

УДК 539.3

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ КОЛЬЦОМ

С.А.Калоеров, Д.А.Добряк

В работе [1] предложены методы решения задач теплопроводности и термоупругости для многосвязных пластин, основанные на использовании комплексных потенциалов, даны решения ряда задач для пластин с отверстиями. В статьях [2, 3] на основе этих методов разработаны подходы приближенного решения задач термоупругости для пластинки с упругими ядрами или кольцами. В данной статье получено точное решение задачи для изотропной пластинки с одним круговым кольцом. Последнее может быть использовано в качестве эталонного для сравнения результатов, получаемых при решении различных задач термоупругости для кусочно-однородных пластин.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную изотропную пластинку с круговым кольцом из другого материала, находящегося с пластинкой в условиях идеального теплового и механического контакта. Обозначим области, занимаемые пластинкой и кольцом, через S и S^1 , контуры кольца и их радиусы – через L_0 , L_1 и R_0 , R_1 (рис. 1). Внутренний контур кольца теплоизолирован или на нем задана постоянная температура, которую, не теряя общности, будем полагать равной нулю. Пластинка на бесконечности находится под действием однородного потока тепла плотности q , направленного под углом α к оси Ox .

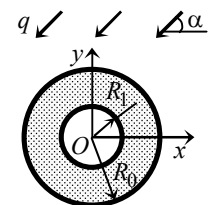


Рис. 1

Определение температурных полей в пластинке и в кольце сводится к нахождению комплексных потенциалов теплопроводности из условий [1, 2] идеального теплового контакта пластинки и кольца

$$2 \operatorname{Re} \left[F(z) - F^1(z) \right] = -\frac{q \cos \alpha}{k} x - \frac{q \sin \alpha}{k} y, \\ 2 \operatorname{Re} \left[i \left(k F(z) - k^1 F^1(z) \right) \right] = q y \cos \alpha - q x \sin \alpha \text{ на } L_0, \tag{1}$$

и условий на внутреннем контуре кольца

$$2 \operatorname{Re} \left[F^1(z) \right] = 0 \text{ на } L_1, \tag{2}$$

если на нем задана нулевая температура, или

$$2 \operatorname{Re} \left[i F^1(z) \right] = 0 \text{ на } L_1, \tag{3}$$

если он теплоизолирован. Здесь k , k^1 – коэффициенты теплопроводности материалов пластинки и кольца; $F(z)$ и $F^1(z)$ – функции, голоморфные соответственно в областях S и S^1 . Здесь и далее величины с верхним индексом 1 относятся к кольцу, без верхнего индекса – к пластинке.

Определение напряженного состояния рассматриваемой кусочно-однородной среды сводится к нахождению комплексных потенциалов термоупругости из граничных условий [1]

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \varphi^1(t) + t \overline{\varphi'^1(t)} + \overline{\psi^1(t)}, \\ \varkappa \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + \beta \int F(z) dz + 2\mu (u^* + iv^*) = \\ = \frac{\mu}{\mu^1} \left[\varkappa^1 \varphi^1(t) - t \overline{\varphi'^1(t)} - \overline{\psi^1(t)} + \beta^1 \int F^1(z) dz \right] \text{ на } L_0, \tag{4}$$

$$\varphi^1(t) + t \overline{\varphi'^1(t)} + \overline{\psi^1(t)} = 0 \text{ на } L_1, \tag{5}$$

где

$$\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu), \quad \mu = E/2(1 + \nu), \quad \beta = 2\alpha_T E/(1 + \nu),$$

$$u^*(x, y) = \frac{q\alpha_T}{k} \left(\frac{\cos \alpha}{2} x^2 - \frac{\cos \alpha}{2} y^2 + \sin \alpha xy \right),$$

$$v^*(x, y) = \frac{q\alpha_T}{k} \left(\frac{\sin \alpha}{2} y^2 - \frac{\sin \alpha}{2} x^2 + \cos \alpha xy \right),$$

E , ν и α_T – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения для материала.

Решение задачи теплопроводности. Комплексные потенциалы теплопроводности для пластинки и кольца представим в виде [1]

$$F(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{1n}}{z^n}, \quad (6)$$

$$F^1(z) = c_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{0n}^1 z^n + \frac{c_{1n}^1}{z^n} \right]. \quad (7)$$

Подставляя функции (6) и (7) в граничные условия (1) – (3) и используя метод рядов, получаем, что $c_0 = c_0^1 = c_{1n} = c_{0n}^1 = c_{1n}^1 = 0$ ($n \neq 1$), а для определения постоянных c_{11} , c_{01}^1 и c_{11}^1 находим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_{11} - \bar{c}_{01}^1 R_0^2 - c_{11}^1 = -\frac{qR_0^2}{2k} (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

$$ikc_{11} + ik^1 \bar{c}_{01}^1 R_0^2 - ik^1 c_{11}^1 = -\frac{qR_0^2}{2} (\sin \alpha - i \cos \alpha), \quad \bar{c}_{01}^1 = \frac{pc_{11}^1}{R_1^2}, \quad (8)$$

где $p = -1$, если на L_1 задана нулевая температура, или $p = 1$, если этот контур теплоизолирован.

Решая систему (8), найдем

$$c_{11} = \frac{qR_0^2 e^{i\alpha} \left(pR_0^2 [k - k^1] + R_1^2 [k + k^1] \right)}{2k \left(pR_0^2 [k + k^1] + R_1^2 [k - k^1] \right)},$$

$$c_{11}^1 = \frac{qR_0^2 R_1^2 e^{i\alpha}}{pR_0^2 [k + k^1] + R_1^2 [k - k^1]},$$

$$c_{01}^1 = \frac{pqR_0^2 e^{-i\alpha}}{pR_0^2 [k + k^1] + R_1^2 [k - k^1]}. \quad (9)$$

Следовательно, для комплексных потенциалов имеют место выражения

$$F(z) = \frac{c_{11}}{z}, \quad F^1(z) = c_{01}^1 z + \frac{c_{11}^1}{z}. \quad (10)$$

Зная функции (10), можно вычислять температуру и поток тепла [1]

$$T(x, y) = \frac{q}{k} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + 2 \operatorname{Re} F(z),$$

$$q_n = -q (\cos \alpha \cos nx + \sin \alpha \cos ny) - 2k \operatorname{Re} [i \delta F'(z)],$$

где $\delta = dz/ds$, в пластинке и по аналогичным формулам в кольце.

Решение задачи термоупругости. В рассматриваемом случае комплексные потенциалы термоупругости для пластинки и кольца имеют вид [1]

$$\varphi(z) = B_1 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1n}}{z^n}, \quad \psi(z) = \bar{B}_1 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{1n}}{z^n}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi^1(z) &= B^1 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{0n}^1 z^n + \frac{a_{1n}^1}{z^n} \right), \\ \psi^1(z) &= \bar{B}^1 \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_{0n}^1 z^n + \frac{d_{1n}^1}{z^n} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$B_1 = -\frac{\alpha_T E c_{11}}{2}, \quad B^1 = -\frac{\alpha_T^1 E^1 c_{11}^1}{2}.$$

Подставляя функции (11), (12) в граничные условия (4), (5) и используя метод рядов, получаем, что все постоянные, кроме d_{12} , a_{02}^1 , d_{12}^1 , равны нулю, а для определения этих постоянных имеет место система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \bar{d}_{12} - R_0^4 a_{02}^1 - \bar{d}_{12}^1 &= R_0^2 (\bar{B}^1 - \bar{B}_1), \\ -\bar{d}_{12} - \frac{\mu}{\mu^1} \alpha^1 R_0^4 a_{02}^1 + \frac{\mu}{\mu^1} \bar{d}_{12}^1 &= R_0^2 \left(\bar{B}_1 - \frac{\mu}{\mu^1} \bar{B}^1 \right) - \frac{\mu R_0^4 \alpha_T e^{-i\alpha}}{k} + \frac{\mu \beta^1 R_0^4 c_{01}^1}{2\mu^1}, \\ R_1^4 a_{02}^1 + \bar{d}_{12}^1 &= -R_1^2 \bar{B}^1, \end{aligned} \quad (13)$$

решая которую найдем

$$\begin{aligned} d_{12} &= \frac{\bar{g} R_0^8 + 2k\bar{h} R_0^6 + \mu\bar{s} R_1^2 R_0^4 + 2B_1 k R_1^4 R_0^2 (\mu_1 - \mu)}{t}, \\ a_{02}^1 &= \frac{g R_0^4 + 2k R_0^2 \bar{B}^1 (\mu - \mu^1) + 2R_1^2 k \bar{B}^1 (\mu^1 - \mu)}{t}, \\ d_{12}^1 &= \frac{-\bar{w} R_1^2 R_0^4 - 2R_1^4 R_0^2 k B^1 (\mu - \mu^1)}{t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g &= \mu (2\alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha} - \beta^1 k c_{01}^1), \quad h = \mu \bar{B}^1 + \mu \alpha^1 \bar{B}^1 - \mu^1 \bar{B}_1 - \mu \alpha^1 \bar{B}_1, \\ s &= R_1^2 \beta^1 k c_{01}^1 - 2k \bar{B}^1 - 2R_1^2 \alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha} - 2\bar{B}^1 k \alpha^1, \\ t &= 2k (\mu^1 R_0^4 - \mu^1 R_1^4 + \mu \alpha^1 R_0^4 + \mu R_1^4), \\ w &= 2\bar{B}^1 k \mu \alpha^1 + 2\mu^1 k \bar{B}^1 + 2R_1^2 \mu \alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha} - R_1^2 \mu \beta^1 k c_{01}^1. \end{aligned}$$

Следовательно, окончательный вид комплексных потенциалов термоупругости такой:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= B_1 \ln z, \quad \psi(z) = \bar{B}_1 \ln z + \frac{d_{12}}{z^2}, \\ \varphi^1(z) &= B^1 \ln z + a_{02}^1 z^2, \quad \psi^1(z) = \bar{B}^1 \ln z + \frac{d_{12}^1}{z^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Зная функции (14), можно найти напряжения по формулам [1]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z),$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

в пластинке и по аналогичным формулам в кольце.

При $R_1 = 0$ и $R_1 = R_0$ из приведенного выше следуют соответственно решения задач для случаев пластинки с упругим ядром и отверстием.

Для пластинки с ядром ($R_1 = 0$) имеем

$$c_{11} = \frac{qR_0^2 e^{i\alpha} (k - k^1)}{2k(k + k^1)}, \quad c_{11}^1 = 0, \quad c_{01}^1 = \frac{q e^{-i\alpha}}{k + k^1};$$

$$B_1 = -\frac{\alpha_T E c_{11}}{2}, \quad B^1 = 0,$$

$$d_{12} = \frac{R_0^2 (\bar{g} R_0^2 - 2k B_1 (\mu^1 + \mu \alpha^1))}{2k(\mu^1 + \mu \alpha^1)},$$

$$a_{02}^1 = \frac{g}{2k(\mu^1 + \mu \alpha^1)}, \quad d_{12}^1 = 0,$$

$$g = \mu(2\alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha} - \beta^1 k c_{01}^1).$$

Для функций (10) и (14) получим

$$F(z) = \frac{c_{11}}{z}, \quad F^1(z) = c_{01}^1 z;$$

$$\varphi(z) = B_1 \ln z, \quad \psi(z) = \bar{B}_1 \ln z + \frac{d_{12}}{z^2},$$

$$\varphi^1(z) = a_{02}^1 z^2, \quad \psi^1(z) = 0.$$

В случае пластинки с круговым отверстием ($R_1 = R_0$) находим

$$c_{11} = \frac{qR_0^2 e^{i\alpha} (p[k - k^1] + [k + k^1])}{2k(p[k + k^1] + [k - k^1])},$$

$$c_{11}^1 = \frac{qR_0^2 e^{i\alpha}}{p[k + k^1] + [k - k^1]}, \quad c_{01}^1 = \frac{pq e^{-i\alpha}}{p[k + k^1] + [k - k^1]};$$

$$B_1 = -\frac{\alpha_T E c_{11}}{2}, \quad B^1 = -\frac{\alpha_T^1 E^1 c_{11}^1}{2},$$

$$d_{12} = \frac{R_0^2 (\bar{g} R_0^2 + 2k \bar{h} + \mu \bar{s} + 2B_1 k (\mu_1 - \mu))}{2k\mu(\alpha^1 + 1)},$$

$$a_{02}^1 = \frac{2\alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha} - \beta^1 k c_{01}^1}{2k(\alpha^1 + 1)}, \quad d_{12}^1 = -\frac{R_0^2 (\bar{w} + 2k B^1 (\mu - \mu^1))}{2k\mu(\alpha^1 + 1)},$$

$$g = \mu(2\alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha} - \beta^1 k c_{01}^1), \quad h = \bar{B}^1 \mu (1 + \alpha^1) - \bar{B}_1 (\mu^1 + \mu \alpha^1),$$

$$s = -2k \bar{B}^1 (1 + \alpha^1) + R_0^2 (\beta^1 k c_{01}^1 - 2\alpha_T \mu^1 e^{-i\alpha}),$$

$$w = 2k\bar{B}^1 (\mu\bar{\epsilon}^1 + \mu^1) + \mu R_0^2 (2\mu^1 \alpha_T e^{-i\alpha} - \beta^1 k c_{01}^1).$$

Комплексные потенциалы теплопроводности и термоупругости имеют соответственно вид (10) и (14).

Описание и анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования напряженного состояния для пластинки из изотропного материала КАСТ-В, для которого [4]

$$k = 0,2095 \text{ Вт/(м·К)}, \quad E = 138,7 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,12, \quad \alpha_T = 3 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1},$$

когда поток тепла направлен по оси Oy (рис. 2), т.е. когда угол $\alpha = \pi/2$. Считалось, что коэффициенты теплопроводности и деформации (величина, обратная модулю Юнга) материала кольца связаны с аналогичными величинами материала пластинки соотношениями

$$k^1 = \lambda_T^1 k, \quad 1/E^1 = \lambda^1/E,$$

где λ_T^1 и λ^1 – соответственно относительные параметры теплопроводности и деформации материала кольца. Считалось, что коэффициенты Пуассона у материалов пластинки и кольца одинаковы ($\nu^1 = \nu$), а коэффициенты линейного теплового расширения связаны друг с другом соотношением $\alpha_T^1 = \lambda^1 \alpha_T$. Ниже описаны некоторые из полученных результатов, причем все значения приведены с точностью до значения плотности потока тепла q как множителя.

В таблице для некоторых значений относительных параметров теплопроводности λ_T^1 и деформации λ^1 приведены значения напряжений σ_s в некоторых точках пластинки вблизи контура кольца в зависимости от отношения R_1/R_0 радиусов его контуров. Значения R_1/R_0 , равные 0 и 1, соответствуют случаям пластинки с упругим ядром и отверстием. В точке A напряжения равны нулю, поэтому в таблице они не даны.

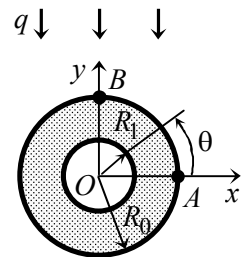


Рис. 2

Таблица

λ_T^1	λ^1	θ , рад.	Величина	R_1/R_0							
				0	0,01	0,1	0,5	0,9	0,99	0,999	1
				На внутреннем контуре кольца $T = 0$							
0,5	0,5	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,650	-0,649	-0,643	-0,421	0,716	1,319	1,393	1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,919	-0,918	-0,910	-0,595	1,013	1,865	1,970	1,981
	2	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,128	-0,128	-0,124	0,014	0,876	1,339	1,395	1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,181	-0,180	-0,176	0,019	1,239	1,894	1,973	1,981
2	0,5	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,102	0,102	0,110	0,330	1,048	1,360	1,397	1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,145	0,145	0,156	0,467	1,482	1,923	1,976	1,981
	2	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,535	0,535	0,541	0,705	1,205	1,380	1,399	1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,757	0,757	0,765	0,997	1,704	1,952	1,979	1,981
				Внутренний контур кольца теплоизолирован							
0,5	0,5	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,650	-0,650	-0,656	-0,827	-1,263	-1,387	-1,400	-1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,919	-0,919	-0,928	-1,169	-1,785	-1,962	-1,980	-1,981
	2	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,128	-0,128	-0,131	-0,292	-1,073	-1,366	-1,398	-1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	-0,181	-0,181	-0,186	-0,413	-1,517	-1,932	-1,977	-1,981
2	0,5	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,102	0,102	0,094	-0,128	-0,945	-1,346	-1,396	-1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,145	0,144	0,133	-0,181	-1,336	-1,904	-1,974	-1,981
	2	$\pi/4$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,535	0,535	0,529	0,323	-0,760	-1,326	-1,393	-1,401
		$\pi/2$	$\sigma_s \cdot 10^2$	0,757	0,756	0,748	0,457	-1,074	-1,875	-1,971	-1,981

Из данных таблицы видно, что подкрепление отверстия упругим кольцом значительно снижает концентрацию напряжений в пластинке. С увеличением ширины кольца (с уменьшением R_1/R_0) значения напряжений уменьшаются. При $R_1/R_0 \leq 0,01$ они оказываются такими же, как в пластинке со сплошным ядром, а при $R_1/R_0 > 0,99$ кольцо не влияет на напряженное состояние пластинки. Если относительный параметр теплопроводности $\lambda_T^1 < 1$ (материал кольца проводит тепло хуже материала пластинки), то значения напряжений в пластинке с кольцом с теплоизолированным внутренним контуром L_1 по модулю больше соответствующих значений напряжений в случае, когда на контуре L_1 задана нулевая температура. Если же $\lambda_T^1 > 1$ (материал кольца лучше проводит тепло, чем материал пластинки), то значения этих величин в случае теплоизолированного контура L_1 по модулю меньше аналогичных значений для случая нулевой температуры на L_1 . Для всех случаев наибольшие по модулю напряжения в пластинке в точке B .

Заметим, что для случая $R_1/R_0 = 0$ значения напряжений совпадают с соответствующими значениями в пластинке с одним упругим ядром [5], а для $R_1/R_0 = 1$ – с их значениями для пластинки с круговым отверстием [6].

РЕЗЮМЕ

З використанням комплексних потенціалів теплопровідності та термопружності та метода рядів знайдено замкнутий розв'язок задачі термопружності для ізотропної пластинки з круговим кільцем у випадку дії на нескінченності однорідного потоку тепла. Чисельними дослідженнями встановлені закономірності зміни термопружного стану пластинки в залежності від ширини кільця та його матеріалу.

SUMMARY

Solution in closed form for the problem of thermoelastic state of isotropic plate with circular ring under uniform heat flow using the complex potentials of thermal conductivity and thermoelasticity and series technique is obtained. Numerical researches are given to determinate the rules of thermoelastic state change depending on width of the ring and the material of it.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – Харьков, Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
2. Калоеров С.А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 77-88.
3. Калоеров С.А. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими кольцами / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 155-168.
4. Амбарцумян С.А. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки / С.А. Амбарцумян, С.М. Дургарьян // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – №3. – С. 120-127.
5. Гайвась И.В. Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока в окрестности макровключений / И.В. Гайвась // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, №2. – С. 81-90.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.

Поступила в редакцию 05.05.2010 г.