

УДК 531.38

**ЛИНЕЙНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА БАРНЕТТА-ЛОНДОНА**

*А.В.Мазнев*

**Введение.** Впервые гиромагнитные эффекты были обнаружены в 1916 г. в опытах Эйнштейна и де Газа. Проводившиеся опыты состояли в следующем. Внутри соленоида на нити подвешивали железный цилиндр и намагничивали его пропусканьем электрического тока через соленоид. При изменении направления электрического тока на противоположное, цилиндр начинал вращаться вокруг оси намагничивания с некоторой угловой скоростью. Такое явление характерно для любого вещества, являющегося ферромагнетиком, и объясняется наличием у него спонтанной намагниченности. Согласно гипотезе Вейсса, ввиду доменной структуры ферромагнетика спонтанная намагниченность в различных участках тела направлена по-разному и в отсутствии внешнего магнитного поля ферромагнетик не намагничен. Однако, при внесении его даже в слабое магнитное поле, напряженность которого составляет некоторый угол с вектором намагниченности, магнитные силы будут стремиться повернуть вектор намагниченности в направлении поля. Но магнитный момент связан с механическим моментом. Поэтому намагничивание вещества, т.е. появление результирующего магнитного момента единицы объема, связано с появлением соответствующего момента количества движения, и обратно. В современной трактовке указанные эффекты связывают с именами Барнетта [1] и Лондона [2], которые проделали многочисленные опыты и получили значения многих физических параметров.

Таким образом, эффект Барнетта-Лондона состоит в том, что при быстром вращении «нейтральный» ферромагнетик (т.е. не проявляющий первоначально своих ферромагнитных свойств) становится намагниченным вдоль оси вращения. Возникающая при вращении намагниченность линейно зависит от угловой скорости тела [1-3]. Механический момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться по направлению к вектору напряженности. В результате, как показано, например, в работе [3], взаимодействие намагниченности, вызванной его вращением, с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля.

**Постановка задачи.** Уравнения движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона изучались в работах [4-10] и других. Используя векторную запись, имеем следующие уравнения

$$A\dot{\bar{\omega}} = (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \times \bar{\omega} + \bar{s} \times \bar{v} + B\bar{\omega} \times \bar{v} + \bar{v} \times C\bar{v}, \tag{1}$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{\omega}. \tag{2}$$

Система (1),(2) в отличие от классической задачи имеет только два интеграла

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = 1, \quad (A\bar{\omega} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{v} = k. \tag{3}$$

В формулах (1)-(3) введены обозначения:  $\bar{\omega}$  – угловая скорость гиростата;  $\bar{v}$  – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля;  $\bar{\lambda}$  – гиростатический момент;  $\bar{s}$  – вектор обобщенного центра масс;  $B$  и  $C$  – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительно производную.

Если  $B = 0$  и  $C = 0$ , то есть матрицы нулевые, то из (1)-(3) получим уравнения классической задачи, то есть уравнения Эйлера-Пуассона.

Рассмотрим условия существования линейного инвариантного соотношения (ИС) для уравнений движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона (1),(2). В качестве основных переменных примем компоненты  $x_1, x_2, x_3$  вектора момента количества движения  $\bar{x} = A\bar{\omega}$  и компоненты  $v_1, v_2, v_3$  единичного вектора  $\bar{v}$ , указывающего направление магнитного поля. Тогда скалярные уравнения получим из уравнений (1),(2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & (a_{33} - a_{22})x_2x_3 + a_{13}x_1x_2 + a_{23}(x_2^2 - x_3^2) - a_{12}x_1x_3 + \\ & + x_1(b_{21}v_3 - b_{31}v_2 + \lambda_2a_{13} - \lambda_3a_{12}) + x_2(b_{22}v_3 - b_{32}v_2 + \lambda_2a_{23} - \\ & - \lambda_3a_{22}) + x_3(b_{23}v_3 - b_{33}v_2 + \lambda_2a_{33} - \lambda_3a_{23}) + s_2v_3 - s_3v_2 + \\ & + C_{13}v_1v_2 + C_{23}(v_2^2 - v_3^2) + (C_{33} - C_{22})v_2v_3 - C_{12}v_1v_3, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & (a_{11} - a_{33})x_3x_1 + a_{12}x_2x_3 + a_{13}(x_3^2 - x_1^2) - a_{23}x_1x_2 + \\ & + x_1(b_{31}v_1 - b_{11}v_3 + \lambda_3a_{11} - \lambda_1a_{13}) + x_2(b_{32}v_1 - b_{12}v_3 + \lambda_3a_{12} - \\ & - \lambda_1a_{23}) + x_3(b_{33}v_1 - b_{13}v_3 + \lambda_3a_{13} - \lambda_1a_{33}) + s_3v_1 - s_1v_3 + \\ & + C_{12}v_2v_3 + C_{13}(v_3^2 - v_1^2) + (C_{11} - C_{33})v_1v_3 - C_{23}v_1v_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = & (a_{22} - a_{11})x_1x_2 + a_{23}x_1x_3 + a_{12}(x_1^2 - x_2^2) - a_{13}x_2x_3 + \\ & + x_1(b_{11}v_2 - b_{21}v_1 + \lambda_1a_{12} - \lambda_2a_{11}) + x_2(b_{12}v_2 - b_{22}v_1 + \lambda_1a_{22} - \\ & - \lambda_2a_{12}) + x_3(b_{13}v_2 - b_{23}v_1 + \lambda_1a_{23} - \lambda_2a_{13}) + s_1v_2 - s_2v_1 + \\ & + C_{23}v_1v_3 + C_{12}(v_1^2 - v_2^2) + (C_{22} - C_{11})v_1v_2 - C_{13}v_2v_3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 = & x_1(a_{13}v_2 - a_{12}v_3) + x_2(a_{23}v_2 - a_{22}v_3) + x_3(a_{33}v_2 - a_{23}v_3), \\ \dot{v}_2 = & x_1(a_{11}v_3 - a_{13}v_1) + x_2(a_{12}v_3 - a_{23}v_1) + x_3(a_{13}v_3 - a_{33}v_1), \\ \dot{v}_3 = & x_1(a_{12}v_1 - a_{11}v_2) + x_2(a_{22}v_1 - a_{12}v_2) + x_3(a_{23}v_1 - a_{13}v_2). \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (4)-(7) введены обычные обозначения:  $a = (a_{ij})$ ,  $B = (B_{ij})$ ,  $C = (C_{ij})$ ,  $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ,  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , а через  $b_{ij}$  обозначены выражения

$$\begin{aligned} b_{11} = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + a_{13}B_{13}, & \quad b_{12} = a_{12}B_{11} + a_{22}B_{12} + a_{23}B_{13}, \\ b_{13} = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12} + a_{33}B_{13}, & \quad b_{21} = a_{11}B_{12} + a_{12}B_{22} + a_{13}B_{23}, \\ b_{22} = a_{12}B_{12} + a_{22}B_{22} + a_{23}B_{23}, & \quad b_{23} = a_{13}B_{12} + a_{23}B_{22} + a_{33}B_{23}, \\ b_{31} = a_{11}B_{13} + a_{12}B_{23} + a_{13}B_{33}, & \quad b_{32} = a_{12}B_{13} + a_{22}B_{23} + a_{23}B_{33}, \\ b_{33} = a_{13}B_{13} + a_{23}B_{23} + a_{33}B_{33}. \end{aligned} \quad (8)$$

Первые интегралы (3) запишем в скалярном виде

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad (x_1 + \lambda_1)v_1 + (x_2 + \lambda_2)v_2 + (x_3 + \lambda_3)v_3 = k. \quad (9)$$

Рассмотрим условия существования у системы (4)-(7) одного линейного ИС. Подвижную систему координат гиростата выберем так, чтобы ИС имело вид

$$x_1 = g_0 + g_1v_1 + g_2v_2 + g_3v_3. \quad (10)$$

**Условия существования ИС (10). Редукция системы (4)-(7).** В данной работе для уравнений (4)-(7) решена задача определения условий существования ИС (10). В работе [4] рассмотрен частный случай, когда центр масс гиростата направлен по первой оси, то есть  $\bar{s} = (s_1, 0, 0)$ .

Вычислим производную от соотношения (10) после подстановки в него (10) в силу уравнений (4)-(7) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по  $x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$ . Тогда получим следующие условия

$$a_{12} = a_{23} = 0, \quad a_{33} = a_{22}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s_2 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad b_{23} = 0, \quad b_{32} = 0, \quad g_2 = 0, \\ g_1 = -\frac{1}{2a_{22}}(b_{22} + b_{33}), \quad g_3 = -\frac{a_{13}}{2a_{22}^2}(b_{22} + b_{33}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_{13}g_0 = \lambda_3a_{22}, \quad b_{22}(a_{22}^2 - a_{13}^2) = b_{33}(a_{22}^2 + a_{13}^2), \\ C_{23} = C_{12} = 0, \quad C_{13} + g_1(g_3a_{11} - g_1a_{13} - b_{31}) = 0, \\ C_{33} - C_{22} + g_3(g_3a_{11} - g_1a_{13} - b_{31}) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$s_3 - g_0(g_3 a_{11} - g_1 a_{13} - b_{31}) = 0. \quad (14)$$

В силу  $g_2 = 0$  ИС (10) упрощается

$$x_1 = g_0 + g_1 v_1 + g_3 v_3, \quad (15)$$

где  $g_0, g_1, g_3$  удовлетворяют условиям из (12).

Из условий (11) следует, что первая координатная ось, относительно которой задано ИС (10), перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида и плоскости, проходящей через неподвижную точку (т.е. имеем аналог условий В.Г. Гесса [11]). В силу равенств  $s_2 = 0, \lambda_2 = 0$ , которые следуют из системы (12), векторы центра масс и гиросtatического момента принадлежат главной плоскости гирационного эллипсоида (и, как следствие этого факта, эллипсоида инерции). На основании условий (11) компоненты матрицы  $b_{ij}$  из равенств (8) принимают значения

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} B_{11} + a_{13} B_{13}, & b_{12} &= a_{22} B_{12}, & b_{13} &= a_{13} B_{11} + a_{22} B_{13}, \\ b_{21} &= a_{11} B_{12} + a_{13} B_{23}, & b_{22} &= a_{22} B_{22}, & b_{23} &= a_{13} B_{12} + a_{22} B_{23}, \\ b_{31} &= a_{11} B_{13} + a_{13} B_{33}, & b_{32} &= a_{22} B_{23}, & b_{33} &= a_{13} B_{13} + a_{22} B_{33}. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу условий (12),(16) компоненты матрицы  $B$  удовлетворяют условиям

$$B_{23} = B_{12} = 0. \quad (17)$$

Из равенств (13) вытекает, что компоненты матрицы  $C$  удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (17) для матрицы  $B$ . Равенство (14) показывает, что в общем случае центр масс гиростата не лежит на первой оси.

На основании условий (11)-(17) можно записать уравнение класса Т.Леви-Чивиты

$$\begin{aligned} & [x_1 - (g_0 + g_1 v_1 + g_3 v_3)] \bullet = \\ & = [x_1 - (g_0 + g_1 v_1 + g_3 v_3)] [a_{13} x_2 + (g_3 a_{11} - g_1 a_{13} - b_{31}) v_2]. \end{aligned}$$

С помощью первых интегралов (9) систему шести уравнений (4)-(7) на инвариантном соотношении (15) приведем к системе третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2-v_3^2}} [a_{13} v_3 x_3^2 + (\alpha_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 v_1^2 + \alpha_4 v_1^2 + \\ & + \alpha_4 v_1 v_3 + \alpha_5 v_3^2) x_3 + \beta_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_3 + \beta_3 v_1 v_3 + \beta_4 v_1^2 + \beta_5 v_3^2 + \\ & + \beta_6 v_1^3 + \beta_7 v_3^3 + \beta_8 v_1^2 v_3 + \beta_9 v_1 v_3^2], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2-v_3^2}} [a_{22} (1-v_1^2) x_3 + a_{13} g_0 + a_{13} g_1 v_1 + (a_{13} g_3 - k a_{22}) v_3 + \\ & + a_{22} g_0 v_1 v_3 - a_{13} g_0 v_1^2 - a_{13} g_1 v_1^3 - a_{13} g_3 v_3^3 - b_{33} v_1^2 v_3], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2-v_3^2}} [-(a_{13} - a_{13} v_1^2 - a_{13} v_3^2 + a_{22} v_1 v_3) x_3 - a_{11} g_0 + \\ & + (k a_{22} - a_{11} g_1) v_1 - a_{11} g_3 v_3 + (a_{11} - a_{22}) g_0 v_1^2 + g_0 a_{11} v_3^2 - a_{22} \lambda_3 v_1 v_3 + \\ & + (a_{11} - a_{22}) g_1 v_1^3 + a_{11} g_3 v_3^3 + (a_{11} - a_{22}) g_3 v_1^2 v_3 + a_1 g_1 v_1 v_3^2], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_{13} - ka_{13}, & \alpha_1 &= a_{13}g_0, & \alpha_2 &= \lambda_3 a_{13} - \lambda_1 a_{22} - (a_{22} - a_{11})g_0, \\ \alpha_3 &= a_{13}g_1 - b_{13}, & \alpha_4 &= b_{22} + a_{13}g_3 - (a_{22} - a_{11})g_1, \\ \alpha_5 &= -b_{13} - (a_{22} - a_{11})g_3, \\ \beta_0 &= k(a_{22} - a_{11})g_0 + ka_{22}\lambda_1 + s_1 + g_0b_{11}, \\ \beta_1 &= k(a_{22} - a_{11})g_1 - kb_{22} - g_0^2(a_{22} - a_{11}) - g_0\lambda_1 a_{22} + b_{11}g_1 + C_{22} - C_{11}, \\ \beta_2 &= k(a_{22} - a_{11})g_3 - g_0(a_{22} - a_{11})\lambda_3 - a_{22}\lambda_1\lambda_3 + g_3b_{11} - C_{13}, \\ \beta_3 &= -2g_0g_3(a_{22} - a_{11}) - \lambda_1 a_{22}g_3 - \lambda_3g_1(a_{22} - a_{11}) + \lambda_3b_{22}, \\ \beta_4 &= -2g_0g_1(a_{22} - a_{11}) + g_0(b_{22} - b_{11}) - \lambda_1g_1a_{22} - s_1, \\ \beta_5 &= -\lambda_3g_3(a_{22} - a_{11}) - s_1 - b_{11}g_0, \\ \beta_6 &= -g_1^2(a_{22} - a_{11}) + g_1(b_{22} - b_{11}) - C_{22} + C_{11}, \\ \beta_7 &= C_{13} - g_3b_{11}, \\ \beta_8 &= -2g_1g_3(a_{22} - a_{11}) + g_3(b_{22} - b_{11}) - C_{13}, \\ \beta_9 &= -g_3^2(a_{22} - a_{11}) + b_{11}g_1 - C_{22} + C_{11}. \end{aligned}$$

После интегрирования системы (18)-(20) переменную  $v_2$  получим из формулы  $v_2 = \sqrt{1 - v_1^2 - v_3^2}$ , переменную  $x_1$  из формулы (15), а переменную  $x_2$  из формулы  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2 - v_3^2}}(k - \lambda_1 v_1 - v_3(x_3 + \lambda_3))$ . Таким образом, интегрирование уравнений движения гири (4)-(7) на линейном инвариантном соотношении (10) сведено к интегрированию системы третьего порядка (18)-(20).

Отметим, что при  $a_{13} = 0$  из равенств (12) вытекает, что  $g_3 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$ ,  $b_{22} = b_{33}$ , а из равенств (13) следует условие  $C_{33} = C_{22}$ . Значения (16) значительно упрощаются

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}B_{11}, & b_{12} &= 0, & b_{13} &= a_{22}B_{13}, & b_{21} &= 0, \\ b_{22} &= a_{22}B_{22}, & b_{23} &= 0, & b_{31} &= a_{11}B_{13}, & b_{32} &= 0, & b_{33} &= a_{22}B_{33}. \end{aligned} \tag{21}$$

Следовательно для матрицы  $B$  имеет место наряду с условиями (17) условие  $B_{22} = B_{33}$ .

Инвариантное соотношение (15) примет вид

$$x_1 = g_0 + g_1 v_1 \tag{22}$$

**Сравнение полученных результатов с известными результатами [12,13].** Представляет большой интерес сравнить найденные условия существования линейного ИС для уравнений (4)-(7) с условиями для уравнений Кирхгофа-Пуассона [12,13]. Запишем эти уравнения в виде

$$\dot{\vec{x}} = (\vec{x} + \vec{\lambda}) \times \vec{x} + a\vec{x} \times B^* \vec{v} + \vec{s} \times \vec{v} + \vec{v} \times C \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = \vec{v} \times a\vec{x} \tag{23}$$

Выпишем условия существования ИС (10) для уравнений (23) [12,13]

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{23} = 0, & a_{22} &= a_{23}, & \lambda_2 &= 0, & a_{13}g_0 - a_{22}\lambda_3 &= 0, & g_2 &= B_{12}^*, \\ a_{13}g_1 - a_{22}g_3 + a_{22}B_{13}^* &= 0, & a_{13}g_2 + a_{22}B_{23}^* &= 0, \\ a_{13}g_3 + a_{22}g_1 + a_{22}B_{33}^* &= 0, & a_{22}g_1 - a_{13}g_3 + a_{22}B_{22}^* &= 0, \\ s_2 &= g_0(a_{13}B_{23}^* + a_{11}g_2), & s_3 &= g_0(a_{11}g_3 - a_{13}g_1 - a_{13}B_{22}^*), \\ C_{12} + g_1(a_{13}B_{23}^* + a_{11}g_2) &= 0, & C_{13} + g_1(a_{11}g_3 - a_{13}g_1 - a_{13}B_{22}^*) &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$C_{23} + g_2(a_{11}g_3 - a_{13}g_1 - a_{13}B_{22}^*) = 0, \quad C_{23} + g_3(a_{13}B_{23}^* + a_{11}g_2) = 0,$$

$$C_{22} - C_{33} = a_{11}(g_3^2 - g_2^2) - a_{13}(g_1g_3 + g_3B_{22}^* + g_2B_{23}^*).$$

В равенствах (24) приняты такие же обозначения, как и в уравнении (1), исключая матрицу  $B^*$ . То есть это позволяет сравнить условия (11)-(14),(17) и условия (24). Прежде всего, следует отметить, что условия на компоненты гирационного эллипсоида  $a_{ij}$  одинаковые. Сравнение указанных условий приводит к следующим выводам: в условиях (12)  $s_2 = 0$ , а в условиях (24)  $s_2$  в общем случае отлично от нуля; компонента  $\lambda_2$  в обоих случаях равна нулю; компоненты матриц  $B$  и  $B^*$  удовлетворяют разным условиям (например, условий (17) в равенствах (24) нет); компоненты матрицы  $C$  также подчинены разным условиям.

Наглядными являются отличия не только в условиях на параметры задач (1), (2) и (23), но и в структуре ИС (10). Например, в задаче о движении тела гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона при  $a_{13} = 0$  ИС принимает вид (22), а компоненты матриц  $C$  и  $B^*$  удовлетворяют равенствам  $C_{22} = C_{33}$ ,  $B_{22}^* = B_{33}^*$ . В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемой уравнениями Кирхгофа-Пуассона (23) при  $a_{13} = 0$  ИС (10) имеет вид

$$x_1 = g_0 - B_{22}^*v_1 + B_{12}^*v_2,$$

а условия существования этого ИС отличаются от условий существования ИС (22). Если в этой задаче предполагать, что  $a_{13} \neq 0$ , то ИС (10), как показано в работе [13], таково

$$x_1 = \frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}} - \frac{1}{2}(B_{22}^* + B_{33}^*)v_1 + \frac{a_{22}(B_{22}^* - B_{33}^*)}{2a_{13}}v_3. \quad (25)$$

К аналогичной структуре на основании (12) можно привести ИС (15)

$$x_1 = \frac{a_{22}\lambda_3}{a_{13}} - \frac{1}{2a_{22}}(b_{22} + b_{33})v_1 + \frac{b_{22} - b_{33}}{2a_{13}}v_3. \quad (26)$$

Однако значения  $B_{22}^*$ ,  $B_{33}^*$  заменяются не на соответствующие значения  $B_{22}^*$ ,  $B_{33}^*$ , а на  $\frac{b_{22}}{a_{22}}$  и  $\frac{b_{33}}{a_{22}}$ .

Общим свойством ИС (25),(26) является отсутствие слагаемого, содержащего переменную  $v_2$ .

Проведенные сравнения условий существования ИС (10) в двух задачах (1),(2) и (23) носят аналитический характер, который не влияет на принципиальные вопросы редуцированных систем: в задаче (1),(2) редуцированная система имеет третий порядок; в задаче (23) редуцированная система имеет второй порядок [12,13].

Таким образом, в работе найдены условия существования линейного инвариантного соотношения уравнений движения гиростата в магнитном поле, которые обобщают условия [4]. Инвариантное соотношение обладает свойством инвариантного соотношения, которое введено Т. Леви-Чивитой [14], то есть производная от заданного ИС в силу уравнений движения обращается в нуль на этом ИС. Применяемый метод отличается от метода П.В. Харламова [15,16].

## РЕЗЮМЕ

Отримані умови існування лінійного інваріантного співвідношення рівнянь руху гіростату в магнітному полі сил, з урахуванням ефекту Барнетта-Лондона.

## SUMMARY

We discovered the conditions of linear invariant correlation's existence of equations of gyrostat's movement in the magnetic field taking into consideration Barnett-London's effect which generalize the conditions.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Barnett S.I. Rev. Modern Phys. / S.I. Barnett. – 1935. – V.7. – P.129-137.
2. London F. Superfluids / F. London., H. London // I. N. Y., Wiley. Inc. – 1950. – 372 p.
3. Урман Ю.М. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе / Ю.М. Урман // Докл. АН СССР. – 1984. – Т.276, № 6. – С.23-33.
4. Горр Г.В. О линейном инвариантном соотношении в задаче о движении гиростата в магнитном поле / Г.В.Горр // Прикл. математика и механика. – 1997. – Т. 61, вып. 4. – С.566-569.
5. Горр Г.В. Об одном классе полиномиальных решений в задаче о движении гиростата в магнитном поле / Г.В.Горр, Н.Г. Суворова // Прикл. математика и механика. – 1997. – Т.61, вып.5. – С.781-787.
6. Зыза А.В. О полиномиальных решениях уравнений движения гиростата в магнитном поле / А.В.Зыза // Механика твердого тела. – 2003. – Вып.33. – С.61-70.
7. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле / В.В.Козлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. - № 6. – С.28-33.
8. Миронова Е.М. О решении уравнений движения в магнитном поле на основе полиномиальных решений / Е.М.Миронова // Прикл. механика. – 2001. – Т.37, вып. 2. – С.105-113.
9. Самсонов В.А. О вращении тела в магнитном поле / В.А.Самсонов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. - № 4. – С.32-34.
10. Ткаченко Н.В. Некоторые классы прецессионных движений твердого тела в магнитном поле / Н.В Ткаченко. // Механика твердого тела. – 1997. – Вып.29. – С.26-30.
11. Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math. Ann. – 1890. – В.37, Н.2. – S.153-181.
12. Горр Г.В. О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Г.В. Горр, Е.К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2005. – Т.67, вып.6. – С.931-939.
13. Узбек Е.К. Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Е.К. Узбек, Е.А. Данилейко // Механика твердого тела. – 2004. – Вып.34. – С.87-94.
14. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики в 2-х т. / Т. Леви-Чивита, У. Амальди – М.: Изд-во иностр. литер., – 1951. – Т. 2, ч.2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 555 с.
15. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып.6. – С.15-24.
16. Харламов П.В. Об алгебраических инвариантных соотношениях уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку / П.В.Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып.6. – С.25-33.

*Поступила в редакцию 30.04.2010 г.*