq 1$, $\sigma = e^{i\theta}$.

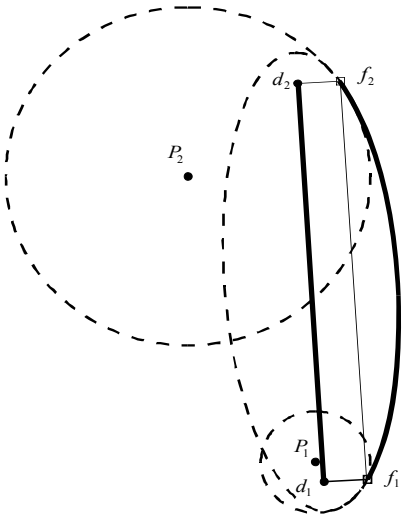

Рис. 4

Для представления функции, аналитической в области внешности кривой $f_1 f_2$ построим эллипс, аппроксимирующий эту кривую. Фокусы этого эллипса должны лежать внутри окружностей p_1 и p_2. Рис. 4 иллюстрирует схему построения такого эллипса. На расстоянии β от точек f_1 и f_2 на прямых, нормальных к линии $f_1 f_2$ находятся точки d_1 и d_2. Величина β принимается равной $\alpha \min(r_1, r_2)$, где $\alpha < 1$ – управляющий параметр. Точки d_1 и d_2. являются фокусами эллипса, аппроксимирующего кривую линию $f_1 f_2$. Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность построенного эллипса имеет вид [5]

$$z = Z_1 + R_1 \varsigma_1 + M_1 / \varsigma_1, \tag{5}$$

где

$$Z_1 = (d_1 + d_2)/2, \; R_1 = (d_1 - d_2)(1+\varepsilon)/4,$$

$$M_1 = (d_1 - d_2)(1-\varepsilon)/4, \; \varepsilon \text{ – малая величина.}$$

Аналогичные построения проводятся и для кривых $f_3 f_4$, $f_5 f_6$

$$z = Z_{2\cdot k-1} + R_{2\cdot k-1}\, \varsigma_{2\cdot k-1} + M_{2\cdot k-1} / \varsigma_{2\cdot k-1}, \quad (k = 2,3). \tag{6}$$

Представления (4), (5) и (6) используются для построения отображающих функций внешности единичного круга на внешность эллипсов в дополнительных областях S_j. Эти функции будут такими:

$$z_j = Z_{jr} + R_{jr}\, \varsigma_{jr} + M_{jr} / \varsigma_{jr} \quad \left(j = 1,2,3; r = \overline{1,6}\right). \tag{7}$$

Здесь принято

$$R_{jr} = \left[R_r + \overline{M}_r - i\mu_j \left(R_r - \overline{M}_r\right)\right]/2, \quad \left|\varsigma_{jr}\right| \ge 1,$$

$$M_{jr} = [\overline{R}_r + M_r + i\mu_j (\overline{R}_r - M_r)]/2, \quad Z_{jr} = \mathrm{Re}(Z_r) + \mu_j \,\mathrm{Im}(Z_r).$$

Построенные функции дают возможность представить решение для задачи о напряженном состоянии около заданного контура.

Замкнутый контур, составленный из элементов $f_r f_{r+1}$, будем называть макроконтуром.

Составлена программа, которая позволяет проводить такие построения, когда число окружностей p_k макроконтура может быть произвольным. Исследуемый объект может содержать непересекающиеся макроконтуры и отдельно стоящие эллиптические контуры.

Постановка и решение упругой задачи. В качестве примера используем предложенный подход при решении задач геомеханики для исследования закономерностей распределения напряжений в горных породах с протяженными параллельными горизонтальными выработками произвольного сечения под воздействием сил собственного веса.

Отнесем массив горных пород, который представляем в виде полупространства к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$.Начало системы поместим на глубине H, ось Ox_2 направим вертикально вверх, а плоскость Ox_1x_3 совместим с горизонтальной плоскостью, параллельной плоскости, ограничивающей полупространство.

Считаем, что свойства материала, из которого состоят породы, различны в разных направлениях и для описания их используем модель упругого анизотропного тела. Предполагаем линейную связь между напряжениями и деформациями, выраженную обобщенным законом Гука.

Протяженные в направлении оси Ox_3 параллельные выработки на некотором расстоянии от краев находятся в одинаковых условиях. В случае общей анизотропии – это условия обобщенной плоской де-

формации. Компоненты перемещений и напряжений не меняются вдоль оси Ox_3 и зависят только от координат x_1 и x_2.

Перемещения и напряжения нетронутого массива определяются из соотношений [6]

$$u_k^0 = \alpha_k \ \rho\, g\left(x_2^2 / 2 - Hx_2\right) \quad \left(k = \overline{1,3}\right), \quad \sigma_p^0 = \tau_p \ \rho\ g\left(x_2 - H\right) \quad \left(p = \overline{1,6}\right).$$

где величины τ_p зависят от упругих постоянных материала; ρ – плотность породного массива; g – ускорение силы тяжести.

Задача об упругом равновесии такого массива горных пород приводится к определению в областях S_j функций $\Phi_j\left(z_j\right)$, удовлетворяющих граничным условиям. Для каждого элемента L_r контура границы будем ставить в соответствие комплексные потенциалы

$$\Phi_{jr} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rkj} / \varsigma_{jr}^k \ .$$

Если контуры выработок содержат N элементов, то комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$ будут представлены в виде суммы функций по всем элементам:

$$\Phi_j\left(z_j\right) = \sum_{r=1}^{N} \Phi_{jr} = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{rkj} / \varsigma_{jr}^k . \tag{8}$$

Граничным условиям нужно удовлетворить на каждом из $r = \overline{1,N}$ элементов. Для массива с неподкрепленными выработками, эти условия на r-м элементе имеют вид [6]

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} a_{jr}\Phi'_j = P_{1r}, \quad 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} b_{jr}\Phi'_j = P_{2r}, \quad 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} c_{jr}\Phi'_j = P_{3r}. \tag{9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_{jr} = d_{jr}\mu_j, \quad b_{jr} = d_{jr}, \quad c_{jr} = d_{jr}\lambda_j \quad (j = 1, 2), \quad a_{3r} = d_{3r}\mu_3\lambda_3, \quad b_{3r} = d_{3r}\lambda_3,$$
$$c_{3r} = d_{3r}, \quad d_{jr} = n_{1r}\mu_j - n_{2r}, \quad P_{1r} = \left(\tau_1 n_{1r} + \tau_6 n_{2r}\right)\rho g H\left(1 - x_2 / H\right), \tag{10}$$
$$P_{2r} = -\left(\tau_6 n_{1r} + \tau_2 n_{2r}\right)\rho g H\left(1 - x_2 / H\right), \quad P_{3r} = -\left(\tau_5 n_{1r} + \tau_4 n_{2r}\right)\rho g H\left(1 - x_2 / H\right),$$

$n_{1r} = \cos\left(n_r, x_1\right)$, $n_{2r} = \cos\left(n_r, x_2\right)$, n_r – внешняя нормаль к контуру L_r.

Решение задачи о напряженно – деформированном состоянии массива горных пород с выработками свелось к определению комплексных коэффициентов $\alpha_{rkj} = \alpha_{rkj}^1 + i\alpha_{rkj}^2$ функций (8) из граничных условий (9). Сведение этой задачи к решению систем алгебраических уравнений проведем методом наименьших квадратов. Подставим представления (8) в условия (9). В результате на граничной линии получим отличные от нуля невязки с вещественными коэффициентами α_{rkj}^1 и α_{rkj}^2

$$R_1 = \sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_{rkj}^1 A_{rkj}^1 + \alpha_{rkj}^2 A_{rkj}^2\right) - P_{1r}\right], \tag{11}$$

$$R_2 = \sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_{rkj}^1 B_{rkj}^1 + \alpha_{rkj}^2 B_{rkj}^2\right) - P_{2r}\right], \quad R_3 = \sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_{rkj}^1 C_{rkj}^1 + \alpha_{rkj}^2 C_{rkj}^2\right) - P_{2r}\right].$$

Здесь введены обозначения

$$A_{rkj}^1 = 2\,\mathrm{Re}\, a_{jr}\varphi_{jrk}, \quad A_{rkj}^2 = 2\,\mathrm{Re}\, i a_{jr}\varphi_{jrk}, \quad B_{rkj}^1 = 2\,\mathrm{Re}\, b_{jr}\varphi_{jrk},$$

$$B_{rkj}^2 = 2\,\mathrm{Re}\, i b_{jr}\varphi_{jrk}, \quad C_{rkj}^1 = 2\,\mathrm{Re}\, c_{jr}\varphi_{jrk}, \quad C_{rkj}^2 = 2\,\mathrm{Re}\, i c_{jr}\varphi_{jrk}, \tag{12}$$

$$\varphi_{jrk} = \frac{d}{dz_j}(\varsigma_{jr}^{-k}) = -\frac{k}{(R_{jr}\varsigma_{jr}^2 - M_{jr})}\frac{1}{\varsigma_{jr}^{k-1}}.$$

В методе наименьших квадратов коэффициенты α_{rkj}^1 и α_{rkj}^2 определяются исходя из условия минимума функционала на граничной линии $\partial\Omega$. Функционал в данном случае отражает минимизацию суммы квадратов невязок (11) и имеет вид:

$$J = \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{3} R_i^2\left(x_{1m}, x_{2m}, \alpha_{rkj}^1, \alpha_{rkj}^2\right) \to \min .$$

Здесь (x_{1m}, x_{2m}) – система точек, заданная на граничной линии; величина M определяет количество этих точек.

Удовлетворяя условиям

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{lpi}^1} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_{lpi}^2} = 0 \quad \left(l = \overline{1,N};\ p = \overline{1,\infty};\ i = \overline{1,3}\right),$$

получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов α_{rkj}^1 и α_{rkj}^2. Эта система, с учетом соотношений (11), имеет вид:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\Big[\alpha_{rkj}^1\left(A_{mrkj}^1 A_{mlpi}^1 + B_{mrkj}^1 B_{mlpi}^1 + C_{mrkj}^1 C_{mlpi}^1\right) +$$

$$+\alpha_{rkj}^2\left(A_{mrkj}^2 A_{mlpi}^1 + B_{mrkj}^2 B_{mlpi}^1 + C_{mrkj}^2 C_{mlpi}^1\right)\Big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{M}\left[P_{1lm} A_{mlpi}^1 + P_{2lm} B_{mlpi}^1 + P_{3lm} C_{mlpi}^1\right], \tag{13}$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}\Big[\alpha_{rkj}^1\left(A_{mrkj}^1 A_{mlpi}^2 + B_{mrkj}^1 B_{mlpi}^2 + C_{mrkj}^1 C_{mlpi}^2\right) +$$

$$+\alpha_{rkj}^2\left(A_{mrkj}^2 A_{mlpi}^2 + B_{mrkj}^2 B_{mlpi}^2 + C_{mrkj}^2 C_{mlpi}^2\right)\Big] =$$

$$= \sum_{m=1}^{M}\left[P_{1lm} A_{mlpi}^2 + P_{2lm} B_{mlpi}^2 + P_{3lm} C_{mlpi}^2\right] \quad \left(l = \overline{1,N};\ i = \overline{1,3};\ p = \overline{1,\infty}\right).$$

Величины A_{rkj}^n, B_{rkj}^n, C_{rkj}^n и P_{jr} определяемые соотношениями (12) и (10), помечены здесь также индексом m, который означает зависимость их от системы точек (x_{1m}, x_{2m}) на границе области. Эта зависимость устанавливается через функцию φ_{jrk} (12) посредством отображения (7), а также через величины a_{jr}, b_{jr} и c_{jr}, определяемые соотношениями (10). После нахождения коэффициентов $\alpha_{rkj} = \alpha_{rkj}^1 + i\alpha_{rkj}^2$ из системы алгебраических уравнений (13) становятся известными функции $\Phi_j(z_j)$. Перемещения и напряжения, возникающие в массиве, определяются из соотношений [6]

$$u_k = u_k^0 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} R_{kj}\Phi_j\left(z_j\right) \quad \left(k = \overline{1,3}\right), \quad \sigma_p = \sigma_p^0 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} P_{pj}\Phi_j'\left(z_j\right) \quad \left(p = \overline{1,6}\right).$$

Эти представления удовлетворяют системе дифференциальных уравнений теории упругости анизо-

тропного тела.

Напряжения, действующие на контуре или вблизи контура выработки на площадках, касательных и нормальных к нему вычисляются по формулам

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_{1r}^2 + 2\sigma_6 n_{1r} n_{2r} + \sigma_2 n_{2r}^2, \quad \sigma_{tt} = \sigma_1 n_{2r}^2 - 2\sigma_6 n_{1r} n_{2r} + \sigma_2 n_{1r}^2,$$

$$\sigma_{nt} = (\sigma_2 - \sigma_1) n_{1r} n_{2r} + \sigma_6 \left(n_{1r}^2 - n_{2r}^2\right), \quad \sigma_{nx_3} = \sigma_5 n_{1r} + \sigma_4 n_{2r},$$

$$\sigma_{tx_3} = \sigma_5 n_{2r} - \sigma_4 n_{1r}.$$

Пусть горный массив имеет горизонтальную выработку в форме квадрата с закругленными углами со стороной равной двум единицам. Для численных исследований использовались упругие постоянные, полученные на образцах донбасского алевролита [7]:

$$E_1 / E = 1.074, \quad E_2 / E = 0.523, \quad G_2 / E = 0.120, \quad \nu_1 = 0.413, \quad \nu_2 = 0.198,$$

$$E = 9.81 \times 10^4 \, МПа; \ \rho = 2500 \, кг/м^3.$$

На рис.5 изображены графики распределения напряжений $\sigma_\theta / (\rho g H)$ у контура выработки с гладкой аппроксимацией угловой точки частью окружности с кривизной $K = 1.5$. На рис. 6 даны графики распределения тех же напряжений, когда $K = 50$. Цифрами на рисунках указаны элементы L_r $\left(r = \overline{1,8}\right)$, составляющие граничный контур. Напряжения на прямолинейных участках изображены сплошными, а на закругленных углах – пунктирными линиями.

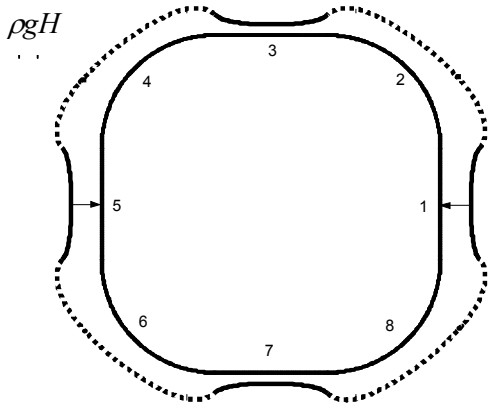

Рис. 5

Полученные напряжения являются сжимающими. Сравнение графиков показывает, что наиболее равномерное распределение напряжений наблюдается для выработки с малыми значениями кривизны элементов, соединяющих прямолинейные участки выработки. При увеличении кривизны в этих участках значения напряжений $\sigma_\theta / (\rho g H)$ растут. Максимальные и минимальные значения этих величин для элементов границы приведены в табл. 1 для контуров с различными значениями кривизны K.

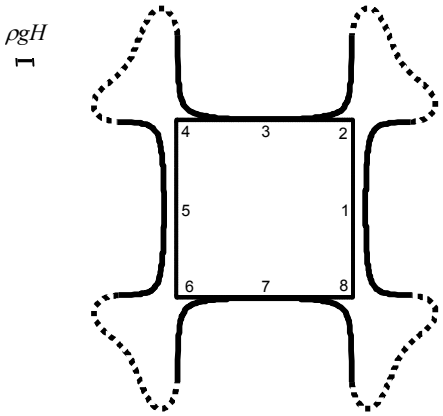

Рис. 6

Таблица 1

Величины	K					
	1	1.5	5	10	50	100
$\max(\sigma_\theta/(\rho g H))$	-1.157	-0.626	-0.196	-0.126	-0.071	-0.064
$\min(\sigma_\theta/(\rho g H))$	-2.877	-2.699	-3.924	-5.515	-12.871	-19.026

Аналогичным образом предложенная методика построения гладкого контура произвольной конфигурации может быть использована и при решении других плоских задач, например, для тонких пластин с отверстиями и др. Метод позволяет строить контуры, обладающие различными свойствами, и открывает возможность для поиска оптимальных форм граничных контуров.

РЕЗЮМЕ

У роботі запропонован метод побудови гладкого контуру довільної конфігурації із заданою кривизною в будь-якій точці. Метод заснований на апроксимації граничного контуру криволінійними елементами, у якості яких обираються частини контурів кіл із гладким стикуванням. Підбором параметрів кола можна апроксимувати будь-яку частину граничного контуру. Як приклад, запропонований підхід використано для дослідження напруженого стану гірничих порід з протяжною горизонтальною виробкою квадратного перерізу під дією сил власної ваги.

SUMMARY

This paper presents a method for constructing a smooth contour of an arbitrary configuration with a given curvature at any point. The method is based on the approximation of the boundary contour of curved elements, which are selected as part of the contours of the circles with a smooth join. Selection of parameters of the circle can be approximated by any part of the boundary contour. As an example, the proposed approach is used to investigate the stress state of rocks with a long drift square section under its own weight.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – К.: Наукова думка, 1968. – 887 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г.Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
3. Космодамианский А.С. Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластике с криволинейным отверстием / А.С.Космодамианский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1965. – № 2. – С.35-42.
4. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С.Космодамианский. – К. – Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
5. Нескородев Н.М. Метод граничных элементов в задачах о напряженном состоянии анизотропной пластинки с отверстиями / Н.М.Нескородев // Теоретическая и прикладная механика. – 1993. – № 24. – С.44-50.
6. Нескородев Н.М. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве / Н.М.Нескородев, Р.Н.Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
7. Ержанов Ж.С. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве / Ж.С.Ержанов, Ш.М.Айталиев, Ж.К.Масанов. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.

Поступила в редакцию 28.04.2010 г.