

4

# Вісник Донецького університету



НАУКОВИЙ  
ЖУРНАЛ  
*Заснований  
у 1997 році*

---

*Серія А*  
природничі  
науки

2/2005

Частина 1

---

**З М І С Т**

**ЧАСТИНА 1**

**Математика**

Жучок Ю. В. Декомпозиції напівгруп з нулем	7
Силенко В. Є. Задачі про два гіперболічних прямокутника в одиничному крузі	14
Завізіон Г. В. Періодичні розв'язки системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженнями	22
Слепцова І. П. Єдиність та асимптотичні властивості розв'язків крайових задач для еволюційних рівнянь в необмежених нециліндричних областях	28
<b>Механіка</b>	
Кирилюк В. С. Про зв'язок розв'язків контактних задач термпружності для ізотропного та трансверсально-ізотропного півпросторів	37
Васильєв Т. А. Згин трансропних циліндричних тіл з шарнірно закріпленою бічною поверхнею	43
Нескородєв М. М., Нескородєв Р. М. Дія сил ваги в анізотропному масиві гірських порід частково підкріпленою виробкою	48
Кагадій Т. С. Метод збурення в плоских задачах теорії пружності з урахуванням кінцевих деформацій	54
Бороненко О. І. Двовимірна задача магнітопружності для нескінченного тіла з п'єзомагнітним включенням	59
Хорошев К. Г. Термоелектропружний стан скінченної анізотропної пластинки з отворами і тріщинами	67
Мироненко А. Б. Подвійноперіодична задача для в'язкопружної пластинки з жорсткими еліптичними та лінійними включеннями	73
Висоцький Є. М. Поширення тріщини за умов знакозмінного пластичного вигинання стрижня	79
Міронова Є. М. Про одну властивість руху гіростату у випадку двох лінійних інваріантних співвідношень	83
Молочинська Г. І. Про один клас асимптотично – прецесійних рухів сферичного гіростату	88
Веремєєв С. А., Семко О. М. Вплив в'язкості рідини на параметри гідрогармати	94
Ступін О. Б., Оверко В. С. Розповсюдження викидів у атмосфері від джерела змінної інтенсивності у області з складним рельєфом	101

**ЧАСТИНА 2**

**Фізика**

Александров В. Д., Постніков В. А., Соболев О. В. Вплив постійного електричного поля на термодинамічні і кінетичні параметри кристалізації розплавленого діелектрика	105
Полякова Т. А., Бажин А. І. Доменні структури в ультратонких плівках поблизу орієнтаційного фазового переходу	112
Русаков В. Ф., Васильєв С. В., Чабаненко В. В., Шевчик А., Гуттовська М., Шимчак Г., Кодесс Б. М. Теплоємність надпровідного Nb <sub>3</sub> Al	118
Петренко О. Г., Хілько С. Л., Федосєєв Р. О., Тітов Є. В. Вплив механічної дії на структурні властивості твердоподібних систем	122
Кузьменко Г. І., Постан М. Я. Остатистичних квазіциклічних методах довгострокового прогнозування	127
Єршов М. В., Александров В. Д. Термоелектричні властивості порошкових сумішей на основі міді та нікелю	131
Данилов В. В., Жук В. В., Ліпінський О. Ю., Рудякова Г. М. Фізичні основи створення багатоелементних напівпровідникових приймачів випромінювання	135
Самойленко З. О., Івахненко Н. М. Процеси самоорганізації у феритах Mg <sub>0,54</sub> Zn <sub>0,46</sub> Fe <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	157
Буравльов Ю. М., Дем'янюк О. О. Особливості процесів у реакційно-дифузійній зоні при газовій хіміко-термічній обробці металів та сплавів	163
Оболєнський М. О., Вовк Р. В., Бондаренко О. В. Зміна вимірності флуктуаційної парапровідності в ab- площині монокристалів ReBa <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>7-δ</sub> (Re=Y, Ho) стехіометричного складу при температурах вище критичної	171
Белік Т. В., Василенко Д. В., Гунський С. В., Данилов В. В., Долбещенков В. В., Крищенко А. М., Ліпінський О. Ю., Рудякова Г. М. Елементи та пристрої на основі одномодових волоконних світловодів	175
Данилов В. В., Крищенко А. М., Ліпінський О. Ю., Рудякова Г. М. Фізична модель волоконно-оптичної лінії зв'язку	190

**Хімія**

Гетьман Є. І., Марченко В. І., Юровнік О. А., Лобода С. М., Чагір Т. С. Заміщення кальцію і фосфору на лантан і силіцій в гідроксиапатиті	194
Марченко В. І., Пасічник Л. В., Скіпін В. Г. Синтез гідроксиапатиту кальцію для плівок	198
Шендрік О. М., Коротких М. І., Гончаров Є. М., Книшевицький О. В. Квантово-хімічний розрахунок фізико-хімічних параметрів деяких онієвих солей та їх зв'язок з реакційною здатністю	202
Бовкуненко О. П., Мельніченко В. І., Манько К. І., Кітайгородський О. М. Паразаміщенні стиролсульфіди як регулятори довжини полімерного ланцюга в радикальній полімеризації стиролу	207

Беспалько Ю.М., Швед О.М. Роль третинних амінів та амонійних солей в реакції фенолізу епіхлоргідрину	210
Зубкова Ю.М., Шараніна Л.Г., Плевако М.З. Модифікація засобу отримання фульво- та гуматпохідних з природної органічної сировини	216
Антонова А.Л., Басенкова В.Л., Бутюгін О.В., Плевако М.З., Риктор І.А., Узденніков М.Б. Порівняльна характеристика гуматів амонію з різної сировини	219
<b>Біологія</b>	
Іванов С.П., Фатерига О.В., Амолін О.В. Порівняльний аналіз побудови гнізд складчатокрилих ос-жильців <i>ancistrocerus parietinus</i> и <i>symmorphus murarius</i> (hymenoptera: vespidae: eumeninae)	226
Романенко В.О., Кочура Д.А. Нейродинамічні кореляти слухової чутливості в екстра-інтровертів	233
Балакірева Г.А. Оцінка психодинамічних характеристик у тесті «піднятий хрестоподібний лабіринт» на тлі емоційного стресу різної етіології	236
Панфілова С.Г., Соколов В.І. Енергетика м'язового скорочення у білих щурів в динаміці розвитку експериментального гіпертиреозу (дослідження in situ)	240
Федотов О.В. Амінокислотний склад ферментних препаратів каталази істівних лікарських грибів <i>Flammulina velutipes</i> и <i>Pleurotus ostreatus</i>	247
Христова Т.Є. Становлення фітофізіологічних досліджень в північно-східній Україні протягом ХІХ століття	251
Чоха О.В. Синтаксономія рослинності газонів м. Києва. Клас <i>molino-arrhenatheretea</i>	256
Мацюра А.В. Результати систематичних спостережень за нічною міграцією птахів за допомогою радіолокатора	267
Бородавка В.О., Короткова Т.М., Пізюк Н.Г., Зубкова Ю.М., Бутюгін О.В., Буллі В.А., Риктор І.А. Вивчення впливу буровугільних гумінових препаратів на деревинно-чагарникові породи. Повідомлення 2. Вивчення впливу гумату амонію на регенераційну здатність живці та відгук лісових порід до некореневої обробки	273
Щербина Ю.Г. Характеристика букових біогеоценозів з лавровишневим підліском Чорноморського узбережжя Кавказу	279
Щербина В.Г., Щербина Ю.Г. Особливості впливу рекреаційних навантажень на параметри лавровишневого підліску в субтропічних букових біогеоценозах	285
Щербина Ю.Г., Щербина В.Г. Рекреаційні зміни фітоценотичного рангу в субтропічних буково-лавровишневих біогеоценозах Кавказу	290
<b>Екологія та техногенна безпека</b>	
Аверін Г.В., Звягінцева Г.В. Математичні моделі небезпеки і ризику у теорії техногенної безпеки	296
Ісаєва-Парцванія Н.В., Сердюк О.І., Ступін О.Б. Викиди шкідливих речовин при електрохімічній переробці свинцево-кислотних акумуляторів в електролітах на основі кремнефтористоводневої кислоти	303
Петренко Т.В., Сморжевська Т.О., Ступін О.Б. Вплив природи полімеру на процес його взаємодії з похідними важких металів	308
Метлова О.Л. Біологічний ризик: формування, осередки, оцінка	314
Басенкова В.Л., Зубкова Ю.М. Сорбенти для очищення вод від сполук хрому	324
Новічков Ю.А., Петренко Т.В. Зношені автомобільні шини - нова сировина для одержання вуглецевих сорбентів	329
Калініхін О.Н. Паливні брикети на основі сумішей побутового сміття і смолистих відходів коксохімічного виробництва	333
<b>Системи та процеси керування</b>	
Григор'єв О.В. САПР парогазових установок СПРУТ як прототип побудови інтелектуальних САПР по технології МЕО	341
Каргін А.О., Чебанова Є.К. Морфологічний аналіз слів української мови у складі системи термінологічної розмітки електронних документів	355
Каргін А.О., Петренко Т.Г., Ломонос Я.Г. Модель нечіткого тексту в інтелектуальній системі термінологічної розмітки електронних документів	360
Лаздинь С.В., Телятніков О.О. Оптимізація розподілу даних в корпоративних інформаційних системах	365
Фонотов А.М. Паралельний генетичний алгоритм оптимізації гільйотинного розкрою в режимі реального часу	370
Слепцова М.А. М'які моделі SWOT-аналізу для систем підтримки прийняття рішень	375
Хмельовий С.В., Скобцов Ю.О., Панченко З.В. Деякі аспекти попередньої обробки даних в задачах нейромережевого прогнозування та класифікації	381
Білобров С.В. Метод ідентифікації аудіоматеріалів на основі аналізу спектру модуляції сигналу	387
Рязанцев А.І., Скарга-Бандурова І.С. Автоматизована система забезпечення безпеки функціонування хіміко-технологічного процесу	392
Іванов Д.Є., Скобцов Ю.О., Чебанов П.А. Дослідження впливу параметрів генетичного алгоритму при генерації тестів для цифрових послідовальностісхем	397
Вайсруб М.В., Мишко С.В., Шевцов Д.В. Підшляхи найкоротших шляхів в системах автоматичного розпізнавання знаків	403
Ахтар Хусейн А.К.М., Ахмед Камал С.К. Розпізнавання відбитків пальців з використанням методики картографічної сітки та узгодження з допомогою зворотного розповсюдження помилки нейронної мережі	412
Горбов І.В. Архівне зберігання цифрової інформації на оптичних носіях	419
<b>Короткі повідомлення</b>	
Гранкін Д.В., Стиров В.В., Тютюнников В.І. Іоностимульована люмінесценція та її можливий механізм	427
Гуменюк О.Л., Сиза О.І., Красовський О.М. Механізм протикорозійної дії N-, O-, S-вмісних гетероциклічних сполук в кислих, нейтральних та лужних середовищах	431

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1

Математика

- Жучок А. В. Декомпозиции полугрупп с нулем 7  
Силенко В. Е. Задачи о двух гиперболических прямоугольниках в единичном круге 14  
Завизион Г. В. Периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений с вырождениями 22  
Слепцова И. П. Единственность и асимптотические свойства решений краевых задач для эволюционных уравнений в неограниченных нецилиндрических областях 28

Механика

- Кириллюк В. С. О связи решений контактных задач термоупругости для изотропного и трансверсально-изотропного полупространств 37  
Васильев Т. А. Изгиб транслопных цилиндрических тел с шарнирно закрепленной боковой поверхностью 43  
Нескородев Н. М., Нескородев Р. Н. Действие сил тяжести в анизотропном массиве горных пород с частично подкрепленной выработкой 48  
Кагадий Т. С. Метод возмущений в плоских задачах теории упругости с учетом конечных деформаций 54  
Бороненко О. И. Двумерная задача магнитоупругости для бесконечного тела с пьезомагнитным включением 59  
Хорошев К. Г. Термоэлектроупругое состояние конечной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами 67  
Мироненко А. Б. Двоякопериодическая задача для вязкоупругой пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями 73  
Высоцкий Е. Н. Распространение трещины в стержне при знакопеременном пластическом изгибе 79  
Миронова Е. М. Об одном свойстве движения гиростата в случае двух линейных инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа 83  
Молочинская А. И. Об одном классе асимптотически – прецессионных движений сферического гиростата 88  
Веремеев С. А., Семко А. Н. Влияние вязкости жидкости на параметры гидропушки 94  
Ступин А. Б., Оверко В. С. Распространение выбросов в атмосфере от источника переменной интенсивности в области со сложным рельефом 101

ЧАСТЬ 2

Физика

- Александров В. Д., Постников В. А., Соболев О. В. Влияние постоянного электрического поля на термодинамические и кинетические параметры кристаллизации расплавленного диэлектрика 105  
Полякова Т. А., Бажин А. И. Доменные структуры в ультратонких пленках в окрестности ориентационного фазового перехода 112  
Русаков В. Ф., Васильев С. В., Чабаненко В. В., Шевчик А., Гутовска М., Шимчак Г., Кодесс Б. Н. Теплоемкость полупроводникового  $Nb_3Al$  118  
Петренко А. Г., Хилько С. Л., Федосеев Р. А., Титов Е. В. Влияние механического воздействия на структурные свойства твердообразных систем 122  
Кузьменко Г. И., Постан М. Я. О статистических квазициклических методах долгосрочного прогнозирования 127  
Ершов М. В., Александров В. Д. Термоэлектрические свойства порошковых смесей на основе меди и никеля 131  
Данилов В. В., Жук В. В., Липинский А. Ю., Рудякова А. Н. Физические основы создания многоэлементных полупроводниковых приемников излучения 135  
Самойленко З. А., Ивахненко Н. Н. Процессы самоорганизации в ферритах  $Mg_{0,54}Zn_{0,46}Fe_2O_4$  157  
Буравлев Ю. М., Демянюк О. О. Особенности процессов в реакционно-диффузионной зоне при газовой химико-термической обработке металлов и сплавов 163  
Оболенский М. А., Вовк Р. В., Бондаренко А. В. Изменение размерности флуктуационной парапроводимости в аб-плоскости монокристаллов  $ReBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  ( $Re=Y, Ho$ ) стехиометрического состава при температурах выше критической 171  
Белик Т. В., Василенко Д. В., Гунский С. В., Данилов В. В., Долбешенков В. В., Крыщенко А. Н., Липинский А. Ю., Рудякова А. Н. Элементы и устройства на основе одномодовых волоконных световодов 175  
Данилов В. В., Крыщенко А. Н., Липинский А. Ю., Рудякова А. Н. Физическая модель волоконно-оптической линии связи 190

Химия

- Гетьман Е. И., Марченко В. И., Юровник О. А., Лобода С. Н., Чагир Т. С. Замещение кальция и фосфора на лантан и кремний в гидроксипатите 194  
Марченко В. И., Пасичник Л. В., Скипин В. Г. Синтез гидроксипатита кальция для пленок 198  
Шендрик А. Н., Коротких Н. И., Гончаров Е. Н., Книшевицкий А. В. Квантово-химический расчет физико-химических параметров некоторых ониевых солей и их связь с реакционной способностью 202  
Бовкуненко О. П., Мельниченко В. И., Манько К. И., Китайгородский А. М. Паразамещенные стиролсульфиды как регуляторы длины полимерной цепи в радикальной полимеризации стирола 207

Беспалько Ю.Н., Швед Е.Н. Роль третичных аминов и аммониевых солей в реакции фенолиза эпихлоргидрина	210
Зубкова Ю.Н., Шаранина Л.Г., Плевако М.З. Модификация способа получения фульво- и гуматпроизводных из природного органического сырья	216
Антонова А.Л., Басенкова В.Л., Бутюгин А.В., Плевако М.З., Рыктор И.А., Узденников Н.Б. Сравнительная характеристика гуматов аммония из различного сырья	219
<b>Биология</b>	
Иванов С.П., Фатерыга А.В., Амолин А.В. Сравнительный анализ строения гнезд складчатокрылых ос-жильцов <i>ancistrocerus parietinus</i> и <i>symmorphus murarius</i> (hymenoptera: vespidae: eumeninae)	226
Романенко В.А., Кочура Д.А. Нейродинамические корреляты слуховой чувствительности у экстра-интровертов	233
Балакирева Г.А. Оценка психодинамических характеристик в тесте «приподнятый крестообразный лабиринт» на фоне эмоционального стресса различной этиологии	236
Панфилова С.Г., Соболев В.И. Энергетика мышечного сокращения у белых крыс в динамике развития экспериментального гипертиреоза (исследование in situ)	240
Федотов О.В. Аминокислотный состав ферментных препаратов каталазы съедобных лекарственных грибов <i>Flammulina velutipes</i> и <i>Pleurotus ostreatus</i>	247
Христова Т.Е. Становление физиологических исследований в северо-восточной Украине на протяжении XIX столетия	251
Чоха О.В. Синтаксономия растительности газонов г. Киева. Класс <i>molinio-arrhenatheretea</i>	256
Мацюра А. В. Результаты систематических наблюдений за ночной миграцией птиц с помощью радиолокатора	267
Бородавка В.А., Короткова Т.М., Пизюк Н.Г., Зубкова Ю.Н., Бутюгин А.В., Булли В.А., Рыктор И.А. Изучение влияния буроугольных гуминовых препаратов на древесно-кустарниковые породы. Сообщение 2. Изучение влияния гумата аммония на регенерационную способность черенков и отзывчивость лесных пород к внекорневой обработке	273
Щербина Ю.Г. Характеристика буковых биогеоценозов с лавровишневым подлеском Черноморского побережья Кавказа	279
Щербина В.Г., Щербина Ю.Г. Особенности влияния рекреационных нагрузок на параметры лавровишневого подлеска в субтропических буковых биогеоценозах	285
Щербина Ю.Г., Щербина В.Г. Рекреационные изменения фитоценотического ранга в субтропических буково-лавровишневых биогеоценозах Кавказа	290
<b>Экология и техногенная безопасность</b>	
Аверин Г.В., Звягинцева А.В. Математические модели опасности и риска в теории техногенной безопасности	296
Исаева-Парцвания Н.В., Сердюк А.И., Ступин А.Б. Выбросы вредных веществ при электрохимической переработке свинцово-кислотных аккумуляторов в электролитах на основе кремнефтористоводородной кислоты	303
Петренко Т.В., Смержевская Т.А., Ступин А.Б. Влияние природы полимера на процесс его взаимодействия с производными тяжелых металлов	308
Метлова О.Л. Биологический риск: формирование, эпицентры, оценка	314
Басенкова В.Л., Зубкова Ю.Н. Сорбенты для очистки вод от соединений хрома	324
Новичков Ю.А., Петренко Т.В. Изношенные автомобильные шины – новое сырье для получения углеродных сорбентов	329
Калинин О.Н. Топливные брикеты на основе смесей бытового мусора и смолистых отходов коксохимического производства	333
<b>Системы та процеси керування</b>	
Григорьев А.В. САПР парогазовых установок СПРУТ как прототип построения интеллектуальных САПР по технологии МЭО	341
Каргин А.А., Чебанова Е.К. Морфологический анализ слов украинского языка в составе системы терминологической разметки электронных документов	355
Каргин А.А., Петренко Т.Г., Ломонос Я.Г. Модель нечеткого текста в интеллектуальной системе терминологической разметки электронных документов	360
Лаздынь С.В., Телятников А.О. Оптимизация распределения данных в корпоративных информационных системах	365
Фонотов А.М. Параллельный генетический алгоритм оптимизации гильотинного раскроя в режиме реального времени	370
Слепцова М.А. Мягкие модели SWOT-анализа для систем поддержки принятия решений	375
Хмелевой С.В., Скобцов Ю.А., Панченко З.В. Некоторые аспекты предварительной обработки данных в задачах нейросетевого прогнозирования и классификации	381
Билобров С.В. Метод идентификации аудиоматериалов на основании анализа спектра модуляции сигнала	387
Рязанцев А.И., Скарга-Бандурова И.С. Автоматизированная система обеспечения безопасности функционирования химико-технологического процесса	392
Иванов Д.Е., Скобцов Ю.А., Чебанов П.А. Исследование влияния параметров генетического алгоритма при генерации тестов для цифровых последовательностных схем	397
Вайсруб М.В., Мышко С.В., Шевцов Д.В. Подпути кратчайших путей в системах автоматического опознавания знаков	403
Ахтар Хусейн А.К.М., Ахмед Камал С.К. Распознавание отпечатков пальцев с использованием методики картографической сетки и согласование с помощью обратного распространения ошибки нейронной сети	412
Горбов И.В. Архивное хранение цифровой информации на оптических носителях	419
<b>Краткие сообщения</b>	
Гранкин Д.В., Стыров В.В., Тютюнников В.И. Ионостимулированная люминесценция и ее возможный механизм	427
Гуменюк О.Л., Сизая О.И., Красовский О.М. Механизм противокоррозионного действия N-, O-, S-содержащих гетероциклических соединений в кислых, нейтральных и щелочных средах	431

**C O N T E N T S**

**PART 1**

**Mathematics**

- Zhuchok Yu. V. Decompositions of semigroups with zero 7  
Silenko V. E. Two-hyperbolic rectangles problems in the unit disk 14  
Zavizion G. V. Periodic solutions for the system of integral-differential equations with extinctions 22  
Slyeptsova I. P. Uniqueness and asymptotic properties of the solutions of boundary value problems for evolution equations in unbounded noncylindrical domains 28

**Mechanics**

- Kirilyuk V. S. On correlation between solutions of contact problems of thermoelasticity for isotropic and transversally-isotropic half spaces 37  
Vasiliev T. A. Bending of transtropic cylindrical bodies with hingely fixed lateral side 43  
Neskorodev N. M., Neskorodev R. N. Action of gravitation in anisotropic rock mass with a partially supported excavation 48  
Kagadiy T. S. Perturbation method in two-dimensional nonlinear problems of elasticity theory 54  
Boronenko O. I. Two-dimensional magnetoelastic problem for an infinite solid with piezomagnetic inclusion 59  
Khoroshev K. G. The thermoelectroelastic state of a finite anisotropic plate with holes and cracks 67  
Mironenko A. B. Double periodical problem for a viscoelastic plate with rigid elliptical and linear inclusions 73  
Vysotskiy E. N. Growth of cracks in conditions of sign-variable plastic bending of notched rods 79  
Mironova E. M. On the movement quality of hirostat in case of two linear invariant relations of Kirhgoff equation 83  
Molochinskaya A. I. On one class of asymptotically precession motions of a spherical gyrostat 88  
Veremeev S. A., Semko A. N. The influence of liquid viscosity on hydrocannon parameters 94  
Stupin A. B., Overko V. S. Distribution of emissions to the atmosphere from the source of variable intensity in the area with difficult relief 101

**PART 2**

**Physics**

- Aleksandrov V. D., Postnikov V. A., Sobol O. V. Constant electric field and its influence on thermodynamic and kinetic crystallization parameters of a melted isolator 105  
Polyakova T. A., Bazhin A. I. Domain structures in ultrathin films near the reorientation phase transition 112  
Rusakov V. F., Vasylyev S. V., Chabanenko V. V., Shevchuk A., Gutovska M., Shymchak H., Kodess B. N. Specific heat of Nb<sub>3</sub>Al superconductor 118  
Petrenko A. G., Khilko S. L., Fedoseev R. A., Titov E. V. Influence of mechanical action on structural properties of solid-fashion systems 122  
Kuzmenko G. I., Postan M. Ya. On statistical quasi-cyclic methods of long-term forecasting 127  
Yershov M. V., Aleksandrov V. D. Thermoelectric properties of powder systems, based on copper and nickel 131  
Danilov V. V., Zhuk V. V., Lipinskii A. Yu., Rudiakova A. N. Physical basis for creating multielement semiconductor detectors 135  
Samoilenko Z. A., Ivahnenko N. N. Self-organization processes in ferrites  $Mg_{0.54}Zn_{0.46}Fe_2O_4$  157  
Buravlev Yu. M., Demyanyuk O. O. Peculiarities of processes in reactionary- diffusion zone during gaseous chemical and thermal processing of metals and alloys 163  
Obolenskiy M. A., Vovk R. V., Bondarenko A. V. Changing the dimensions of fluctuation paraconductivity in ab-plane of ReBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-δ</sub> (Re = Y, Ho) single crystals with stoichiometric contents at temperatures higher than critical 171  
Belik T. V., Vasilenko D. V., Gunskii S. V., Danilov V. V., Dolbeschenkov V. V., Kryschenko A. N., Lipinskiy A. Y., Rudiakova A. N. Elements and devices on the basis of single mode optical fiber 175  
Danilov V. V., Kryschenko A. N., Lipinskiy A. Yu., Rudiakova A. N. Physical model of optical fiber transmission line 190

**Chemistry**

- Getman E. I., Marchenko V. I., Yurovnik O. A., Loboda S. N., Chagir T. S. Replacement of calcium and phosphorus by lanthanum and silicum in hydroxyapatite 194  
Marchenko V. I., Pasichnik L. V., Skipin V. G. Synthesis of calcium hydroxyapatite for films 198  
Shendrik A. N., Korotkih N. I., Goncharov E. N., Knyshevitskiy A. V. Quantum-chemical calculation of some physical parameters for onium salts and their relation with reactivity 202  
Bovkunenko O. P., Melnichenko V. I., Manko K. I., Kitaygorodskiy A. M. Parasubstituted styrenesulfides as chain length regulators in radical polymerization of styrene 207

Bespalko Yu.N., Shved E.N. Role of tertiary amines and ammonium salts in reactions of epichlorohydrin phenolysis	210
Zubkova Yu.N., Sharanina L.G., Plevako M.Z. Modifying the method for obtaining of fulvene- and humate-derivatives from natural organic raw materials	216
Antonova A.L., Basenkova V.L., Butyugin A.V., Plevako M.Z., Ryktor I.A., Uzdennikov N.B. Comparative characteristic of ammonium humates obtained from various raw materials	219
<b>Biology</b>	
Ivanov S.P., Fateryga A.V., Amolin A.V. The comparative analysis of the structure of nests made by wasps <i>Ancistrocerus parietinus</i> and <i>Symmorphus murarius</i> (Hymenoptera: Vespidae: Eumeninae)	226
Romanenko V.A., Kochura D.A. Neurodynamical basis of auditory sensitivity in extravertes and introverts	233
Balakireva G.A. Evaluation of psychodynamic characteristics in the test called "elated cross-like labyrinth" in case of emotional stress of different etiology	236
Panfilova S.G., Sobolev V.I. Energetics of muscle contraction of white rats during development of experimental hyperthyroidism (investigations in situ)	240
Fedotov O.V. Aminoacidic composition of ferment drugs of catalase of edible medicinal mushrooms <i>Flammulina velutipes</i> and <i>Pleurotus ostreatus</i>	247
Hrystova T.E. Phytophysiological research in north-eastern Ukraine during the 19-th century	251
Choha O.V. Syntaxonomy of vegetation of grass-plots in Kyiv. <i>Molinio-Arrhenatheretea</i> Class	256
Matsyura A.V. Systematic radar observation over night migration of birds	267
Borodavka V.A., Korotkova T.N., Pizyuk N.G., Zubkova Yu.N., Butyugin A.V., Bulli V.A., Ryktor I.A. Studying the influence of brown-coal humic preparations on ligneous-shrubby sorts. Report 2. Studying of influence of ammonium humate on regenerative ability of grafts and responsiveness of forest species to out-of-root processing	273
Sherbina Yu.G. Characteristic of the beech biogeocoenoses with laurel-cherry snowdrop from the Black sea Coasts of the Caucasus	279
Sherbina V.G., Sherbina Yu.G. Peculiarities of influence of recreation loads on the parameters of a laurel-cherry snowdrop in subtropical biogeocenosis	285
Sherbina Yu.G., Sherbina V.G. Recreation changes of a phytocenotic rank in beechen-cheery-laurel biogeocoenoses of the Caucasus	290
<b>Ecology and technogenous security</b>	
Averin G.V., Zvyagintseva A.V. Models of mathematical danger and risk in the technogenous safety theory	296
Isaeva-Partsvaniya N.V., Serdyuk A.I., Stupin A.B. The emissions of pollutants during processing of electrochemical lead-acid batteries in electrolytes on the basis of fluorosilicic acid	303
Petrenko T.V., Smorzshevskaya T.A., Stupin A.B. Influence of a polymer's nature on the process of its interaction with derivatives of heavy metals	308
Metlova O.L. Biological risk: formation, centres, evaluation	314
Basenkova V.L., Zubkova Yu.N. Sorbents for purification of water from chlorine compounds	324
Novichkov Yu.A., Petrenko T.V. Worked-out car tyres – a new raw material for production of carbonaceous sorbents	329
Kalinihin O.N. Fuel briquettes on the basis of mixes of household dust and resinous waste products from coke manufacture	333
<b>Control systems</b>	
Grigoriev A.V. Installation of steam gas plants CAD SPRUT as construction prototype of intellectual CAD based on the technology MEE	341
Kargin A.A., Chebanova E.K. Morphological analysis of Ukrainian words included in the structure of systems for terminological marking in the electronic documents	355
Kargin A.A., Petrenko T.G., Lomonos Ya.G. Fuzzy text model in the intellectual system of terminological marking of electronic documents	360
Lazdyn S.V., Telyatnikov A.A. Optimization of data distribution in corporate information systems	365
Fonotov A.M. Parallel genetic algorithm of optimization for the real-time guillotine cutting	370
Slyeptsova M.A. Soft models of SWOT-analysis for expert support systems	375
Khmelevoy S.V., Skobtsov Y.A., Panchenko Z.V. Some aspects of data preprocessing in problems of neural forecasting and classification	381
Bilobrov S.V. Method for identification of audiomaterials based on analysis of the audio signal modulation spectrum	387
Ryazantsev A.I., Skarga-Bandurova I.S. Automatic system providing the safety of functioning of a chemical technological process	392
Ivanov D.E., Skobtsov Yu.A., Chebanov P.A. Investigating the impact of parameters of genetic algorithm when generating the tests for digital sequential circuits	397
Vaisrub M.V., Myshko S.V., Shevtsov D.V. Initial shortest route in the systems of automatic recognition of signs	403
Akhtar Hossain A.K.M., Ahmed Kamal S.K. An approach to extract fingerprint feature using grid-mapping technique and to match through backpropagation neural network	412
Gorbov I.V. Digital data archival storage on the optical carriers	419
<b>Short papers</b>	
Grankin D.V., Styrov V.V., Tyutyunnikov V.I. Ion-stimulated luminescence and its possible mechanism	427
Humeniuk O.L., Syza O.I., Krasovskiy O.M. The Mechanism of Anticorrosion action of N-, O-, S-containing Heterocyclic Compounds in Acidic, Neutric and Alkaline Media	431

УДК 512.53

ДЕКОМПОЗИЦІЇ НАПІВГРУП З НУЛЕМ

Ю.В. Жучок

Луганський національний педагогічний університет ім. Т. Шевченка

В роботі визначається поняття симетричної 0-категорії на довільній множині і описуються конгруенції цієї напівгрупової конструкції, факторнапівгрупи за якими є напівгрупами ідемпотентів. Знайдено найбільшу декомпозицію симетричної 0-категорії у ліву (праву) суму напівгруп, кожна з компонент якої не розкладається у ліву (праву) суму напівгруп. Крім цього, отримано характеристику напівгруподів, які отримуються з категорійних в нулі напівгруп відкиданням нульового елемента.

1. Вступ

Якщо  $S$  – довільна напівгрупа,  $E$  – напівгрупа ідемпотентів, то кожний гомоморфізм

$$\varphi: S \rightarrow E: x \mapsto x\varphi$$

визначає систему  $\{S_\varepsilon | \varepsilon \in E\}$  піднапівгруп  $S_\varepsilon = \varepsilon\varphi^{-1} = \{x \in S | x\varphi = \varepsilon\}$  напівгрупи  $S$  таку, що  $S_\varepsilon \cap S_\xi = \emptyset$  коли  $\varepsilon \neq \xi$ ,  $S_\varepsilon S_\xi \subseteq S_{\varepsilon\xi}$  при будь-яких  $\varepsilon, \xi \in E$  і  $S = \bigcup_{\varepsilon \in E} S_\varepsilon$ . Напівгрупу  $S$  називають при

цьому  $(E, \varphi)$ -сполукою піднапівгруп  $S_\varepsilon, \varepsilon \in E$ . Внутрішнє описання наведеної ситуації отримуємо мо-

вою мультиплікативних розбиттів. А саме: систему  $\{S_\alpha | \alpha \in I\}$  піднапівгруп напівгрупи  $S$  назвемо му-

льтиплікативним розбиттям цієї напівгрупи, якщо  $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$  коли  $\alpha \neq \beta$ ,  $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$  і для будь-

яких  $\alpha, \beta \in I$  існує  $\gamma \in I$  таке, що  $S_\alpha S_\beta = S_\gamma$ . Якщо  $\{S_\alpha | \alpha \in I\}$  – мультиплікативне розбиття напівгру-

пи  $S$ , то поклавши  $\alpha\beta = \gamma$  кожного разу, коли  $S_\alpha S_\beta = S_\gamma$ , множину  $I$  перетворюємо на напівгрупу

ідемпотентів, для якої існує гомоморфізм  $\varphi: S \rightarrow I: x \mapsto x\varphi$  такий, що  $x\varphi = \alpha$  тоді й лише тоді, коли

$x \in S_\alpha$ . Напівгрупа  $S$  стає при цьому  $(I, \varphi)$ -сполукою своїх піднапівгруп  $S_\alpha, \alpha \in I$ . Еквівалентність

понять сполуки і мультиплікативного розбиття є очевидною. Ці поняття відіграють важливу роль в струк-

турній теорії напівгруп, оскільки дають важливий нетривіальний метод класифікації напівгруп за їх му-

льтиплікативними розбиттями.

Вивченню сполук приділялось уваги багатьма авторами. На наш час можна говорити про теорію

сполук як про один з провідних напрямків структурної теорії напівгруп (див., наприклад, [1-3]). Існують і

деякі спеціалізації конструкції сполуки, пристосовані до вивчення напівгруп тих чи інших класів. Так в

роботі [4] розглядається поняття 0-сполуки напівгруп, зокрема, поняття лівої (правої, прямокутної, орто-

гональної) суми напівгруп, що застосовується до вивчення напівгруп з нулем. Ці поняття виявляються

корисними для вивчення будови напівгрупи часткових перетворень довільної множини. Виклад результа-

тів такого вивчення і є основною метою цієї роботи.

2. Симетрична 0-категорія

В цьому параграфі описується характеристика напівгруподів, які отримуються з категорійних в

нулі напівгруп відкиданням нуля. Визначається основний об'єкт дослідження цієї роботи – симетрична

0-категорія. Показано, що дана 0-категорія є категорійною в нулі напівгрупою.

2.1. Напівгруподом  $G[\omega]$  будемо називати множину  $G$  з деякою бінарною частковою операцією

$\omega: G \times G \rightarrow G: (x; y) \mapsto (x; y)\omega$ . Якщо  $G[\omega]$  – деякий напівгрупод, то відношення  $\varpi = \text{Dom } \omega$  наз-

вемо відношенням актуалізації цього напівгруподу. Якщо  $\varpi = G \times G$ , то напівгрупод  $G[\omega]$  називати-

memo груподом.

Напівгрупод  $G[\omega]$  назвемо локально асоціативним (або алгебраїчною категорією), якщо для всіх

$t, u, v \in G$  виконується умова:

$$(t; u) \in \varpi \ \& \ (u; v) \in \varpi \Rightarrow \begin{cases} ((t; u)\omega; v) \in \varpi \ \& \ (t; (u; v)\omega) \in \varpi, \\ ((t; u)\omega; v)\omega = (t; (u; v)\omega)\omega. \end{cases}$$



Напівгрупа  $S$  з нулем  $0$  називається  $0$ -категорійною (або категорійною в нулі), якщо при будь-яких  $a, b, c \in S$  з того, що  $abc = 0$  випливає принаймні одна з умов:  $ab = 0$ ,  $bc = 0$ .

Нехай  $G[\omega]$  – довільний напівгрупоїд,  $0$  – зовнішній елемент, тобто  $0 \notin G$ . Позначимо через  $\omega_0$  операцію, визначену на множині  $G^0 = G \cup \{0\}$  за правилом:

$$(x; y)\omega_0 = \begin{cases} (x; y)\omega, & (x; y) \in \varpi, \\ 0, & (x; y) \notin \varpi. \end{cases} \quad (1)$$

Конрадом [5] знайдено необхідні та достатні умови, за яких операція  $\omega_0$  є асоціативною на множині  $G^0$ , а саме: групоїд  $G^0[\omega_0]$  є напівгрупою тоді й лише тоді, коли умови

$$(t; u) \in \varpi \ \& \ ((t; u)\omega; v) \in \varpi \Rightarrow \begin{cases} (u; v) \in \varpi \ \& \ (t; (u; v)\omega) \in \varpi, \\ ((t; u)\omega; v)\omega = (t; (u; v)\omega)\omega, \end{cases} \quad (2)$$

$$(u; v) \in \varpi \ \& \ (t; (u; v)\omega) \in \varpi \Rightarrow \begin{cases} (t; u) \in \varpi \ \& \ ((t; u)\omega; v) \in \varpi, \\ (((t; u)\omega; v)\omega) = (t; (u; v)\omega)\omega \end{cases} \quad (3)$$

виконуються при будь-яких  $t, u, v \in G$ .

Природно виникає питання про описання критеріальних умов, за яких напівгрупа  $G^0[\omega_0]$  є категорійною в нулі. Має місце

**Твердження.** Нехай  $G[\omega]$  – такий напівгрупоїд, що  $G^0[\omega_0]$  є напівгрупою. Тоді наступні умови є еквівалентними:

- (i) для всіх  $t, u, v \in G$  з умов  $(t; u) \in \varpi \ \& \ ((t; u)\omega; v) \notin \varpi$  випливає  $(u; v) \notin \varpi$ ;
- (ii) для всіх  $t, u, v \in G$  з умов  $(u; v) \in \varpi \ \& \ (t; (u; v)\omega) \notin \varpi$  випливає  $(t; u) \notin \varpi$ ;
- (iii) напівгрупа  $G^0[\omega_0]$  є категорійною в нулі.

**Доведення.** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Припустимо, що в напівгрупоїді  $G[\omega]$  знайдуться елементи  $t, u$  і  $v$  для яких наслідком умов  $(u; v) \in \varpi$ ,  $(t; (u; v)\omega) \notin \varpi$  є те, що  $(t; u) \in \varpi$ . Оскільки  $G^0[\omega_0]$  є напівгрупою, то  $(t; (u; v)\omega_0)\omega_0 = 0 = ((t; u)\omega_0; v)\omega_0$ , звідки випливає, що  $((t; u)\omega; v) \notin \varpi$ . Тоді за умовою (i) матимемо  $(u; v) \notin \varpi$ , що протирічить припущенню. Таким чином, умову (ii) доведено.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Нехай  $t, u, v \in G^0$ . Якщо хоча б один з елементів  $t, u, v$  дорівнює нулю, то згідно визначенню операції  $\omega_0$ , маємо:  $((t; u)\omega_0; v)\omega_0 = 0$ , звідки випливає виконання принаймні однієї з умов  $(t; u)\omega_0 = 0$ ,  $(u; v)\omega_0 = 0$ . Візьмемо тепер  $t, u, v \in G$  такі, що  $((t; u)\omega_0; v)\omega_0 = 0$  і  $(u; v)\omega_0 \neq 0$ . Тоді  $(t; (u; v)\omega) \notin \varpi$  і, користуючись (ii), отримуємо  $(t; u) \notin \varpi$ , тобто  $(t; u)\omega_0 = 0$ . Припустимо далі, що для деяких елементів  $t, u, v \in G$  наслідком умов  $(t; (u; v)\omega_0)\omega_0 = 0$  і  $(t; u)\omega_0 \neq 0$  є умова  $(u; v)\omega_0 \neq 0$ . Звідси за шойно доведеним, отримуємо  $(t; u)\omega_0 = 0$ , що протирічить припущенню. Отже,  $(u; v)\omega_0 = 0$  і напівгрупа  $G^0[\omega_0]$  є категорійною в нулі.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Нехай  $t, u, v \in G$  – такі елементи, що  $(t; u) \in \varpi \ \& \ ((t; u)\omega; v) \notin \varpi$ . Згідно (1),  $(t; u)\omega_0 \neq 0$  і  $((t; u)\omega_0; v)\omega_0 = 0$ , звідки за  $0$ -категорійністю напівгрупи  $G^0[\omega_0]$  випливає умова  $(u; v)\omega_0 = 0$ , тобто  $(u; v) \notin \varpi$ .

Твердження доведено.

Далі, для зручності добуток елементів будь-якого напівгрупоїда будемо записувати у мультиплікативній формі.

2.2. Нехай  $X$  – довільна непорожня множина,  $U(X)$  – множина усіх непорожніх підмножин множини  $X$ . Для будь-яких  $A, B \in U(X)$  через  $Map(A; B)$  позначатимемо множину всіх сюр'єктивних відображень  $\varphi: A \rightarrow B: x \mapsto x\varphi$  множини  $A$  на множину  $B$ . Якщо  $\varphi \in Map(A; B)$ , то через  $Dom\varphi$  будемо позначати область визначення відображення  $\varphi$ , а через  $Im\varphi$  – його область значень (образ), тобто  $Dom\varphi = A$ ,  $Im\varphi = B$ . Відображення  $\varphi \in Map(A; B)$  і  $\psi \in Map(C; D)$  називаються *рівними*, якщо  $A = C$ ,  $B = D$  і при будь-якому  $x \in A$  виконується умова  $x\varphi = x\psi$ . На множині

$$SymX = \{\varphi \in Map(A; B) \mid A, B \in U(X)\}$$

природно визначеною є часткова операція композиції відображень. Якщо  $\varphi, \psi \in \text{Sym}X$  такі, що  $\varphi \in \text{Map}(A; B)$ ,  $\psi \in \text{Map}(C; D)$ , то про композицію  $\varphi\psi$  можна говорити лише у випадку  $B \cap C \neq \emptyset$ , а саме: коли  $M = B \cap C \neq \emptyset$ , то композицією  $\varphi\psi$  відображень  $\varphi$  і  $\psi$  називається відображення

$$\varphi\psi|_M : A \rightarrow D : x \mapsto x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi.$$

На цьому шляху виникає напівгрупоїд, який називають *напівгрупоїдом часткових перетворень* множини  $X$ . Цей напівгрупоїд не є алгебраїчною категорією.

Дійсно, нехай  $\varphi \in \text{Map}(A; B)$ ,  $\psi \in \text{Map}(C; D)$  і  $\eta \in \text{Map}(E; F)$  такі відображення із  $\text{Sym}X$ , що добутки  $\varphi\psi$ ,  $\psi\eta$  визначено і  $x\psi \notin \text{Dom}\eta$  для кожного  $x \in B \cap C$ . Це означає, що  $\text{Im}\varphi\psi \cap E = \emptyset$ , тобто добуток  $(\varphi\psi)\eta$  відображень  $\varphi\psi$  та  $\eta$  не є визначеним. Отже, напівгрупоїд часткових перетворень не є локально асоціативним.

2.3. Вимоги до визначення композиції  $\varphi\psi$  сюр'єктивних відображень  $\varphi, \psi \in \text{Sym}X$ , де  $\varphi \in \text{Map}(A; B)$ ,  $\psi \in \text{Map}(C; D)$ , можна посилити: композиція  $\varphi\psi$  є визначеною лише за умови  $B = C$ . Напівгрупоїд, що при цьому виникає на множині  $\text{Sym}X$ , назвемо *симетричною категорією* (або *симетричним напівгрупоїдом*) на множині  $X$ , зберігаючи позначення  $\text{Sym}X$ .

Симетрична категорія  $\text{Sym}X$ , на відміну від напівгрупоїду часткових перетворень, є локально асоціативним напівгрупоїдом. Дійсно, якщо  $\varphi$ ,  $\psi$  та  $\eta$  із  $\text{Sym}X$  такі, що добутки  $\varphi\psi$ ,  $\psi\eta$  визначено, то  $\text{Im}\varphi = \text{Dom}\psi$ ,  $\text{Im}\psi = \text{Dom}\eta$ . Оскільки  $\text{Dom}\psi\eta = \text{Dom}\psi$ ,  $\text{Im}\varphi\psi = \text{Im}\psi$ , то добутки  $(\varphi\psi)\eta$  і  $\varphi(\psi\eta)$  є визначеними, при цьому  $(\varphi\psi)\eta = \varphi(\psi\eta)$ .

Приєднуючи до симетричної категорії  $\text{Sym}X$  зовнішній нуль 0 і довизначивши операцію композиції  $\varphi\psi$  за правилом:  $\varphi\psi = 0$  коли  $B \neq C$ , отримаємо групоїд, який будемо називати *симетричною 0-категорією* на множині  $X$  і позначатимемо через  $\text{Sym}^0 X$ .

**Лема.** Симетрична 0-категорія  $\text{Sym}^0 X$  на множині  $X$  є категорійною в нулі напівгрупою.

**Доведення.** Нехай відображення  $\varphi, \psi$  та  $\eta$  із симетричної категорії  $\text{Sym}X$  такі, що добутки  $\varphi\psi$  і  $(\varphi\psi)\eta$  є визначеними. Це означає, що  $\text{Im}\varphi = \text{Dom}\psi$  і  $\text{Im}\varphi\psi = \text{Dom}\eta$ . Оскільки при будь-яких  $\lambda, \mu \in \text{Sym}X$ , для яких добуток  $\lambda\mu$  визначено, мають місце рівності  $\text{Im}\lambda\mu = \text{Im}\mu$ ,  $\text{Dom}\lambda\mu = \text{Dom}\lambda$ , то визначеними будуть і добутки  $\psi\eta$  та  $\varphi(\psi\eta)$ . Аналогічно, з визначеності добутків  $\psi\eta$ ,  $\varphi(\psi\eta)$  випливає визначеність добутків  $\varphi\psi$  і  $(\varphi\psi)\eta$ . При цьому, в обох випадках виконується умова  $(\varphi\psi)\eta = \varphi(\psi\eta)$ . Таким чином, за умовами (2), (3) п. 2.1. симетрична 0-категорія  $\text{Sym}^0 X$  є напівгрупою.

Нехай далі для відображень  $\varphi, \psi$  та  $\eta$  із  $\text{Sym}X$  композиція  $\varphi\psi$  є визначеною, але композиція  $(\varphi\psi)\eta$  – ні. В цьому випадку, матимемо  $\text{Im}\varphi = \text{Dom}\psi$  і  $\text{Im}\psi \neq \text{Dom}\eta$ , звідки випливає невизначеність добутку  $\psi\eta$ . Отже, за твердженням з п. 2.1. напівгрупа  $\text{Sym}^0 X$  є категорійною в нулі.

Лему доведено.

### 3. Сполуки симетричної 0-категорії

Мальцевим [6] отримано описання всіх конгруенцій симетричної напівгрупи. В роботах Лібера [7] і Шутова [8] дано описання конгруенцій відповідно на симетричній інверсній напівгрупі і симетричній напівгрупі всіх часткових перетворень довільної множини. Природно постає задача знаходження конгруенцій симетричної 0-категорії.

В цьому параграфі описуються конгруенції симетричної 0-категорії на скінченній множині, факторнапівгрупи за якими є напівгрупами ідемпотентів. При цьому доведено, що симетрична 0-категорія на нескінченній множині не розкладається у сполуку своїх піднапівгруп.

3.1. Позначимо через  $S_X$  симетричну групу на множині  $X$  і покладемо

$$\varepsilon_X = \{(a; a) \mid a \in X\}, \quad \omega_X = \{(a; b) \mid a, b \in X\}.$$

Нехай  $S$  – напівгрупа,  $\rho$  – деяка конгруенція цієї напівгрупи. Якщо для конгруенції  $\rho$  напівгрупи  $S$  виконується одна з умов:  $\rho = \varepsilon_S$ ,  $\rho = \omega_S$ , то її називають *тривіальною*.

Конгруенція  $\rho$  на напівгрупі  $S$  називається *ідемпотентною*, якщо факторнапівгрупа  $S/\rho$  напівгрупи  $S$  за конгруенцією  $\rho$  є сполукою (напівгрупою ідемпотентів).

Нехай  $X$  – непорожня скінченна множина,  $|X| > 1$  і  $W = (\text{Sym}^0 X) \setminus S_X$ .

**Теорема.** Відношення  $\mu = (S_X \times S_X) \cup (W \times W)$  – єдина нетривіальна ідемпотентна конгруенція на симетричній 0-категорії  $Sym^0 X$ .

**Доведення.** За своєю будовою відношення  $\mu$  є еквівалентністю. Зрозуміло, що для всіх  $(\varphi; \psi) \in \mu$  матимемо  $(\varphi 0; \psi 0) = (0\varphi; 0\psi) = (0; 0) \in W^2$ . Нехай  $(\varphi; \psi) \in S_X^2$ . Тоді при будь-якому  $\eta \in Sym^0 X, \eta \neq 0$  такому, що  $Im \varphi = Dom \eta = Im \eta$  отримуємо  $(\varphi\eta; \psi\eta) \in S_X^2$ ; якщо ж  $Im \varphi = Dom \eta \neq Im \eta$ , то  $(\varphi\eta; \psi\eta) \in W^2$ , оскільки  $Im \varphi\eta \neq X \neq Im \psi\eta$ . В усіх інших випадках  $(\varphi\eta; \psi\eta) = (0; 0) \in W^2$ . При цьому для кожного  $\lambda \in Sym^0 X, \lambda \neq 0$  маємо

$$(\lambda\varphi; \lambda\psi) = \begin{cases} (\lambda\varphi; \lambda\psi) \in S_X^2, & Im \lambda = Dom \varphi, \\ (0; 0) \in W^2, & Im \lambda \neq Dom \varphi. \end{cases}$$

Нехай тепер  $(\varphi; \psi) \in W^2$ , при цьому  $\varphi \neq 0, \psi \neq 0$ . Якщо відображення  $\eta \in Sym^0 X, \eta \neq 0$  таке, що  $Dom \varphi = Im \eta = Dom \psi$ , то отримуємо  $(\eta\varphi; \eta\psi) \in W^2$ , оскільки  $Im \eta\varphi = Im \varphi$  і  $Im \eta\psi = Im \psi$ . В інших випадках, коли  $Dom \varphi \neq Im \eta = Dom \psi$ ,  $Dom \varphi = Im \eta \neq Dom \psi$ ,  $Dom \varphi \neq Im \eta \neq Dom \psi$ , беручи до уваги умову  $Dom fg = Dom f$  ( $f, g \in Sym X, fg \neq 0$ ) матимемо відповідно, що  $(\eta\varphi; \eta\psi) = (0; \eta\psi) \in W^2$ ,  $(\eta\varphi; \eta\psi) = (\eta\varphi; 0) \in W^2$  і  $(\eta\varphi; \eta\psi) = (0; 0) \in W^2$ .

Якщо ж  $(\varphi; \psi) \in W^2$  і принаймні один з елементів  $\varphi, \psi$  дорівнює 0, то зрозуміло, що для всіх  $\eta \in Sym^0 X, \eta \neq 0$  матимемо  $(\eta\varphi; \eta\psi) \in W^2$ .

Аналогічно доводиться, що з умови  $(\varphi; \psi) \in W^2$  випливає  $(\varphi\lambda; \psi\lambda) \in W^2$  при будь-якому  $\lambda \in Sym^0 X, \lambda \neq 0$ . Відмітимо, що для всіх  $\varphi, \psi \in W$  добуток  $\varphi\psi$  не належить групі  $S_X$ , тобто  $\varphi\psi \in W$ . Отже,  $\mu$  є ідемпотентною конгруенцією.

Нехай  $\rho$  – нетривіальна ідемпотентна конгруенція на  $Sym^0 X$ ,  $\rho_0$  – клас цієї конгруенції, який містить нуль 0. Покладемо далі

$$K = \{\varphi \in Sym X \mid Dom \varphi \neq Im \varphi\}, T = \{\varphi \in Sym X \mid Dom \varphi = Im \varphi \neq X\}.$$

Враховуючи, що  $\varphi^2 = 0$  при будь-якому  $\varphi \in K$ , отримуємо включення  $K \subset \rho_0$ . Оскільки для кожного  $\psi \in T$  існує множина  $B \in U(X)$ , де  $B \neq Dom \psi$ ,  $|B| = |Dom \psi|$  і взаємно обернені бієкції  $f \in Map(Dom \psi; B)$  та  $g \in Map(B; Dom \psi)$  такі, що  $\psi = fg$ , то має місце включення  $T \subset \rho_0$ . Зауважимо, що будь-який елемент із  $S_X$  не належить  $\rho_0$ , тому що довільна група не розкладається в сполуку своїх піднапівгруп. Це означає, що або  $S_X \subset \rho_0$ , і тоді  $\rho$  є тривіальною конгруенцією (а це протирічить припущенню), або множина  $S_X$  є окремим класом конгруенції  $\rho$  і, отже,  $\rho = \rho_0^2 \cup \rho_1^2$ , де  $\rho_0 = W, \rho_1 = S_X$ .

Теорему доведено.

3.2. Нехай  $X$  – довільна нескінченна множина. Якщо  $A \in U(X)$ , то через  $i_A$  позначатимемо тожне перетворення множини  $A$ . В цьому випадку отримуємо

**Твердження.** Відношення  $\omega_{Sym^0 X}$  – єдина ідемпотентна конгруенція симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$  на множині  $X$ .

**Доведення.** Нехай  $\rho$  – довільна ідемпотентна конгруенція на  $Sym^0 X$ , а  $\rho_0$  – той клас цієї конгруенції, в якому міститься нуль 0. Подібно тому як в теоремі п. 3.1., отримуємо, що  $K \subset \rho_0$ , де  $K = \{\varphi \in Sym X \mid Dom \varphi \neq Im \varphi\}$ . Покладемо далі,  $I = \{i_A \mid A \in U(X)\}$ .

Для довільної множини  $A \in U(X)$  знайдуться  $B \in U(X)$ , де  $B \neq A, |B| = |A|$ , і взаємно обернені бієкції  $\psi \in Map(A; B)$  та  $\eta \in Map(B; A)$  для яких  $\psi\eta = i_A$ . Це означає, що  $I \subset \rho_0$ . Покладемо тепер

$$F = \{\varphi \in Map(A; A) \mid A \in U(X)\}, F^* = F \setminus I.$$

Оскільки при будь-яких  $C \in U(X)$  і  $\varphi \in \text{Map}(C; C)$  виконуються умови  $i_C \varphi = \varphi$ ,  $0\varphi = 0$ , то матимемо включення  $F^* \subset \rho_0$ . Таким чином,  $\rho_0 = \text{Sym}^0 X$  і, отже,  $\rho = \omega_{\text{Sym}^0 X}$ .

Твердження доведено.

#### 4. Ортогональна, ліва і права декомпозиції

Серед перших, хто почав вивчати ортогональні декомпозиції напівгруп, є Ляпін ([9], [10]) і Шварц [11], після чого ці декомпозиції використовувались багатьма авторами у різних випадках (напр., [12], [13]). Проблема існування найбільшої ортогональної декомпозиції напівгрупи з нулем розглядалась Богдановичем та Чиричем [14]. Декомпозиції напівгрупи з нулем у ліву (праву, прямокутну) суму напівгруп вивчалися в [4], а конгруенції напівгруп з нулем, факторнапівгрупи за якими є 0-прямокутними сполуками, – в [15].

В даному параграфі для описання структурних властивостей симетричної 0-категорії застосовуються декомпозиції в ортогональну (ліву, праву) суму напівгруп. Двоїстість понять лівої та правої декомпозиції є очевидною, тому обмежимося використанням лівої декомпозиції.

4.1. Через  $S^0$  будемо позначати напівгрупу  $S$  з нулем  $0$ .

Напівгрупу  $S^0$  називають *ортогональною сумою* напівгруп  $S_\alpha, \alpha \in Y$ , позначаючи  $S^0 = \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha$ , якщо  $S_\alpha, \alpha \in Y$  – ненульові напівгрупи,  $S^0 = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  і при будь-яких  $\alpha, \beta \in Y, \alpha \neq \beta$  виконуються умови  $S_\alpha \cap S_\beta = S_\alpha \cdot S_\beta = \{0\}$ .

Напівгрупу  $S^0$  називають *лівою сумою* напівгруп  $S_\alpha, \alpha \in Y$ , позначаючи  $S^0 = L \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha$ , якщо  $S_\alpha, \alpha \in Y$  – ненульові напівгрупи,  $S^0 = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  і при будь-яких  $\alpha, \beta \in Y, \alpha \neq \beta$  виконуються умови  $S_\alpha \cap S_\beta = \{0\}$  та  $S_\alpha \cdot S_\beta \subseteq S_\alpha$ .

Двоїстим чином визначається поняття правої суми напівгруп  $S_\alpha, \alpha \in Y$ , яка позначається через  $S^0 = R \sum_{\alpha \in Y} S_\alpha$ .

Напівгрупу  $S^0$  називають *прямокутною сумою* напівгруп  $S_u, u \in M$ , позначаючи  $S^0 = M \sum_{u \in M} S_u$ , якщо  $\emptyset \neq M \subseteq I \times \Lambda$ , де  $I$  та  $\Lambda$  – непорожні множини,  $S_u, u \in M$  – ненульові напівгрупи, які попарно перетинаються по піднапівгрупі  $\{0\}$ ,  $S^0 = \bigcup_{u \in M} S_u$  і при будь-яких  $(i, \lambda), (j, \mu) \in M$  виконуються умови:

$$S_{(i,\lambda)} S_{(j,\mu)} \begin{cases} \subseteq S_{(i,\mu)}, & (i, \mu) \in M, \\ = \{0\}, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо  $M = I \times \Lambda$ , то напівгрупу  $S^0$  називають *повною прямокутною сумою* напівгруп  $S_u, u \in M$ .

У випадку, коли система  $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$  – це декомпозиція  $S^0$  в ортогональну (ліву, праву, прямокутну) суму напівгруп,  $D$  називають *ортогональною (лівою, правою, прямокутною) декомпозицією*  $S^0$ , а  $S_\alpha, \alpha \in Y$  – *ортогональними (лівими, правими, прямокутними) компонентами* в  $D$ .

На множині всіх ортогональних (лівих, правих, прямокутних) декомпозицій  $S^0$  визначимо частковий порядок  $\leq$  таким чином:  $D \leq D'$ , якщо кожна ортогональна (ліва, права, прямокутна) компонента в  $D'$  є підмножиною деякої ортогональної (лівої, правої, прямокутної) компоненти в  $D$ .

Напівгрупа  $S^0$  називається *нерозкладною в ортогональну (ліву, праву, прямокутну) суму* напівгруп, якщо система  $D = \{S^0\}$  – єдина декомпозиція напівгрупи  $S^0$  в ортогональну (ліву, праву, прямокутну) суму напівгруп.

4.2. Нехай  $\text{Sym}^0 X$  – симетрична 0-категорія на довільній множині  $X$  (де  $|X| > 1$ ). Для кожної  $A \in U(X)$  покладемо  $\text{Map}(*; A) = \{\varphi \in \text{Sym} X \mid \text{Im } \varphi = A\}$ .

Відповідь на питання про існування декомпозицій симетричної 0-категорії на множині  $X$  в ортогональні суми напівгруп дає

**Твердження.** *Симетрична 0-категорія  $\text{Sym}^0 X$  на множині  $X$  є ортогональною нерозкладною.*

**Доведення.** Нехай система  $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in H\}$  – деяка декомпозиція симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$  в ортогональну суму,  $A \in U(X)$  – довільна, але фіксована множина. Припустимо, що  $Map(*; A) \not\subseteq S_\alpha$  при будь-якому  $\alpha \in H$ . Тоді знайдуться елементи  $\beta, \gamma \in H$ ,  $\beta \neq \gamma$  для яких матимемо

$$\varphi \in Map(A; A) \subseteq S_\beta \text{ і } \psi \in Map(*; A) \subseteq S_\gamma.$$

Звідси випливає умова  $\psi\varphi \neq 0$ , яка протирічить тому, що  $D$  – ортогональна декомпозиція  $Sym^0 X$ . Отже, всі відображення з множини  $Map(*; A)$  містяться в деякій одній ортогональній компоненті. Для визначеності будемо вважати, що  $Map(*; A) \subseteq S_\alpha$ , де  $\alpha \in H$ .

Далі отримуємо, що для кожної  $B \in U(X)$ ,  $B \neq A$  множина відображень  $Map(*; B)$  міститься в ортогональній компоненті  $S_\alpha$ , оскільки в іншому випадку при будь-якому  $\beta \in H$ ,  $\beta \neq \alpha$  такому, що  $\varphi \in Map(*; B) \subseteq S_\beta$  і довільному відображенні  $\psi \in Map(B; A) \subseteq S_\alpha$  композиція  $\varphi\psi$  відмінна від нуля. Звідси безпосередньо випливає, що напівгрупа  $S_\alpha$  містить всі відображення з симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$ . Отже,  $D = \{Sym^0 X\}$  – єдина ортогональна декомпозиція цієї 0-категорії, тобто напівгрупа  $Sym^0 X$  ортогонально нерозкладна.

Твердження доведено.

4.3. Нагадаємо, що компоненти у найбільшій ортогональній декомпозиції напівгрупи з нулем є ортогонально нерозкладними [14]. Але компоненти у найбільшій декомпозиції у ліву (праву) суму напівгруп не зобов'язані бути нерозкладними у ліву (праву) суму напівгруп.

Нехай  $X = \{e, f, h\}$ ,  $L_X$  – напівгрупа лівих нулів на множині  $X$ . Покладемо  $T = L_X \cup \{g\}$  і визначимо операцію на множині  $T$  за правилом:

$$gx = f, \text{ якщо } x \in \{f, g, h\}; \quad ge = h; \quad xg = x, \text{ якщо } x \in X.$$

Безпосередня перевірка показує, що  $T$  є напівгрупою відносно щойно визначеної операції.

Позначимо через  $T^0$  напівгрупу  $T$  із зовнішньо приєднаним нулем  $0$  і покладемо  $T_1 = \{0, f, g, h\}$ ,  $T_2 = \{0, e\}$ . Тоді система  $D = \{T_1, T_2\}$  є найбільшою декомпозицією напівгрупи  $T^0$  в ліву суму напівгруп  $T_1$  та  $T_2$ . Але разом з цим для напівгрупи  $T_1$  система  $D' = \{\{0, g, f\}, \{0, h\}\}$  також є декомпозицією у ліву суму напівгруп.

4.4. Для кожної множини  $A \in U(X)$  покладемо  $Map^0(A; *) = Map(A; *) \cup \{0\}$ , де  $Map(A; *) = \{\varphi \in Sym X \mid Dom \varphi = A\}$ . Має місце наступна

**Теорема.**  $\{Map^0(A; *) \mid A \in U(X)\}$  – найбільша декомпозиція симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$  у ліву суму напівгруп, кожна з компонент якої не розкладається у ліву суму напівгруп.

**Доведення.** Для всіх  $A \in U(X)$  множини  $Map^0(A; *)$  є піднапівгрупами симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$ , оскільки при будь-яких  $\varphi, \psi \in Map^0(A; *)$  добуток  $\varphi\psi$  цих елементів міститься в  $Map^0(A; *)$ .

Зрозуміло, що піднапівгрупи  $Map^0(A; *)$ ,  $A \in U(X)$  є ненульовими, в об'єднанні складають симетричну 0-категорію  $Sym^0 X$  і попарно перетинаються по нульовій піднапівгрупі  $\{0\}$ . Оскільки при будь-яких  $B, C \in U(X)$  і довільних  $\varphi \in Map^0(B; *)$ ,  $\psi \in Map^0(C; *)$  маємо:  $\varphi\psi \in Map^0(B; *)$ , якщо  $\varphi \neq 0$ ,  $\psi \neq 0$  і  $Im \varphi = Dom \psi$ , та  $\varphi\psi = 0 \in Map^0(B; *)$ , в інших випадках, то  $Sym^0 X$  за визначенням є лівою сумою напівгруп  $Map^0(A; *)$ ,  $A \in U(X)$ .

Покажемо тепер, що кожна ліва компонента  $Map^0(A; *)$  не розкладається у ліву суму напівгруп. Оскільки для кожного відображення  $\varphi \in Map(A; *)$  має місце умова:  $i_A \varphi = \varphi$ , то система  $\{Map^0(A; *)\}$  – єдина ліва декомпозиція  $Map^0(A; *)$  і, отже, напівгрупа  $Map^0(A; *)$  за визначенням не розкладається у ліву суму напівгруп при будь-якому  $A \in U(X)$ .

Нехай система  $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\}$  – довільна декомпозиція симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$  у ліву суму напівгруп, кожна з компонент якої не розкладається у ліву суму напівгруп,  $Map^0(A; *)$  – довільна ліва компонента із  $D' = \{Map^0(B; *) \mid B \in U(X)\}$ . Оскільки, як було доведено вище,  $Map^0(B; *)$  не розкладається у ліву суму напівгруп при будь-якому  $B \in U(X)$ , то  $Map^0(A; *)$  міститься у деякій лівій компоненті із  $D$ . Таким чином, враховуючи довільність множини  $A$ , отримуємо, що кожна ліва компонента із  $D'$  є підмножиною деякої лівої компоненти із  $D$ , тобто  $D \leq D'$ .

Теорему доведено.

4.5. Для всіх  $A \in U(X)$  покладемо  $Map^0(*; A) = Map(*; A) \cup \{0\}$ . Двоїстою до теореми з п.4.4. є

**Теорема.**  $\{Map^0(*; A) \mid A \in U(X)\}$  – найбільша декомпозиція симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$  у праву суму напівгруп, кожна з компонент якої не розкладається у праву суму напівгруп.

4.6. Нехай далі  $Q = \{(A; B) \in U(X) \times U(X) \mid Map(A; B) \neq \emptyset\}$ , при цьому  $|X| > 1$ .

Відмітимо, що сукупність напівгруп  $Map^0(A; B), (A; B) \in Q$  є декомпозицією симетричної 0-категорії  $Sym^0 X$  у прямокутну суму, яка не є повною.

**Висновки.** В роботі отримано описання ідемпотентних конгруенцій на симетричній 0-категорії, вивчено структурні властивості цієї конструкції в термінах ортогональної (лівої, правої) суми напівгруп. Також описано характеристику напівгруподів, які отримуються з категорійних в нулі напівгруп відкиданням нуля.

## РЕЗЮМЕ

В работе определяется понятие симметрической 0-категории на произвольном множестве и описываются конгруэнции этой полугрупповой конструкции, факторполугруппы по которым являются полугруппами идемпотентов. Найдена наибольшая декомпозиция симметрической 0-категории в левую (правую) сумму полугрупп, каждая из компонент которой не раскладывается в левую (правую) сумму полугрупп. Кроме этого, указана характеристика полугрупподов, которые получаются из категорийных в нуле полугрупп отбрасыванием нуля.

## SUMMARY

The notion of symmetrical 0-category on the arbitrary set is defined and idempotent congruences of this semigroup construction are described. The greatest decomposition of symmetrical 0-category into a right (left) sum of semigroups, whose summands are indecomposable into a right (left) sum of semigroups, is founded. The some characterizations of categorical at zero semigroups are investigated.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Petrich M. Lectures in semigroup. – Berlin: Academic Press.- 1977.
2. Howie J.M. An introduction to semigroup theory. – London: Academic Press. – 1976.
3. Petrich M. Introduction to semigroups. – Columbus, Ohio: Charles E. Merrill, 1973.
4. Bogdanović S., Ćirić M. Decompositions of semigroups with zero. / Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série. – 57 (71). – 1995. – С.111-123.
5. Conrad P.F. Generalized semigroup rings, J. Indian Math. Soc. – (N. S.), 21. – 1957. – С.73-95.
6. Мальцев А.И. Симметрические группоиды. Математический сборник. – 1952. – Т.31. – С.136-151.
7. Либер А.Е. О симметрических обобщенных группах. Метем. сб. – 1953. – Т.33. – С.531-544.
8. Шутов Э.Г. Гомоморфизмы полугруппы всех частичных преобразований. Изв. вузов, Матем. – 1961. – №3. – С.177-184.
9. Ляпин Е.С. Нормальные комплексы ассоциативных систем. Изв. АН СССР. – 14 (1950). – С.179-192.
10. Ляпин Е.С. Полупростые коммутативные ассоциативные системы. Изв. АН СССР. – 14 (1950). – С.367-380.
11. Шварц Ш.. О полугруппах имеющих ядро. Czech. Math. J. 1 (76) (1951). – P.259-301.
12. Bogdanović S., Ćirić M. Semilattices of Archimedean semigroups and (completely)  $\pi$ -regular semigroups. I, Zb. rad. Fil. fak. (Nis), Ser. Mat. 7 (1993), 1-40.
13. Clifford A.H. and Preston G.B. The algebraic theory of semigroups. II, Amer. Math. Soc. 1967.
14. S. Bogdanović, M.Ćirić. Orthogonal sums of semigroups, Israel J. Math. 90 (1995). – P.423-428.
15. G. Lallement and M. Petrich. Decomposition I-matricielle d'une demi-groupe, J. Math. Pures Appl. 45 (1966), 67-117.

Надійшла до редакції 02.08.2005 р.

УДК 517.5

**ЗАДАЧИ О ДВУХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ**

*В.Е.Силенко*

*Донецкий государственный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского*

**1. Введение.** Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  – плоскость Лобачевского  $\mathbb{H}^2$  с неевклидовым расстоянием  $d(z_1, z_2)$  между точками  $z_1, z_2 \in D$  (см., например, [1, с. 46]) и гиперболически инвариантной мерой  $d\omega = \frac{dx dy}{(1-|z|^2)^2}$  ( $z = x + iy$ ). Группа  $G$  конформных автоморфизмов круга  $D$  состоит из ком-

плексных матриц  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  с определителем  $|a|^2 - |b|^2 = 1$  и действует на  $D$  транзитивно посредством отображений  $g \circ z = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$  ( $z \in D$ ). Разложение Ивасава группы  $G$  имеет вид  $G = KAN$ ,

где  $K = SO(2)$  – группа вращений  $C$ ,  $A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ ,

$N = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$  (см., например, [1, с. 92]).

Как обычно, далее гиперболическими прямыми называются дуги окружностей (и диаметры) в  $D$ , ортогональные границе  $\partial D$ , а орициклами – евклидовы окружности в  $D$ , касающиеся  $\partial D$ .

Пусть  $\alpha > 0$ , назовем множество

$$Q_\alpha = \{z = n_s a_t \circ 0 : 0 \leq s \leq \alpha, 0 \leq t \leq 1\}$$

гиперболическим прямоугольником. Нетрудно видеть, что  $Q_\alpha$  представляет собой часть круга  $D$ , заключенную между двумя орициклами с общей точкой  $z_0 = 1$  и двумя гиперболическими прямыми, входящими в эту точку.

Рассмотрим следующую задачу о двух гиперболических прямоугольниках. Пусть  $f \in C(D)$  и для некоторых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  и всех  $g \in NA$  выполнено условие

$$\int_{gQ_{\alpha_1}} f(z) d\omega = \int_{gQ_{\alpha_2}} f(z) d\omega = 0.$$

Следует ли отсюда, что  $f \equiv 0$  в  $D$ ? В общем случае ответ отрицательный даже для  $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ , как следует из теоремы 1, где решается задача о восстановлении некоторого класса функций по заданным интегральным средним. Однако при некоторых ограничениях на рост функции  $f$  оказывается нулевой (см. теорему 1 и теорему 4 ниже). Причем первое утверждение теоремы 4 (см. также [2]) дают решение задачи, поставленной В. В. Волчковым в [3, с.229] о получении дополнительных условий, обеспечивающих выполнение  $f \equiv 0$  в случае  $\alpha_1/\alpha_2 \in \mathbb{Q}$ . В данной работе изучается также обобщение задачи о гиперболических прямоугольниках на случай нескольких функций (см. теорему 2 и теорему 3 ниже).

Для евклидового случая подобные проблемы, в том числе известная задача о трех квадратах и ее обобщения, изучались ранее (см [3-7] и библиографию к ним). Приведенные задачи типа Помпейю находят свое применение, в частности, для получения соответствующих обобщений теоремы Мореры (см., например, [3-4], [8-10]).

**2. Формулировки основных результатов.** Пусть  $f \in C(D)$ . Введем класс функций

$$L = \left\{ f = f(z) : \forall z \in D \quad \exists \lim_{\substack{l \rightarrow +\infty \\ l \in \mathbb{N}}} f \left( \frac{e^{2l}(1-|z|^2) - (1+|z|^2-2z)}{e^{2l}(1-|z|^2) + (1+|z|^2-2\bar{z})} \right) e^{-2l} \right\}.$$

Для  $\alpha > 0$  рассмотрим интегральное преобразование типа Помпейю

$$P_{\alpha} f(u, v) = \int_u^{u+\alpha e^{2v}} \int_v^{v+1} f(n_{\sigma} a_{\tau} \circ 0) e^{-2\tau} d\tau d\sigma.$$

В теореме 1 получено описание некоторого класса функций  $f(z) \in C(D) \cap L$  в терминах их интегральных средних. Аналогичная задача для одного гиперболического прямоугольника была рассмотрена в [11].

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathcal{Q}$ ,  $f(z) \in C(D) \cap L$ , и выполнено условие

$$P_{\alpha_k} f(u_1, v) = P_{\alpha_k} f(u_2, v) \quad \text{для всех } u_1, u_2, v \in \mathbf{R}, k \in \{1; 2\} \quad (1)$$

Тогда  $\frac{I_{\alpha_1}(v)}{\alpha_1} \equiv \frac{I_{\alpha_2}(v)}{\alpha_2}$  на  $\mathbf{R}$ , и

$$f(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \left( f_0(z) - \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \left( I'_{\alpha_k} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + j \right) - 2I_{\alpha_k} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + j \right) \right) e^{-2j} \right), \quad (2)$$

где  $f_0(z) = \frac{1-|z|^2}{1-|z|^2} \cdot \lim_{\substack{l \rightarrow +\infty \\ l \in \mathbf{N}}} \left[ f \left( \frac{e^{2l}(1-|z|^2) - (1+|z|^2-2z)}{e^{2l}(1-|z|^2) + (1+|z|^2-2\bar{z})} \right) e^{-2l} \right]$ ,  $I_{\alpha_k}(v) = P_{\alpha_k} f(u_1, v)$  при  $k \in \{1; 2\}$ .

**Теорема 2.** Пусть для некоторых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  таких, что  $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathcal{Q}$ , функции  $f_1(z), f_2(z) \in C(D)$  удовлетворяют условиям:

$$1) \int_{gQ_{\alpha_1}} f_1(z) d\omega = \int_{gQ_{\alpha_2}} f_2(z) d\omega = 0 \quad \text{для всех } g \in NA,$$

$$2) f_1(z) - f_2(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по орициклам,}$$

$$3) \text{ для } k \in \{1; 2\} \quad f_k(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по гиперболическим прямым.}$$

Тогда  $f_1(z) \equiv f_2(z) \equiv 0$  в  $D$ .

$$\text{Для } m \in \mathbf{N} \text{ обозначим } F_m(z) = \sum_{k=1}^m f_k(z).$$

**Теорема 3.** 1) Пусть для некоторого  $m \in \mathbf{N}$ , всех  $k \in \mathbf{N}$  таких, что  $k \leq m$ , и некоторых  $\alpha_k > 0$  функции  $f_k(z) \in C(D)$ , и

$$\int_{gQ_{\alpha_k}} f_k(z) d\omega = 0 \quad \text{для всех } g \in NA \quad (3)$$

Тогда если

$$F_m(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по гиперболическим прямым,} \quad (4)$$

$$F_m(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по орициклам,} \quad (5)$$

то  $F_m(z) \equiv 0$  в  $D$ .

2) Для  $m \geq 2$  существуют линейно независимые функции  $f_k(z) \in C(D)$ , удовлетворяющие (3), (5) и такие, что

$$F_m(z) = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по гиперболическим прямым.}$$

3) Для  $m \geq 2$  существуют линейно независимые функции  $f_k(z) \in C(D)$ , удовлетворяющие (3), (4) и такие, что



$$F_m(z) = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по орициклам.}$$

**Теорема 4.** 1) Пусть  $f(z) \in C(D)$ ,

$$f(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по гиперболическим прямым,} \quad (6)$$

и для некоторых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\int_{gQ_{\alpha_1}} f(z) d\omega = \int_{gQ_{\alpha_2}} f(z) d\omega = 0 \quad \text{для всех } g \in NA \quad (7)$$

Тогда если  $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbf{Q}$ , или

$$f(z) = o\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по орициклам, то } f(z) \equiv 0 \text{ в } D. \quad (8)$$

2) Для любых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  существует функция  $f(z) \in C(D)$ , не равная тождественно нулю в  $D$ , удовлетворяющая (7), (8) и такая, что

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по гиперболическим прямым.}$$

3) Для любых соизмеримых  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  существует функция  $f(z) \in C(D)$ , не равная тождественно нулю в  $D$ , удовлетворяющая (7), (6) и такая, что

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \rightarrow 1 \text{ по орициклам.}$$

**3. Вспомогательные утверждения.** Для  $\alpha > 0$  и  $h \in C(\mathbf{R}^2)$  рассмотрим интегральное преоб-

зование  $G_\alpha h(u, v) = \int_u^{u+\alpha e^{2v}} h(\sigma, v) d\sigma$ . Обозначим  $\Xi_{\tau_1, \tau_2} = \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 : s \in \mathbf{R}; \tau_1 \leq t \leq \tau_2\}$ .

**Лемма 1.** Пусть для некоторого  $m \in \mathbf{N}$ , всех  $k \in \mathbf{N}$  таких, что  $k \leq m$ , и некоторых  $\alpha_k > 0$  функции  $h_k(s, t)$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $\frac{\partial^{i+j} h_k}{\partial t^i \partial s^j}(s, t) \in C(\mathbf{R}^2)$  для всех  $i \in \{0; 1\}$ ,  $j \in \{0; 1; 2; 3\}$ ,
- 2)  $G_{\alpha_k} h_k(u, v) = 0$  для всех  $u, v \in \mathbf{R}$ ,
- 3)  $\sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = o(|s|)$  при  $s \rightarrow \infty$ , для каждого  $t \in \mathbf{R}$ .

Тогда  $\sum_{k=1}^m h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ . Если  $m \geq 2$  и все  $\alpha_k$  попарно несоизмеримы, то  $h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  для всех  $k \in \mathbf{N}$  таких, что  $k \leq m$ .

**Доказательство.** По второму условию леммы

$$\int_u^{u+\alpha_k e^{2v}} h_k(\sigma, v) d\sigma = \int_0^{\alpha_k e^{2v}} h_k(u+\sigma, v) d\sigma = 0 \quad \text{для всех } u, v \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N} \text{ таких, что } k \leq m. \quad (9)$$

Дифференцируя по  $u$ , получаем, что для всех  $u, v \in \mathbf{R}$  выполнено равенство  $h_k(u+\alpha_k e^{2v}, v) = h_k(u, v)$ .

Значит, для каждого  $k \in \mathbf{N}$  такого, что  $k \leq m$ , функция  $h_k(s, t)$  при фиксированном  $t \in \mathbf{R}$  периодична

по  $s$  с периодом  $T_k = \alpha_k e^{2t}$ . Следовательно,  $h_k(s, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(t) \exp\left(il \frac{2\pi}{\alpha_k} e^{-2t} s\right)$ ,

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c'_{kl}(t) \exp\left( il \frac{2\pi}{\alpha_k} e^{-2t} s \right) - 2s p_k(s, t), \quad \frac{\partial h_k}{\partial s}(s, t) = p_k(s, t),$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c'_{kl}(t) \exp\left( il \frac{2\pi}{\alpha_k} e^{-2t} s \right) - 2s \sum_{k=1}^m p_k(s, t), \text{ где}$$

$$c_{kl}(t) = \frac{e^{-2t} \alpha_k e^{2t}}{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} h_k(\sigma, t) \exp\left( -il \frac{2\pi}{\alpha_k} e^{-2t} \sigma \right) d\sigma, \quad p_k(s, t) = \frac{2\pi i}{\alpha_k} e^{-2t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l c_{kl}(t) \exp\left( il \frac{2\pi}{\alpha_k} e^{-2t} s \right),$$

причем ряды в силу гладкости функций  $h_k$  сходятся равномерно на множествах  $\Xi_{\tau_1, \tau_2}$ .

Обозначим  $p(s, t) = \sum_{k=1}^m p_k(s, t)$ . Тогда из третьего условия леммы получаем, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} p(s, t) = 0 \quad \text{для каждого } t \in \mathbf{R} \quad (10)$$

Очевидно, что функции  $p_k(s, t)$  при фиксированном  $t \in \mathbf{R}$  периодичны по  $s$  с периодом  $T_k = \alpha_k e^{2t}$  и непрерывны.

Если  $m = 1$ , или все  $\alpha_k$  попарно соизмеримы, то из (10) следует, что  $p(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ .

Пусть теперь  $m \geq 2$ . Если все  $\alpha_k$  попарно несоизмеримы, то можно показать, что

$$\frac{2\pi i l}{\alpha_k} e^{-2t} c_{kl}(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(\sigma, t) \exp\left( -il \frac{2\pi}{\alpha_k} e^{-2t} \sigma \right) d\sigma ;$$

$$\frac{2\pi |l|}{\alpha_k} e^{-2t} |c_{kl}(t)| \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |p(\sigma, t)| d\sigma = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^1 |p(T\sigma, t)| d\sigma .$$

Учитывая, что для каждого фиксированного  $t \in \mathbf{R}$  функция  $|p(\sigma, t)|$  ограничена, и  $\lim_{T \rightarrow +\infty} |p(Ts, t)| = 0$

$\forall s \neq 0$ , то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^1 |p(T\sigma, t)| d\sigma = 0$ . Значит, (с учетом равенства (9) для  $l = 0$ ) для всех  $l, k \in N$  таких, что  $k \leq m$ , функции  $c_{kl}(t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}$ . Следовательно,

$p_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  и, значит,  $\frac{\partial h_k}{\partial s}(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ . Таким образом,  $h_k(s, t) = h_k(s_0, t)$  для всех  $s, t \in \mathbf{R}$ . Отсюда, используя (9), получаем, что если все  $\alpha_k$  попарно несоизмеримы, то  $h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  для каждого  $k \in N$  такого, что  $k \leq m$ .

Если же не все  $\alpha_k$  попарно несоизмеримы, то, группируя в сумме  $\sum_{k=1}^m p_k(s, t)$  слагаемые, соответствующие соизмеримым между собой  $\alpha_k$ , из вышеприведенного получим, что  $p(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ .

Значит, для функции  $h(s, t) = \sum_{k=1}^m h_k(s, t)$  выполнено тождество  $\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ . Таким образом,

$h(s, t) = h(s_0, t)$  для всех  $s, t \in \mathbf{R}$ . Так как из (9) следует, что

$$\int_0^{\alpha_1 e^{2v}} \dots \int_0^{\alpha_m e^{2v}} h(u + \sigma_1 + \dots + \sigma_m, v) d\sigma_m \dots d\sigma_1 = \int_0^{\alpha_1 e^{2v}} \dots \int_0^{\alpha_m e^{2v}} \sum_{k=1}^m h_k(u + \sigma_1 + \dots + \sigma_m, v) d\sigma_m \dots d\sigma_1 = 0$$

для всех  $u, v \in \mathbf{R}$ , то отсюда получаем тождество  $h(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  и заключаем о справедливости всех утверждений леммы 1.

**Лемма 2.** Пусть для некоторого  $m \in N$ , всех  $k \in N$  таких, что  $k \leq m$ , и некоторых  $\alpha_k > 0$  функции  $h_k(s, t)$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $h_k(s, t), \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) \in C(\mathbf{R}^2)$ ,
- 2)  $G_{\alpha_k} h_k(u, v) = 0$  для всех  $u, v \in \mathbf{R}$ ,
- 3)  $\sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = o(|s|)$  при  $s \rightarrow \infty$ , для каждого  $t \in \mathbf{R}$ .

Тогда  $\sum_{k=1}^m h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ . Если  $m \geq 2$  и все  $\alpha_k$  попарно несоизмеримы, то  $h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  для всех  $k \in N$  таких, что  $k \leq m$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\varphi_\varepsilon \geq 0$ ,  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset [-\varepsilon; \varepsilon]$ , и  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\varepsilon(\sigma) d\sigma = 1$ . Для  $\varepsilon > 0$

обозначим  $H_{k,\varepsilon}(s, t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h_k(\sigma + s, t) \cdot \varphi_\varepsilon(\sigma) d\sigma$ . Тогда для каждого  $k, j \in N$ ,  $k \leq m$

$$\frac{\partial H_{k,\varepsilon}}{\partial t}(s, t), \frac{\partial^j H_{k,\varepsilon}}{\partial s^j}(s, t), \frac{\partial^{j+1} H_{k,\varepsilon}}{\partial t \partial s^j}(s, t) \in C(\mathbf{R}^2).$$

Из (10) с помощью теоремы Фубини получаем, что

$$G_{\alpha_k} H_{k,\varepsilon}(u, v) = \int_u^{u+\alpha_k e^{2v}} H_{k,\varepsilon}(\sigma, v) d\sigma = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\sigma_1) \int_u^{u+\alpha_k e^{2v}} h_k(\sigma_1 + \sigma, v) d\sigma d\sigma_1 = 0$$
 для всех  $u, v \in \mathbf{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Из равенства  $\sum_{k=1}^m \frac{\partial H_{k,\varepsilon}}{\partial t}(s, t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial t}(\sigma + s, t) \cdot \varphi_\varepsilon(\sigma) d\sigma$  и теоремы Лебега о мажорируемой

сходимости следует, что для любого  $t \in \mathbf{R}$ ,  $\varepsilon > 0$   $\sum_{k=1}^m \frac{\partial H_{k,\varepsilon}}{\partial t}(s, t) = o(|s|)$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Применяя теперь лемму 1 к функциям  $H_{k,\varepsilon}(s, t)$ , получаем, что  $\sum_{k=1}^m H_{k,\varepsilon}(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ , а если

$m \geq 2$  и все  $\alpha_k$  попарно несоизмеримы, то  $H_{k,\varepsilon}(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  для всех  $k \in N$  таких, что  $k \leq m$ .

Так как  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{k,\varepsilon}(s, t) = h_k(s, t)$ , что следует из неравенства

$|H_{k,\varepsilon}(s, t) - h_k(s, t)| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |h_k(\sigma + s, t) - h_k(s, t)| \cdot \varphi_\varepsilon(\sigma) d\sigma$ , то отсюда заключаем о справедливости всех утверждений леммы 2.

Приведем пример функции с нулевыми интегралами по гиперболическим прямоугольникам.

**Лемма 3.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( 1 - i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2j} \frac{\text{Im } z}{1 - |z|^2} \right) \exp \left( -2j - i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2j} \frac{\text{Im } z}{1 - |z|^2} \right)$ . Тогда

для всех  $g \in NA$  и  $l \in \mathbf{N}$   $\int_{gQ_{l\alpha}} f_\alpha(z) d\omega = 0$ .

**Доказательство.** Обозначим  $h_0(s, t) = \frac{1}{2} \exp \left( -2t + i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2t} s \right)$ , тогда

$f_\alpha(n_s a_t \circ 0) = -e^{2t} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\partial h_0}{\partial t}(s, t + j)$ . Применяя теорему 2 из [11], получаем

$$\int_u^{u+l\alpha e^{2v}} \int_v^{v+1} f_\alpha(n_\sigma a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau d\sigma = \int_u^{u+l\alpha e^{2v}} h_0(\sigma, v) d\sigma.$$

$$\text{Так как } \int_u^{u+l\alpha e^{2v}} h_0(\sigma, v) d\sigma = \int_u^{u+l\alpha e^{2v}} \frac{e^{-2v}}{2} \exp\left(i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2v} \sigma\right) d\sigma = -\frac{i\alpha}{4\pi} \exp\left(i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2v} u\right) \cdot [e^{i2\pi l} - 1] \equiv 0,$$

то отсюда следует утверждение леммы 3.

**4. Доказательства основных результатов.**

**Доказательство теоремы 1.** Из условия (1) теоремы получаем, что

$$\int_u^{u+\alpha_k e^{2v}} \int_v^{v+1} f(n_\sigma a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau d\sigma = I_{\alpha_k}(v) \quad \text{для всех } u, v \in \mathbf{R}, k \in \{1; 2\} \quad (11)$$

Отсюда следует, что  $I_{\alpha_k}(v) \in C^1(\mathbf{R})$  и функция

$$h(w, v) = \int_v^{v+1} f(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau \quad \text{при фиксированном } v \in \mathbf{R} \text{ периодична по } w \text{ с периодами } T_1 = \alpha_1 e^{2v}$$

и  $T_2 = \alpha_2 e^{2v}$ . Так как при иррациональном  $\alpha_1/\alpha_2$  периоды  $T_1$  и  $T_2$  несоизмеримы, то для всех  $w_1, w_2, v \in \mathbf{R}$  выполняется равенство  $h(w_1, v) = h(w_2, v)$ . Поэтому положим  $c(v) = h(w, v)$  и подста-

вим в (11). Получим, что  $c(v)\alpha_k e^{2v} = I_{\alpha_k}(v)$ . Значит,  $\frac{I_{\alpha_1}(v)}{\alpha_1} \equiv \frac{I_{\alpha_2}(v)}{\alpha_2}$  на  $\mathbf{R}$ , и

$$h(w, v) = \frac{I_{\alpha_k}(v)}{\alpha_k} e^{-2v} \quad \text{для всех } w, v \in \mathbf{R}, k \in \{1; 2\}. \quad \text{Таким образом,}$$

$$\int_v^{v+1} f(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = \frac{I_{\alpha_k}(v)}{\alpha_k} e^{-2v} \quad \text{для всех } w, v \in \mathbf{R}, k \in \{1; 2\}.$$

Следовательно,  $\sum_{j=0}^{l-1} \int_{v+j}^{v+j+1} f(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{I_{\alpha_k}(v+j)}{\alpha_k} e^{-2(v+j)}$ , то есть

$$\int_v^{v+l} f(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{I_{\alpha_k}(v+j)}{\alpha_k} e^{-2(v+j)} \quad \text{для всех } w, v \in \mathbf{R}, l \in \mathbf{N}, k \in \{1; 2\}.$$

Дифференцируя, отсюда получаем

$$f(n_s a_{t+l} \circ 0) e^{-2(t+l)} - f(n_s a_t \circ 0) e^{-2t} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=0}^{l-1} (I'_{\alpha_k}(t+j) - 2I_{\alpha_k}(t+j)) e^{-2(t+j)}.$$

Так как по условию теоремы  $f_0(n_s a_t \circ 0) = \lim_{l \rightarrow +\infty} f(n_s a_{t+l} \circ 0) e^{-2(t+l)}$ , то, переходя в последнем равенстве к пределу при  $l \rightarrow +\infty$ , получаем

$$f_0(n_s a_t \circ 0) - f(n_s a_t \circ 0) e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{\alpha_k} \sum_{j=0}^{+\infty} (I'_{\alpha_k}(t+j) - 2I_{\alpha_k}(t+j)) e^{-2j}.$$

Значит,

$$f(n_s a_t \circ 0) = e^{2t} \left( f_0(n_s a_t \circ 0) - \frac{e^{-2t}}{\alpha_k} \sum_{j=0}^{+\infty} (I'_{\alpha_k}(t+j) - 2I_{\alpha_k}(t+j)) e^{-2j} \right),$$

что означает выполнение (2) для всех  $z \in D$  и  $k \in \{1; 2\}$ .

**Доказательство теоремы 2.** По первому условию теоремы

$$\int_u^{u+\alpha_k e^{2v}} \int_v^{v+1} f_k(n_\sigma a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau d\sigma = 0 \quad \text{для всех } u, v \in \mathbf{R}, k \in \{1; 2\} \quad (12)$$

Обозначим

$$h_k(s, t) = (-1)^{k+1} \int_t^{t+1} f_k(n_s a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau.$$

Тогда

$$(-1)^{k+1} \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = f_k(n_s a_{t+1} \circ 0) e^{-2(t+1)} - f_k(n_s a_t \circ 0) e^{-2t},$$

и

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = e^{-2(t+1)}(f_1 - f_2)(n_s a_{t+1} \circ 0) - e^{-2t}(f_1 - f_2)(n_s a_t \circ 0).$$

Из второго условия теоремы и (12) получаем, что функции  $h_k(s, t)$  удовлетворяют всем условиям лем-

мы 2. Значит,  $h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$  для  $k \in \{1, 2\}$ , то есть  $\int_v^{v+1} f_k(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = 0$  для всех

$w, v \in \mathbf{R}$ . Тогда отсюда в силу произвольности  $v \in \mathbf{R}$  следует, что  $\int_v^{v+l} f_k(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = 0$  для

всех  $l \in \mathbf{N}$ ,  $w, v \in \mathbf{R}$ . Дифференцируя эти тождества по  $v$ , имеем  $f_k(n_w a_{v+l} \circ 0) e^{-2(v+l)} - f_k(n_w a_v \circ 0) e^{-2v} = 0$  для всех  $l \in \mathbf{N}$ ,  $w, v \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \{1, 2\}$ . Переходя к пределу при  $l \rightarrow +\infty$  отсюда и из третьего условия теоремы получаем требуемое.

**Доказательство теоремы 3.** По условию (3) теоремы

$$\int_u^{u+\alpha_k e^{2v}} \int_v^{v+1} f_k(n_\sigma a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau d\sigma = 0 \quad \text{для всех } u, v \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N} \text{ таких, что } k \leq m \quad (13)$$

Обозначим  $h_k(s, t) = \int_t^{t+1} f_k(n_s a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau$ . Тогда  $\frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = f_k(n_s a_{t+1} \circ 0) e^{-2(t+1)} - f_k(n_s a_t \circ 0) e^{-2t}$ , и

$\sum_{k=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial t}(s, t) = F_m(n_s a_{t+1} \circ 0) e^{-2(t+1)} - F_m(n_s a_t \circ 0) e^{-2t}$ . Из условия (5) теоремы и (13) получаем, что

функции  $h_k(s, t)$  удовлетворяют всем условиям леммы 2. Значит,  $\sum_{k=1}^m h_k(s, t) \equiv 0$  на  $\mathbf{R}^2$ , то есть

$\int_v^{v+1} F_m(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = 0$  для всех  $w, v \in \mathbf{R}$ . Тогда отсюда в силу произвольности  $v \in \mathbf{R}$  следует, что

$\int_v^{v+l} F_m(n_w a_\tau \circ 0) e^{-2\tau} d\tau = 0$  для всех  $l \in \mathbf{N}$ ,  $w, v \in \mathbf{R}$ . Дифференцируя это тождество по  $v$ , имеем

$F_m(n_w a_{v+l} \circ 0) e^{-2(v+l)} - F_m(n_w a_v \circ 0) e^{-2v} = 0$  для всех  $l \in \mathbf{N}$ ,  $w, v \in \mathbf{R}$ . Переходя к пределу при  $l \rightarrow +\infty$  отсюда и из условия (4) заключаем о справедливости первого утверждения теоремы 3.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно рассмотреть, например, набор функций

$$f_k(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \exp\left(i\pi \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) \cdot \sin\left(k \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right), \quad 1 \leq k \leq m.$$

Используя лемму 3, можно показать, что функции

$$f_k(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \exp\left(i\pi \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) \cdot \sin\left(k \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right), \quad 1 \leq k \leq m-1,$$

$$f_m(z) = -\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \exp\left(i\pi \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) \cdot \sum_{l=1}^{m-1} \sin\left(l \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right) + \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - i \frac{2\pi}{\alpha_m} e^{-2j} \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right) \exp\left(-2j - i \frac{2\pi}{\alpha_m} e^{-2j} \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right).$$

удовлетворяют всем условиям третьего утверждения теоремы 3.

**Доказательство теоремы 4.** Полагая  $f_1 = f_2 = f$  и применяя для случая  $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathcal{Q}$  теорему 2, а для случая  $\alpha_1/\alpha_2 \in \mathcal{Q}$  теорему 3, получаем первое утверждение теоремы 4.

Положим  $f(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \exp\left(i\pi \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right)$ . Тогда, как легко видеть,  $f(z)$  удовлетворяет

всем условиям второго утверждения теоремы.

Пусть  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_1}{m_2}$ , где  $m_1, m_2 \in \mathcal{N}$ . Тогда обозначим  $\alpha = \frac{\alpha_1}{m_1} = \frac{\alpha_2}{m_2}$  и положим для примера

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2j} \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right) \exp\left(-2j - i \frac{2\pi}{\alpha} e^{-2j} \frac{\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}\right).$$

Тогда, используя лемму 3, можно показать, что функция  $f(z)$  удовлетворяет всем условиям третьего утверждения теоремы 4.

## РЕЗЮМЕ

Розглядаються задачі типу Помпейю для двох гіперболічних прямокутників та узагальнення на випадок декількох функцій. Одержано точні умови існування ненульової функції з нульовими інтегралами за даним набором гіперболічних прямокутників.

## SUMMARY

New Pompeiu type theorem is given in the unit disk. We investigate functions whose integrals over a given collection of hyperbolic rectangles vanish. We found the sharp conditions for nonzero functions with vanishing integrals to exist.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
2. Силенко В.Е. О функциях с нулевыми интегралами по гиперболическим квадратам // Труды по геометрии и анализу – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2003. – С. 384-388.
3. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
4. Волчков В.В. О проблеме Помпейю и некоторых ее обобщениях // Укр. мат. ж. – 1994. – №10. – С.1444-1448.
5. Волчков В. В. Преобразование Помпейю. – Донецк: ДонГУ, 1999. – 210 с.
6. Berenstain C.A., Taylor B.A. The 'three squares' theorem for continuous functions // Arch. Rational Anal. Mech. – 1977. – 63. – P. 253-259.
7. Laird P. G. A reconsideration of the 'three squares' problem // Aequationes Math. – 1980. – 21. – P. 98-104.
8. Силенко В. Е. Новая теорема типа Мореры в единичном круге // Укр. мат. ж. – 2001. – 53, №2. – С.278-281.
9. Айзенберг Л.А. Вариации на тему теоремы Морера и проблемы Помпейю // Доклады АН России. – 1994. – 337, № 6. – С.709-712.
10. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1972. – 47. – P.237-254.
11. Силенко В. Е. Описание функций с заданными интегральными средними по гиперболическим прямоугольникам // Вісник Донецького університету, сер. А: Природничі науки. – 2004. – №1. – С.18-22.

Надійшла до редакції 20.06.2005 р.

УДК 517.928

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ**

*Г.В.Завизион*

*Национальный педагогический университет им. М.П. Драгоманова, г. Киев*

**Введение.** Задаче о построении периодических решений систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Несмотря на большое количество исследований, многие вопросы конструктивной теории периодических решений в общей постановке еще не получили развития в современной математической литературе, отвечающего потребностям тех разделов механики, физики, техники, в которых встречаются задачи, связанные с исследованием колебательных систем. Прежде всего, это вопросы существования, построения периодических решений, вопросы их устойчивости, неустойчивости.

Вопросы существования и построения периодических решений различных видов, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений исследовались в [1 – 4]. Сведения систем линейных дифференциальных уравнений в вещественной области к каноническому виду, с тождественно вырожденной или вырожденной в отдельных точках промежутка интегрирования, проводились в [5, 6]. В [7, 8] изучались свойства решений линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями.

В данной статье рассматривается линейная система интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с тождественно вырожденной матрицей при производной. Для такой системы предложен конструктивный метод исследования периодических решений. Используя интегро-дифференциальные уравнения с параметром, находятся условия существования и указывается метод отыскания периодических решений.

**Существование единственного периодического решения.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$C(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + \rho \int_0^L \Gamma(t,s)x(s)ds + f(t), \tag{1}$$

где  $n \times n$  матрицы  $A(t), C(t)$ , вектор  $f(t)$  –  $\omega$ -периодические,  $n \times n$  матрица  $\Gamma(t,s)$  – непрерывна и  $\omega$ -периодическая по переменным  $t$  и  $s$ ,  $\rho$  – параметр,  $L$  – положительное действительное число. Пусть выполняются условия: 1)  $\det C(t) \equiv 0$ ,  $rank C(t) = n - l$ ; 2) матрица  $C(t)$  имеет полный жордановый набор векторов, относительно оператора  $L(t) = A(t) - C(t)\frac{d}{dt}$ , который состоит с  $r$  цепочек длиной  $s_1, s_2 \dots s_r$ , где  $\max_i s_i = m$ ,  $s_1 + s_2 + \dots + s_r = l$ . Тогда существуют невырожденные матрицы  $P(t), Q(t)$ , что с помощью замены

$$x(t) = Q(t)y(t), \tag{2}$$

система (1) принимает вид

$$\frac{dy_1}{dt} = M(t)y_1 + \rho \int_0^L (P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s))_1 ds + (P(t)f(t))_1, \tag{3}$$

$$I \frac{dy_2}{dt} = y_2 + \rho \int_0^L (P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s))_2 ds + (P(t)f(t))_2, \tag{4}$$

где  $P(t), Q(t), M(t), I$  матрицы, определенные теоремой 2.1 с [7];  $(P(t)f(t))_1, (P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s))_1$  –  $n - l$ -мерные вектора, элементами которых есть первые  $n - l$  компонент соответственно векторов  $P(t)f(t), P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s)$ ;  $(P(t)f(t))_2, (P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s))_2$  –  $l$ -мерные вектора, элементами которых есть  $l$  последних компонент соответственно векторов  $P(t)f(t), P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s)$ . Рассматривая в (4) интегральный член, как неоднородность и пользуясь формулой (2.27) с [7], решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.24) с [7], получим, что решение (4) имеет вид

$$y_2(t) = - \sum_{i=0}^{m-1} I^i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left( \rho \int_0^L (P(t)\Gamma(t,s)Q(s)y(s))_2 ds + (P(t)f(t))_2 \right). \tag{5}$$

Матрицу  $Q(s)y(s)$  можно представить в виде  $Q(s)y(s) = Q_1(s)y_1(s) + Q_2(s)y_2(s)$ , а матрицы  $P(t)\Gamma(t,s)Q_i(s)$  ( $i = \overline{1,2}$ ) представим в виде  $P(t)\Gamma(t,s)Q_i(s) = \begin{pmatrix} K_{i1}(t,s) & K_{i2}(t,s) \\ K_{i3}(t,s) & K_{i4}(t,s) \end{pmatrix}$ , где  $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ .

Тогда, согласно (5) имеем

$$y_2(t) = - \sum_{i=0}^{m-1} \left( \rho \int_0^L I^i \frac{\partial^i K_{13}(t,s)}{\partial t^i} y_1(s) ds + \rho \int_0^L I^i \frac{\partial^i K_{24}(t,s)}{\partial t^i} y_2(s) ds + \frac{d^i}{dt^i} (P(t)f(t))_2 \right). \quad (6)$$

Можно показать, что если  $y_1(t)$  –  $\omega$  – периодическая функция, то условие

$$L\bar{K}_{24}\rho < 1 \quad (7)$$

обеспечивает существование единственного  $\omega$  – периодического решения системы (6), вида

$$y_2(t) = -\rho \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} I^i \frac{\partial^i K_{13}(t,s)}{\partial s^i} y_1(s) ds \right) - \rho^2 \int_0^L D(t,s,\rho) ds \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} I^i \frac{\partial^i K_{13}(s,\xi)}{\partial s^i} y_1(\xi) d\xi \right) + \sum_{i=0}^{m-1} \left( \rho \int_0^L D(t,s,\rho) \frac{\partial^i (P(s)f(s))_2}{\partial s^i} ds + \frac{d^i (P(t)f(t))_2}{dt^i} \right), \quad (8)$$

где  $D(t,s,\rho)$  – резольвента ядра  $\sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(t,s)}{\partial t^i}$ .

Подставляя (8) в (3), меняя в полученных интегралах порядок интегрирования и после упрощения система уравнений (3) примет вид

$$\frac{dy_1}{dt} = M(t)y_1 + \rho \int_0^L \Phi(t,\xi)y_1(\xi) d\xi + F(t,\rho), \quad (9)$$

где  $\Phi(t,\xi) = K_{11}(t,\xi) - \rho \int_0^L K_{22}(t,s) \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(s,\xi)}{\partial s^i} \right) ds - \rho^2 \int_0^L K_{22}(t,s) ds \int_0^L D(s,\xi_1,\rho) \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(\xi_1,\xi)}{\partial \xi_1^i} \right) d\xi_1$ ,

$$F(t,\rho) = \rho^2 \int_0^L K_{22}(t,s) ds \int_0^L D(s,\xi,\rho) \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i (P(\xi)f(\xi))_2}{\partial \xi^i} \right) d\xi + \rho \int_0^L K_{22}(t,s) \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i (P(s)f(s))_2}{\partial s^i} \right) ds + (P(t)f(t))_1.$$

Пусть  $\det B(\omega) \neq 0$ , где  $B(t) = \int_0^t M(\tau) d\tau$ . Записав к (9) эквивалентное интегральное уравнение и воспользовавшись  $\omega$  – периодичностью  $y_1(t)$  получим

$$\int_0^\omega M(\tau)y_1(\tau) d\tau = -\rho \int_0^\omega d\tau \int_0^L \Phi(\tau,\xi)y_1(\xi) d\xi - \int_0^\omega F(\tau,\rho) d\tau. \quad (10)$$

$$\text{Рассмотрим интеграл } \int_0^\omega M(\tau)y_1(\tau) d\tau = \int_0^t M(\tau)y_1(\tau) d\tau + \int_t^\omega M(\tau)y_1(\tau) d\tau \quad (11)$$

Интегрируя каждое слагаемое с (11) по частям, имеем

$$\int_0^\omega M(\tau)y_1(\tau) d\tau = B(\omega)y_1(t) - \int_0^t B(\tau)\dot{y}_1(\tau) d\tau + \int_t^\omega B_1(\tau)\dot{y}_1(\tau) d\tau, \quad (12)$$

где  $B_1(t) = \int_t^\omega M(\tau) d\tau$ ,  $\dot{y}_1(\tau) = \frac{dy_1(\tau)}{d\tau}$ .

Подставляя (9) в (12), а потом полученное выражение подставляем в (10), найдем

$$y_1(t) = \int_0^\omega K(t,\tau)M(\tau)y_1(\tau) d\tau + \rho \int_0^\omega K(t,\tau) d\tau \int_0^L \Phi(\tau,\xi)y_1(\xi) d\xi + \int_0^\omega K(t,\tau)F(\tau,\rho) d\tau - \rho B^{-1}(\omega) \int_0^\omega d\tau \int_0^L \Phi(\tau,\xi)y_1(\xi) d\xi - B^{-1}(\omega) \int_0^\omega F(\tau,\rho) d\tau, \quad (13)$$



где  $K(t, \tau) = \begin{cases} B^{-1}(\omega)B(\tau), & \text{при } 0 \leq \tau \leq t \leq \omega \\ B^{-1}(\omega)B_1(\tau), & \text{при } 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$

Обозначим  $\alpha = \max_t \|M(t)\|$ ,  $j = \|B^{-1}(\omega)\|$ ,  $\bar{K}_{ii} = \max_{t,s} \|K_{ii}(t,s)\|$ ,  $\|y_i\| = \max_t \|y_i(t)\|$  ( $i = \overline{1,2}$ ),

$$f_0 = \max_t \sum_{i=0}^{m-1} \left\| \frac{\partial^i (P(t)f(t))_2}{\partial t^i} \right\|, \quad \bar{D} = \max_{t,s,\rho} \|D(t,s,\rho)\|, \quad \bar{K}_{13} = \max_{t,s} \sum_{i=0}^{m-1} \left\| \frac{\partial^i K_{13}(t,s)}{\partial t^i} \right\|, \quad f_1 = \max_t \|(P(t)f(t))_1\|,$$

$$q = \frac{1}{2} j \alpha^2 \omega^2 + \frac{\rho}{2} j \alpha \omega^2 L \bar{\Phi}_0 + \rho j \omega L \bar{\Phi}_0.$$

Теорема 1. Если выполняется неравенство (7) и неравенство

$$q < 1, \tag{14}$$

то система (1) имеет единственное  $\omega$  – периодическое решение.

Доказательство. Уравнение (13) получено с условия периодичности  $y_1(t)$  с уравнения (9). Поэтому, если (13) имеет единственное решение, то это решение будет периодическим. Записав (13) в виде  $y_1 = Ry_1$ , где  $R$  – интегральный оператор в (13), найдем оценку нормы

$$\|Ry_1 - Rz_1\| \leq q \|y_1 - z_1\|. \tag{15}$$

С (14), (15) и принципа сжимающих отображений следует существование единственного решения уравнения (13). Теорема доказана.

**Построение периодических решений с параметром.** Укажем алгоритм построения периодического решения системы (1). Рассмотрим уравнение с параметром

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda M(t)y_1(t, \lambda) + \rho \lambda \int_0^L \Phi(t, \xi)y_1(\xi, \lambda) d\xi + F(t, \rho). \tag{16}$$

Запишем интегральное уравнение, которое эквивалентно уравнению (16):

$$y_1(t, \lambda) = y_1(0, \lambda) + \lambda \int_0^t M(\tau)y_1(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^t F(\tau, \rho) d\tau + \rho \lambda \int_0^t d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1(\xi, \lambda) d\xi. \tag{17}$$

Подставляя в (17)  $t = \omega$  и с  $\omega$ -периодичности  $y_1(t, \lambda)$  имеем

$$\lambda \int_0^\omega M(\tau)y_1(\tau, \lambda) d\tau = - \int_0^\omega F(\tau, \rho) d\tau - \rho \lambda \int_0^\omega d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1(\xi, \lambda) d\xi. \tag{18}$$

Воспользовавшись (11), (12) с уравнения (18) найдем

$$y_1(t, \lambda) = \int_0^\omega K(t, \tau) (\lambda M(\tau)y_1(\tau, \lambda) + F(\tau, \rho)) d\tau + \rho \lambda \int_0^\omega K(t, \tau) d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1(\xi, \lambda) d\xi - \frac{1}{\lambda} \int_0^\omega B^{-1}(\omega) F(\tau, \rho) d\tau - \rho \int_0^\omega B^{-1}(\omega) d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1(\xi, \lambda) d\xi. \tag{19}$$

Рассмотрим уравнение (8), в котором неизвестный вектор зависит от параметра  $\lambda$ . Решение уравнений

$$(8), (19) \text{ ищем в виде } y_i(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} y_i^{(-1)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_i^{(k)}(t), \quad i = \overline{1,2} \tag{20}$$

Применяя к уравнениям (8), (19) метод малого параметра, получим

$$\begin{aligned} y_1^{(-1)}(t) &= - \int_0^\omega B^{-1}(\omega) F(\tau, \rho) d\tau - \rho B^{-1}(\omega) \int_0^\omega d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi) y_1^{(-1)}(\xi) d\xi, \\ y_1^{(0)}(t) &= \int_0^\omega K(t, \tau) (M(\tau) y_1^{(-1)}(\tau) + F(\tau, \rho)) d\tau + \rho \int_0^\omega K(t, \tau) d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi) y_1^{(-1)}(\xi) d\xi - \\ &\quad - \rho B^{-1}(\omega) \int_0^\omega d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi) y_1^{(0)}(\xi) d\xi, \\ y_1^{(k)}(t) &= \int_0^\omega K(t, \tau) M(\tau) y_1^{(k-1)}(\tau) d\tau + \rho \int_0^\omega K(t, \tau) d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi) y_1^{(k-1)}(\xi) d\xi - \rho \int_0^\omega B^{-1}(\omega) d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi) y_1^{(k)}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 y_2^{(-1)}(t) &= -\rho \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i K_{13}(t,s)}{\partial t^i} \right) y_1^{(-1)}(s) ds - \rho \int_0^L D(t,s,\rho) ds \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(s,\xi)}{\partial s^i} \right) y_1^{(-1)}(\xi) d\xi, \\
 y_2^{(0)}(t) &= -\rho \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i K_{13}(t,s)}{\partial t^i} \right) y_1^{(0)}(s) ds - \rho \int_0^L D(t,s,\rho) ds \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(s,\xi)}{\partial s^i} \right) y_1^{(0)}(\xi) d\xi + \\
 &+ \int_0^L D(t,s,\rho) \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i (P(s)f(s))}{\partial s^i} \right) ds + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^i (P(t)f(t))}{\partial t^i}, \\
 y_2^{(k)}(t) &= -\rho \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(t,s)}{\partial t^i} \right) y_1^{(k)}(s) ds - \rho \int_0^L D(t,s,\rho) ds \int_0^L \left( \sum_{i=0}^{m-1} \frac{I^i \partial^i K_{13}(s,\xi)}{\partial s^i} \right) y_1^{(k)}(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{22}$$

С уравнения (21) имеем оценку

$$\|y_1^{(k)}\| \leq q_1 \|y_1^{(k-1)}\|,$$

$$\text{где } q_1 = \frac{\frac{1}{2} j\alpha\omega^2 (\alpha + \rho L \bar{\Phi}_0)}{1 - \rho\omega j L \bar{\Phi}_0}.$$

Тогда, выполняется неравенство

$$\|y_1^{(k)}\| \leq q_1^k \|y_1^{(0)}\|, \quad k = 1, 2, \dots \tag{23}$$

Согласно (23), (14) ряд (20) будет сходящимся, когда  $0 < |\lambda| < \frac{1}{q_1}$ , а поэтому  $\lambda = 1$  удовлетворяет последнему неравенству и будут сходящимися ряды

$$y_i(t) = y_i(t, \lambda) = y_i^{(-1)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} y_1^{(k)}(t). \tag{24}$$

Применяя неравенство (23), получим оценки скорости сходимости рядов (24) и точного решения системы (1)

$$\|y_1 - \bar{y}_1^{(-m)}\| \leq \frac{q_1^{m+1} \|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1}, \quad \|y - \bar{y}_2^{(-m)}\| \leq \frac{(1 + L\bar{D}) \rho \bar{K}_{13} L q_1^{m+1} \|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1}, \quad \|y_1\| \leq \|y_1^{(0)}\| + \frac{\|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1},$$

$$\|y_2\| \leq (1 + L\bar{D}) \rho \bar{K}_{13} L \left( \|y_1^{(0)}\| + \frac{\|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1} \right) + L\bar{D}f_0 + f_0,$$

$$\text{где } \bar{y}_i^{(m)} = y_i^{(-1)} + \sum_{k=0}^m y_i^{(k)}, \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если выполняются неравенства (7), (14), то  $\omega$  – периодическое решение системы (1)

$$\text{имеет вид } y(t) = y^{(-1)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t), \tag{25}$$

где  $y^k(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(k)}(t) \\ y_2^{(k)}(t) \end{pmatrix}$  и  $y_i^{(k)}(t)$ ,  $(i = \overline{1,2})$  определяются по формулам (21), (22). Оценки скорости сходимости и точного решения системы (1) имеют вид

$$\|y - \bar{y}^{(m)}\| \leq \max \left\{ \frac{q_1^{m+1} \|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1}, \frac{(1 + L\bar{D}) \rho \bar{K}_{13} L q_1^{m+1} \|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1} \right\},$$

$$\|y\| \leq \max \left\{ \|y_1^{(0)}\| + \frac{\|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1}; (1 + L\bar{D}) \rho \bar{K}_{13} L \left( \|y_1^{(0)}\| + \frac{\|y_1^{(0)}\|}{1 - q_1} \right) + L\bar{D}f_0 + f_0 \right\}, \text{ где } \bar{y}^{(m)}(t) = y^{(-1)}(t) + \sum_{k=0}^m y^{(k)}(t).$$

**Интегро-дифференциальное уравнение с параметром другого вида.** Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с параметром

$$\frac{dy_1(t, \lambda)}{dt} = \lambda M(t)y_1(t, \lambda) + \rho \lambda^2 \int_0^L \Phi(t, \xi)y_1(\xi, \lambda)d\xi + F(t, \rho). \quad (26)$$

Пользуясь алгоритмом предыдущего пункта уравнение (26) можно привести к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(t, \lambda) = \int_0^\omega K(t, \tau)(\lambda M(\tau)y_1(\tau, \lambda) + F(\tau, \rho))d\tau + \rho \lambda^2 \int_0^\omega K(t, \tau)d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1(\xi, \lambda)d\xi - \\ - \frac{1}{\lambda} \int_0^\omega B^{-1}(\omega)F(\tau, \rho)d\tau - \rho \lambda \int_0^\omega B^{-1}(\omega)d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1(\xi, \lambda)d\xi. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) будем искать в виде (20), где коэффициенты ряда определяются по формулам  $y_1^{(-1)} = -B^{-1}(\omega) \int_0^\omega F(\tau, \rho)d\tau$ ,

$$y_1^{(0)}(t) = \int_0^\omega K(t, \tau)M(\tau)y_1^{(-1)}d\tau + \int_0^\omega K(t, \tau)F(\tau, \rho)d\tau - \rho \int_0^\omega B^{-1}(\omega)d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1^{(-1)}d\xi, \\ y_1^{(k)}(t) = \int_0^\omega K(t, \tau)M(\tau)y_1^{(k-1)}(\tau)d\tau + \rho \int_0^\omega K(t, \tau) \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1^{(k-2)}(\xi)d\xi - \\ - \rho B^{-1}(\omega) \int_0^\omega d\tau \int_0^L \Phi(\tau, \xi)y_1^{(k-1)}(\xi)d\xi, k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Используя (28) имеем следующее рекуррентное неравенство

$$\|y_1^{(k)}\| \leq q_{11}\|y_1^{(k-1)}\| + q_{12}\|y_1^{(k-2)}\|, \quad (29)$$

где  $q_{11} = \frac{1}{2}j\alpha^2\omega^2 + \rho j\omega L\bar{\Phi}_0$ ,  $q_{12} = \frac{1}{2}\rho j\alpha\omega^2 L\bar{\Phi}_0$ .

Согласно (29), (14) ряд (20) будет сходящимся, когда  $|\lambda|q_{11} + |\lambda|^2q_{12} < 1$ , а поэтому при  $\lambda = 1$  получим  $\omega$ -периодическое решение (24) системы (1). Согласно (29) справедливо неравенство

$$\|y_1^{(k+1)}\| \leq a_1\mu_1^k + a_2\mu_2^k, \quad (30)$$

где  $\mu_{1,2} = \frac{q_{11} \pm \sqrt{q_{11}^2 + 4q_{12}}}{2}$ ,  $a_1 = \frac{\|y_1^{(-1)}\|\mu_2 - \|y_1^{(0)}\|}{\mu_2 - \mu_1}$ ,  $a_2 = \frac{\|y_1^{(-1)}\|\mu_1 - \|y_1^{(0)}\|}{\mu_1 - \mu_2}$ .

Неравенство (30) дает возможность найти оценки

$$\|y_1 - \bar{y}_1^{(m)}\| \leq \frac{a_1\mu_1^m}{1-\mu_1} - \frac{a_2\mu_2^m}{1-\mu_2}, \\ \|y_2 - \bar{y}_2^{(m)}\| \leq (1 + L\bar{D})\rho\bar{K}_{13}L \left( \frac{a_1\mu_1^m}{1-\mu_1} + \frac{a_2\mu_2^m}{1-\mu_2} \right), \\ \|y_1\| \leq \|y_1^{(-1)}\| + \|y_1^{(0)}\| + \frac{a_1}{1-\mu_1} + \frac{a_2}{1-\mu_2}, \|y_2\| \leq (1 + L\bar{D})\rho\bar{K}_{13}L \left( \|y_1^{(-1)}\| + \|y_1^{(0)}\| + \frac{a_1}{1-\mu_1} + \frac{a_2}{1-\mu_2} \right) + L\bar{D}f_0 + f_0.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** Если выполняются неравенства (7), (14), то  $\omega$ -периодическое решение системы (1) имеет вид (25), а  $y_i^{(k)}(t)$ , ( $i = \overline{1,2}$ ) определяются по формулам (22), (28). Оценки скорости сходимости и точного решения системы (1) имеют вид

$$\|y - \bar{y}^{(m)}\| \leq \max \left\{ \frac{a_1\mu_1^m}{1-\mu_1} - \frac{a_2\mu_2^m}{1-\mu_2}; (1 + L\bar{D})\rho\bar{K}_{13}L \left( \frac{a_1\mu_1^m}{1-\mu_1} + \frac{a_2\mu_2^m}{1-\mu_2} \right) \right\}, \\ \|y\| \leq \max \left\{ \|y_1^{(-1)}\| + \|y_1^{(0)}\| + \frac{a_1}{1-\mu_1} + \frac{a_2}{1-\mu_2}; (1 + L\bar{D})\rho\bar{K}_{13}L \left( \|y_1^{(-1)}\| + \|y_1^{(0)}\| + \frac{a_1}{1-\mu_1} + \frac{a_2}{1-\mu_2} \right) + L\bar{D}f_0 + f_0 \right\}$$

**Выводы.** Построены периодические решения системы линейных интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при производной в невырожденном случае. Перспективным есть применение конструктивного метода исследования периодических решений к системам интегро-дифференциальных уравнений в вырожденном случае и сингулярно возмущенным интегро-дифференциальным уравнений.

#### РЕЗЮМЕ

Одержані умови існування і єдності періодичного розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній. Використовуючи системи інтегро-диференціальних рівнянь з параметром будуть збіжні періодичні ітерації. Подаються оцінки швидкості розв'язку і точного розв'язку системи.

#### SUMMARY

We obtain conditions for existence and uniqueness of integro-differential equations. By using converged periodic iterations are constructed. Estimates of the speed of convergence of solution and sharp solution of system are given d egenerate matrix at the derivatives.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1.Самойленко А.М. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач / Самойленко А.М., Лаптинский В.И., Кенжебаев К.К. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 220 с.
- 2.Бойчук А.А. Обобщенно обратные операторы и нетеровы краевые задачи / Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 317 с.
- 3.Король І.І. Про періодичні розв'язки одного класу систем диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57. – № – 4. – С. 483-495.
- 4.Шкіль М.І. Про асимптотичні розвинення розв'язків систем диференціальних рівнянь з повільно змінним коефіцієнтами // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5. – № – 4. – С. 549-560.
- 5.Завізіон Г.В. Сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з регулярною особливістю // Нелінійні рівняння. – 2002. – Т. 5. – № – 4. – С. 446-459.
- 6.Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. – Київ: Вища шк. – 2000. – 294 с.
- 7.Mazz R. Criteria for the trivial solution of differential algebraic equations with small nonlinearities to be asymptotically stable // I. Math. Anal. and Appl. – 1998. – 225. – P. 587-607.
- 8.Iwano M. A method to construct stable domain of a sectorial type // *Funkc. ekvacioj*: – 1999. – 42. № – 1. – P. 71-103.

*Надійшла до редакції 07.07.2005 р.*

УДК 517.96

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ**

*И.П.Слепцова*

**Введение.** В работе рассматриваются эволюционные уравнения, простейшим представителем которых является уравнение

$$u_{tt} = \eta(u_{xx})_t + u_{xx} + F(x, t), \quad \eta > 0,$$

которое возникает при описании процессов, происходящих в вязких средах: распространение возмущений в упруго-вязком стержне, распространение звука в вязком газе, заключенном в трубе, одномерное движение изотропной вязкой сжимаемой жидкости и другие процессы такой же природы.

Вопросы корректности смешанных задач для параболических уравнений и эволюционных уравнений со второй производной по времени в нецилиндрических ограниченных областях изучались в [1], [2], [3] (более подробную библиографию см. в этих работах). В случае неограниченной нецилиндрической области вопросы единственности и асимптотического поведения решений на бесконечности линейных параболических уравнений второго порядка рассмотрены в ([4]). Установленные классы единственности содержат геометрические характеристики области по пространственным переменным. Для линейных параболических уравнений произвольного порядка единственность обобщенных решений краевых задач в классах функций тэклиндовского типа, учитывающих  $t$ -геометрию области, доказана в [5]. Вопрос существования обобщенных решений в классах функций тихоновского роста изучен в [6]. Существование решений задачи Фурье (задачи без начальных условий) для параболических уравнений, являющейся в некотором смысле сопряженной к краевой задаче, установлено в [7]. При этом на поведение заданных функций на бесконечности не накладывается никаких условий. Для квазилинейных параболических уравнений с пространственным оператором типа  $p$ -лапласиана с  $p > 2$  теоремы типа Фрагмена-Линделефа о минимальном возможном росте ненулевых решений смешанных задач в неограниченных цилиндрических областях доказаны в [8]. Для уравнений

$$u_{tt} + Au_t + Bu = F(x, t) \tag{1}$$

с операторами  $A$  и  $B$  типа  $p$ -лапласиана с  $p > 2$  аналогичная задача решена в [9].

В данной работе изучается уравнение (1) с квазилинейным оператором  $A$  при  $p = 2$  и линейным оператором  $B$  порядков  $2m$  и  $2m + 2$  соответственно. Устанавливаются классы растущих функций, содержащие геометрические характеристики области, в которых краевая задача для однородного уравнения (при  $F(x, t) = 0$ ) имеет только нулевое решение. Эти классы в случае задачи Коши являются обобщением тэклиндовских классов для параболических уравнений. Для линейного уравнения (1) доказана теорема единственности решений краевой задачи. Полученные результаты обобщают результаты [5] для параболических уравнений.

**1. Основные определения, обозначения и формулировка основного результата.**

Пусть  $y(s)$  – произвольная монотонно возрастающая функция, определенная при  $s \geq 0$ ,  $y(s) > -T$  с некоторым  $T < \infty$ . Пусть  $G \subset \{(x, t) : -y(|x|) < t < T\}$  – неограниченная область из  $R^{n+1}$ , граница которой  $\partial G = \Omega_T \cup \tilde{\Gamma}$ ,  $\Omega_T$  – область на гиперплоскости  $t = T$ ,  $\tilde{\Gamma}$  – параболическая часть границы  $\partial G$ , являющаяся кусочно  $C^1$ -гладкой гиперповерхностью,  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^1$ . Для вектора внешней нормали  $\nu(x, t) = \{\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_0\}$  в точке  $(x, t) \in \tilde{\Gamma}$   $\nu_0 \neq +1$ ,  $\Gamma^1 = \{(x, t) \in \tilde{\Gamma} : \nu_0 = -1\}$ . Функция  $y(s)$  называется образующей.

Обозначим  $G(\tau) = G \cap \{(x, t) : |x| < \tau\}$ ,  $G_{\rho, \nu}(\tau) = G(\tau) \cap \{(x, t) : \rho < t < \nu\}$ ,  $G(\tau_1, \tau_2) = G(\tau_2) \setminus G(\tau_1)$ ,  $\Omega_{t_0} = G \cap \{t = t_0\}$ ,  $\Omega_t(\tau_1, \tau_2) = \Omega(\tau_2) \setminus \Omega(\tau_1)$ . Как обычно,

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  – мультииндекс,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ . Для функции  $u(x, t)$ ,  $(x, t) \in R^{n+1}$ , будем обозначать  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ .

Определим основные пространства функций. Пусть  $G \subset R^{n+1}$  – ограниченная область. Через  $\dot{W}_2^r(\Omega_t)$  обозначено замыкание в норме  $W_2^r(\Omega_t)$  множества  $C^r$ -гладких функций, обращающихся в нуль в окрестности  $\Omega_t$ .  $L_2(\rho, \nu; \dot{W}_2^r(\Omega_t))$  – пространство функций  $v(x, t)$  таких, что при почти всех  $t \in [\rho, \nu]$   $v(x, t) \in \dot{W}_2^r(\Omega_t)$  и  $\int_\rho^\nu \|v(\cdot, t)\|_{W_2^r(\Omega_t)}^2 dt < \infty$ .

$V_2^{r,s}(\rho, \nu; \dot{W}_2^r(\Omega_t)) = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(\rho, \nu; \dot{W}_2^r(\Omega_t)); v_t(x, t) \in L_2(\rho, \nu; W_2^s(\Omega_t))\}$  с нормой  $\|v\|_{V_2^{r,s}(G_{\rho,\nu})}^2 = \iint_{G_{\rho,\nu}} (v_t^2 + |D^r v|^2 + |D^s v_t|^2) dx dt$ .

$\dot{H}_2^{l,0}(G_{\rho,\nu})$  – подпространство элементов  $v(x, t) \in \dot{V}_2^{l,0}(G_{\rho,\nu})$ , для которых  $v_t \in V_2^{l,0}(G_{\rho,\nu})$ , с нормой  $\|v\|_{\dot{H}_2^{l,0}(G_{\rho,\nu})} = \|v\|_{\dot{V}_2^{l,0}(G_{\rho,\nu})} + \|v_t\|_{V_2^{l,0}(G_{\rho,\nu})}$ . Для неограниченной области  $G$  естественным образом определяются пространства  $\dot{V}_{2,loc}^{l,m}(G_{\rho,\nu})$  и  $\dot{H}_{2,loc}^{l,0}(G_{\rho,\nu})$ .

Для оценки промежуточных производных будем использовать неравенство Фридрихса. В неограниченной области  $G$  рассматривается краевая задача

$$u_{tt} + Au_t + Bu = u_{tt} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, u_t, \dots, D^m u_t) + \sum_{|\alpha|=m+1, |\beta| \leq m+1} (-1)^{|\beta|} D^\beta (b_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u) + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha(x, t) u) = 0, \quad (2)$$

$$D^\alpha u|_\Gamma = 0, \quad |\alpha| \leq m, \quad u|_{\Gamma^1} = u_t|_{\Gamma^1} = 0. \quad (3)$$

Оператор  $A$  непрерывен по  $(x, t) \in G$  и  $\xi \in R^{N(m)}$  ( $N(m)$  – число различных мультииндексов длины не большей, чем  $m$ ), удовлетворяет условиям

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi) \xi_\alpha \geq a_0 |\xi^{(m)}|^2 - a_1 \sum_{i=0}^{m-1} |\xi^{(i)}|^2, \quad a_0 > 0, a_1 < \infty,$$

$$|a_\alpha(x, t, \xi)| \leq a_{2,\alpha} |\xi^{(m)}| + a_{3,\alpha} \sum_{i=0}^{m-1} |\xi^{(i)}|, \quad a_{2,\alpha}, a_{3,\alpha} < \infty,$$

а оператор  $B$  с непрерывными и ограниченными в области  $G$  коэффициентами – условию равномерной эллиптичности

$$b_0 |\xi^{(m+1)}|^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m+1} b_{\alpha\beta}(x, t) \xi_\alpha^{(m+1)} \xi_\beta^{(m+1)} \leq b_1 |\xi^{(m+1)}|^2, \quad b_0 > 0, b_1 < \infty,$$

$b_{\alpha\beta}(x, t) = b_{\beta\alpha}(x, t)$ ,  $|\alpha|=|\beta|=m+1$ , при  $|\beta|=m+1$  функции  $b_{\alpha\beta}(x, t)$ , а также  $b_0(x, t)$  дифференцируемы по переменной  $t$ ,  $|b_{\alpha\beta}(x, t)| \leq b_2 < \infty$ ,  $|\alpha|, |\beta| \leq m+1$ ;  $b_0(x, t) \geq b_3 > 0$ ;  
 $\max\{|\frac{\partial}{\partial t} b_{\alpha\beta}(x, t)|, |\frac{\partial}{\partial t} b_0(x, t)|\} \leq b_4$ ,  $|\alpha|=|\beta|=m+1$ .

**Определение.** Обобщенным решением задачи (2), (3) называется функция  $u(x, t) \in \dot{H}_2^{m+1,0}(\rho, \nu; \Omega_t(\tau))$ , ( $\tau > 0, -\infty < \rho < \nu < T$ ), для которой  $u|_{\Gamma^1} = u_t|_{\Gamma^1} = 0$  и выполнено интегральное тождество

$$\iint_{G_{\rho, \nu}(\tau)} [u_{tt} \nu + \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x, t, u_t, \dots, D^m u_t) D^\alpha \nu + \sum_{|\alpha|=m+1, |\beta| \leq m+1} b_{\alpha\beta}(x, t) D^\alpha u D^\beta \nu + \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(x, t) u D^\alpha \nu] dx dt = 0 \quad (4)$$

с произвольной функцией  $\nu(x, t) \in L_2(-y(\tau), T; \dot{W}_2^1(\Omega_t(\tau)))$ .

Пусть непрерывная функция  $\mu_0(\tau) = h(\tau) y^{-1}(\tau)$  монотонно возрастает и для числовой последовательности  $\{\tau_i\}$ , выбранной согласно правилу

$$d_1 \tau_{i-1} \leq s_i \equiv \tau_i - \tau_{i-1} \leq d_2 \tau_{i-1}, \quad 0 < d_1 \leq d_2 < \infty, \quad (5)$$

существует такой номер  $i_0 < \infty$ , что для всех  $i > i_0$  выполнено неравенство

$$\int_{(1+d_2)\tau_i}^{\tau_E} \mu_0^{-1}(\tau) d\tau \geq T + y(\tau_E) \quad (6)$$

с некоторым номером  $E = E(\tau_i)$ .

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $u(x, t)$  – обобщенное решение задачи (2), (3). Пусть существуют числа  $\tau_0 > 0$ ,  $a^* > 0$ ,  $i^* > 0$ , зависящие лишь от известных параметров задачи, такие, что при всех  $a > a^*$ ,  $i > i^*$  и для некоторой последовательности  $\{\tau_i\}$ ,  $\tau_i > \tau_0$ ,

$$\iint_{G(\tau_i)} (u_t^2 + |D^{m+1} u|^2 + u^2) dx dt \leq \exp(a \tau_i (\mu_0(\tau_i))^{2m-1}). \quad (7)$$

Тогда  $u(x, t) \equiv 0$  в  $G$ .

**Замечание 1.** Утверждение теоремы остается справедливым в случае, когда оператор  $B$  имеет порядок  $l < m + 1$ . Условие (7) задается для интеграла энергии  $\iint_{G(\tau)} (u_t^2 + |D^l u|^2 + u^2) dx dt$ .

**Замечание 2.** Если  $b_\alpha(x, t) = 0$  для всех  $\alpha: |\alpha| \leq m$ , то основное условие (7) должно быть выполнено для интеграла энергии  $\iint_{G(\tau)} (u_t^2 + |D^{m+1} u|^2) dx dt$ .

## 2. Доказательство основного результата.

При доказательстве теоремы используются априорные оценки, установленные в следующих леммах.

**Лемма 1.** Пусть  $u(x, t)$  – обобщенное решение задачи (2), (3). Тогда для произвольных  $\rho, \nu: -\infty < \rho < \nu < T$ ,  $\tau > \tau_0$  имеет место априорная оценка

$$\frac{1}{2} \tilde{b}_0 f_\nu(\tau - \delta) + a_0 \iint_{G_{\rho, \nu}(\tau - \delta)} |D^m u_t|^2 dx dt \leq c^0 \delta^{-2m} J_\rho^\nu(\tau) + \tilde{b}_1 f_\nu(\tau), \quad (8)$$

где  $f_v(\tau) = \int_{\Omega_\rho(\tau)} (u_t^2 + |D^{m+1}u|^2 + u^2) dx$ ,  $J_\rho^v(\tau) = \iint_{G(\tau)} (u_t^2 + |D^{m+1}u|^2 + u^2) dxdt$ ,  $\tilde{b}_0 = \min(1, b_0, b_3)$ ,

$\tilde{b}_1 = \max(1, b_1, b_2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\zeta(s) - C^{m+1}$ -гладкая монотонно невозрастающая функция,  $0 \leq \zeta(s) \leq 1$ ,  $\zeta(s) = 1$  при  $s \leq 0$ ,  $\zeta(s) = 0$  при  $s \geq 1$ ,  $|D^j \zeta| \leq d_3 = \text{const}$  при  $j \leq k$ . Выберем пробную функцию  $v(x, t) = u_t(x, t) \zeta\left(\frac{|x| - \tau + \delta}{2^{-1} \delta}\right)$ . Учитывая свойства операторов  $A$  и  $B$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{v, \tau-\delta}} (u_t^2 + b_0 |D^{m+1}u|^2 + b_3 u^2) dx + a_0 \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\delta)} |D^m u_t|^2 dxdt \leq k_1 I_1 + k_2 I_2 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{v, \tau-\frac{\delta}{2}}} (u_t^2 + b_1 |D^{m+1}u|^2 + b_2 u^2) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $I_1 = \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\frac{\delta}{2})} [a_1 \sum_{i=0}^{m-1} |D^i u_t|^2 + a_2 \sum_{i=0}^m |D^i u_t| \sum_{i=0}^{m-1} |D^i u_t| + b_4 |D^{m+1}u|^2 + b_3 u^2 +$

$+ b_2 (|D^{m+1}u| + |u|) \sum_{i=0}^m |D^i u_t|] dxdt = \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\frac{\delta}{2})} R_1(x, t) dxdt$ ;

$I_2 = d_3 \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\delta, \tau-\frac{\delta}{2})} \{ \sum_{i=0}^m [a_{2,i} |D^m u_t| + a_{3,i} \sum_{k=0}^{m-1} |D^k u_t|] \sum_{j=0}^{i-1} \delta^{-j} |D^{i-j} u_t| + b_2 |D^{m+1}u| \times$   
 $\times (\sum_{i=1}^{m+1} \delta^{-i} |D^{m+1-i} u_t| + \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^i \delta^{-j} |D^{i-j} u_t|) \} dxdt = \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\delta, \tau-\frac{\delta}{2})} R_2(x, t) dxdt$ .

Для оценки  $I_1$  и  $I_2$  используем неравенства Юнга, Фридрикса и выберем  $\delta \leq 1$ . Тогда из соотношения (9) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{b}_0 \int_{\Omega_{v, \tau-\delta}} (u_t^2 + |D^{m+1}u|^2 + u^2) dx + a_0 \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\delta)} |D^m u_t|^2 dxdt \leq 2\varepsilon_1 a_0 \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\frac{\delta}{2})} |D^m u_t|^2 dxdt + \\ & + \delta^{-2m} \iint_{G_{\rho, v}(\tau-\frac{\delta}{2})} (c_1 u_t^2 + c_2 |D^{m+1}u|^2 + c_3 u^2) dxdt + \frac{1}{2} \tilde{b}_1 \int_{\Omega_{v, \tau-\frac{\delta}{2}}} (u_t^2 + |D^{m+1}u|^2 + u^2) dx \end{aligned}$$

с  $c_1, c_2, c_3$  зависящими от данных задачи. Утверждение леммы с  $c_0 = \max(c_1, c_2, c_3)$  следует из последнего неравенства, если избавиться в нем от слагаемого с  $\varepsilon_1$ . Это легко сделать с помощью известной итеративной процедуры, подробно изложенной, например, в [8].

**Лемма 2.** Пусть  $u(x, t)$  - обобщенное решение задачи (2), (3). Тогда существует такое число  $\mu^* > 1$ , что для всех  $\mu > \mu^*$ ,  $\tau > \tau_0$ ,  $s > 3$ ,  $T \geq v > \rho$  имеет место априорная оценка

$$\begin{aligned} f_v(\tau) \leq & A_1 \exp(-B(s-3)\mu^{m-1} + 2\mu^2(v-\rho)) J_\rho^v(\tau+s) + A_2 \{1 + A_3 \exp(2\mu^2(v-\rho))\} + \\ & + A_4 \exp[-B(s-3)\mu^{m-1} + 2\mu^2(v-\rho)] \} f_\rho(\tau+s), \end{aligned} \quad (10)$$

где постоянные  $A_i > 0$  ( $i=1, \dots, 4$ ) и  $B > 0$  не зависят от  $\rho, v, s, \mu, \tau$ .



*Доказательство.* Обозначим  $\eta_{\tau,\delta}(|x|) = \zeta\left(\frac{|x|-\tau}{\delta}\right)$ ,  $\zeta$  – срезающая функция из леммы 1,  $g(t) = \exp(-2\mu^2 t)$ , где  $\mu > 0$  – параметр, значение которого в зависимости от образующей  $y(\tau)$  будет выбрано ниже. В тождестве (4) выберем  $v(x,t) = u_t(x,t)\eta_{\tau,\delta}(|x|)g(t)$ . После преобразований, использующих свойства операторов  $A$  и  $B$  и функции  $\zeta$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g(\nu) \int_{\Omega_\nu(\tau)} (u_t^2 + b_0 |D^{m+1}u|^2 + b_3 u^2) dx + \mu^2 \iint_{G_{\rho,\nu}(\tau)} (u_t^2 + b_0 |D^{m+1}u|^2 + b_3 u^2) g(t) dx dt + \\ & + a_0 \iint_{G_{\rho,\nu}(\tau)} |D^m u_t|^2 g(t) dx dt \leq k_1 \iint_{G_{\rho,\nu}(\tau+\delta)} R_1(x,t) g(t) dx dt + k_2 \iint_{G_{\rho,\nu}(\tau,\tau+\delta)} R_2(x,t) g(t) dx dt + \\ & + \frac{1}{2}g(\rho) \int_{\Omega_\nu(\tau+\delta)} (u_t^2 + b_1 |D^{m+1}u|^2 + b_2 u^2) dx, \end{aligned}$$

$R_1(x,t)$  и  $R_2(x,t)$  определены в лемме 1. Применим к правой части те же рассуждения, что и при оценке слагаемых  $k_1 I_1$  и  $k_2 I_2$  в лемме 1, определим  $\delta \leq 1$  равенством  $\delta = d_0(\mu^*)^{-m-1}$  и выберем  $\mu^*$  столь большим, что для всех  $\mu > \mu^*$  из предыдущей оценки вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\tau) & \equiv \iint_{G_{\rho,\nu}(\tau)} [|D^m u_t|^2 + \mu^2 (|D^{m+1}u|^2 + u_t^2 + u^2)] g(t) dx dt \leq \\ & \leq \theta \tilde{I}(\tau + \delta) + \frac{1}{2} \tilde{b}_1 H g(\rho) f_\rho(\tau + \delta) \end{aligned} \quad (11)$$

с  $\theta \in (0,1)$ .

Проитерируем соотношение (11), начиная с  $\tau + 1$ ,  $[(s-2)\delta^{-1}] = [(s-2)\mu^{m-1} d_0^{-1}]$  раз ( $[a]$  – целая часть числа  $a$ ) и получим:

$$\begin{aligned} J_\rho^v(\tau + 1) & \leq \exp(-\ln \theta^{-1} \frac{s-3}{\delta} \mu^{m-1} + 2\mu^2(\nu - \rho)) J_\rho^v(\tau + s - 1) + \\ & + \frac{\tilde{b}_1 H}{2(1-\theta)} \exp(2\mu^2(\nu - \rho)) f_\rho(\tau + s - 1). \end{aligned} \quad (12)$$

Далее в неравенстве (7) с  $\delta = 1$  применим последовательно в правой части неравенства (11) и (8) и придем к оценке

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{b}_0 f_\nu(\tau) & \leq c^0 (a_0^{-1} c^0 \mu^{-2} + 1) \exp(-\ln \theta^{-1} \frac{s-3}{\delta} \mu^{m-1} + 2\mu^2(\nu - \rho)) J_\rho^v(\tau + s) + \\ & + \tilde{b}_1 [1 + c^0 \mu^{-2} \frac{H}{2(2-\theta)} \exp(2\mu^2(\nu - \rho)) + \\ & + a_0^{-1} c^0 \mu^{-2} \exp(-\ln \theta^{-1} \frac{s-3}{\delta} \mu^{m-1} + 2\mu^2(\nu - \rho))] f_\rho(\tau + s). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства немедленно получаем утверждение леммы, если выберем

$$A_1 = \frac{2c^0}{\tilde{b}_0} (a_0^{-1} c^0 (\mu^*)^{-2} + 1), \quad A_2 = \frac{2\tilde{b}_1}{\tilde{b}_0}, \quad A_3 = \frac{c^0 H}{2(\mu^*)^2 (1-\theta)}, \quad A_4 = \frac{c^0}{a_0 (\mu^*)^2}, \quad B = \frac{\ln \theta^{-1}}{\delta}. \quad (13)$$

**Лемма 3.** Пусть для последовательности  $\{\tau_i\}$  и функции  $\mu_0(\tau)$ , удовлетворяющих условиям (5) и (6) соответственно, последовательность  $\{t_i\}$  определена равенством

$$\sigma_i \equiv t_i - t_{i-1} = d_2(1 + d_2)d_1^{-1}s_i\mu_0^{-1}(\tau_i). \quad (14)$$

Тогда для любого  $\lambda \in (0,1)$  существует такое  $\tilde{\tau}_0 > 0$ , что для  $\tau > \tilde{\tau}_0$  и  $t_0 < T$  для решений задачи (2), (3) имеет место априорная оценка

$$f_{t_0}(\tau_0) \leq A_1 \sum_{i=1}^{E(\tau_0, t_0)} \exp\{B_1 \mu_0^{2m-1}(\tau_i) \lambda^{2m-1} [(\lambda - d_1(1-\lambda))\tau_{i-1} + 3] + iA_5\} J_{t_i}^{t_{i-1}}(\tau_i) \quad (15)$$

с некоторыми постоянными  $A_5 > 0$ ,  $B_1 > 0$ .

*Доказательство.* Выберем

$$\mu_i = \mu(\tau_i) = \left[ \lambda B \frac{2d_1}{d_2(1+d_2)} \mu_0(\tau_i) \right]^{\frac{m}{2m-1}} \quad (16)$$

и определим  $\mu(\tau) = \mu(\tau_i)$  на  $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ . При  $\tau = \tau_{i-1}$ ,  $s = s_i$ ,  $\rho = t_i$ ,  $\nu = t_{i-1}$  из оценки (10) получим, что

$$f_{t_{i-1}}(\tau_{i-1}) \leq M(i) J_{t_i}^{t_{i-1}}(\tau_i) + N(i) f_{t_i}(\tau_i), \quad (17)$$

где  $M(i) = A_1 \exp[-Bs_i(1-\lambda)\mu_i^m + 3B\mu_i^m]$ ,  $N(i) = A_2[1 + (A_3 + A_4)\exp(2\mu_i^2\sigma_i)]$ . Как следует из равенств (13), при выборе достаточно большого значения  $\mu^*$   $A_3 + A_4 < 1$ , и тогда

$$N(i) \leq A_2[1 + \exp(2\mu_i^2\sigma_i)] \leq 2A_2 \exp(2\mu_i^2\sigma_i). \quad (18)$$

В силу условия (6) и монотонного неубывания функции  $\mu_0(\tau)$  для интервалов  $\sigma_i$ , определенных условиями (14), (16) и (5), справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{E(\tau)} \sigma_i \geq \frac{d_2(1+d_2)}{d_1} \min_{i < E} \frac{s_i}{s_{i+1}} \sum_{i=1}^{E(\tau)-1} \frac{s_{i+1}}{\mu_0(\tau_i)} \geq \int_{\tau_1}^{\tau_E} \frac{dz}{\mu_0(z)} \geq T + y(\tau_E),$$

а значит, для всех  $t_0 \leq T$  и  $\tau > \tilde{\tau}_0$  с некоторым  $\tilde{\tau}_0$  существует такой номер  $E(t_0, \tau_0)$ , что в силу условий (3)  $f_{E(t_0, \tau_0)}(\tau_{E(t_0, \tau_0)}) = 0$ .

Протеррируем неравенство (17)  $E(t_0, \tau_0)$  раз, начиная с  $i = 1$ :

$$f_{t_0}(\tau_0) \leq \sum_{i=1}^{E(t_0, \tau_0)} [M(i) \prod_{j=1}^i N(j)] J_{t_i}^{t_{i-1}}(\tau_i). \quad (19)$$

Для оценки коэффициента  $M(i) \prod_{j=1}^i N(j)$  используем монотонное неубывание функции  $\mu(\tau)$  и

условия (6), (14) и (16):

$$M(i) \prod_{j=1}^i N(j) \leq A_1 \exp \left\{ B \left[ \lambda B \frac{2d_1}{d_2(1+d_2)} \mu_0(\tau_i) \right]^{2m-1} [\tau_{i-1}(\lambda - d_1(1-\lambda)) + 3] + i \ln 2A_2 \right\}.$$

Отсюда и из неравенства (19) следует утверждение леммы с  $A_5 = \ln 2A_2$ ,

$$B_1 = (2B^{2m} d_1 d_2^{-1} (1+d_2)^{-1})^{\frac{1}{2m-1}}.$$

*Доказательство теоремы.* Подберем вначале параметр  $\lambda$ , при котором

$P(\lambda) = \lambda^{2m-1} (d_1(1-\lambda) - \lambda) > 0$ . В качестве такого  $\lambda$  можно, например, взять  $\lambda_0$  – точку максимума функции  $P(\lambda)$ . Непосредственно вычисляя, получим, что  $\lambda_0 = d_1(2m(1+d_1))^{-1}$ , а

$P_0 = P(\lambda_0) = (2m-1)[d_1(2m(1+d_1))^{-1}]^{\frac{2m}{2m-1}} > 0$ . Для функции  $u(x,t)$ , удовлетворяющей условию (7), из оценки (15) и свойства (5) при  $\lambda = \lambda_0$  следует, что

$$\begin{aligned} f_{t_0}(\tau_0) &\leq A_1 \sum_{i=1}^{E(\tau_0, t_0)} \exp \left[ \left( -\frac{B_1 P_0}{1+d_1} + a \right) \tau_i \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_i) + 3B_1 (\lambda_0 \mu_0(\tau_i))^{\frac{1}{2m-1}} + iA_5 \right] \leq \\ &\leq A_1 \sum_{i=1}^{E(\tau_0, t_0)} \exp \left[ (-\gamma \tau_i + 3B_1 \lambda_0^{\frac{1}{2m-1}}) (\mu_0(\tau_i))^{\frac{1}{2m-1}} + iA_5 \right], \end{aligned}$$

где  $\gamma = a - a^* > 0$ . Пусть  $\tilde{\tau}_0$  таково, что  $(-\frac{1}{2}\gamma \tau_i + 3B_1 \lambda_0^{\frac{1}{2m-1}}) \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_i) + A_5 i < 0$  для всех  $\tau_i > \tilde{\tau}_0$ . В силу монотонного неубывания  $\mu_0(\tau)$  и условия (5)

$$\tau_i \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_i) - \tau_0 \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_0) \geq \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_0) \tau_0 [(1+d_2)^i - 1].$$

Зафиксируем  $i^*$  так, чтобы для всех  $i > i^*$   $(1+d_1)^i > i+1$ . Тогда

$$\begin{aligned} f_{t_0}(\tau_0) &\leq A_1 \exp \left[ \left( -\frac{1}{2}\gamma \tau_0 \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_0) \right) \sum_{i=1}^E \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} (\tau_i \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_i) - \tau_0 \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_0)) \right] \right] \leq \\ &\leq A_1 \exp \left[ \left( -\frac{1}{2}\gamma \tau_0 \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_0) \right) \{ i^* + (1 - \exp(-\frac{1}{2}\gamma \mu_0^{\frac{1}{2m-1}}(\tau_0) \tau_0)^{-1}) \} \right] \equiv \alpha(\tau_0). \end{aligned}$$

Очевидно, что при  $\tau_0 \rightarrow \infty$   $\alpha(\tau_0) \rightarrow 0$ , откуда с учетом условий (3) и следует утверждение теоремы.

### 3. Следствия и примеры.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$u_{tt} + Au_t + Bu = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} F_{\alpha}(x, t) \quad (20)$$

Очевидным следствием основного результата в случае линейного оператора  $A$  является

**Теорема 2 (о единственности решений).** Пусть  $A$  – линейный равномерно эллиптический оператор порядка  $m$  с непрерывными ограниченными коэффициентами, оператор  $B$  такой же, как в теореме 1,  $F_{\alpha}(x, t) \in L_{2,loc}(G)$ . Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда решение задачи (20), (3) единственно.

Приведем утверждения, конкретизирующие оптимальный выбор функции  $h(\tau)$  по образующей  $y(\tau)$  в некоторых простых случаях.

**Следствие 1.** Если  $y(\tau) < y_0 < \infty$  при всех  $\tau > 0$ , то условие (6) эквивалентно условию

$$\int_1^{\infty} \frac{d\tau}{h(\tau)} = \infty. \quad (21)$$

**Следствие 2.** Если  $y(\tau) \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , то любая функция  $h(\tau)$ , удовлетворяющая условию (6), удовлетворяет и условию (21), а значит, класс единственности задачи (20), (3) не шире, чем для области из следствия 1.

*Доказательство.* В силу монотонности  $y(\tau)$  для произвольных  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{h(\tau)} \geq (T + y(\tau))^{-1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{T + y(\tau)}{h(\tau)} d\tau,$$

откуда следует данное утверждение.

**Следствие 3.** Пусть  $y(\tau) \sim \tau^{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , то есть  $c_1 \tau^{\alpha} \leq y(\tau) \leq c_2 \tau^{\alpha}$ ,  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ . Тогда для выполнения условия (6) достаточно, чтобы

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^{-1} h(\tau) < \infty.$$

*Доказательство.* Предположим противное: для любого сколь угодно большого числа  $A > 0$  найдется такое  $\tau_0(A)$ , что  $\tau^{-1} h(\tau) > A$  для всех  $\tau > \tau_0$ . Тогда

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{T + y(\tau)}{h(\tau)} d\tau \leq A^{-1} c_1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tau^{\alpha-1} d\tau = A^{-1} c_1 \alpha^{-1} (\tau_2^{\alpha} - \tau_1^{\alpha}), \quad 0 < \tau_1 < \tau_2.$$

Если  $A > c_1 \alpha^{-1}$ , то условие (5) не выполнено.

**Следствие 4.** Пусть  $y(\tau) = \tau^{\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Тогда теорема 1 справедлива для функции  $h(\tau) = h_0 \tau$ ,  $h_0$  – постоянная, зависящая от  $y(\tau)$ .

Существуют образующие, растущие медленнее степенной функции, для которых условие (6) может выполняться с функцией  $h(\tau)$ , растущей быстрее линейной функции. Приведем соответствующие примеры.

**Пример 1.** Если  $y(\tau) = (\ln \tau)^{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\tau > \tau_0 > 1$ , то можно взять  $h(\tau) = \frac{1}{2\alpha} \tau \ln \tau$ .

**Пример 2.** Условию (6) удовлетворяют функции  $y(\tau) = \ln \ln \tau$  и  $h(\tau) = \tau \ln \tau \ln \ln \tau$ .

**Пример 3.** Более быстро растущей по сравнению с предыдущими примерами является функция  $y(\tau) = \exp(\ln \tau)^{\alpha}$  с произвольным  $0 < \alpha < 1$ . Пару ей составляет функция  $h(\tau) = \alpha^{-1} \tau \ln^{1-\alpha} \tau$ .

Как следует из приведенного анализа, в области, ограниченной образующей  $y(\tau) = \tau^\alpha$  с произвольным  $\alpha > 0$ , задача (20), (3) имеет единственное решение в классах функций, являющихся аналогами «тихоновских» классов для параболических уравнений. Существуют пологие образующие, растущие медленнее степенной функции, для которых единственность решения имеет место в обобщенных классах Тэклинда, характеризующихся функцией  $h(\tau) > \tau$ . Наиболее широкий класс единственности определен в цилиндрической области  $y(\tau) = const$ .

#### РЕЗЮМЕ

В необмеженій нециліндричній області розглянуто еволюційні рівняння  $u_{tt} + Au_t + Bu = F(x, t)$  з квазілінійним оператором  $A$  (показник нелінійності  $p = 2$ ) і лінійним оператором  $B$  порядків  $2m$  і  $2m + 2$  відповідно,  $m \geq 1$ . Доведено теореми типу принципу Фрагмена-Ліндельофа, що встановлюють мінімальне можливе зростання ненульових розв'язків однорідної крайової задачі на нескінченності. Для лінійних рівнянь доведено теорему єдиності розв'язку крайової задачі. Проведено аналіз залежності отриманих класів функцій від геометричних характеристик області.

#### SUMMARY

Evolution equations  $u_{tt} + Au_t + Bu = F(x, t)$  with quasilinear operator  $A$  (nonlinear index is  $p = 2$ ) and linear operator  $B$  of orders  $2m$  and  $2m + 2$  respectively,  $m \geq 1$ , in unbounded noncylindrical domains are considered. The Phragman-Lindelof type theorem has been proved. This theorem is investigated the minimal growth of the nontrivial solutions of the homogeneous boundary value problem at infinity. The uniqueness of the solution of boundary value problem theorem for linear equations has been proved. The analysis of the dependence of these functions classes from geometry of domain has been realized.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. – 1972. – 587 с.
2. Кожанов А.И., Ларькин Н.А. О разрешимости краевых задач для волнового уравнения с нелинейной диссипацией в нецилиндрических областях // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т.42, №6. – С.1278-1299.
3. Brown R., Hu W., Liberman H. Weak solutions of parabolic equations in non-cylindrical domains // Proceedings of the Amer. Math. Soc. – 1997. – V.125, №6. – P. 1785-1792.
4. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – Т.31, №6. – С.142-166.
5. Шишков А.Е. Классы единственности обобщенных краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26, №9. – С.1627-1633.
6. Слепцова И.П. О разрешимости краевых задач для линейных параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // Нелин. граничн. задачи – 2005. – В.15. – С.192-203.
7. Bokalo M.M., Dmytriv V.M. A Fourier problem for quasi-linear parabolic equations of arbitrary order in noncylindrical domains // Математичні студії. – 2000. – Т.11, №4. – С.175-188.
8. Акулов В.Ф., Шишков А.Е. Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. – 1991. – Т.182, №8. – С.1200-1210.
9. Слепцова И.П., Шишков А.Е. Принцип Фрагмена-Линделефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка // Укр. матем. журн. – 2005. – Т.57, №2. – С.239-249.

Надійшла до редакції 20.10.2005 р.

М Е Х А Н І К А

УДК 539.3

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ

В.С.Кирилюк

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Методы решения пространственных контактных задач теории упругости для изотропных тел достаточно хорошо разработаны [1–7]. Однако решение пространственных контактных задач для трансверсально-изотропных тел сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система уравнений для определения напряженного состояния имеет более сложную структуру. Решению контактных задач для трансверсально-изотропного полупространства посвящены работы [8, 9], в которых использован подход, позволяющий численно решать задачи только для круговой области контакта, а в статье [10] решена контактная задача термоупругости при специальном распределении температурного поля на поверхности штампа. В работах [11–14] рассмотрены пространственные задачи для трансверсально-изотропных электроупругих тел. В то же время аналитические решения пространственных контактных задач для трансверсально-изотропных тел при вдавливании в них нагретых произвольным образом жестких штампов не получены. В данной статье установлена взаимосвязь между решениями контактных задач термоупругости для изотропных и трансверсально-изотропных полупространств при отсутствии трения под штампом. Это позволяет получить значения контактных давлений, перемещений, геометрические параметры площадки контакта для трансверсально-изотропного полупространства при действии на него жесткого нагретого штампа, пересчитав их из соответствующих выражений для случая изотропного материала. Рассмотрены контактные задачи для нагретых плоского эллиптического, кольцевого, конического, параболоидального (кругового и эллиптического в плане) штампов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о жестком произвольном в плане штампе, вдавливаемом без трения в упругое трансверсально-изотропное полупространство  $z \leq 0$ . Пусть ось  $Oz$  совпадает с осью транстропии тела. Граничные условия на поверхности полупространства принимают вид [1, 3]

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = 0; \quad \sigma_{zz} = 0 \text{ при } (x, y) \notin \Omega; \\ T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad T(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \notin \Omega \\ u_z(x, y, 0) = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Omega$  – площадка контакта штампа;  $z = \varphi(x, y)$ ,  $T_0(x, y)$  – уравнение и температура поверхности штампа;  $\delta$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  – величины, определяемые из уравнений равновесия штампа

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy; \quad x_0 P = \iint_{\Omega} x p(x, y) dx dy; \quad y_0 P = \iint_{\Omega} y p(x, y) dx dy,$$

$p(x, y)$  – контактное давление. Для неплоского штампа контур  $C$  области  $\Omega$  находится из условия  $p(x_C, y_C) = 0$ .

**Основные соотношения.** Уравнения стационарной термоупругости для трансверсально-изотропной среды при отсутствии массовых сил и источников тепла в теле можно записать так:

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial x}; \\ \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \beta \frac{\partial T}{\partial y}; \\ c_{44} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \beta_1 \frac{\partial T}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{n_4 \partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

В приведенных соотношениях  $c_{ij}$  – упругие постоянные;  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $n_4$  – константы, зависящие от теплофизических свойств (коэффициентов теплопроводности и теплового линейного расширения) материала. Решение системы уравнений (2) можно представить через потенциальных функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) [10]

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}; & u_y &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial y}; \\ u_z &= m_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + m_4 \frac{\partial \Phi_4}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_j = 0; \quad (4)$$

$n_3 = 2c_{44} / (c_{11} - c_{12})$ ;  $n_1$ ,  $n_2$  – корни квадратного уравнения

$$c_{11} c_{44} n^2 - [c_{44}^2 + c_{33} c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2] n + c_{33} c_{44} = 0; \quad (5)$$

$$m_j = \frac{c_{11} n_j - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{n_j (c_{13} + c_{44})}{c_{33} - n_j c_{44}} \quad (j = 1, 2). \quad (6)$$

Функция  $\Phi_4$  удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_4 = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial z^2} = m_3 T. \quad (7)$$

Если ввести обозначения  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $i = \overline{1,4}$ ), то  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  будут гармоническими функциями в соответствующей системе координат. Постоянные  $m_3$ ,  $m_4$ , входящие в соотношения (3), зависят от упругих и теплофизических свойств трансверсально-изотропной среды и записываются таким образом:

$$m_3 = \frac{\beta}{c_{44} + (c_{13} + c_{44}) m_4 - c_{11} n_4}; \quad m_4 = \frac{\beta_1 (c_{44} - n_4 c_{11}) + \beta n_4 (c_{13} + c_{44})}{\beta (c_{33} - n_4 c_{44}) - \beta_1 (c_{13} + c_{44})}. \quad (8)$$

**Метод решения.** Представим решение задачи суперпозицией состояний, для первого из которых функцию  $\Phi_4$  возьмем в виде

$$\Phi_4^{(1)}(x, y, z_4) = F(x, y, z_4) = m_3 n_4 \left[ \int_{z_4}^{\infty} \int_{z_4}^{\infty} T(x, y, z_4) dz_4 dz_4 \right], \quad (9)$$

где [3, 6]

$$T(x, y, z_4) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{z_4 T_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2]^{3/2}}. \quad (10)$$

При этом  $T(x, y, z_4) \Big|_{z_4=z=0} = \begin{cases} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$ .

Из свойств потенциала двойного слоя следует, что  $T(x, y, \infty) = \frac{\partial T(x, y, \infty)}{\partial z} = 0$ . Для первого со-

стояния также положим  $\Phi_1^{(1)}(x, y, z_1) = a_1 F(x, y, z_1)$ ;  $\Phi_2^{(1)}(x, y, z_2) = a_2 F(x, y, z_2)$ ;  $\Phi_3^{(1)} = 0$ , где  $a_1, a_2$  – неизвестные постоянные. Отметим, что при таком выборе функций и распределении температуры на поверхности полупространства получаем  $\sigma_z^{(1)}|_{z=0} = 0, (x, y) \notin \Omega$ .

Постоянные  $a_1, a_2$  определим таким образом:

$$a_1 = -\frac{n_1^{1/2} (m_2 - m_4)}{n_4^{1/2} (m_2 - m_1)}; \quad a_2 = \frac{n_2^{1/2} (m_1 - m_4)}{n_4^{1/2} (m_2 - m_1)}.$$

В результате для первого состояния получаем

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad z = 0; \quad u_z^{(1)}|_{z=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}|_{z=0} = \begin{cases} -\gamma^{Trans} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma^{Trans} = & \beta_1 - m_3(c_{33}m_4 - n_4c_{13}) + c_{44}m_3n_4^{1/2} \left[ \frac{(m_1 - m_4)}{(m_1 - m_2)} \times \right. \\ & \left. \times (1 + m_2)n_2^{1/2} - \frac{(m_2 - m_4)}{(m_1 - m_2)}(1 + m_1)n_1^{1/2} \right]; \end{aligned}$$

$$n_4 = k_1/k; \quad \beta = (c_{11} + c_{12})\alpha + c_{13}\alpha_1; \quad \beta_1 = 2c_{13}\alpha + c_{33}\alpha_1; \quad (11)$$

$k_1/k$  – отношение коэффициента теплопроводности в направлении  $Oz$  к коэффициенту теплопроводности в направлении  $Ox$  (или  $Oy$ );  $\alpha, \alpha_1$  – коэффициенты линейного теплового расширения материала в направлении  $Ox$  (или  $Oy$ ) и  $Oz$ . При переходе от трансверсально-изотропного материала к изотропному получаем  $\gamma^{Trans} = \mu\alpha(1 + \nu)/(1 - \nu)$  ( $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига), что полностью соответствует результату для изотропного материала [6].

Для второго состояния суперпозиции функции  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) выберем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)}(x, y, z_1) &= \frac{1}{2\pi(1+m_1)c_{44}} \frac{-n_1^{1/2}}{(n_1^{1/2} - n_2^{1/2})} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_1 + z_1) d\xi d\eta; \\ \Phi_2^{(2)}(x, y, z_2) &= \frac{1}{2\pi(1+m_2)c_{44}} \frac{n_2^{1/2}}{(n_1^{1/2} - n_2^{1/2})} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_2 + z_2) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$  ( $j = 1, 2$ ), а функции  $\Phi_3^{(2)}$  и  $\Phi_4^{(2)}$  положим равными нулю. При этом имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}} \quad (i = 1, 2).$$

В результате суперпозиции состояний получаем

$$\sigma_{xz}^{(1)} + \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(1)} + \sigma_{yz}^{(2)} = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$\left( u_z^{(1)} + u_z^{(2)} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} A^{Trans} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}};$$



$$\left. (\sigma_{zz}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(2)}) \right|_{z=0} = \begin{cases} -p(x, y) - \gamma^{Trans} T_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \notin \Omega \end{cases},$$

где

$$A^{Trans} = \frac{1}{c_{44} (n_1^{1/2} - n_2^{1/2})} \left[ \frac{m_2 - m_1}{(1 + m_1)(1 + m_2)} \right] = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11} n_1 + c_{13})(c_{11} n_2 + c_{13})}. \quad (13)$$

Перейдем от трансверсально-изотропной среды к изотропному материалу. Для этого положим  $n_1 = n_2 = 1$ ;  $c_{11} = \lambda + 2\mu$ ;  $c_{13} = \lambda$ ;  $c_{44} = \mu$ . Тогда из формулы (13) находим

$$A^{Trans} = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

Таким образом, при переходе к изотропному материалу имеем совпадение результатов с известными [6].

**Установление взаимосвязи между контактными задачами для изотропного и трансверсально-изотропного упругих полупространств.** На основании [1, 3] решение контактной задачи термоупругости для изотропного упругого полупространства с граничными условиями (1) можно привести к поиску неизвестной плотности потенциала простого слоя. Остается удовлетворить граничное условие

$$u_z(x, y, 0) = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y) = \frac{1 - \nu}{2\pi\mu} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}. \quad (14)$$

При этом под штампом

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = -p(x, y) - \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha \mu T_0(x, y) \quad (x, y) \in \Omega. \quad (15)$$

В результате суперпозиции состояний для трансверсально-изотропного полупространства получаем

$$u_z(x, y, 0) = \delta - \beta_y x + \beta_x y - \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} A^{Trans} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}. \quad (16)$$

Нормальные напряжения под штампом в этом случае имеют вид

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = -p(x, y) - \gamma^{Trans} T_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (17)$$

Все остальные граничные условия (1) удовлетворены. Сравнивая выражения (14), (15) и (16), (17), заключаем, что такие характеристики контакта как контактное давление, осадка для трансверсально-изотропного полупространства могут быть вычислены из соответствующих выражений для изотропного полупространства с помощью замены значений  $(1 - \nu)/\mu$  на  $A^{Trans}$  и  $(1 + \nu)\alpha\mu/(1 - \nu)$  на  $\gamma^{Trans}$ . Перемещения и напряжения в произвольной точке трансверсально-изотропного подпространства в конкретных случаях можно вычислить с помощью предложенной конструкции решения.

**Решения новых контактных задач.** В случае вдавливания плоского эллиптического штампа (при отсутствии поворотов вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ ) согласно [6] получаем значения контактного давления и перемещения (осадки) под штампом

$$p(x, y) = \frac{P - Q_1}{2\pi ab} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2} + \gamma^{Trans} T_0(x, y); \quad \delta = \frac{P - Q_1}{2\pi a} A^{Trans} K(e), \quad (18)$$

где  $a$  – большая полуось эллипса,  $e$  – его эксцентриситет.

$$P \geq Q_1 = \gamma^{Trans} \iint_{\Omega} T_0(x, y) dx dy. \quad (19)$$

При  $T_0(x, y) = T_0$  получаем  $P \geq \gamma^{Trans} T_0 \pi ab$ .

При вдавливании кольцевого штампа согласно [4] находим

$$p(r,0) = -\omega \frac{P-Q_2}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_{r/b}^1 \left( \frac{\beta^2 - a^2/b^2}{\beta^2 - r^2/b^2} \right)^{1/2} g(\beta) d\beta + \gamma^{Trans} T_0(r); \quad \delta = \omega A^{Trans} \frac{P-Q_2}{4b}; \quad (20)$$

$$P \geq Q_2 = 2\pi \gamma^{Trans} \int_a^b T_0(r) r dr, \quad (21)$$

где  $\omega^{-1} = \int_{a/b}^1 g(\beta) d\beta$ ,  $g(\beta)$  – функция, удовлетворяющая интегральному уравнению второго рода.

Для штампа в виде кругового конуса (с углом раствора  $2\gamma$  при вершине), вдавливаемого силой  $P$  в электроупругое полупространство, согласно [5] получаем

$$u_z(x,y) = b_0 + b_1 \left( 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right); \quad p(x,y) = \frac{P-Q_3}{\pi a^2} \operatorname{arch} \left( \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \gamma^{Trans} T_0(r), \quad (22)$$

где радиус площадки контакта и параметры перемещения штампа определяются так:

$$a = 3 \sqrt{A^{Trans} \frac{P-Q_3}{\pi} \operatorname{tg} \gamma}; \quad b_1 = \frac{P-Q_3}{\pi a} A^{Trans}; \quad b_0 = \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) b_1; \quad (23)$$

$$P \geq Q_3 = 2\pi \gamma^{Trans} \int_0^a T_0(r) r dr. \quad (24)$$

Для штампа в виде параболоида вращения согласно [5] находим

$$u_z(x,y) = b_0 + b_1 \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right); \quad p(x,y) = \frac{3(P-Q_3)}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} + \gamma^{Trans} T_0(r);$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8} A^{Trans} (P-Q_3) R}; \quad b_0 = b_1 = \frac{3(P-Q_3)}{16a} A^{Trans}; \quad P \geq Q_3, \quad (25)$$

где  $R$  – радиус кривизны параболы, вращением которой получаем параболоид.

Рассмотрим задачу о давлении жесткого параболоидального, эллиптического в плане штампа, на электроупругое полупространство. Предположим, что повороты штампа относительно осей координат  $Ox$  и  $Oy$  равны нулю, т.е.  $\alpha = \beta = 0$ . Тогда согласно [3] и установленной взаимосвязи между задачами получаем, что формулы для контактного давления, эллипса контакта и перемещения штампа имеют вид

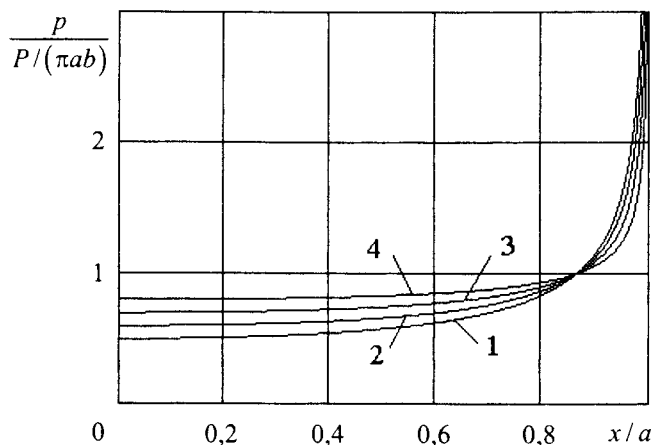
$$p(x,y) = \frac{3(P-Q_1)}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + \gamma^{Trans} T_0(x,y); \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2)[K(e)-E(e)]}{E(e)-(1-e^2)K(e)};$$

$$a = \left[ (P-Q_1) R_1 A^{Trans} \right]^{1/3} \left[ \frac{3}{2\pi} \left( \frac{K(e)-E(e)}{e^2} \right) \right]^{1/3};$$

$$\delta = \left[ \frac{P-Q_1}{\sqrt{R_1}} A^{Trans} \right]^{2/3} \left[ \frac{9e^2}{32\pi^2 [K(e)-E(e)]} \right]^{1/3} K(e), \quad P \geq Q_1, \quad (26)$$

где  $R_1^{-1}$ ,  $R_2^{-1}$  – кривизны главных нормальных сечений поверхности  $S$  в точке касания с плоскостью,  $e$  – эксцентриситет эллипса,  $a$  – значение большей полуоси эллипса контакта,  $\delta$  – перемещение под штампом (осадка) вдоль оси  $Oz$ .

**Анализ результатов численных исследований.** Рассмотрим задачу о вдавливании нагретого до постоянной температуры  $T_0$  жесткого плоского эллиптического штампа в трансверсально-изотропное



полупространство. На рисунке показано распределение контактного давления вдоль оси  $Ox$  (от центра штампа к его границе). При расчетах значения полуосей полагались такими:  $a = 1$ ,  $b = 0,5$ . Линии 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $\gamma^{Trans} T_0 \pi ab / P$ , равным 0; 0,2; 0,4; 0,6. Видно, что температура штампа существенно влияет на распределение контактного давления. При большем нагреве штампа давление под ним увеличивается в центральной части штампа и уменьшается при приближении к границе области контакта.

## РЕЗЮМЕ

Встановлено взаємозв'язок між статичними контактними задачами термопружності для ізотропного та трансверсально-ізотропного півпросторів (поверхня другого півпростору є площиною ізотропії матеріалу). Це дозволяє зразу, не розв'язуючи задачу для трансверсально-ізотропного матеріалу, перерахувати для нього всі характеристики контакту по відомим розв'язкам відповідних контактних задач термопружності для ізотропного півпростору. Як приклади використання підходу розглянуто контактні задачі термопружності для плоского еліптичного, кільцевого, конічного, параболоїдального (кругового та еліптичного у плані) штампів.

## SUMMARY

The correlation between the static contact problems of thermoelasticity for isotropic and transversally-isotropic half spaces (the surface of second half space is the plane of material isotropy) was established. It allows at once, do not solving the problem for transversally-isotropic half space, to calculate for it all contact properties in accordance to known solutions of relevant contact problems of thermoelasticity for isotropic half space. As examples of given approach using the contact problems of thermoelasticity for plane elliptic, annular, conical, paraboloidal (circular and elliptic in the plane) punches were considered.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР // Под ред. Л.А.Галина. – М.: Наука, 1976. – 494 с.
5. Бородачев Н.М. О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С.86-90.
6. Хрусталева А.Ф. Контактная задача термоупругости для полупространства // Инженерный журнал. – 1965. – Т. 5, №5. – С.86-90.
7. Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitskii V.B. Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol.40, №7. – P.744-765.
8. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.
9. Shelestovskii B.G., Gabrusev G.V. Thermoelastic State of Transversely Isotropic Layer between Two Annular Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol.40, №4. – P.417-425.
10. Подильчук Ю.Н., Ткаченко В.Ф., Соколовский Я.И. Термоупругая контактная задача о вдавлении нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство // Прикладная механика. – 1996. – Т.32, №11. – С.38-45.
11. Chen W.Q., Lim C.W. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – Vol.131, №3. – P.231-246.
12. Ding H.J., Hou P.F., Guo F.L. The elastic and electric fields for three-dimensional contact for transversely isotropic piezoelectric materials // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol.37, Is.23. – P.3201-3229.
13. Podil'chuk Yu.N., Myasoedova I.G. Stress State of a Transversely Isotropic Piezoceramic Body with Spheroidal Cavity // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol.40, №11. – P.1269-1280.
14. Zhang T.Y., Gao C.F. Fracture behaviors of piezoelectric materials // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2004. – Vol.41, №1-3. – P.339-379.

Надійшла до редакції 10.11.2005 р.

УДК 539.3

**ИЗГИБ ТРАНСТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

*Т.А. Васильев*

Решению задач об изгибе толстой изотропной круговой плиты с жестко защемленной боковой поверхностью были посвящены работы [1, 2], изотропного цилиндрического тела с шарнирно закрепленной боковой поверхностью – статьи [2, 3]. Изгиб трансетропного короткого кругового цилиндра исследовался в работе [4]. В данной статье с использованием метода Лурье-Воровича решена задача о напряженно-деформированном состоянии (НДС) трансетропного цилиндрического тела конечных размеров с шарнирно закрепленной боковой поверхностью, дан анализ качества удовлетворения граничным условиям, исследована зависимость НДС тела от упругих и геометрических параметров задачи.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим трансетропное цилиндрическое тело, занимающее в цилиндрической системе координат  $\tilde{r}, \theta, \tilde{z}$  область  $0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\tilde{H} \leq \tilde{z} \leq \tilde{H}$  так, что плоскость изотропии совпадает со срединной плоскостью тела  $\tilde{z} = 0$ . Ось  $\tilde{z}$  направлена вниз, значок тильда приводит к размерным величинам. По аналогии с представленными в [1-4] запишем следующую смешанную задачу теории упругости:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2 s_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\mu_1 + 1) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0, \\ \frac{\mu_2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{s_0^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при действии на  $S_1 = \{0 \leq \tilde{r} \leq \tilde{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tilde{z} = \pm \tilde{H}\}$  изгибающих усилий

$$\sigma_{zz}(r, z) \Big|_{z=\pm 1} \equiv \sigma_{zz}(r, \pm 1) = \pm \tilde{Q} / 2\tilde{G}_{cm}, \quad \sigma_{rz}(r, \pm 1) = 0; \quad (2)$$

и шарнирном закреплении поверхности  $S_2 = \{\tilde{r} = \tilde{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |\tilde{z}| \leq \pm \tilde{H}\}$

$$\sigma_{rr}(r, z) \Big|_{r=1} = \sigma_{rr}(1, z) = 0, \quad w(1, z) = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\sigma_{zz} = \frac{\tilde{\sigma}_{zz}}{2\tilde{G}_{cm}} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{G}_{cm}} \left[ \mu_1 v_z \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\mu_2}{2h} \frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{2s_0^2} \frac{\tilde{G}}{\tilde{G}_{cm}} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (4)$$

$\tilde{G}_{cm}$  – модуль сдвига стали;  $\mu_i, s_0^2, v_2$  – постоянные [5].

Дальнейшее изложение будем проводить с использованием безразмерных величин [4]. Решение граничной задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u(r, z) = u^H + u^O, \quad w(r, z) = w^H + w^O, \quad (5)$$

где верхним индексом  $h$  обозначено частное решение системы (1), удовлетворяющее неоднородным граничным условиям на торцах (2) и индуцирующее появление перемещений  $u^H(1, z), w^H(1, z)$  на боковой поверхности тела. Введенные в (5) функции  $u^O(r, z)$  и  $w^O(r, z)$  будут компенсировать эти перемещения. При этом  $u^O(r, z)$  и  $w^O(r, z)$  должны удовлетворять системе (1), однородным граничным условиям на плоских гранях ( $z = \pm 1$ )

$$\sigma_{zz}^O(r, \pm 1) = 0, \quad \tau_{rz}^O(r, \pm 1) = 0 \quad (0 \leq r \leq 1) \quad (6)$$

и неоднородным условиям на боковой поверхности ( $r = 1$ )

$$\sigma_{rr}^O(1, z) = -\sigma_{rr}^H(1, z), \quad w^O(1, z) = -w^H(1, z) \quad (-1 \leq z \leq 1). \quad (7)$$

Тогда суперпозиция (5) однородного и неоднородного решений будет давать решение исходной задачи.

Решение системы уравнений (1), удовлетворяющее условиям (6), примем в форме однородных решений, полученных методом Лурье-Воровича. Последнее в случае осесимметричной чисто изгибной деформации записываются так [5]:

$$u^o(r, z) = 2azr + 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p \frac{n_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)} P_0^+(\gamma_p^* r) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)},$$

$$w^o(r, z) = -\frac{ar^2}{h} - 4ah\mu_5 \left( v_2 z^2 - 2s_0^2 \right) - \frac{b}{h} + 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p \frac{q_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)} \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^*)}, \quad (8)$$

где  $\gamma_p^* = \gamma_p / h$ ,  $\gamma_p$  – корни уравнения  $\beta \sin 2\alpha \gamma_p - \alpha s h 2\beta \gamma_p = 0$  (здесь рассматриваются только материалы для которых  $b_1 > 0$ ,  $b_1^2 > b_2$  [5]). Нормировка функций Бесселя обусловлена их экспоненциальным поведением. Так как мнимые части корней трансцендентного уравнения растут пропорционально номеру  $p$ , то и собственные функции имеют экспоненциальную асимптотику. Поэтому в выражениях (8)

введены нормировки  $\frac{n_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)}$  и  $\frac{q_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)}$ .

Постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $A_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) определим так, чтобы удовлетворялись граничные условия (7). С учётом (8) для их определения имеем

$$2a(\mu_6 + \mu_7)z + 2 \operatorname{Re} \sum_p A_p \left[ \frac{l_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)} - \frac{n_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)} P_0^+(\gamma_p^*) \right] = -\sigma_{rr}^h(1, z) \equiv f(z) \quad (|z| \leq 1),$$

$$-\frac{a}{h} - 4h\mu_5 \left( v_2 z^2 - 2s_0^2 \right) a - \frac{b}{h} + 2 \operatorname{Re} \sum_p \frac{q_p(z; \gamma_p)}{\cos(\gamma_p s_1)} A_p = -w^h(1, z) \equiv g(z) \quad (p = \overline{1, \infty}). \quad (9)$$

Используя идею метода Бубнова-Галёркина, потребуем, чтобы невязки граничных условий (9) были ортогональны к полной на отрезке  $[-1, 1]$  системе функций  $\{\sin \delta_m z, \cos \delta_m z\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $\delta_m = \pi(m - 1/2)$ . Тогда для нахождения неизвестных коэффициентов, входящих в (8), будем иметь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую структурно запишем в виде

$$v_m a + 2 \operatorname{Re} \sum_p l_{mp} A_p = \frac{(-1)^m \delta_m^2}{2} \int_{-1}^1 f(z) \sin \delta_m z dz,$$

$$\omega_m a + 2 \operatorname{Re} \sum_p q_{mp} A_p = -\frac{(-1)^m \delta_m}{2} \int_{-1}^1 g(z) \cos \delta_m z dz \quad (m, p = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Здесь

$$v_m = 2(\mu_6 + \mu_7), \quad \omega_m = -\frac{1}{h} - 4h\mu_5 \left( v_2 \left( 1 - \frac{2}{\delta_m^2} \right) - 2s_0^2 \right),$$

$$n_{mp} = \delta_m^2 \left[ \kappa_{2p} s_3 \gamma_p s_2 \frac{\operatorname{tg}(\gamma_p s_1) \cos(\gamma_p s_2)}{(\gamma_p s_2)^2 - \delta_m^2} - \kappa_{1p} \gamma_p s_1 \frac{\sin(\gamma_p s_2)}{(\gamma_p s_1)^2 - \delta_m^2} \right],$$

$$\kappa_{ip} = \gamma_p^2 \frac{(1 - v_2 v_z)}{\mu_0 h^2} - P_0^+(\gamma_p^*) + \mu_1 v_z S_{ip} s_i \gamma_p^*,$$

$$q_{mp} = -\delta_m^2 \left[ s_3 S_{2p} \frac{\operatorname{tg}(\gamma_p s_1) \cos(\gamma_p s_2)}{(\gamma_p s_2)^2 - \delta_m^2} - S_{1p} \frac{\sin(\gamma_p s_2)}{(\gamma_p s_1)^2 - \delta_m^2} \right].$$

**Построение частного решения.** Пусть  $\bar{Q}/2\bar{G}_{cm} \equiv q(r) = const$ . Тогда на основе [6] частные решения можно искать в виде

$$u^h(r, z) = P_3(r)z + P_1(r)z^3, \quad w^h(r, z) = P_4(r) + P_2(r)z^2 + P_0(r)z^4. \quad (11)$$

При этом  $P_n(r)$  – неизвестные полиномы, чётные при  $n$  чётном и нечётные при  $n$  нечётном. Удовлетворяя системе (1) и условиям (2), с помощью представления частного решения в виде (11) получаем

$$P_0(r) = 0, \quad P_1(r) = \frac{s_0^2 k_2}{3k_4} q r, \quad P_2(r) = q \left( \frac{(\mu_3 - 1/s_0^2)}{8h} r^2 - \frac{hk_3}{6\mu_2 k_4} h \right),$$

$$P_3(r) = -\frac{q}{4h^2 k_4} r^3, \quad P_4(r) = q \left( \frac{1}{16h^3 k_4} r^4 - \frac{k_5}{2hk_4} r^2 + \frac{hk_5}{s_0^2 \mu_2 k_4} \right), \quad (12)$$

где

$$k_2 = \mu_1 + 1 - \frac{\mu_3}{\mu_2} \left( \mu_3 - \frac{1}{s_0^2} \right), \quad k_3 = s_0^2 \mu_3 k_2 + \frac{\mu_3 - s_0^{-2}}{s_0^2 \mu_2},$$

$$k_4 = \frac{k_3}{3} - \frac{s_0^2 k_2}{3} \left( \mu_3 + \frac{2}{s_0^2} \right) - \frac{\mu_3 - s_0^{-2}}{s_0^2 \mu_2}, \quad k_5 = s_0^2 k_2 + \frac{\mu_3 - s_0^{-2}}{\mu_2}.$$

**Анализ результатов численного решения.** С помощью численных исследований установлена достоверность полученных результатов, а также влияние на НДС геометрических характеристик и способа закрепления боковой поверхности тела.

В табл. 1 представлены значения осевых перемещений  $w/q$  кубообразного цилиндра. В числителе даны результаты, полученные по приведенному выше решению для случая изотропного тела при  $\nu = 0,3$ , в знаменателе – данные, найденные другим методом [3]. Из табл. 1 следует достаточно хорошее совпадение результатов.

В табл. 2 даны значения перемещений  $w/w_{max}$  и напряжений  $\sigma_{rr}/(\sigma_{rr})_{max}$  вдоль боковой поверхности для различных количеств корней  $N$  трансцендентного уравнения и разных значений относительной толщины  $h$ .

Из табл. 2 видно, что с увеличением количества корней уравнения точность удовлетворения граничных условий растет. В случае толстой плиты при том же количестве корней трансцендентного уравнения погрешности значительно меньше,

Таблица 1

r	z			
	0,0	0,4	0,8	1,0
0,0	0,484	0,576	0,776	0,858
	0,485	0,576	0,775	0,857
0,4	0,383	0,470	0,674	0,760
	0,384	0,470	0,674	0,759
0,8	0,132	0,175	0,324	0,422
	0,132	0,175	0,323	0,421

Таблица 2

h	Величина	N	z					
			0,5	0,8	0,9	0,97	0,98	0,99
0,25	w	50	7·10 <sup>-7</sup>	7·10 <sup>-6</sup>	2·10 <sup>-5</sup>	2·10 <sup>-5</sup>	5·10 <sup>-5</sup>	7·10 <sup>-5</sup>
		100	6·10 <sup>-8</sup>	6·10 <sup>-7</sup>	2·10 <sup>-6</sup>	9·10 <sup>-6</sup>	1·10 <sup>-5</sup>	3·10 <sup>-5</sup>
	w <sub>max</sub>	200	6·10 <sup>-8</sup>	7·10 <sup>-8</sup>	4·10 <sup>-7</sup>	2·10 <sup>-6</sup>	3·10 <sup>-6</sup>	6·10 <sup>-6</sup>
		50	3·10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-3</sup>	1·10 <sup>-3</sup>	2·10 <sup>-2</sup>	2·10 <sup>-2</sup>	2·10 <sup>-2</sup>
	(σ <sub>rr</sub> ) <sub>max</sub>	100	5·10 <sup>-4</sup>	6·10 <sup>-4</sup>	6·10 <sup>-4</sup>	3·10 <sup>-4</sup>	8·10 <sup>-4</sup>	5·10 <sup>-3</sup>
		200	2·10 <sup>-4</sup>	3·10 <sup>-4</sup>	3·10 <sup>-4</sup>	3·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-3</sup>
2	w	50	2·10 <sup>-4</sup>	4·10 <sup>-4</sup>	8·10 <sup>-4</sup>	2·10 <sup>-3</sup>	4·10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-3</sup>
		100	3·10 <sup>-5</sup>	8·10 <sup>-5</sup>	2·10 <sup>-4</sup>	7·10 <sup>-4</sup>	1·10 <sup>-3</sup>	2·10 <sup>-3</sup>
	w <sub>max</sub>	300	1·10 <sup>-5</sup>	1·10 <sup>-5</sup>	2·10 <sup>-5</sup>	6·10 <sup>-5</sup>	6·10 <sup>-5</sup>	2·10 <sup>-4</sup>
		50	8·10 <sup>-2</sup>	9·10 <sup>-2</sup>	2·10 <sup>-2</sup>	1·10 <sup>-1</sup>	4·10 <sup>-2</sup>	2·10 <sup>-1</sup>
	(σ <sub>rr</sub> ) <sub>max</sub>	100	4·10 <sup>-2</sup>	4·10 <sup>-2</sup>	1·10 <sup>-2</sup>	6·10 <sup>-3</sup>	8·10 <sup>-3</sup>	4·10 <sup>-2</sup>
		300	9·10 <sup>-3</sup>	9·10 <sup>-3</sup>	4·10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-3</sup>	2·10 <sup>-3</sup>

чем в коротких цилиндрах.

В табл. 3 приведены значения перемещений  $w/q$  и напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/q$ , возникающие в кубообразном ( $h=1$ ) цилиндре при шарнирном закреплении (данные в числителе) и жестком защемлении (данные в знаменателе). Последние данные взяты из работы [5]. В качестве материала цилиндра принималась керамика, для которой  $\nu = 0,364$ ;  $\nu_z = 0,288$ ;  $\nu_2 = 0,238$ ;  $s_0^2 = 0,82$ . Из табл. 3 следует, что максимальные перемещения в случае шарнирного закрепления цилиндра больше, чем при жесткой заделке боковой поверхности, примерно на 10%, в то время как напряжения у торцов приблизительно на

Таблица 3

z	r для w/q					r для $\sigma_{\theta\theta}/q$				
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
0,0	<u>0,417</u> 0,385	<u>0,395</u> 0,366	<u>0,331</u> 0,310	<u>0,232</u> 0,223	<u>0,115</u> 0,116	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0	<u>0</u> 0
0,2	<u>0,436</u> 0,400	<u>0,413</u> 0,380	<u>0,348</u> 0,322	<u>0,247</u> 0,232	<u>0,123</u> 0,120	<u>0,046</u> 0,050	<u>0,026</u> 0,050	<u>0,011</u> 0,045	<u>-0,009</u> 0,040	<u>-0,032</u> 0,039
0,4	<u>0,489</u> 0,442	<u>0,466</u> 0,421	<u>0,399</u> 0,359	<u>0,290</u> 0,260	<u>0,149</u> 0,134	<u>0,133</u> 0,128	<u>0,099</u> 0,123	<u>0,069</u> 0,109	<u>0,021</u> 0,091	<u>-0,035</u> 0,079
0,6	<u>0,565</u> 0,509	<u>0,542</u> 0,486	<u>0,475</u> 0,419	<u>0,360</u> 0,309	<u>0,196</u> 0,161	<u>0,299</u> 0,270	<u>0,268</u> 0,256	<u>0,224</u> 0,223	<u>0,146</u> 0,174	<u>0,035</u> 0,124
0,8	<u>0,646</u> 0,587	<u>0,625</u> 0,565	<u>0,560</u> 0,498	<u>0,446</u> 0,382	<u>0,268</u> 0,211	<u>0,567</u> 0,510	<u>0,560</u> 0,494	<u>0,519</u> 0,444	<u>0,438</u> 0,350	<u>0,279</u> 0,200

столько же больше; в цилиндре же напряжения в 2-3 раза меньше.

В табл. 4 и 5 приведены значения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}/q$  и перемещений  $w/q$  для шарнирно закреплённого цилиндра при различных значениях толщины  $h$  и материалах (изотропный Zn с  $\nu = \nu_2 = \nu_z = 0,3$ ,  $s_0^2 = 1$  – данные в числителе; трансверсально изотропный  $Zn^{(H)}$  с  $\nu = -0,058$ ,  $\nu_2 = 0,256$ ,  $\nu_z = 0,869$ ,  $s_0^2 = 1,655$  – данные в знаменателе).

Таблица 4

r	z для h = 0,25					z для h = 2				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	<u>1,916</u> 1,748	<u>3,859</u> 3,503	<u>5,857</u> 5,270	<u>7,937</u> 7,056	<u>10,127</u> 8,868	<u>-0,097</u> -0,320	<u>-0,152</u> -0,503	<u>-0,093</u> -0,305	<u>0,192</u> 0,365	<u>0,717</u> 0,957
0,2	<u>1,870</u> 1,728	<u>3,768</u> 3,463	<u>5,720</u> 5,211	<u>7,755</u> 6,977	<u>9,900</u> 8,769	<u>-0,055</u> -0,075	<u>-0,105</u> -0,177	<u>-0,093</u> -0,198	<u>0,158</u> 0,239	<u>0,796</u> 1,165
0,4	<u>1,733</u> 1,669	<u>3,494</u> 3,344	<u>5,310</u> 5,032	<u>7,209</u> 6,739	<u>9,217</u> 8,472	<u>-0,054</u> -0,071	<u>-0,107</u> -0,179	<u>-0,108</u> -0,237	<u>0,122</u> 0,168	<u>0,803</u> 1,175
0,6	<u>1,506</u> 1,567	<u>3,039</u> 3,141	<u>4,627</u> 4,731	<u>6,298</u> 6,342	<u>8,079</u> 7,977	<u>-0,053</u> -0,062	<u>-0,108</u> -0,178	<u>-0,129</u> -0,293	<u>0,055</u> 0,015	<u>0,816</u> 1,191
0,8	<u>1,187</u> 1,432	<u>2,401</u> 2,864	<u>3,670</u> 4,308	<u>5,021</u> 5,779	<u>6,484</u> 7,281	<u>-0,049</u> -0,050	<u>-0,107</u> -0,172	<u>-0,153</u> -0,351	<u>-0,052</u> -0,242	<u>0,839</u> 1,217
1,0	<u>0,784</u> 1,283	<u>1,594</u> 2,600	<u>2,457</u> 3,984	<u>3,400</u> 5,460	<u>4,258</u> 6,340	<u>-0,045</u> -0,032	<u>-0,104</u> -0,155	<u>-0,172</u> -0,397	<u>-0,181</u> -0,544	<u>0,851</u> 1,305

Из табл. 4, 5 видно, что учет анизотропии материала приводит к значительному увеличению перемещений точек цилиндрического тела (приблизительно на 80%). При этом распределение перемещений

Таблиця 5

r	z для h = 0,25						z для h = 2					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	10,506	10,490	10,440	10,354	10,228	10,057	0,044	0,069	0,153	0,321	0,566	0,785
	18,662	18,609	18,445	18,164	17,753	17,195	-0,108	-0,110	-0,030	0,393	1,344	2,244
0,2	10,005	9,989	9,941	9,859	9,738	9,574	0,041	0,065	0,145	0,306	0,546	0,766
	17,795	17,743	17,585	17,315	16,919	16,380	-0,102	-0,105	-0,031	0,367	1,289	2,190
0,4	8,541	8,528	8,487	8,415	8,309	8,164	0,033	0,052	0,120	0,259	0,484	0,706
	15,252	15,207	15,068	14,829	14,477	13,994	-0,086	-0,091	-0,034	0,294	1,118	2,019
0,6	6,237	6,227	6,196	6,143	6,062	5,950	0,021	0,035	0,082	0,186	0,374	0,595
	11,219	11,184	11,076	10,888	10,608	10,220	-0,061	-0,067	-0,034	0,192	0,826	1,702
0,8	3,293	3,288	3,272	3,244	3,199	3,132	0,009	0,016	0,039	0,093	0,207	0,406
	6,003	5,982	5,916	5,798	5,618	5,362	-0,031	-0,036	-0,025	0,084	0,430	1,158

по толщине плиты становится более неоднородным и этот эффект увеличивается с ростом толщины тела. При приближении к боковой поверхности напряжения  $\sigma_{\theta\theta}/q$  в анизотропном материале убывают значительно (почти в три раза) медленнее. Для коротких цилиндров характерна область, в которой напряжения отрицательны. В случае анизотропного материала вблизи срединной поверхности цилиндра отрицательны и перемещения.

**РЕЗЮМЕ**

Розглянуто задачу теорії пружності про осесиметричний згин трансропних циліндричних тіл з шарнірно закріпленою боковою поверхнею. Досліджено вплив типу закріплення бокової поверхні, відносно товщини та модулей пружності на напружено-деформований стан тіла.

**SUMMARY**

Problem of the theory of elasticity of axis symmetrical bending of transtropic cylindrical bodies with hingly fixed lateral side was considered. Influence of type of fixing, of the value of relative thickness and elastic modulus on stress-strait state was investigated.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К.: Наук. думка, 1980. – 264 с.
2. Шалдырван В.А., Васильев Т.А. Некоторые математические модели изгиба неравномерно нагруженных цилиндрических тел // Вісн. Донец. ун-ту, Сер. А: Природ. науки. – 2005. – Вип. 1. – С.127-133.
3. Шалдырван В.А., Васильев Т.А. К задачам изгиба цилиндрических тел с шарнирно закреплённой боковой поверхностью // Изв. вузов Сев.-Кавк. Регион, Сер. Естеств. науки. – 2005. – Вып. 1. – С.34-38.
4. Шалдырван В.А., Васильев Т.А. О некоторых смешанных задачах изгиба трансропных цилиндрических тел // Прикл. механика. – 2005. – Т.41. – Вып.8. – С.58-65.
5. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1980. – 240 с.
6. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.

Надійшла до редакції 17.11.2005



УДК 539.3

**ДЕЙСТВИЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ В АНИЗОТРОПНОМ МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД С ЧАСТИЧНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВЫРАБОТКОЙ**

*Н.М.Нескородев, Р.Н.Нескородев*

В работах [1-3] разработаны методы и проведены исследования напряженно-деформированного состояния около протяженных выработок, пройденных в анизотропном породном массиве. Выработки находятся в условиях обобщенной плоской деформации, имеют произвольные сечения и находятся под действием сил гравитации. В данной статье предлагается решение задачи о напряженно-деформированном состоянии около прямоугольной горизонтальной выработки, пройденной по пласту полезного ископаемого.

**Постановка и построение решения задачи.** Рассмотрим горный массив с выработкой, поверхность которой может быть свободна от внешних усилий или закреплена по кровле и почве (участки *AB* и *CD* на рис.1). Реакцию крепи будем моделировать действием внешних сил на стенки кровли и почвы.

Массив горных пород будем рассматривать как полупространство, ограниченное горизонтальной плоскостью (земная поверхность). Отнесем его к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Начало системы находится на глубине  $H$ , ось  $Ox_2$  направлена вертикально вверх, а плоскость  $Ox_1x_3$  параллельна плоскости, ограничивающей полупространство. Массив содержит пласт полезного ископаемого толщиной  $h$ , расположенный под углом  $\varphi$  к горизонту и простирающийся в направлении оси  $Ox_3$ . На глубине  $H$  по пласту пройдена протяженная в направлении оси  $Ox_3$  выработка шириной  $l$ .

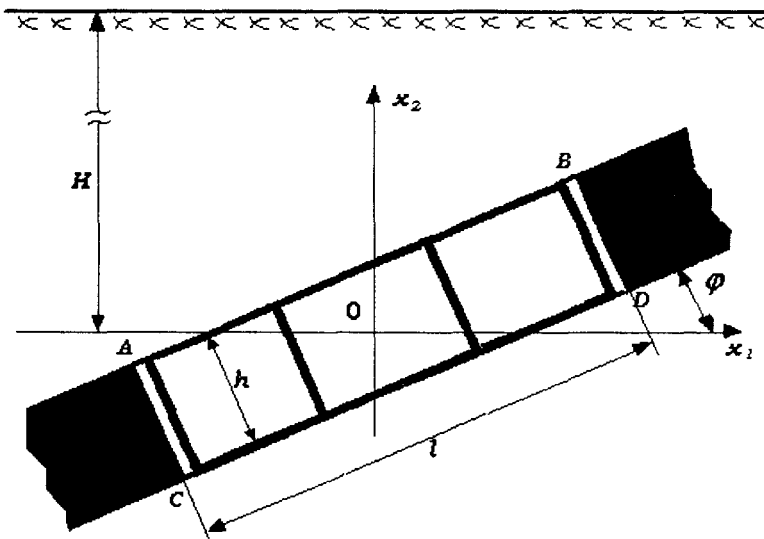


Рис. 1

Массив будем рассматривать как тяжелое упругое полупространство, свободное от напряжений на земной поверхности, т.е. при  $x_2 = H$ . Требуется определить напряжения и перемещения вблизи выработки от действия сил тяжести. Для упрощения решения задачи примем три предположения: 1) величины  $h$  и  $l$ , характеризующие размеры поперечного сечения выработки пренебрежимо малы по сравнению с глубиной ее заложения  $H$  – это дает возможность не учитывать влияние выработки на напряженное состояние вблизи земной поверхности; 2) протяженность выработки в направлении оси  $Ox_3$  велика, что позволяет считать массив находящимся в условиях обобщенной плоской деформации, т. е. перемещения и напряжения не меняются вдоль оси  $Ox_3$  и зависят только от координат  $x_1$  и  $x_2$ ; 3) плотность и упругие свойства материалов, составляющих горную породу и пласт одинаковы, что существенно упрощает решение граничной задачи.

Для описания поведения материала используем модель упругого тела, обладающего анизотропией

общего вида. Связь между напряжениями и деформациями примем в виде [1,3]:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 a_{ik} \sigma_k, \quad \sigma_i = \sum_{k=1}^6 A_{ik} \varepsilon_k, \quad (1)$$

где  $a_{ik}$  – коэффициенты деформации,  $A_{ik}$  – модули упругости материала.

Для компактной записи уравнений (1) введены обозначения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  для  $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}, \tau_{x_2x_3}, \tau_{x_1x_3}, \tau_{x_1x_2}$  и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$  для  $\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \varepsilon_{x_3}, \gamma_{x_2x_3}, \gamma_{x_1x_3}, \gamma_{x_1x_2}$ .

Уравнения (1) вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_6 + \partial_3 \sigma_5 + X &= 0, \\ \partial_1 \sigma_6 + \partial_2 \sigma_2 + \partial_3 \sigma_4 + Y &= 0, \\ \partial_1 \sigma_5 + \partial_2 \sigma_4 + \partial_3 \sigma_3 + Z &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и уравнениями связи между деформациями и проекциями перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2, \\ \varepsilon_3 &= \partial_3 u_3, \quad \varepsilon_4 = \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2, \\ \varepsilon_5 &= \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропных средах.

Напряжения  $\sigma_k^0$  и перемещения  $u_i^0$  в нетронутом массиве от действия сил собственного веса найдем интегрированием уравнений (1)-(3) при условиях

$$X = Z = 0, \quad Y = -\rho g, \quad \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = 0 \quad (x_2 = H), \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho$  – плотность материала горной породы. Интегрирование указанных уравнений дает [3]

$$\sigma_k^0 = -\tau_k \rho g H (1 - x_2 / H) \quad (k = \overline{1,6}), \quad u_i^0 = -\alpha_i \rho g H \left( x_2 - \frac{x_2^2}{2H} \right) + v_i \quad (i = \overline{1,3}). \quad (5)$$

Здесь  $\tau_2 = 1, \tau_4 = \tau_6 = 0$ , а величины  $\tau_1, \tau_3, \tau_5$  и  $\alpha_i$  определяются из системы уравнений

$$a_{i1} \tau_1 + a_{i3} \tau_3 + a_{i5} \tau_5 = -a_{i2} \tau_2 \quad (i = 1, 3, 5)$$

и соотношений

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^6 a_{6i} \tau_i, \quad \alpha_2 = \sum_{i=1}^6 a_{2i} \tau_i, \quad \alpha_3 = \sum_{i=1}^6 a_{4i} \tau_i.$$

Перемещения  $u_i^*$  и напряжения  $\sigma_k^*$ , учитывающие влияние выработки, будем находить интегрированием уравнений (1)-(3) для случая, когда  $X = Y = Z = 0$ . Общее представление решения выражается через три аналитические функции  $\Phi_j(z_j)$  ( $j = \overline{1,3}$ ) обобщенных комплексных переменных  $z_j = x_1 + \mu_j x_2$  и имеет вид [3]:

$$u_k^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{kj} \Phi_j(z_j). \quad (6)$$

Коэффициенты  $R_{kj}$  находятся при интегрировании и зависят от модулей упругости  $A_{ik}$  и комплексных параметров  $\mu_j$ , которые являются корнями характеристических уравнений, соответствующих дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях.

Выражения для напряжений через функции  $\Phi_j(z_j)$  находятся из уравнений закона Гука (1) и представляются в форме

$$\sigma_i^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{ij} \Phi_j'(z_j), \quad (7)$$

где

$$P_{ij} = \left[ A_{i1} R_{1j} + A_{i5} R_{3j} + A_{i6} R_{2j} + \mu_j (A_{i2} R_{2j} + A_{i4} R_{3j} + A_{i6} R_{1j}) \right],$$

$$\lambda_1 = P_{41}, \quad \lambda_2 = P_{42}, \quad \lambda_3 = P_{23}, \quad \Phi_j' = d\Phi_j / dz_j.$$

Определение функций  $\Phi_j(z_j)$  осуществляется из граничных условий на контуре выработки (рис. 1). Будем считать, что выработанное пространство по кровле и почве (участки  $AB$  и  $CD$ ) закреплено, а участки  $AC$  и  $BD$  свободны от внешних воздействий. Реакцию крепи на участках  $AB$  и  $CD$  будем моделировать действием нормальной  $P$  и касательных  $T$  и  $N$  составляющих внешних усилий, действующих на стенки почвы и кровли выработки. Тогда граничные условия для нахождения функций  $\Phi_j(z_j)$  примут вид

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = n_1 P - n_2 T, \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = n_2 P + n_1 T, \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = N \text{ на } AB \text{ и } CD;$$

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = 0, \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = 0, \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = 0 \text{ на } AC \text{ и } BD. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_k = \sigma_k^0 + \sigma_k^*$ ,  $n_1 = \cos(n, x_1)$ ,  $n_2 = \cos(n, x_2)$ ,  $n$  – внешняя нормаль к контуру выработки.

Напряжения и перемещения, действующие на контуре или вблизи контура выработки на площадках, касательных и нормальных к нему вычисляются по формулам

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 n_1^2 + 2\sigma_6 n_1 n_2 + \sigma_2 n_2^2, \quad \sigma_{tt} = \sigma_1 n_2^2 - 2\sigma_6 n_1 n_2 + \sigma_2 n_1^2,$$

$$\sigma_{nt} = (\sigma_2 - \sigma_1) n_1 n_2 + \sigma_6 (n_1^2 - n_2^2), \quad \sigma_{nx_3} = \sigma_5 n_1 + \sigma_4 n_2, \quad \sigma_{tx_3} = -\sigma_5 n_2 + \sigma_4 n_1,$$

$$\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^0, \quad u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2, \quad u_t = -u_1 n_2 + u_2 n_1. \quad (9)$$

**Анализ результатов численных исследований.** При проведении численных исследований была использована методика, предложенная в работах [4, 5]. Исследования проведены для случаев, когда варьировались длина  $l$ , угол  $\varphi$  наклона пласта к горизонту и  $P$  – нормальная составляющая усилий, действующих со стороны крепи на стенки кровли и почвы ( $T = N = 0$ ), а также материал из которого сложены горные породы.

В качестве материала выбирался Алевролит1, Алевролит2 и гранит изотропный, которые будем обозначать через А1, А2 и ГИ соответственно. Упругие постоянные этих материалов, если плоскость изотропии совпадает с плоскостью  $Ox_1x_3$ , приведены в табл. 1 [6, 7].

Таблица 1

Материал	$E_1 / E$	$E_2 / E$	$G_2 / E$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\rho$
А1	6.210	5.680	2.290	0.215	0.260	2500
А2	1.074	0.523	0.120	0.413	0.198	2500
ГИ	4.200	4.200	1.720	0.220	0.220	2700

Здесь  $E = 10^3 \times 9.81 \text{ МПа}$ . При проведении исследований для изотропных сред были использованы алгоритмы, разработанные для анизотропных материалов с учетом методики, предложенной в работе [8].

На рис. 2 изображены графики распределения напряжений  $\sigma_{tt} / \rho g H$ , а на рис. 3 – перемещений  $u_n$  по контуру выработки для следующих параметров: длина  $l = 3 \text{ м}$ ; высота  $h = 1 \text{ м}$ ; угол наклона к горизонту  $\varphi = \pi/6$ ; материал – А2. Другие параметры и описание результатов вычислений даны в

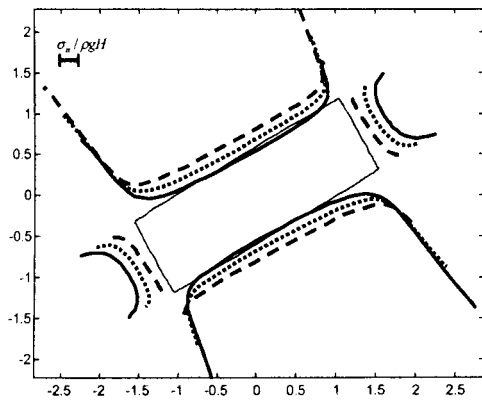


Рис. 2

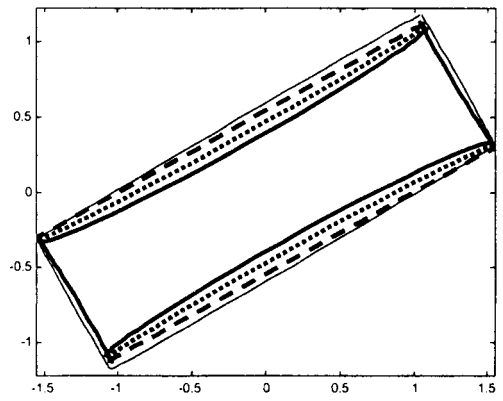


Рис. 3

табл. 2 по граничным элементам ( $AB$ ,  $AC$ ,  $CD$ ,  $BD$ ) в зависимости от реакции подкрепления  $P/\rho gH$ , при  $T = N = 0$ . В первой строке для каждого граничного элемента приведены максимальные и минимальные значения напряжений  $stt = \sigma_{tt} / \rho gH$ ; во второй строке даны величины  $\max|\sigma_{rr} / \rho gH|$  и  $\max|\sigma_{rt} / \rho gH|$ . В третьей и четвертой строках приведены максимальные и минимальные значения перемещений  $u_n$  и  $u_t$ , заданные в сантиметрах, для выработки, пройденной на глубине  $H = 1000$  м.

Таблица 2

Реакция крепи $P/\rho gH$	0		-0.4		-0.8	
Граничный элемент $AB$						
max_min_stt	0.2194	-6.1227	-0.3580	-8.1098	-0.9146	-10.0969
max_abs_rr_rt	0.0036	0.0044	0.4065	0.0018	0.8094	0.0074
max_min_un	0.0351	-1.7605	-0.0146	-1.1148	0.1763	-0.6172
max_min_ut	0.2210	-0.9005	0.2214	-0.7267	0.3102	-0.5665
Граничный элемент $AC$						
max_min_stt	-1.9116	-4.0512	-1.2853	-2.8799	-0.6318	-1.7085
max_abs_rr_rt	0.0043	0.0050	0.0014	0.0031	0.0057	0.0039
max_min_un	0.0351	-1.7605	-0.0146	-1.1148	0.1763	-0.6172
max_min_ut	0.9005	-0.2210	0.7267	-0.2214	0.5665	-0.3102
Граничный элемент $CD$						
max_min_stt	0.1963	-10.3377	-0.3484	-7.2808	-0.8442	-4.2533
max_abs_rr_rt	0.0118	0.0059	0.4049	0.0011	0.8028	0.0054
max_min_un	0.0351	-1.7605	-0.0146	-1.1148	0.1763	-0.6172
max_min_ut	0.2210	-0.9005	0.2214	-0.7267	0.3102	-0.5665
Граничный элемент $BD$						
max_min_stt	-1.9118	-4.1725	-1.2857	-2.8565	-0.6404	-1.5405
max_abs_rr_rt	0.0036	0.0060	0.0019	0.0025	0.0037	0.0026
max_min_un	0.0351	-1.7605	-0.0146	-1.1148	0.1763	-0.6172
max_min_ut	0.2210	-0.9005	0.2214	-0.7267	0.3102	-0.5665

Заметим, что компоненты напряжений и перемещений в угловых точках не вычислялись поскольку углы выработок в действительности сглажены в результате локального разрушения породы или по проекту. Сплошная линия на рисунках соответствует значению реакции крепи  $P = 0$  (неподкрепленная выработка), пунктирная – когда  $P = -0.4\rho gH$ , штриховая для  $P = -0.8\rho gH$ . Деления на горизонтальной и вертикальной осях даны в метрах, а единица напряжений соответствует пятой части единицы деления по горизонтальной оси. Величины напряжений и перемещений на рисунках в точках границы (тонкая сплошная линия) отложены вдоль нормали к линии границы в рассматриваемых точках. Напряжения, возникающие у выработки оказываются сжимающими.

В табл. 3 приведены результаты расчета напряжений и перемещений по контуру выработки в зависимости от ее длины для следующих параметров: высота выработки  $h = 1$  м; угол наклона к горизонту

$\varphi = \pi/6$ ;  $P/\rho gH = -0.4$ ,  $T = N = 0$ ; материал – А2. Для каждого граничного элемента построчно приведены значения тех же величин, что и в табл. 2.

Таблица 3

Длина выработки $l$	1		3		6		9	
Граничный элемент <i>AB</i>								
max_min_stt	-0.8541	-10.238	-0.3580	-8.1098	-0.1279	-6.6238	-0.0171	-7.2904
max_abs_rr_rt	0.4039	0.0060	0.4065	0.0018	0.4027	0.0024	0.4046	0.0091
max_min_un	-0.0456	-0.5046	-0.0146	-1.1148	0.1166	-2.0082	0.2434	-2.8951
max_min_ut	0.1620	-0.3865	0.2214	-0.7267	0.3422	-1.1614	0.4753	-1.6036
Граничный элемент <i>AC</i>								
max_min_stt	-0.8371	-2.1132	-1.2853	-2.8799	-1.7267	-3.6611	-2.1511	-5.1451
max_abs_rr_rt	0.0024	0.0022	0.0014	0.0031	0.0032	0.0016	0.0024	0.0069
max_min_un	-0.0456	-0.5046	-0.0146	-1.1148	0.1166	-2.0082	0.2434	-2.8951
max_min_ut	0.1620	-0.3865	0.2214	-0.7267	0.3422	-1.1614	0.4753	-1.6036
Граничный элемент <i>CD</i>								
max_min_stt	-0.8541	-10.238	-0.3484	-7.2808	-0.1279	-6.6237	-0.0171	-7.2905
max_abs_rr_rt	0.4039	0.0060	0.4049	0.0011	0.4027	0.0024	0.4046	0.0091
max_min_un	-0.0456	-0.5046	-0.0146	-1.1148	0.1166	-2.0082	0.2434	-2.8951
max_min_ut	0.1620	-0.3865	0.2214	-0.7267	0.3422	-1.1614	0.4753	-1.6036
Граничный элемент <i>BD</i>								
max_min_stt	-0.8371	-2.1133	-1.2857	-2.8565	-1.7267	-3.6613	-2.1511	-5.1452
max_abs_rr_rt	0.0024	0.0022	0.0019	0.0025	0.0032	0.0016	0.0024	0.0069
max_min_un	-0.0456	-0.5046	-0.0146	-1.1148	0.1166	-2.0082	0.2434	-2.8951
max_min_ut	0.1620	-0.3865	0.2214	-0.7267	0.3422	-1.1614	0.4753	-1.6036

Приведенные и другие полученные результаты показывают, что наиболее неблагоприятным является напряженно – деформированное состояние у выработки, которая не подкреплена ( $P = 0$ ). С увеличением длины выработки сжимающие напряжения, которые достигают максимального значения вблизи угловых точек, растут на неподкрепленных участках, а на подкрепленных прямолинейных участках в почве и кровле проявляется тенденция возникновения зоны растягивающих напряжений. Наибольших значений нормальные к контуру перемещения достигают на серединах длинных сторон выработки когда  $P = 0$ . Положение существенным образом улучшается с ростом интенсивности реакции крепи.

В табл. 4 даны результаты расчетов полей напряжений и перемещений для материалов, приведенных в табл. 1 при следующих параметрах: длина выработки  $l = 3$  м; высота  $h = 1$  м; угол наклона к горизонту  $\varphi = 0$ ;  $P/\rho gH = -0.4$ ,  $T = N = 0$ . В табл. 4 для каждого граничного элемента построчно приведены значения тех же величин, что и в табл. 2.

Таблица 4

Материал	А2		А1		ГИ	
Граничный элемент <i>AB</i>						
max_min_stt	-0.1728	-5.2777	0.1177	-2.7016	0.2075	-2.3654
max_abs_rr_rt	0.4044	0.0013	0.4034	0.0020	0.4033	0.0018
max_min_un	-0.1073	-1.1749	0.0023	-0.0962	0.0110	-0.1469
max_min_ut	0.4007	-0.4005	0.0371	-0.0371	0.0583	-0.0583
Граничный элемент <i>AC</i>						
max_min_stt	-1.5532	-2.7259	-1.5230	-2.5463	-1.5886	-2.5936
max_abs_rr_rt	0.0013	0.0027	0.0024	0.0021	0.0024	0.0021
max_min_un	-0.1073	-1.1749	0.0023	-0.0962	0.0110	-0.1469
max_min_ut	0.4007	-0.4005	0.0371	-0.0371	0.0583	-0.0583

Анализ результатов показал, что напряжения около подкрепленной части выработки уменьшаются в случае более прочных материалов (А1 и ГИ) и меняются незначительно на неподкрепленной части выработки. Перемещения точек контура для более прочных материалов получились на порядок меньше, чем для пород из материала А2.

Достоверность приведенных результатов оценивается выполнением граничных условий и опреде-

ляється значеннями величин  $\max|\sigma_{rr}/\rho gH|$  і  $\max|\sigma_{rt}/\rho gH|$  по всім точкам контура. Эти величини приведені в таблицях другої строкою для кожного граничного елемента.

#### РЕЗЮМЕ

У статті запропоноване рішення задачі о дії сил ваги поблизу прямокутної горизонтальної виробки, пройде-ної по шарі корисної копалини, розташованої під кутом до горизонту в анізотропному масиві гірських порід. Вироб-лений простір підкріплений по покрівлі і ґрунті. Реакція кріпи моделюється дією зовнішніх сил на стінки покрівлі і ґрунту. Описано результати чисельних досліджень розподілу напруг і переміщень.

#### SUMMARY

In the article the solution of a problem on action of gravitations in a vicinity of the rectangular drift on a seam of a useful mineral, located bevel way to horizon in an anisotropic rock mass is offered. The goaf is supported on roof and ground. Reaction fix it is modelled by action of external forces on walls of a roof and ground. The received results of numerical researches of distribution of stresses and movings are described.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
2. Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных выработок. / В.А.Полухин, С.А.Калоеров, Ю.Б.Грядущий, Е.С.Горянская. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
3. Нескородев Н.М., Нескородев Р.Н. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве. – Донецк, 2003. – 148 с.
4. Космодамианский А.С., Нескородев Н.М. Напряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями произвольной формы // Доп. НАН України. – 1993. – №7. – С.54-56.
5. Нескородев Н.М. Метод граничных элементов в задачах о напряженном состоянии анизотропной пластинки с отверстиями // Теорет. и прикладная механика. – 1993. – Вып.24. – С.44-50.
6. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.
7. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1988. – 270 с.
8. Космодамианский А.С., Нескородев Н.М. Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел // Прикладная математика и механика. – М., 1998. – Т.62. – №2. – С.344-346.

Надішла до редакції 17.11.2005 р.

УДК 539.3

**МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
С УЧЕТОМ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

*Т.С.Кагадий*

*Национальный горный университет, г. Днепропетровск*

Потребности различных областей техники все чаще заставляют обращаться к нелинейным задачам. Трудности же интегрирования соответствующих систем дифференциальных уравнений не позволяют получать аналитические решения конкретных практически важных задач. В работах [1-4] предложен метод решения задач теории упругости и вязкоупругости для тел из ортотропных материалов. В данной статье этим методом дано решение плоских задач с учетом конечных деформаций.

**Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим плоскую геометрически нелинейную задачу теории упругости. Будем предполагать, что принятая система координат материальна и при деформации деформируется. Этот метод описания деформированного состояния известен как метод Лагранжа, когда предполагается, что координаты рассматриваемых точек недеформированной системы (численно) совпадают с координатами деформированной системы. В рассматриваемом случае плоской задачи роль характеристик деформаций играют компоненты тензора деформаций, которые в декартовой системе координат  $x, y$  имеют вид

$$e_{11} = u_x + (u_x^2 + v_x^2)/2, \quad e_{22} = v_y + (u_y^2 + v_y^2)/2, \quad e_{12} = u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y. \quad (1)$$

Здесь  $u, v$  – компоненты вектора перемещений, индексы  $x, y$  обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

Пусть  $\varepsilon$  – некоторый малый параметр. Введем аффинные преобразования координат и искомым функций

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \phi_1 \varepsilon^{\alpha_1} x, \quad \eta_1 = \omega_1 \varepsilon^{\beta_1} y, \quad u = \varepsilon^{\gamma_1} U^{(1)}, \quad v = \varepsilon^{\delta_1} V^{(1)}, \\ \xi_2 &= \phi_2 \varepsilon^{\alpha_2} x, \quad \eta_2 = \omega_2 \varepsilon^{\beta_2} y, \quad u = \varepsilon^{\gamma_2} U^{(2)}, \quad v = \varepsilon^{\delta_2} V^{(2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя преобразования (2) в соотношения (1), получаем

$$\begin{aligned} e_{11}^{(i)} &= \varepsilon^{\alpha_i + \gamma_i} \phi_i U_{\xi}^i + \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{2(\alpha_i + \gamma_i)} \phi_i^2 \left( U_{\xi}^{(i)} \right)^2 + \varepsilon^{2(\alpha_i + \delta_i)} \phi_i^2 \left( V_{\xi}^{(i)} \right)^2 \right), \\ e_{22}^{(i)} &= \varepsilon^{\beta_i + \delta_i} \omega_i V_{\eta}^{(i)} + \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{2(\beta_i + \gamma_i)} \omega_i^2 \left( U_{\eta}^{(i)} \right)^2 + \varepsilon^{2(\beta_i + \delta_i)} \omega_i^2 \left( V_{\eta}^{(i)} \right)^2 \right), \\ e_{12}^{(i)} &= \varepsilon^{\beta_i + \gamma_i} \omega_i U_{\eta}^{(i)} + \varepsilon^{\alpha_i + \delta_i} \phi_i V_{\xi}^{(i)} + \varepsilon^{\alpha_i + \beta_i + 2\gamma_i} \phi_i \omega_i U_{\xi}^{(i)} U_{\eta}^{(i)} + \varepsilon^{\alpha_i + \beta_i + 2\delta_i} \phi_i \omega_i V_{\xi}^{(i)} V_{\eta}^{(i)} \quad i = (1, 2), \end{aligned}$$

где дифференцирование (индексы  $\xi, \eta$ ) производится по координатам  $\xi_i, \eta_i$  ( $i = 1, 2$ ), индексы которых совпадают с верхними индексами функций.

Пусть показатели  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$   $i = (1, 2)$  принимают значения

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1/2, \gamma_1 = 1, \delta_1 = 5/2; \quad (3)$$

$$\alpha_2 = 1/2, \beta_2 = 1, \gamma_2 = 5/2, \delta_2 = 1. \quad (4)$$

Тогда в случае значений (3) компонента перемещения  $U(1)$  существенно превосходит компоненту  $V(1)$ , а изменяемость функций вдоль координаты  $x$  меньше, чем вдоль координаты  $y$ . При значениях коэффициентов (4) имеем противоположную картину: перемещение  $V(2)$  существенно превосходит перемещение  $U(2)$ , а изменяемость вдоль координаты  $y$  меньше, чем вдоль координаты  $x$ . Таким образом, как и в линейной постановке [1-3], в нелинейной теории упругости также могут быть выделены два вида деформированного состояния, обладающие различными свойствами, которые проявляются в различии порядков компонент вектора перемещений и различной их изменяемости по координатам.

Подставляя (3) и (4) в соотношения (1) и отбрасывая (для сокращения записи) слагаемые, содержащие  $\varepsilon^5$  и выше, получим соответственно

$$e_{11}^{(1)} = \varepsilon^2 \left[ \phi_1 U_{\xi}^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \phi_1^2 \left( U_{\xi}^{(1)} \right)^2 \right], \quad e_{22}^{(1)} = \varepsilon^3 \left[ \omega_1 V_{\eta}^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \left( U_{\eta}^{(1)} \right)^2 \right],$$

$$e_{12}^{(1)} = \varepsilon^{1/2} \left[ \omega_1 U_{\eta}^{(1)} + \varepsilon^2 \phi_1 V_{\xi}^{(1)} + \varepsilon^2 \phi_1 \omega_1 U_{\xi}^{(1)} U_{\eta}^{(1)} \right]. \quad (5)$$

$$e_{11}^{(2)} = \varepsilon^3 \left[ \phi_2 U_{\xi}^{(2)} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \phi_2^2 \left( V_{\xi}^{(2)} \right)^2 \right], \quad e_{22}^{(2)} = \varepsilon^2 \left[ \omega_2 V_{\eta}^{(2)} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \omega_2^2 \left( V_{\eta}^{(2)} \right)^2 \right],$$

$$e_{12}^{(2)} = \varepsilon^{3/2} \left[ \phi_2 V_{\xi}^{(2)} + \varepsilon^2 \omega_2 U_{\eta}^{(2)} + \varepsilon^2 \phi_2 \omega_2 V_{\xi}^{(2)} V_{\eta}^{(2)} \right]. \quad (6)$$

Отсюда следует, что в деформированном состоянии первого типа, где перемещение  $U(1)$  существенно превосходит  $V(1)$ , основную роль играет компонента деформации  $e_{11}$  и составляющая компоненты  $e_{12}^{(1)}$ , которые выражаются через перемещение  $U(1)$ . Для деформированного состояния второго типа компонента перемещения  $V(2)$  превосходит  $U(2)$  и основную роль играет компонента деформации  $e_{22}$  и составляющая  $e_{12}^{(2)}$ , выражающаяся через  $V(2)$ . Таким образом, сдвиг содержит равноценные составляющие обоих типов и устанавливает связь между указанными двумя видами деформированного состояния.

Рассматривая ортотропные материалы, главные направления упругости которых совпадают с декартовыми осями координат, будем пренебрегать коэффициентами Пуассона (для сокращения записи), что не нарушает принципиальных соотношений и может лишь незначительно оказать влияние на численные результаты. Тогда соотношения между напряжениями и деформациями запишутся в виде

$$\sigma_{11} = E_1 e_{11}, \quad \sigma_{22} = E_2 e_{22}, \quad \sigma_{12} = G e_{12}, \quad (7)$$

где  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  ( $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ) – нормальные (касательные) напряжения;  $E_1$ ,  $E_2$  – модули упругости вдоль главных направлений  $x$ ,  $y$ ;  $G$  – модуль сдвига.

Таким образом, выделяется и два вида напряженного состояния, соответствующие указанным видам деформированного состояния, причем касательные напряжения содержат одинаковые составляющие обоих типов.

Вопрос об определении напряженно-деформированного состояния упругого геометрически нелинейного тела сводится к интегрированию уравнений равновесия в исходной декартовой системе координат  $x$ ,  $y$

$$\left[ (1 + u_x) \sigma_{11} + u_y \sigma_{12} \right]_x + \left[ (1 + u_x) \sigma_{12} + u_y \sigma_{22} \right]_y = 0,$$

$$\left[ v_x \sigma_{11} + (1 + v_y) \sigma_{12} \right]_x + \left[ v_x \sigma_{12} + (1 + v_y) \sigma_{22} \right]_y = 0 \quad (8)$$

при соответствующих граничных условиях.

Прежде всего, рассмотрим эту систему без подчеркнутых членов. Отбрасывание указанных слагаемых оказывает такое же влияние, как и отбрасывание коэффициента Пуассона, но приводит к существенным упрощениям. После подстановки в уравнение (8) указанных ранее соотношений и отбрасывания слагаемых, содержащих  $\varepsilon^3$  и выше, для каждого из состояний представленных формулами (5), (6), получим

$$\phi_1^2 U_{\xi\xi}^{(1)} + \omega_1^2 U_{\eta\eta}^{(1)} = -\varepsilon^2 \phi_1 \left[ \omega_1 V_{\eta}^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \left( U_{\eta}^{(1)} \right)^2 \right]_{\xi} - \varepsilon^2 \phi_1 U_{\xi}^{(1)} \left[ \phi_1^2 U_{\xi\xi}^{(1)} + \omega_1^2 U_{\eta\eta}^{(1)} \right] -$$

$$-\varepsilon^2 \omega_1 \left[ \omega_1 U_{\eta}^{(1)} \left( \phi_1 U_{\xi}^{(1)} + \omega_1 V_{\eta}^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \left( U_{\eta}^{(1)} \right)^2 \right) \right]_{\eta},$$

$$\omega_1 \left[ \phi_1 U_{\xi}^{(1)} + \omega_1 V_{\eta}^{(1)} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \left( U_{\eta}^{(1)} \right)^2 \right]_{\eta} = -\varepsilon^2 \phi_1 \left[ \phi_1 V_{\xi}^{(1)} + \phi_1 \omega_1 U_{\xi}^{(1)} U_{\eta}^{(1)} \right]_{\xi}; \quad (9)$$



$$\begin{aligned} \phi_2 \left[ \phi_2 U_{\xi}^{(2)} + \omega_2 V_{\eta}^{(2)} + \frac{1}{2} \phi_2^2 \left( V_{\xi}^{(2)} \right)^2 \right]_{\xi} &= -\varepsilon^2 \omega_2 \left[ \omega_2 U_{\eta}^{(2)} + \phi_2 \omega_2 V_{\xi}^{(2)} V_{\eta}^{(2)} \right]_{\eta}, \\ \phi_2^2 V_{\xi\xi}^{(2)} + \omega_2^2 V_{\eta\eta}^{(2)} &= -\varepsilon^2 \omega_2 \left[ \phi_2 U_{\xi}^{(2)} + \frac{1}{2} \phi_2^2 \left( V_{\xi}^{(2)} \right)^2 \right]_{\eta} - \varepsilon^2 \omega_2 V_{\eta}^{(2)} \left[ \phi_2^2 V_{\xi\xi}^{(2)} + \omega_2^2 V_{\eta\eta}^{(2)} \right] - \\ &- \varepsilon^2 \phi_2 \left[ \phi_2 V_{\xi}^{(2)} \left( \phi_2 U_{\xi}^{(2)} + \omega_2 V_{\eta}^{(2)} + \frac{1}{2} \phi_2^2 \left( V_{\xi}^{(2)} \right)^2 \right) \right]_{\xi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Функции  $U(i)$ ,  $V(i)$  ( $i=1, 2$ ) будем разыскивать в виде рядов по степеням параметра  $\varepsilon$ . Вид соответствующей асимптотической последовательности определяется структурой уравнений равновесия (9), (10) и порядком по  $\varepsilon$  невязки в краевых условиях, возникающей после решения задачи в нулевом приближении ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Поскольку связь между напряженно-деформированными состояниями указанных двух видов осуществляется через касательные напряжения, функции  $U(i)$ ,  $V(i)$  ( $i=1, 2$ ) будут разыскиваться в виде

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{1,0} + \varepsilon U^{1,1} + \varepsilon^2 U^{1,2} + \varepsilon^3 U^{1,3} + \dots, \quad V^{(1)} = V^{1,0} + \varepsilon V^{1,1} + \varepsilon^2 V^{1,2} + \varepsilon^3 V^{1,3} + \dots, \\ U^{(2)} &= U^{2,0} + \varepsilon U^{2,1} + \varepsilon^2 U^{2,2} + \varepsilon^3 U^{2,3} + \dots, \quad V^{(2)} = V^{2,0} + \varepsilon V^{2,1} + \varepsilon^2 V^{2,2} + \varepsilon^3 V^{2,3} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

При этом, если положить  $\omega_1 = \phi_2 = 1$ , а коэффициенты  $\omega_2$  и  $\phi_1$  определять в виде рядов по степеням  $\varepsilon$

$$\phi_1 = 1 + \phi_{1,1}\varepsilon + \phi_{1,2}\varepsilon^2 + \phi_{1,3}\varepsilon^3 + \dots, \quad \omega_2 = 1 + \omega_{2,1}\varepsilon + \omega_{2,2}\varepsilon^2 + \omega_{2,3}\varepsilon^3 + \dots, \quad (12)$$

то неизвестные коэффициенты в этих разложениях удастся подобрать так, что правые части первого уравнения системы (9) и второго уравнения системы (10) обращаются в нуль при всех  $j \geq 0$ , т. е. основные функции  $U^{1,j}$  и  $V^{2,j}$  находятся из уравнений Лапласа

$$U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} = 0; \quad (13)$$

$$V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} = 0 \quad (j=0, 1, \dots). \quad (14)$$

В частности, для принятых допущений ( $E_2 = E_1$  и равенство нулю коэффициентов Пуассона) имеем

$$\phi_1 = \omega_2 = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^4) \quad (15)$$

Вспомогательные функции  $V^{1,j}$  и  $U^{2,j}$  ( $j \geq 0$ ) определяются через основные простым интегрированием соответственно из второго уравнения системы (9) и первого системы (10). Для них имеем

$$\begin{aligned} V_{\eta}^{1,0} &= -U_{\xi}^{1,0} - \frac{1}{2} \left( U_{\eta}^{1,0} \right)^2, \quad V_{\eta}^{1,1} = -U_{\xi}^{1,1} - U_{\eta}^{1,1} U_{\eta}^{1,0}, \\ V_{\eta}^{1,2} &= -U_{\xi}^{1,2} - \frac{1}{2} \left( 2U_{\eta}^{1,2} U_{\eta}^{1,0} + \left( U_{\eta}^{1,1} \right)^2 \right) - \frac{3}{2} U_{\xi}^{1,0} - \frac{1}{2} \left( U_{\xi}^{1,0} \right)^2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} U_{\xi}^{2,0} &= -V_{\eta}^{2,0} - \frac{1}{2} \left( V_{\xi}^{2,0} \right)^2, \quad U_{\xi}^{2,1} = -V_{\eta}^{2,1} - V_{\xi}^{2,1} V_{\xi}^{2,0}, \\ U_{\xi}^{2,2} &= -V_{\eta}^{2,2} - \frac{1}{2} \left( 2V_{\xi}^{2,2} V_{\xi}^{2,0} + \left( V_{\xi}^{2,1} \right)^2 \right) - \frac{3}{2} V_{\eta}^{2,0} - \frac{1}{2} \left( V_{\eta}^{2,0} \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

и так далее. Здесь произвольные функции и постоянные, которые появлялись при интегрировании второго уравнения системы (9) и первого системы (10), полагаются равными нулю. Это допустимо, так как такой анализ не связан с краевыми условиями.

Таким образом, и в геометрически нелинейной двумерной теории упругости напряженно-деформированное состояние ортотропного тела может быть представлено в виде двух составляющих с раз-

личными свойствами, нахождение каждой из которых сводится к решению задач теории потенциала, при условии, что удастся сформулировать соответствующие краевые условия для нахождения основных функций.

Рассмотрим теперь граничные условия. Напряжения (7) с учетом соотношений (5), (6), разложений (11), (12), (15) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11,0} + \varepsilon \sigma_{11,1} + \varepsilon^2 \sigma_{11,2} + \dots, \quad \sigma_{11,0} = E_1 \varepsilon^2 U_{\xi}^{1,0}, \quad \sigma_{11,1} = E_1 \varepsilon^2 \left( U_{\xi}^{1,1} + U_{\xi}^{2,0} + \frac{1}{2} (V_{\xi}^{2,0})^2 \right), \\ \sigma_{11,2} &= E_1 \varepsilon^2 \left( U_{\xi}^{1,2} + \frac{1}{2} U_{\xi}^{1,0} + U_{\xi}^{2,1} + V_{\xi}^{2,1} V_{\xi}^{2,0} + \frac{1}{2} (U_{\xi}^{1,0})^2 \right) \dots, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22,0} + \varepsilon \sigma_{22,1} + \varepsilon^2 \sigma_{22,2} + \dots, \\ \sigma_{22,0} &= E_2 \varepsilon^2 V_{\eta}^{2,0}, \quad \sigma_{22,1} = E_2 \varepsilon^2 \left( V_{\eta}^{2,1} + V_{\eta}^{1,0} + \frac{1}{2} (U_{\eta}^{1,0})^2 \right), \\ \sigma_{22,2} &= E_2 \varepsilon^2 \left( V_{\eta}^{2,2} + \frac{1}{2} V_{\eta}^{2,0} + V_{\eta}^{1,1} + U_{\eta}^{1,1} U_{\eta}^{1,0} + \frac{1}{2} (V_{\eta}^{2,0})^2 \right) \dots, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12,0} + \varepsilon \sigma_{12,1} + \varepsilon^2 \sigma_{12,2} + \dots, \\ \sigma_{12,0} &= G \varepsilon^{3/2} (U_{\eta}^{1,0} + V_{\xi}^{2,0}), \quad \sigma_{12,1} = G \varepsilon^{3/2} (U_{\eta}^{1,1} + V_{\xi}^{2,1}), \\ \sigma_{12,2} &= G \varepsilon^{3/2} (U_{\eta}^{1,2} + V_{\xi}^{2,2} + U_{\eta}^{2,0} + V_{\xi}^{1,0} + U_{\xi}^{1,0} U_{\eta}^{1,0} + V_{\xi}^{2,0} V_{\eta}^{2,0}) \dots \end{aligned} \quad (18)$$

В случае первой основной задачи теории упругости на ограничивающей тело линии (например,  $x = const$ ) известны нормальные  $\sigma_{11}$  и касательные  $\sigma_{12}$  напряжения

$$\sigma_{11} = \varphi_1(y), \quad \sigma_{12} = \varphi_2(y). \quad (19)$$

Предполагаем, что напряжения могут быть представлены рядами

$$\varphi_n(y) = \varphi_{n,0}(y) + \varepsilon \varphi_{n,1}(y) + \varepsilon^2 \varphi_{n,2}(y) + \dots \quad (20)$$

(в противном случае все коэффициенты при  $j \geq 0$  обращаются в нуль). Тогда на границе  $x = const$

$$\sigma_{11,j} = \varphi_{1,j}(y), \quad \sigma_{12,j} = \varphi_{2,j}(y),$$

а из соотношений (16) имеем

$$\begin{aligned} U_{\xi}^{1,0} &= E_1^{-1} \varepsilon^{-2} \varphi_{1,0}, \quad U_{\xi}^{1,1} = E_1^{-1} \varepsilon^{-2} \varphi_{1,1} - U_{\xi}^{2,0} - \frac{1}{2} (V_{\xi}^{2,0})^2, \\ U_{\xi}^{1,2} &= E_1^{-1} \varepsilon^{-2} \varphi_{1,2} - \frac{1}{2} U_{\xi}^{1,0} - U_{\xi}^{2,1} - V_{\xi}^{2,1} V_{\xi}^{2,0} - \frac{1}{2} (U_{\xi}^{1,0})^2 \dots; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V_{\xi}^{2,0} &= G^{-1} \varepsilon^{-3/2} \varphi_{2,0} - U_{\eta}^{1,0}, \quad V_{\xi}^{2,1} = G^{-1} \varepsilon^{-3/2} \varphi_{2,1} - U_{\eta}^{1,1}, \\ V_{\xi}^{2,2} &= G^{-1} \varepsilon^{-3/2} \varphi_{2,2} - U_{\eta}^{1,2} - U_{\eta}^{2,0} - V_{\xi}^{1,0} - U_{\xi}^{1,0} U_{\eta}^{1,0} - V_{\xi}^{2,0} V_{\eta}^{2,0}, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует, что при  $j = 0$  краевые условия для нахождения функции  $U^{1,0}$  из уравнения (13) не зависят ни от более высоких приближений, ни от решений напряженного состояния второго типа. Поэтому при  $j = 0$  уравнение (13) решается, а решение первого уравнения в (16) находится простым интегрированием. После этого полностью определяются граничные условия для нахождения функции  $V^{2,0}$  из уравнения (14). Решив это уравнение и определив функцию  $U^{2,0}$  из первого соотношения (17), получим граничные условия для нахождения функции  $U^{1,1}$  из уравнения (13) при  $j = 1$  и так далее.

Аналогичная ситуация имеет место и в том случае, если на ограничивающей тело линии  $y = const$  известны напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$ . Здесь при  $j = 0$  из уравнения (14) определяется  $V^{2,0}$ , после чего формулируются граничные условия для нахождения функции  $U^{1,0}$  из уравнения (13) и так далее.

Таким образом, решение первой основной задачи геометрически нелинейной теории упругости сводится к последовательному решению задач Неймана. При исследовании второй основной задачи теории упругости приходим к последовательному решению задач Дирихле, а при решении смешанных (кон-

тактных) – к последовательному решению смешанных задач теории аналитических функций.

Заметим, что если в уравнениях равновесия сохраняются и подчеркнутые члены, то в правых частях первого уравнения системы (13) и второго системы (14) появляются, соответственно, слагаемые

$$-\varepsilon^2 \phi_1 \left[ \phi_1^2 \left( U_{\xi}^{(1)} \right)^2 + \omega_1^2 \left( U_{\eta}^{(1)} \right)^2 \right]_{\xi_1}, \quad -\varepsilon^2 \omega_2 \left[ \phi_2^2 \left( V_{\xi}^{(2)} \right)^2 + \omega_2^2 \left( V_{\eta}^{(2)} \right)^2 \right]_{\eta_2}.$$

Это приводит к тому, что при тех же значениях коэффициентов  $\phi_i, \omega_i$  ( $i=1, 2$ ), начиная со второго приближения ( $j \geq 2$ ), функции  $U^{1,j}$  и  $V^{2,j}$  определяются не из уравнений Лапласа, а из уравнений Пуассона, причем в правую часть входят слагаемые из предыдущих решений

Также отметим, что значения показателей (3), (4) не единственно возможные, а являются представителями некоторого класса таких значений, которые находятся из условий непротиворечивости исходным предположкам и непротиворечивости получаемых уравнений для определения основных функций. Другими представителями этого класса являются, например, значения  $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 1, \delta_1 = 2; \alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 1,$

$\gamma_2 = \frac{3}{2}, \delta_2 = 1$  или  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = \frac{1}{2}, \gamma_1 = \frac{1}{2}, \delta_1 = \frac{3}{2}; \alpha_2 = 0, \beta_2 = \frac{1}{2}, \gamma_2 = 2, \delta_2 = 1$ . При этом характеристики выделенных выше напряженно-деформированных состояний остаются без изменений. Решения конкретных задач также не меняются. Изменяется лишь начало отсчета приближений, разложения в некоторых случаях могут строиться по дробным степеням параметра  $\varepsilon$  и коэффициенты  $\phi_i, \omega_i$  ( $i=1, 2$ ) определяться по другим формулам. Но в каждом случае задачи теории упругости сводятся к последовательному решению краевых задач теории потенциала. В качестве конкретного примера рассмотрена задача о действии сосредоточенной нормальной силы на границу упругой ортотропной полуплоскости.

## РЕЗЮМЕ

Пропонується метод вирішення інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь, що відповідають задачам теорії пружності з урахуванням кінцевих деформацій.

## SUMMARY

The method of integration of two-dimensional nonlinear systems of differential equations of the elasticity theory of orthotropic body is suggested.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. – К., Донецк: Вища шк., 1982. – 152 с.
2. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. – К.: Вища шк., 1991. – 131 с.
3. Кагадий Т.С., Моссаковская Л.В., Павленко А.В. Метод возмущений в пространственной задаче линейной вязкоупругости анизотропных тел // Прикладная математика и механика. – Вып. 1. – 1992.
4. Кагадий Т.С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов. – Днепропетровск: РИК НГА України, 1998. – 260 с.

Надійшла до редакції 26.10.2005

УДК 539.3

**ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА С ПЬЕЗОМАГНИТНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

*О.И.Бороненко*

В связи с открывающимися перспективами использования пьезомагнитных материалов в промышленности, электронике и технике, исследование их физико-механических, упругих и магнитных свойств является одной из актуальных проблем современной магнитоупругости [1–4]. В работе [5] предложена методика определения двумерного магнитоупругого состояния анизотропных пьезомагнитных тел с отверстиями и трещинами. В данной статье с использованием этой методики решена двумерная задача для тела с пьезомагнитным включением. Исследовано влияние включения на значения магнитоупругих характеристик.

**Постановка задачи.** Рассмотрим прямолинейно анизотропное пьезомагнитное тело, ослабленное эллиптической цилиндрической полостью и отнесенное к прямоугольной системе координат  $Oxuz$  с осью  $Oz$ , направленной по направлению оси полости. В полость без предварительного натяжения впаено включение из другого пьезомагнитного материала, находящееся в условиях идеального магнитоупругого контакта с телом-матрицей так, что на поверхности контакта

$$\begin{aligned} (X_n, Y_n, Z_n, B_n) &= (-X_n^1, -Y_n^1, -Z_n^1, -B_n^1), \\ (u, v, w, \psi) &= (u^1, v^1, w^1, \psi^1), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $X_n, Y_n, Z_n$  и  $B_n$  – компоненты усилий и нормальная составляющая вектора магнитной индукции на поверхности контакта;  $u, v, w$  и  $\psi$  – проекции перемещений и потенциал магнитного поля в точках спая. Величины без значка сверху относятся к матрице, со значком 1 сверху – к включению. В поперечном сечении тела будем иметь бесконечную область  $S$ , являющуюся внешностью эллипса  $L$  с полуосями  $a$  и  $b$ , и конечную область  $S^1$ , ограниченную тем же эллипсом  $L$  (рис. 1).

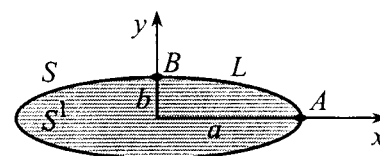


Рис. 1

Будем считать, что под действием внешних силовых или магнитных полей рассматриваемое кусочно-однородное тело находится в условиях двумерного магнитоупругого состояния, не меняющегося вдоль направления оси  $Oz$ .

**Построение решения.** При использовании комплексных потенциалов магнитоупругости [5] определение магнитоупругого состояния рассматриваемой среды сводится к нахождению функций  $\Phi_k(z_k)$  ( $k=\overline{1,4}$ ) для тела-матрицы и потенциалов  $\Phi_k^1(z_k^1)$  ( $k=\overline{1,4}$ ) для включения из граничных условий [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ g_{ki} \Phi_k(t_k) - g_{ki}^1 \Phi_k^1(t_k^1) \right\} = 0 \quad (i=\overline{1,8}). \tag{2}$$

Здесь  $g_{ki}, g_{ki}^1$  – постоянные, зависящие от анизотропии материалов тела и включения.

Функции  $\Phi_k(z_k)$  определены и голоморфны в областях  $S_k$ , получаемых из исходной области  $S$  аффинными преобразованиями  $z_k = x + \mu_k y$ , где  $\mu_k$  – корни известного характеристического уравнения [5] для материала матрицы. В этих областях комплексные потенциалы имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k), \tag{3}$$

где  $\Gamma_k$  – известные постоянные, вычисляемые по заданным значениям основных характеристик на бесконечности;  $\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные вне контуров  $L_k$ , соответствующих  $L$  при указанных аффинных преобразованиях. Выполнив конформные отображения внешности единичного круга на внешности эллипсов  $L_k$

$$z_k = R_k \left( \zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right),$$

где  $R_k = (a - i\mu_k b)/2$ ,  $m_k = (a + i\mu_k b)/(a - i\mu_k b)$ , и разложив последние функции во внешности круга  $|\zeta_k| \geq 1$  в ряды Лорана, для функции (3) получим

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k R_k \zeta_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\zeta_k^n}. \quad (4)$$

Комплексные потенциалы для включения  $\Phi_k^1(z_k^1)$ , голоморфные в эллипсах, получаемых из  $S^1$  аффинными преобразованиями  $z_k^1 = x + \mu_k^1 y$ , где  $\mu_k^1$  – корни характеристического уравнения для материала включения. Поэтому они могут быть представлены рядами по полиномам Фабера, следовательно, и степенными рядами вида [6]

$$\Phi_k^1(z_k^1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^1 \left( \frac{z_k^1}{R_k^1} \right)^n. \quad (5)$$

Подставляя функции (4) и (5) в граничные условия на контуре сая (1) и применяя метод рядов, получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^4 (g_{ki} a_{k1} - g_{ki}^1 m_k^1 b_{k1}^1 - \bar{g}_{ki}^1 \bar{b}_{k1}^1) = - \sum_{k=1}^4 \bar{g}_{ki} \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k \quad (i=\overline{1,8}), \quad a_{kn} = b_{kn}^1 = 0 \quad (n \geq 2). \quad (6)$$

Тогда комплексные потенциалы примут вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k1} - \Gamma_k R_k m_k}{\zeta_k}, \quad \Phi_k^1(z_k^1) = b_{k1}^1 \frac{z_k^1}{R_k^1}. \quad (7)$$

Зная комплексные потенциалы (7), можно по известным формулам [5] найти напряжения, индукцию и напряженность магнитного поля в любой точке матрицы и включений.

Если имеет место обобщенное плоское магнитоупругое состояние пластинки, то приведенные выше формулы значительно упрощаются. В этом случае во всех формулах нужно суммирование по  $k$  проводить от 1 до 3 и положить равными нулю все постоянные и функции, связанные со значением индекса  $k = 4$ . Для пьезомагнитной пластинки были проведены численные исследования с целью выявления условий, при которых проницаемостью включения можно пренебречь, когда включение можно считать абсолютно гибким (отверстием) или абсолютно жестким, когда эллиптическое включение можно считать линейным, в том числе и трещиной. При проведении исследований коэффициенты деформаций  $s_{ij}^{H1}$ , пьезомодули  $b_{ki}^1$  и коэффициенты магнитной проницаемости  $\mu_{lk}^1$  материала включения были связаны с соответствующими величинами для материала пластинки так

$$s_{ij}^{H1} = s_{ij}^1, \quad b_{ki}^1 = b_{ki}^1, \quad \mu_{lk}^1 = \mu_{lk}^1, \quad (7)$$

где  $s^1$ ,  $b^1$ ,  $\mu^1$  – постоянные, которые будем называть соответственно параметрами коэффициентов деформаций, пьезомодулей и магнитной проницаемости материала включения. Исследования проводились для пластинки из Терфенол-Д [2], поляризованного вдоль оси  $Oy$ , когда на бесконечности были заданы  $\sigma_y^\infty = p$  или  $H_y^\infty = \varepsilon$ . Ниже приведены некоторые из полученных результатов, причем значения основных характеристик магнитоупругого состояния даны с точностью до интенсивности приложенных воздействий ( $p$  или  $\varepsilon$ ), плотности внутренней энергии – с точностью до квадратов интенсивностей.

Как следует из приведенного решения, во включении для рассматриваемых нагрузок устанавливается однородное магнитоупругое состояние, и значения основных характеристик будут одинаковыми во всех точках включения, в том числе и на контуре сая. Поэтому значения характеристик для включения не приведены, так как их легко установить по значениям соответствующих характеристик в точках сая.

В табл. 1 приведены значения напряжений и плотности внутренней энергии в точках  $A$  и  $B$  пластинки (рис. 1) с круговым включением единичного радиуса в зависимости от параметров материала  $s^1$ ,  $b^1$  и  $\mu^1$ , когда на пластинку действовали усилия  $\sigma_y^\infty = p$ , а в табл. 2 – значения напряжений, индукции и напряженности, когда на пластинку действовало магнитное поле с постоянной напряженностью  $H_y^\infty = \varepsilon$ . Для случая действия усилий  $\sigma_y^\infty = p$  значения магнитных характеристик ( $B_x, B_y, H_x, H_y$ ) сравнительно малы, поэтому в табл. 1 они не приведены.

Таблица 1

$s^1$	$b^1$	$\mu^1$	Точка А			Точка В			$s^1$	$b^1$	$\mu^1$	Точка А			Точка В				
			$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^{11}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^{11}$				$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^{11}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^{11}$		
$10^8$	$10^8$	$10^8$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272	1	$10^{-1}$	1	0,002	0,996	2,289	-0,002	1,003	2,265		
		$10^{-8}$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272			0,5	0,002	0,995	2,297	-0,002	1,003	2,265		
	$10^{-8}$	$10^8$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272			$10^{-1}$	0,003	0,993	2,312	-0,003	1,005	2,269		
		$10^{-8}$	0,000	2,625	15,682	-1,089	0,000	2,273			$10^{-8}$	0,003	0,993	2,319	-0,003	1,005	2,271		
		$10^2$	$10^8$	0,000	2,625	15,749	-1,089	0,000			2,272	$10^{-8}$	$10^8$	0,000	1,000	2,272	0,000	1,000	2,272
			$10^{-8}$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000			2,272		$10^{-8}$	0,003	0,993	2,319	-0,003	1,005	2,271
10	$10^1$	$10^8$	-0,002	2,582	15,160	-1,058	0,025	2,184	$10^{-1}$	$10^8$	$10^8$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272		
		10	-0,002	2,582	15,162	-1,058	0,025	2,184		$10^{-8}$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272			
		2	-0,002	2,582	15,168	-1,059	0,025	2,184		$10^{-2}$	$10^8$	0,052	0,168	0,058	0,497	1,541	4,842		
		1	-0,002	2,582	15,172	-1,059	0,025	2,184			10	0,053	0,167	0,058	0,497	1,542	4,838		
		0,5	-0,002	2,582	15,176	-1,059	0,025	2,184			2	0,055	0,163	0,065	0,495	1,545	4,833		
		$10^{-1}$	-0,002	2,582	15,183	-1,059	0,025	2,185			1	0,056	0,161	0,073	0,495	1,547	4,833		
	$10^{-8}$	$10^8$	-0,002	2,582	15,185	-1,059	0,025	2,185	0,5	0,057	0,158	0,085	0,494	1,549	4,837				
		$10^8$	-0,002	2,582	15,160	-1,058	0,025	2,184	$10^{-1}$	0,059	0,155	0,108	0,493	1,552	4,848				
		$10^8$	-0,002	2,582	15,185	-1,059	0,025	2,185	$10^{-8}$	0,060	0,153	0,119	0,492	1,553	4,856				
		10	$10^8$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272	$10^{-8}$	$10^8$	0,052	0,168	0,058	0,497	1,541	4,842		
			$10^{-8}$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272		$10^{-8}$	0,060	0,153	0,119	0,492	1,553	4,856		
		1	1	$10^8$	-0,012	2,253	11,574	-0,826	0,222	1,667	$10^{-2}$	$10^8$	$10^8$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272
10	-0,012			2,253	11,577	-0,826	0,222	1,667	$10^{-8}$	0,000		2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272			
2	-0,012			2,253	11,585	-0,827	0,222	1,667	$10^{-2}$	$10^8$		0,064	0,035	0,008	0,573	1,630	5,409		
1	-0,012			2,253	11,591	-0,827	0,222	1,667		10		0,065	0,034	0,008	0,572	1,631	5,405		
0,5	-0,012			2,253	11,597	-0,827	0,222	1,667		2		0,067	0,030	0,015	0,571	1,634	5,400		
$10^{-1}$	-0,011			2,252	11,606	-0,827	0,223	1,667		1		0,068	0,027	0,024	0,570	1,636	5,402		
$10^{-8}$	$10^8$		-0,011	2,252	11,610	-0,827	0,223	1,668	0,5	0,070	0,025	0,037	0,569	1,638	5,406				
	$10^8$		-0,012	2,253	11,574	-0,826	0,222	1,668	$10^{-1}$	0,072	0,021	0,063	0,568	1,641	5,420				
	$10^8$		-0,011	2,252	11,610	-0,827	0,223	1,668	$10^{-8}$	0,073	0,019	0,076	0,567	1,643	5,428				
	1		$10^8$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272	$10^{-8}$	$10^8$	0,064	0,035	0,008	0,573	1,630	5,409		
			$10^{-8}$	0,000	2,625	15,659	-1,089	0,000	2,272		$10^{-8}$	0,073	0,019	0,076	0,567	1,643	5,428		
	$10^{-1}$		$10^8$	0,000	1,000	2,272	0,000	1,000	2,272	$10^{-8}$	$10^8$	$10^8$	0,065	0,020	0,007	0,582	1,640	5,479	
10		0,000	0,999	2,274	0,000	1,000	2,270	$10^{-8}$	0,074		0,003	0,076	0,576	1,653	5,499				

Таблиця 2

$s^1$	$b^1$	$\mu^1$	Точка А					Точка В				
			$\sigma_x$	$\sigma_y$	$B_y \cdot 10^6$	$H_y$	$U \cdot 10^6$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$B_y \cdot 10^6$	$H_y$	$U \cdot 10^6$
$10^8$	$10^8$	$10^8$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,924	1,997	10,902
		$10^{-8}$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,924	1,997	10,902
$10^2$	$10^{-8}$	$10^8$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,924	1,997	10,902
		$10^{-8}$	0,000	-7,120	10,958	2,004	10,970	-7,723	0,000	0,000	-0,001	0,001
$10^1$	$10^8$	$10^8$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,925	1,997	10,904
		$10^{-8}$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,924	1,997	10,902
$10^1$	$10^{-8}$	$10^8$	-0,325	6,837	0,012	0,000	0,001	8,236	-0,028	10,924	1,997	10,902
		$10^{-8}$	0,190	-8,163	10,957	2,005	10,968	-7,246	0,748	0,000	-0,001	0,001
$10^1$	$10^0$	$10^8$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,926	1,997	10,906
		$10^{-8}$	0,000	7,090	0,012	0,000	0,001	7,691	0,000	10,924	1,997	10,902
$10^1$	$10^0$	$10^8$	-2,823	4,930	0,011	0,000	0,001	12,395	-0,267	10,922	1,997	10,901
		10	-2,400	3,117	1,001	0,181	0,092	10,864	0,296	9,934	1,816	9,017
$10^1$	$10^0$	2	-1,271	-1,727	3,645	0,666	1,214	6,775	1,800	7,294	1,333	4,861
		1	-0,493	-5,064	5,467	1,000	2,731	3,958	2,836	5,476	1,000	2,739
$10^1$	$10^0$	0,5	0,286	-8,407	7,292	1,335	4,858	1,136	3,874	3,654	0,666	1,220
		$10^{-1}$	1,422	-13,280	9,952	1,823	9,051	-2,977	5,387	0,998	0,180	0,092
$10^1$	$10^{-8}$	$10^8$	1,855	-15,077	10,951	2,005	10,960	-4,436	5,915	0,000	-0,002	0,002
		$10^{-8}$	-2,823	4,930	0,011	0,000	0,001	12,395	-0,267	10,922	1,997	10,901
$10^1$	$10^{-1}$	$10^8$	1,740	-16,241	10,951	2,006	10,961	-3,642	6,588	0,000	-0,003	0,002
		$10^8$	-12,212	-1,574	0,007	0,000	0,003	27,587	-1,574	10,916	1,999	10,900
$10^1$	$10^{-1}$	10	-10,292	-5,685	0,991	0,181	0,092	25,868	1,249	9,932	1,818	9,024
		2	-5,156	-16,680	3,625	0,667	1,206	21,271	8,802	7,300	1,334	4,876
$10^1$	$10^{-1}$	1	-1,612	-24,268	5,442	1,002	2,718	18,098	14,014	5,483	1,000	2,754
		0,5	1,943	-31,879	7,265	1,338	4,845	14,915	19,242	3,661	0,665	1,233
$10^1$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	7,134	-42,991	9,926	1,828	9,047	10,269	26,875	1,001	0,176	0,106
		$10^{-8}$	9,147	-47,100	10,912	2,011	10,948	8,327	30,016	0,001	-0,004	0,035
$10^1$	$10^{-8}$	$10^8$	-12,212	-1,574	0,007	0,000	0,003	27,587	-1,574	10,916	1,999	10,900
		$10^{-8}$	9,055	-47,667	10,927	2,013	10,966	8,888	30,033	0,000	-0,008	0,048
$10^{-1}$	$10^{-8}$	$10^8$	-18,334	-5,217	0,005	0,000	0,006	37,092	-2,795	10,911	2,000	10,904
		$10^{-8}$	15,184	-69,132	10,912	2,018	10,952	16,136	46,685	0,000	-0,013	0,044
$10^{-2}$	$10^{-8}$	$10^8$	-19,305	-5,749	0,005	0,000	0,006	38,569	-3,017	10,911	2,000	10,905
		$10^{-8}$	16,260	-72,609	10,909	2,019	11,011	17,215	49,430	0,000	-0,013	0,049
$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^8$	-19,419	-5,810	0,005	0,000	0,006	38,742	-3,043	10,911	2,000	10,905
		$10^{-8}$	16,389	-73,020	10,909	2,019	11,012	17,340	49,755	0,000	-0,014	0,050

Из данных табл. 1, 2 и других полученных результатов следует, что в случае растяжения пластинки параметр магнитной проницаемости включения  $\mu^1$  мало влияет на значения напряжений и плотности внутренней энергии. Если пластинка находится под действием однородного магнитного поля с постоян-

ной напряженностью  $H_y^\infty = \varepsilon$ , то в ней достигают больших значений не только магнитные характеристики, но и напряжения. В случае магнитных воздействий роль параметра проницаемости  $\mu^1$  на значения основных характеристик и плотности внутренней энергии весьма значительна. При этом с уменьшением значения  $\mu^1$ , пока  $10^2 < \mu^1 < 10^{-2}$ , в точке А значения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $B_y$ ,  $H_y$ ,  $U$  возрастают, а в точке В убывают. Вне указанного интервала на значения приведенных выше характеристик изменение  $\mu^1$  влияет незначительно: при  $\mu^1 > 10^2$  проницаемость достигает высокого уровня и ее дальнейшее увеличение не приводит к изменениям магнитоупругого состояния; при  $\mu^1 < 10^{-2}$  включение является практически магнито непроницаемым, и поэтому дальнейшее снижение проницаемости не приводит к изменению магнитоупругого состояния. Следовательно, включение можно считать магнито непроницаемым, начиная с  $\mu^1 = 10^{-2}$ .

Возникающие во включении индукция, напряженность и внутренняя энергия выражаются через их значения в пластинке и параметр  $\mu^1$  таким образом:

$$B_y^1 = \mu^1 B_y \Big|_A,$$

$$H_y^1 = H_y \Big|_B / \mu^1, \quad U^1 = \mu^1 U \Big|_A.$$

Изменение параметра  $s^1$  оказывает существенное влияние на значения напряжений как в случае действия усилий  $\sigma_y^\infty = p$ , так и при действии магнитного поля с напряженностью  $H_y^\infty = \varepsilon$ . Из табл. 1, 2 также следует, что при фиксированном  $s^1$  изменение параметра  $b^1$  незначительно влияет на значения основных характеристик, но значение этого параметра не должно превышать значение  $s^1$ . В дальнейших исследованиях считается, что  $b^1 = s^1$ .

В табл. 3 приведены значения основных характеристик магнитоупругого состояния и плотности внутренней энергии в точках А и В пластинки с эллиптическим включением в

Таблица 3

$\frac{b}{a}$	$s^1$	$\mu^1$	Точка А				Точка В		
			$k_1$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^9$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^{11}$
$10^{-1}$	$10^1$	$10^2$	0,009	0,179	6,335	0,897	-0,378	0,682	1,677
		$10^{-2}$	0,009	0,181	6,285	0,916	-0,377	0,684	1,669
	$10^{-1}$	$10^2$	0,000	-1,122	-0,201	0,022	0,210	1,011	2,119
		$10^{-2}$	0,000	-1,091	-0,303	0,044	0,210	1,017	2,122
$10^{-2}$	$10^1$	$10^2$	0,012	0,298	8,737	1,701	-0,055	0,954	2,145
		$10^{-2}$	0,012	0,302	8,258	2,269	-0,054	0,956	2,135
	$10^{-1}$	$10^2$	-0,001	-2,743	-0,639	0,130	0,043	0,995	2,194
		$10^{-2}$	-0,002	-2,702	-1,240	0,818	0,044	0,998	2,186
$10^{-3}$	$10^1$	$10^2$	0,007	0,316	9,100	1,844	-0,006	0,995	2,258
		$10^{-2}$	0,006	0,322	8,167	3,786	-0,006	0,996	2,256
	$10^{-1}$	$10^2$	0,001	-3,135	-0,745	0,170	0,005	0,999	2,263
		$10^{-2}$	0,001	-3,122	-1,861	2,471	0,005	1,000	2,260
$10^{-4}$	$10^1$	$10^2$	0,001	0,318	9,138	1,860	-0,001	1,000	2,271
		$10^{-2}$	0,001	0,324	8,115	4,170	-0,001	1,000	2,271
	$10^{-1}$	$10^2$	0,001	-3,180	-0,757	0,175	0,000	1,000	2,271
		$10^{-2}$	0,001	-3,173	-1,975	2,906	0,001	1,000	2,271
$10^{-5}$	$10^2$	$10^2$	0,001	0,350	89,572	181,890	-0,001	0,999	2,271
		$10^1$	0,001	0,350	89,572	181,890	-0,001	0,999	2,271
		$10^{-1}$	0,001	0,350	89,569	181,950	-0,001	0,999	2,271
		$10^{-2}$	0,001	0,350	89,569	181,950	-0,001	0,999	2,271
	$10^1$	$10^2$	0,001	0,319	9,142	1,861	0,000	1,000	2,272
		$10^1$	0,001	0,319	9,141	1,861	0,000	1,000	2,272
		$10^{-1}$	0,001	0,319	9,039	1,888	0,000	1,000	2,272
		$10^{-2}$	0,001	0,319	9,039	1,888	0,000	1,000	2,272
	$10^{-1}$	$10^2$	0,001	-3,185	-0,758	0,175	0,000	1,000	2,272
		$10^1$	0,001	-3,185	-0,759	0,175	0,000	1,000	2,272
		$10^{-1}$	0,001	-3,184	-0,881	0,205	0,000	1,000	2,272
		$10^{-2}$	0,001	-3,184	-0,881	0,205	0,000	1,000	2,272
$10^{-2}$	$10^2$	0,001	-34,986	-10,354	21,024	0,000	1,000	2,271	
	$10^1$	0,001	-34,986	-10,355	21,025	0,000	1,000	2,271	
	$10^{-1}$	0,001	-34,985	-10,477	21,078	0,000	1,000	2,271	
	$10^{-2}$	0,001	-34,985	-10,477	21,078	0,000	1,000	2,271	



зависимости от отношения его полуосей  $b/a$  при действии на пластинку усилий  $\sigma_y^\infty = p$ . Из табл. 3 и других полученных результатов следует, что сингулярность в концах включения возникает, если  $b/a \leq 10^{-5}$ . В дальнейшем под линейным включением будем понимать эллиптическое включение, для которого  $b/a = 10^{-5}$ .

В табл. 4 для пластинки с линейным включением единичной полудлины для разных значений коэффициента жесткости  $s^1$  даны значения КИН  $k_1$  (при  $b^1 = s^1$ ,  $\mu^1 = 10^2$ ), а на рис. 2, 3 изображены графики изменения напряжений  $\sigma_y$  в концах концентратора и  $k_1$  соответственно в случае действия на пластинку усилий  $\sigma_y^\infty = p$ .

Таблица 4

$s^1$	Точка А					Точка В		
	$k_1$	$\sigma_x = \sigma_x^1$	$\sigma_y$	$B_y \cdot 10^9$	$U \cdot 10^9$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$U \cdot 10^{12}$
$\infty$	1,0000	—	—	—	—	—	—	—
$10^8$	1,0000	—	—	—	—	-1,094	0,000	2,288
$10^7$	0,9804	—	—	—	—	-1,067	0,020	2,212
$10^6$	0,8452	—	—	—	—	-0,920	0,155	1,869
$10^5$	0,3556	—	—	—	—	-0,386	0,645	1,567
$10^4$	0,0526	—	—	—	—	-0,057	0,948	2,120
$10^3$	0,0059	—	—	—	—	-0,006	0,995	2,256
100	0,0020	—	—	—	—	-0,001	0,999	2,271
10	0,0005	0,319	9,142	15,809	1,861	0,000	1,000	2,272
5	0,0005	0,283	4,661	7,977	0,477	0,000	1,000	2,272
2	0,0005	0,177	1,947	3,297	0,082	0,000	1,000	2,272
1	0,0004	0,000	1,000	1,771	0,023	0,000	1,000	2,272
0,5	0,0004	-0,354	0,447	1,072	0,009	0,000	1,000	2,272
0,2	0,0004	-1,416	-0,139	0,857	0,036	0,000	1,000	2,272
0,1	0,0005	-3,185	-0,758	1,125	0,175	0,000	1,000	2,272
0,05	0,0005	-6,723	-1,861	1,896	0,777	0,000	1,000	2,272
0,02	0,0005	-17,329	-5,062	4,396	5,158	0,000	1,000	2,272
0,01	0,0006	-34,986	-10,354	8,621	21,024	0,000	1,000	2,271
$10^{-3}$	0,0018	—	—	—	—	0,005	0,999	2,260
$10^{-4}$	0,0122	—	—	—	—	0,042	0,988	2,167
$10^{-5}$	0,0546	—	—	—	—	0,193	0,946	1,859
$10^{-6}$	0,0854	—	—	—	—	0,302	0,915	1,706
$10^{-7}$	0,0905	—	—	—	—	0,320	0,910	1,686
$10^{-8}$	0,0910	—	—	—	—	0,322	0,909	1,684

Как следует из табл. 4 и рис. 2, 3, особенность напряжений в концах линейного пьезомагнитного включения возникает при  $s^1 < 0,01$  и  $s^1 > 10$ . С уменьшением  $s^1$ , когда  $10^1 \leq s^1 \leq 1$  напряжения  $\sigma_x|_A$  уменьшаются, а при  $1 < s^1 < 10^{-2}$  — увеличиваются. Значения напряжений  $\sigma_y|_A$  и внутренней энергии

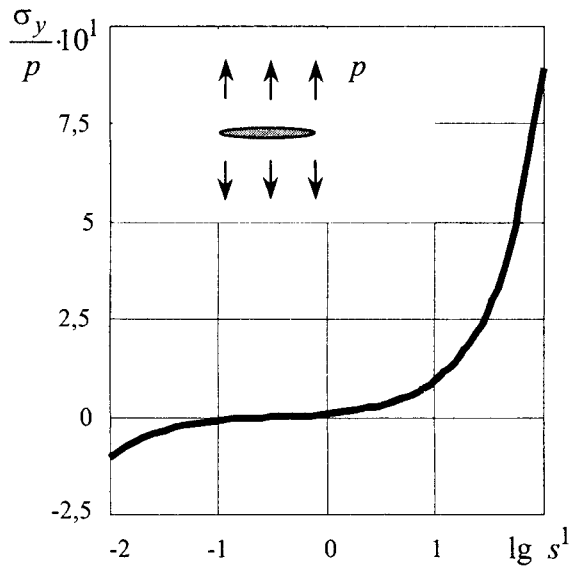


Рис. 2

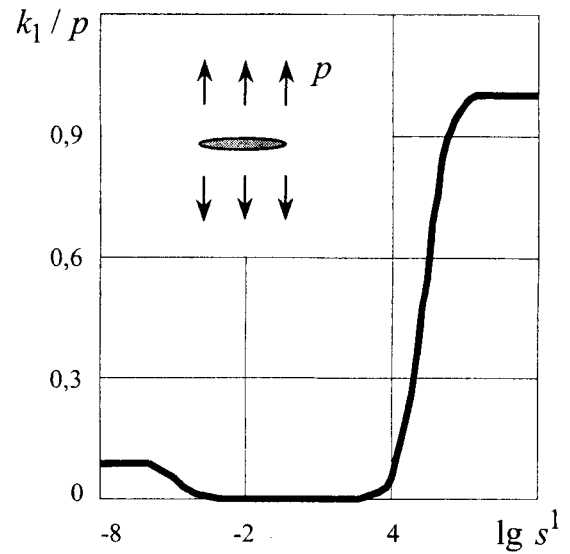


Рис. 3

$U|_A$  убывают при  $10^1 \leq s^1 < 0,2$  и возрастают при  $0,2 \leq s^1 < 10^{-2}$ . Если  $10^1 < s^1 < 10^{-2}$ , то КИН невелик. Как следует из описанных результатов, подкрепление трещины даже очень мягким материалом ( $s^1 \approx 10^2$ , что можно трактовать как уменьшение жесткости включения по сравнению с пластинкой в сотни раз) резко снижает значения напряжений вблизи трещины и КИН для ее вершин.

В табл. 5 приведены значения коэффициентов интенсивности индукции  $k_B$  и напряженности  $k_H$  однородного магнитного поля в пластинке с линейным включением единичной полудлины в зависимости от коэффициентов жесткости  $s^1$  и проницаемости  $\mu^1$  ( $b^1 = s^1$ ) при действии магнитного поля с посто-

Таблица 5

$s^1$	$\mu^1$	$k_H$	$k_B \cdot 10^6$	$s^1$	$\mu^1$	$k_H$	$k_B \cdot 10^6$
$10^8$	$10^8$	0,0014	0,0077	$10^{-2}$	$10^{-4}$	0,0918	0,5004
	$10^{-8}$	0,5007	2,7408		$10^{-6}$	0,9127	4,9736
$10^2$	$10^8$	0,0014	0,0077	$10^{-3}$	$10^{-8}$	1,0037	5,4696
	$10^{-8}$	1,0001	5,4627		$10^8$	0,0014	0,0079
10	$10^8$	0,0014	0,0077	$10^{-6}$	$10^{-8}$	1,0035	5,4682
	$10^{-8}$	1,0033	5,4705		$10^8$	-0,0002	0,0204
1	$10^8$	0,0014	0,0077	$10^{-8}$	$10^{-8}$	1,0047	5,4680
	$10^{-8}$	0,9363	5,1022		$10^8$	-0,0003	0,0212
$10^{-1}$	$10^8$	0,0014	0,0077	$10^{-1}$	$10^{-1}$	-0,0002	0,0218
	$10^{-8}$	1,0044	5,4735		$10^{-2}$	0,0007	0,0266
$10^{-2}$	$10^8$	0,0014	0,0077	$10^{-3}$	0,0096	0,0745	
	$10^{-1}$	0,0015	0,0082	$10^{-4}$	0,0901	0,5112	
	$10^{-2}$	0,0024	0,0131	$10^{-6}$	0,9133	4,9721	
	$10^{-3}$	0,0112	0,0613	$10^{-8}$	1,0048	5,4680	

яною напруженістю  $H_y^\infty = \varepsilon$ . Как следует из табл. 5, значения коэффициентов интенсивности  $k_H$ ,  $k_B$  существенно зависят от параметра  $\mu^1$  и в малой степени зависят от жесткости включения (параметра  $s^1$ ).

## РЕЗЮМЕ

З використанням узагальнених комплексних потенціалів отриманий розв'язок задачі магнітопружності для тіла з п'єзомагнітним включенням при дії механічного та магнітного полів. Для анізотропної пластинки з круговим включенням, що знаходиться під дією зовнішніх зусиль або однорідного магнітного поля, проведені дослідження щодо виявлення умов, при яких магнітною проникністю включення можливо знехтувати, а при яких включення можливо вважати абсолютно гнучким (отвором) або абсолютно жорстким, коли еліптичне включення можна вважати лінійним, в тому числі й тріщиною.

## SUMMARY

Using the generalized complex potentials the solution of the magnetoelastic problem for the solid with the piezomagnetic inclusion under mechanical and magnetic loads is received. The numerical investigation for the anisotropic plate with the elliptic inclusion under external mechanical and magnetic loads is carried out. The purpose of the investigation was to define the influence of the magnetoelastic material properties of the plate and inclusion and geometric parameters of the inclusion: to figure out under what conditions it is possible to neglect the magnetic permeability of the inclusion, otherwise to consider the inclusion is absolutely flexible (hole) or absolutely rigid, when the elliptic inclusion could be accepted as the linear one, including the crack.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H.* Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers // *Phys. Acoust.* – 1964. – №1. – P.169-270.
2. *Huang J.H.* The analysis of piezoelectric/piezomagnetic composite materials containing ellipsoidal inclusion // *J. Appl. Phys.* – 1997. – Vol.81. – №3. – P.1378-1386.
3. *Liu Y.X., Wan J.G., Liu J.-M., Nan C.W.* Numerical modeling of magnetoelectric effect in composite structure // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol.94. – №8. – P.5111-5117.
4. *Liu Y.X., Wan J.G., Liu J.-M., Nan C.W.* Effect of magnetic bias field on magnetoelectric coupling in magnetoelectric composites // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol.94. – №8. – P.5118-5122.
5. *Калоеров С.А., Бороненко О.И.* Двумерная и плоская задачи для пьезомагнитного тела с отверстиями и трещинами // *Теорет. и прикладная механика.* – 2005. – Вып.42. – С.111-123.
6. *Калоеров С.А., Баева А.И.* Двумерная задача электроупругости для тела с пьезоэлектрическими включениями // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки.* – 2003. – Вип.1. – С.53-59.

Надійшла до редакції 02.10.2005

УДК 539.3

**ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ КОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ**

К.Г.Хорошев

К настоящему времени проведены многочисленные исследования термоупругого [1, 2] и электроупруго состояния [3] многосвязных пластинок. Что же касается решения задачи термоэлектроупругости для этих сред, по этим вопросам практически нет работ. В данной статье дано решение задачи термоэлектроупругости для конечных анизотропных пластинок с отверстиями и трещинами.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим находящуюся в условиях обобщенного термоэлектроупругого состояния пьезоэлектрическую пластинку, в срединной плоскости занимающую конечную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, L}$ ) (рис. 1). Пластинка находится под действием разных температур на ее контурах. Во внутренних точках  $z_j^0$  ( $j = \overline{1, J}$ ) действуют сосредоточенные источники тепла с мощностями  $q_j^0$ .

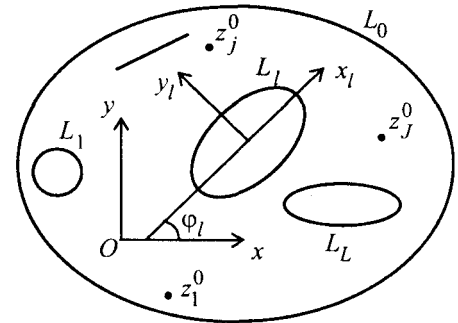


Рис. 1

Определение температурного поля рассматриваемой пластинки сводится к определению комплексного потенциала стационарного температурного поля  $F_4(z_4)$  [2], а исследование термоэлектроупругого состояния к нахождению комплексных потенциалов электроупругости  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) [4] из граничных условий на контурах отверстий

$$2 \operatorname{Re} F_4(z_4) = T_l; \tag{1.1}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_k) = g_i(t) \quad (i = \overline{1, 3}), \tag{1.2}$$

где

$$g_{k1}^0 = -\mu_k, \quad g_{k2}^0 = 1, \quad g_{k3}^0 = -\nu_k, \tag{1.3}$$

$$\delta_k = dt_k/ds; \quad g_i(t) = df_i(t)/ds, \tag{1.3}$$

$$z_k = x + \mu_k y; \tag{1.4}$$

$\mu_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) – корни характеристического уравнения

$$l_{4a}(\mu) l_{2c}(\mu) - l_{3b}^2(\mu) = 0; \tag{1.5}$$

$$l_{4a}(\mu) = s_{11}^{DT} \mu^4 - 2s_{16}^{DT} \mu^3 + (2s_{12}^{DT} + s_{66}^{DT}) \mu^2 - 2s_{26}^{DT} \mu + s_{22}^{DT},$$

$$l_{3b}(\mu) = g_{11}^T \mu^3 - (g_{21}^T + g_{16}^T) \mu^2 + (g_{12}^T + g_{26}^T) \mu - g_{22}^T,$$

$$l_{2c}(\mu) = -\beta_{11}^{\sigma T} \mu^2 + 2\beta_{12}^{\sigma T} \mu - \beta_{22}^{\sigma T}; \tag{1.5}$$

$$\mu_4 = (-k_{12} + i\alpha)/k_{22}, \quad \alpha = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \tag{1.6}$$

$$\nu_k = -l_{3b}(\mu_k)/l_{2c}(\mu_k) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad \nu_4 = r_5/r_4;$$

$k_{ij}$  – коэффициенты теплопроводности;  $s_{ij}^{DT}$  – коэффициенты деформации материала, измеренные при

постоянной индукции и температуре;  $\beta_{nm}^{\sigma T}$  – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре;  $g_{ni}^T$  – пьезоэлектрические модули напряженности и деформации, измеренные при постоянной температуре;  $\alpha_i^D$  – коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электростатического поля;  $t_n^\sigma$  – пирозлектрические модули, измеренные при постоянных напряжениях;

$$\Phi_4(z_4) = r_4 \int F_4(z_4) dz_4; \quad (1.7)$$

$$r_4 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_4)l_{2c}(\mu_4) - l_{3b}(\mu_4)l_t(\mu_4)}{l_{4a}(\mu_4)l_{2c}(\mu_4) - l_{3b}^2(\mu_4)},$$

$$l_{2\alpha}(\mu) = -\alpha_1^D \mu^2 + \alpha_6^D \mu - \alpha_2^D, \quad l_t(\mu) = t_1^\sigma \mu - t_2^\sigma. \quad (1.8)$$

**2. Построение решения.** Комплексные потенциалы  $F_4(z_4)$  и  $\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) определены в соответствующих областях  $S_4$  и  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями (1.4). Эти области, как и область  $S$ , являются многосвязными и ограниченными контурами  $L_{kl}$ , соответствующими  $L_l$  при аффинных преобразованиях. Так же, как это сделано в работах [2, 4], можно показать, что в общем случае функции представляются в виде

$$F_4(z_4) = c_0 + \sum_{l=1}^L D_{4l} \ln(z_4 - z_{4l}) + \sum_{j=1}^J \delta_{4j} \ln(z_4 - z_{4j}^0) + F_{40}(z_4); \quad (2.1)$$

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + \Phi_{k0}(z_k) \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (2.2)$$

где  $c_0$  – вещественная постоянная, определяемая из граничных условий на контурах отверстий;

$$D_{4l} = -\frac{q_l}{4\pi\epsilon}, \quad \delta_{4j} = -\frac{q_j^0}{4\pi\epsilon}; \quad (2.3)$$

$q_l$  – суммарный поток тепла в область  $S$  через контур  $L_l$ ;  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  – постоянные, удовлетворяющие системам уравнений

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, r_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (2.4)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, r_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (2.5)$$

$$A_{4l} = r_4 D_{4l}, \quad B_{4l} = r_4 (b_{4l} - z_{4l} D_{4l}), \quad b_{4l} = \oint_{L_l} F_4(z_4) dz_4; \quad (2.6)$$

$z_{kl}$  – точки, соответствующие в областях  $S_k$  при аффинных преобразованиях (1.4) произвольным точкам  $z_l$  внутри контура отверстия  $L_l$  области  $S$ ;  $z_{kj}^0$  – точки, соответствующие точкам приложения сосредоточенных источников тепла  $z_j^0$ . Получаемая для определения  $\alpha_{kj}^0$  система полностью совпадает с (2.5), только в ней вместо  $A_{kl}$  будут  $\alpha_{kj}^0$ , и учитывается равенство

Контур отверстия  $L_l$  в общем случае могут быть криволинейными. Но, как известно [5], при решении задач их можно аппроксимировать дугами эллипсов. Поэтому в общем случае достаточно иметь

решение для пластинки с произвольно расположенными эллиптическими отверстиями, которые могут касаться, пересекаться, переходить в прямолинейные разрезы.

Входящие в общие представления комплексных потенциалов (2.1) и (2.2) функции  $F_{40}(z_4)$ ,  $\Phi_{k0}(z_k)$  голоморфны в областях  $S_k$ . Разлагая функции, голоморфные внутри  $L_{k0}$ , в ряды по полиномам Фабера, а следовательно в ряды Тейлора, а функции, голоморфные вне  $L_{kl}$  ( $l = \overline{1, L}$ ) в ряды Лорана по отрицательным степеням переменных в конформно отображенных областях внешности единичного круга  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ , для функций (2.1), (2.2) получаем

$$F_4(z_4) = c_0 + \sum_{l=1}^L D_{4l} \ln \zeta_{4l} + \sum_{j=1}^J \delta_{4j} \ln(z_4 - z_{4j}^0) + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} c_{4ln} \Phi_{4ln}(z_4); \quad (2.9)$$

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=1}^L (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln \zeta_{kl} + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}(z_k); \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) &= \sum_{l=1}^L \left[ A_{kl} \ln \zeta_{kl} + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl}) \zeta_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 \ln(z_k - z_{kj}^0) + \\ &+ \sum_{l=0}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad \Phi'_4(z_4) = r_4 F_4(z_4). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{kln}(z_k) &= \begin{cases} R_{k0}^{-n} z_k^n, & l = 0; \\ \zeta_{kl}^{-n}, & l = \overline{1, L}; \end{cases} \\ \Phi'_{k0n}(z_k) &= \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}, \quad \Phi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, L}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\zeta_{kl}$  – функции, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k = x + \mu_k y = z_{0kl} + R_{kl} \left( \zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (2.13)$$

$z_{0kl}$ ,  $R_{kl}$ ,  $m_{kl}$  – известные постоянные [5].

**3. Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы.** Неизвестные постоянные  $c_0$ ,  $D_{4l}$ ,  $c_{4ln}$ ,  $a_{kln}$ , входящие в (2.9) и (2.11), определим из граничных условий на контурах отверстий методом наименьших квадратов. Исходя из (1.1), (1.2), составим функционалы [4]

$$I_T = \sum_{m=1}^M \left| 2 \operatorname{Re} F_4(t_{4m}) - T_l \right|^2; \quad (3.1)$$

$$I_\sigma = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \delta_{km} g_{kim}^0 \Phi'_k(t_{km}) - g_{im}(t_m) \right|^2. \quad (3.2)$$

Здесь  $M$  – количество точек  $t_m$  на контурах  $L_l$ , для которых составляется квадрат невязки между значением функции и заданной правой частью граничных условий. Удовлетворяя условиям минимума  $\partial I_T / \partial c_0 = 0$ ,  $\partial I_T / \partial D_{4l} = 0$ ,  $\partial I_T / \partial c_{4ln} = 0$  и  $\partial I_\sigma / \partial a_{kln} = 0$  ( $k = \overline{1, 3}$ ;  $l = \overline{0, L}$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) функционалов (3.1), (3.2), найдем системы для нахождения неизвестных коэффициентов. Решая эти системы, найдем эти неизвестные коэффициенты. После этого искомые комплексные потенциалы будут известными и можно в любой точке вычислять температуру, напряжения, индукцию и напряженность электростатического поля по формулам [4]

$$T(x, y) = 2 \operatorname{Re} F_4(z_4); \quad (3.3)$$

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \quad (3.4)$$

$$(D_x, D_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k); \quad (3.5)$$

$$(E_x, E_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k). \quad (3.6)$$

Здесь

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = \nu_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -\nu_k, \\ r_k^0 = g_{11}^T \mu_k^2 - g_{16}^T \mu_k + g_{12}^T - (\beta_{11}^{\sigma T} \mu_k - \beta_{12}^{\sigma T}) \nu_k + \frac{\delta_{k1}^4 t_1^{\sigma}}{r_4} \quad (k = \overline{1, 4}).$$

Если эллипс переходит в прямолинейный разрез, то можно найти и КИНН для концов трещины [3]

$$k_1^{\pm} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \left[ \sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \cos \varphi_l \sin \varphi_l \right], \\ k_2^{\pm} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \left[ (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right], \\ k_D^{\pm} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (D_y \cos \varphi_l - D_x \sin \varphi_l), \quad k_E^{\pm} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (E_y \cos \varphi_l - E_x \sin \varphi_l). \quad (3.7)$$

**4. Анализ результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования распределения термоэлектродупругих характеристик для круговых кольца и диска с трещиной (рис. 2). Температура на контуре  $L_0$  считалась равной нулю, на  $L_1$  – равной  $T_1$ .

Диск считался изготовленным из материала М1 [4, 6] (селенид кадмия с осью симметрии, параллельной оси  $y$ ), М2 [4, 7, 8] (пьезоэлектрическая керамика титаната бария, поля-

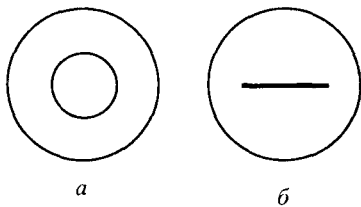


Рис. 2

ризованной по оси  $y$ ), М3 [9] (модифицированная пьезоэлектрическая керамика титаната бария, поляризованной по оси  $y$ ), М4 [9] (пьезоэлектрическая керамика PZT-4, поляризованной по оси  $y$ ) или М5 [9] (пьезоэлектрическая керамика PZT-5A, поляризованной по оси  $y$ ). Основные характеристики этих материалов даны в табл. 1, где  $s_0 = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>,  $g_0 = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>·Кл<sup>-1</sup>,  $\beta_0 = 1$  МН·м<sup>2</sup>·Кл<sup>-2</sup>,  $\alpha_0 = 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>,  $t_0 = 1$  МН·(Кл·К)<sup>-1</sup>,  $k_0 = 1$  Вт·(м·К)<sup>-1</sup>. Как и в [4], считалось, что для материалов М1 и М2  $k_{22}/k_{11} = 2$ .

Таблица 1

Величина	Материал				
	М1	М2	М3	М4	М5
$s_{11}^{DT} / s_0$	17,61	8,3	8,3	10,9	14,4
$s_{12}^{DT} / s_0$	-8,03	-1,9	-1,9	-2,1	-2,98
$s_{22}^{DT} / s_0$	15,43	7,1	7,0	7,9	9,4
$s_{66}^{DT} / s_0$	74,46	17,5	17,1	19,3	25,2
$g_{22}^T / g_0$	73,51	12,6	14,1	26,1	24,8
$g_{21}^T / g_0$	-62,05	-5,2	-5,5	-11,1	-11,4
$g_{16}^T / g_0$	-124,4	20,2	21,0	39,4	38,2
$\beta_{11}^{\sigma} / \beta_0$	11898,71	77,93	86,91	76,61	65,31
$\beta_{22}^{\sigma} / \beta_0$	10681,79	66,47	94,16	86,92	66,47
$\alpha_1^D / \alpha_0$	6,34	7,5	7,5	1,5	1,5
$\alpha_2^D / \alpha_0$	3,73	4,5	4,7	2,0	2,0
$t_2^{\sigma} / t_0$	-0,294	0,133	-0,207	-0,243	-0,399
$k_{11} / k_0$	-	-	2,5	1,25	1,25
$k_{22} / k_0$	-	-	2,5	1,25	1,25

Нижче приведені деякі з отриманих результатів, причому всі значення величин дані з точністю до множителя  $T_1$ .

В табл. 2 для кругового кільця (рис. 2а) при різних відношеннях радіуса внутрішнього контура к радіусу зовнішнього  $R_1/R_0$  приведені значення нормальних напружень  $\sigma_\theta$  і напруженості  $E_s$  на площадках нормальних к контурам кільця в залежності від кута  $\theta$ , відрахованого від позитивного напрямку осі  $Ox$  проти годинникової стрілки. З даних табл. 2 слідує, що з збільшенням внутрішнього радіуса кільця (з зменшенням його ширини) напруження по модулю поблизу внутрішнього контура зменшуються, поблизу зовнішнього – збільшуються, а значення напруженості електростатического поля ростуть по модулю поблизу обох контурів.

Таблиця 2

Матеріал	Величина	$\theta$ , рад	$R_1/R_0$			$R_1/R_0$		
			0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
M1	$\sigma_\theta$		Около контура $L_0$			Около контура $L_1$		
		0	0,050	0,088	0,119	-0,241	-0,179	-0,134
		$\pi/6$	0,049	0,099	0,122	-0,190	-0,148	-0,130
		$\pi/4$	0,050	0,104	0,124	-0,171	-0,138	-0,128
		$\pi/3$	0,051	0,102	0,123	-0,175	-0,142	-0,129
	$\pi/2$	0,056	0,093	0,119	-0,213	-0,172	-0,134	
	$E_s \cdot 10^2$	0	0,050	0,597	1,345	0,335	0,913	1,361
		$\pi/6$	0,490	0,942	1,264	0,296	0,915	1,242
		$\pi/4$	0,780	1,185	1,075	0,246	0,848	1,064
		$\pi/3$	0,857	1,094	0,789	0,176	0,670	0,781
$\pi/2$		0,000	0,000	-0,007	0,000	0,000	-0,005	
M2	$\sigma_\theta$	0	0,147	0,286	0,355	-0,546	-0,436	-0,378
		$\pi/2$	0,145	0,284	0,354	-0,557	-0,439	-0,378
	$E_s \cdot 10^2$	0	-0,227	-0,453	-0,627	-0,127	-0,451	-0,628
		$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
M3	$\sigma_\theta$	0	0,142	0,233	0,259	-0,244	-0,271	-0,265
		$\pi/2$	0,074	0,172	0,246	-0,602	-0,375	-0,278
	$E_s \cdot 10^2$	0	0,453	0,824	1,003	0,429	0,809	1,003
		$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
M4	$\sigma_\theta$	0	-0,011	-0,048	-0,075	0,209	0,117	0,085
		$\pi/6$	-0,025	-0,052	-0,075	0,183	0,116	0,085
		$\pi/4$	-0,037	-0,060	-0,076	0,140	0,107	0,084
		$\pi/3$	-0,047	-0,072	-0,079	0,073	0,085	0,081
	$E_s \cdot 10^2$	$\pi/2$	-0,055	-0,087	-0,083	-0,025	0,047	0,076
		0	0,522	0,958	1,176	0,504	0,948	1,176
		$\pi/6$	0,433	0,817	1,017	0,436	0,818	1,017
		$\pi/4$	0,344	0,657	0,829	0,356	0,665	0,829
M5	$E_s \cdot 10^2$	$\pi/3$	0,238	0,457	0,585	0,251	0,469	0,585
		$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		0	-0,038	-0,115	-0,170	0,441	0,261	0,193
		$\pi/2$	-0,113	-0,180	-0,184	0,052	0,147	0,177
$E_s \cdot 10^2$	0	0,826	1,546	1,924	0,825	1,547	1,924	
	$\pi/2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

Для різних значень відношення  $l/R_0$  полудлини  $l$  центральної тріщини в диску (рис. 2б) в



табл. 3 приведені значення КІНІН  $k_1$  і  $k_E$  з точністю до множителя  $\sqrt{l}$ .

Как следует из этих данных, с увеличением длины центральной трещины значения КИНИН для концов трещины по модулю растут.

Таблица 3

Материал	$k_1 \cdot 10$ при $l/R_0$			$k_E \cdot 10^2$ при $l/R_0$		
	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
M1	-0,288	-0,523	-0,525	-0,341	-0,295	9,222
M2	-0,799	-1,469	-1,511	0,115	0,125	-0,112
M3	-0,468	-1,024	-1,106	-0,255	-0,371	-1,921
M4	0,221	0,249	0,205	-0,231	-0,323	0,118
M5	0,481	0,604	0,545	-0,357	-0,494	0,128

**РЕЗЮМЕ**

Використовуючи комплексні потенціали, запропоновано розв'язок задачі термоелектропружності для скінченної анізотропної пластинки з отворами і тріщинами. Для кругового кільця і диска з тріщиною наведені результати чисельних досліджень напружень і КІНІН.

**SUMMARY**

Using the complex potentials the thermoelectroelastic problem solution for finite multiconnected anisotropic plate with holes and cracks is offered. The results of numerical investigations of stresses and stress and electric field intensity factors are presented for circular ring and disk with a crack.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. *Космодамианский А.С., Калоеров С.А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К.; Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
2. *Калоеров С.А., Антонов Ю.С.* Термонапряженное состояние конечной многосвязной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2004. – №1. – С.103-110.
3. *Калоеров С.А., Баева А.И.* Электроупругое состояние цилиндра с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып.38. – С.36-44.
4. *Калоеров С.А., Хорошев К.Г.* Термозлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып.41. – С.124-133.
5. *Калоеров С.А., Горянская Е.С.* Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: «А.С.К.», 1997. – С.10-26. (Механика композитов: В 12 т., Т.7).
6. *Gao C.F., Zhao Y.T., Wang M.Z.* An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media // Int. J. Solids and Struct. – 2002. – Vol.39. – P.2665-2685
7. *Физическая акустика. Т.1, Ч.А.: Методы и приборы ультразвуковых исследований / Под ред. У.Мэзона.* – М.: Мир, 1966. – 593 с.
8. *Dunn M.D.* Micromechanics of coupled electroelastic composites: effective thermal expansion and pyroelectric coefficients // J. Appl. Phys. – 1993. – Vol.73. – P.5131-5140.
9. *D.Berlincourt, H.H.A.Krueger.* Properties of Piezoelectricity Ceramics // Technical Publication TP-226. – www.morgan-electroceramics.com

Надійшла до редакції 10.10.2005

УДК 539.3

**ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ С ЖЕСТКИМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ИЛИ ЛИНЕЙНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

А.Б.Мироненко

В работе [1] была решена двоякопериодическая задача для упругой пластинки. В статье [2] предложен метод определения напряженно-деформированное состояние вязкоупругой изотропной пластинки с жесткими включениями, решена задача для пластинки с бесконечным рядом эллиптических включений вдоль одной прямой. В данной статье этот метод распространен на решение двоякопериодической задачи для пластинки из вязкоупругого материала.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластинку с бесконечным числом бесконечных рядов одинаковых и одинаково ориентированных жестких эллиптических включений. Будем считать, что материал пластинки обладает свойствами, описываемыми линейной теорией вязкоупругости. Введем систему координат, направив оси  $Ox$  и  $Oy$  по линиям центров двух взаимноперпендикулярных рядов эллипсов (рис. 1). Обозначим контуры эллипсов через  $L_{ij}$  ( $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), их полуоси и угол между большей полуосью  $a$  и положительным направлением оси  $Ox$  соответственно через  $a, b$  и  $\varphi$ . Расстояния между центрами соседних включений по осям  $Ox, Oy$  равны  $h_x$  и  $h_y$ . На бесконечности пластинка находится под действием растягивающих усилий  $\sigma_x^\infty = p, \sigma_y^\infty = q$ .

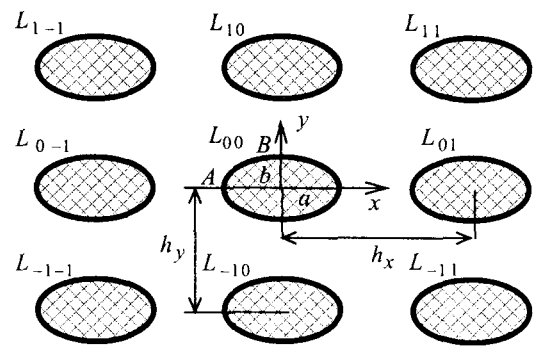


Рис. 1

**Построение решения.** Определение вязкоупругого состояния рассматриваемой пластинки сводится к нахождению комплексных потенциалов

$$\Phi(z) = \Gamma + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \Phi_j(z), \quad \Omega(z) = \Gamma' + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \Omega_j(z) \tag{1}$$

из граничных условий [2]

$$\begin{aligned} \alpha_0 \delta \Phi_0(t) - (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_0(t)} - (t - \bar{t}) \bar{\delta} \overline{\Phi_0'(t)} - \bar{\delta} \overline{\Omega_0(t)} &= -\alpha_0 \delta \Gamma + (\delta - \bar{\delta}) \bar{\Gamma} + \bar{\delta} \bar{\Gamma}', \\ \alpha_0 \delta \Phi_j(t) - (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_j(t)} - (t - \bar{t}) \bar{\delta} \overline{\Phi_j'(t)} - \bar{\delta} \overline{\Omega_j(t)} &= f_j(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\lambda = \nu - \nu_0$  – малый параметр;  $\nu_0$  – мгновенное значение коэффициента Пуассона;

$$\Gamma = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4}, \quad \Gamma' = \frac{3\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{4}, \quad \alpha_0 = \frac{3 - \nu_0}{1 + \nu_0}, \quad \delta = \frac{dt}{ds}; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f_j(t) = \frac{1}{1 + \nu_0} \left\{ \delta \Phi_{j-1}(t) + (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_{j-1}(t)} + (t - \bar{t}) \bar{\delta} \overline{\Phi_{j-1}'(t)} + \right. \\ \left. + \bar{\delta} \overline{\Omega_{j-1}(t)} + \delta^j \left[ \Gamma \delta + (\delta - \bar{\delta}) \bar{\Gamma} + \bar{\delta} \bar{\Gamma}' \right] \right\} \quad (j = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \tag{4}$$

Функции  $\Phi_j(z), \Omega_j(z)$ , голоморфные вне контуров всех включений представим в виде [3]

$$\begin{aligned} \Phi_j(z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{lsn}(z) a_{jlsn}, \\ \Omega_j(z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{lsn}(z) a_{jlsn} + \varphi_{lsn}(z) \bar{b}_{jlsn}). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_{l s n}(z) &= \frac{1}{\zeta_{l s}^{n-1}(\zeta_{l s}^2 - m)}, \\ \psi_{l s n}(z) &= -\frac{1}{\zeta_{l s}^{n-1}(\zeta_{l s}^2 - m)^3} \left\{ c_{l s 3} \zeta_{l s}^3 + c_2 \zeta_{l s}^2 + c_{l s 1} \zeta_{l s} + \right. \\ &\quad \left. + n \left[ d_4 \zeta_{l s}^4 + c_{l s 3} \zeta_{l s}^3 + d_2 \zeta_{l s}^2 - c_{l s 1} \zeta_{l s} + d_0 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} c_{l s 3} &= -\overline{r_{l s 1}}, \quad c_2 = -2(\overline{r_0} + \overline{r_2} m), \quad c_{l s 1} = m c_{l s 3}, \\ d_4 &= -\overline{r_2}, \quad d_2 = \overline{r_2} m - \overline{r_0}, \quad d_0 = m \overline{r_0}, \\ r_0 &= (R - \overline{R} m) / \overline{R}, \quad r_{l s 1} = (z_{0 l s} - \overline{z_{0 l s}}) / \overline{R}, \quad r_2 = (m R - \overline{R}) / \overline{R}; \end{aligned} \quad (7)$$

$\zeta_{l s}$  – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z = z_{0 l s} + R \left( \zeta_{l s} + \frac{m}{\zeta_{l s}} \right); \quad (8)$$

$$z_{0 l s} = x_{0 l s} + i y_{0 l s}, \quad R = R_0 e^{i\varphi}, \quad R_0 = (a + b) / 2, \quad m = (a - b) / (a + b);$$

$a_{j l s n}, b_{j l s n}$  – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах включений  $L_{l s}$ .

В силу периодичности напряженного состояния значения напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в точках  $z$  и  $z + h_x, z$  и  $z + i h_y$  будут одинаковыми. Тогда

$$\Phi_j(z) = \Phi_j(z + h_x) = \Phi_j(z + i h_y), \quad \Omega_j(z) = \Omega_j(z + h_x) = \Omega_j(z + i h_y). \quad (9)$$

Подставив функцию  $\Phi_j(z)$  в первое соотношение (9), будем иметь

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{j l s n} \varphi_{l s n}(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{j l s n} \varphi_{l s n}(z + h_x). \quad (10)$$

Из соотношения (8) следует, что  $\zeta_{l s}(z + h_x) = \zeta_{(l+1) s}(z)$ . Учитывая это, из (6) получаем

$$\varphi_{l s n}(z + h_x) = \varphi_{(l+1) s n}(z). \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (10) и переобозначая индексы в суммировании, находим

$$\begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{j l s n} \varphi_{l s n}(z + h_x) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{j l s n} \varphi_{(l+1) s n}(z) = \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{j(l-1) s n} \varphi_{l s n}(z). \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых функциях  $\varphi_{l s n}(z)$ , будем иметь  $a_{j l s n} = a_{j(l-1) s n} = a_{j n}$ . Аналогичным образом найдем следующие соотношения:

$$\overline{b}_{j l s n} = \overline{b}_{j(l-1) s n} = \overline{b}_{j n}, \quad a_{j l s n} = a_{j l(s-1) n} = a_{j n}, \quad \overline{b}_{j l s n} = \overline{b}_{j l(s-1) n} = \overline{b}_{j n}. \quad (13)$$

Для комплексных потенциалов (5) окончательно будем иметь

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) a_{j n}, \quad \Omega_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n(z) a_{j n} + \varphi_n(z) \overline{b}_{j n}), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ \zeta_{ls}^{n-1} (\zeta_{ls}^2 - m) \right]^{-1}, \\ \psi_n(z) &= - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\zeta_{ls}^{n-1} (\zeta_{ls}^2 - m)^3} \left\{ c_{ls3} \zeta_{ls}^3 + c_{l2} \zeta_{ls}^2 + c_{ls1} \zeta_{ls} + \right. \\ &\quad \left. + n \left[ d_4 \zeta_{ls}^4 + c_{ls3} \zeta_{ls}^3 + d_2 \zeta_{ls}^2 - c_{ls1} \zeta_{ls} + d_0 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (15)$$

$a_{jn}, b_{jn}$  – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контуре включения  $L_{00}$ , для нахождения которых используем метод наименьших квадратов.

Составим функционал

$$J = \sum_{m=1}^M \left| F(t_m) \right|^2, \quad (16)$$

в котором

$$F(t_m) = \alpha_0 \delta \Phi_j(t_m) - (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_j(t_m)} - \bar{\delta} (t_m - \bar{t}_m) \overline{\Phi'_j(t_m)} - \bar{\delta} \overline{\Omega_j(t_m)} - f_j(t_m); \quad (17)$$

$t_m$  – система точек, выбираемых на контуре  $L_{00}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t_m)}{\partial a_{jn}} &= \varphi_{1n}(t_m), \quad \frac{\partial \overline{F(t_m)}}{\partial a_{jn}} = \psi_{1n}(t_m), \quad \frac{\partial F(t_m)}{\partial \bar{b}_{jn}} = 0, \quad \frac{\partial \overline{F(t_m)}}{\partial \bar{b}_{jn}} = \psi_{2n}(t_m); \\ \varphi_{1n}(t_m) &= \alpha_0 \delta \varphi_n(t_m), \quad \psi_{1n}(t_m) = (\delta - \bar{\delta}) \varphi_n(t_m) + \\ &\quad + \delta (t_m - \bar{t}_m) \varphi'_n(t_m) - \bar{\delta} \overline{\psi_n(t_m)}, \quad \psi_{2n}(t_m) = -\delta \varphi_n(t_m). \end{aligned} \quad (18)$$

Удовлетворяя условиям минимума  $\partial J / \partial a_{jn} = 0, \partial J / \partial \bar{b}_{jn} = 0$  функционала (16), для определения неизвестных постоянных  $a_{jn}, b_{jn}$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left\{ r_{in1} \Phi_j(t_m) + r_{in2} \Phi'_j(t_m) + r_{in3} \overline{\Phi_j(t_m)} + r_{in4} \overline{\Phi'_j(t_m)} + r_{in5} \overline{\Omega_j(t_m)} + \right. \\ \left. + r_{in6} \overline{\Omega_j(t_m)} - \psi_{in}(t_m) f_j(t_m) - \varphi_{in}(t_m) \overline{f_j(t_m)} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} r_{in1} &= (\delta - \bar{\delta}) \varphi_{in}(t_m) + \alpha_0 \delta \psi_{in}(t_m), \quad r_{in2} = \delta (t_m - \bar{t}_m) \varphi_{in}(t_m), \\ r_{in3} &= \alpha_0 \bar{\delta} \varphi_{in}(t_m) - (\delta - \bar{\delta}) \psi_{in}(t_m), \quad r_{in4} = -\bar{\delta} (t_m - \bar{t}_m) \psi_{in}(t_m), \\ r_{in5} &= -\delta \varphi_{in}(t_m), \quad r_{in6} = -\bar{\delta} \psi_{in}(t_m), \quad \varphi_{2n}(t_m) = 0 \quad (i = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив выражения (14) в уравнения (19), для определения  $a_{jn}$  и  $b_{jn}$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \left\{ r_{in1} \varphi_p(t_m) + r_{in2} \varphi'_p(t_m) + r_{in5} \psi_p(t_m) \right\} a_{jp} + \left\{ r_{in3} \overline{\varphi_p(t_m)} - \right. \right. \\ \left. \left. - r_{in4} \overline{\varphi'_p(t_m)} + r_{in6} \overline{\psi_p(t_m)} \right\} \overline{a_{jp}} + \left\{ r_{in6} \varphi_p(t_m) \right\} b_{jp} + \left\{ r_{in5} \varphi_p(t_m) \right\} \overline{b_{jp}} \right\} = \\ = \sum_{m=1}^M \left\{ \psi_{in}(t_m) f_j(t_m) + \varphi_{in}(t_m) \overline{f_j(t_m)} \right\} \quad (i = \overline{1, 2}; n = 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (21)$$

$t_m$  – точки, выбираемые на контуре включения  $L_{00}$ .

После решения системы (21) функции (14) будут известными и по ним, используя принцип Вольтерра, для любого момента времени можно найти функции (1) и вычислять напряжения. При этом для нахождения функций и напряжений в момент времени  $t$  на основе принципа Вольтерра нужно в соотношениях (1) степени  $\lambda^j$  ( $j \geq 1$ ) заменить значениями временных функций  $T_j(t)$ , т.е. положить

$$\lambda^j = T_j(t) = \lambda^{*j} \cdot 1 = (v^* - v_0)^j \cdot 1, \quad (22)$$

где  $v^*$  – операторный коэффициент Пуассона, который будем аппроксимировать выражением [4]

$$v^* = v_0 \left( 1 + \delta_* \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta) \right), \quad (23)$$

причем для вычисления значений воздействия оператора Работнова [5] на единицу нужно использовать формулу

$$\mathcal{E}_\alpha^* (-\beta) \cdot 1 = \frac{1}{\beta} \left[ 1 - \exp \left\{ -\beta \left[ (1-\alpha)t \right]^{1-\alpha} \right\} \right]; \quad (24)$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta_*$  – реологические постоянные материала.

Учитывая (24) и свойство возведения резольвентных операторов в степень, временные функции (22) запишем в виде

$$\lambda^j = T_j(t) = \frac{v_0^j \delta_*^j}{\beta^j} \left[ 1 - e^{-\beta \tau} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(\beta \tau)^r}{r!} \right]. \quad (25)$$

Здесь

$$\tau = \left[ (1-\alpha)t \right]^{1-\alpha}. \quad (26)$$

Подставляя значения  $\lambda^j$  по формуле (25) в (1) и учитывая (14), найдем окончательный вид функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ , а по ним вычислим [6] основные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 \left[ (\bar{z} - z) \Phi'(z) - \Phi(z) + \Omega(z) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

а также напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2 ny + \sigma_y \cos^2 nx - 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos nx \cos ny + \tau_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny) \end{aligned} \quad (28)$$

на произвольной площадке с нормалью  $n$  и касательной  $s$ .

Если включения  $L_{ls}$  переходят в прямолинейные жесткие включения (эллипсы с малой полуосью  $b = 0$ ), то можно вычислять и особенности напряжений в концах линейных включений [6]

$$k_1^\pm = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2r} \sigma_y \right), \quad k_2^\pm = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \sqrt{2r} \tau_{xy} \right). \quad (29)$$

Эти величины по аналогии с теорией трещин назовем коэффициентами интенсивности напряжений (КИН).

**Анализ результатов численных исследований.** Проведены численные исследования распределения напряжений и изменения КИН в пластинке в зависимости от геометрических параметров жестких включений и изменения расстояний между ними. Пластинка считалась изготовленной из алюминия, для которого [4]  $\nu = 0.25$ ,  $\alpha = -0.5$ ,  $\beta = 6.65 \cdot 10^{-3}$ ,  $\delta_* = 6.15 \cdot 10^{-3}$ . При проведении расчетов количество приближений  $j$  по степеням малого параметра  $\lambda$  увеличивалось до тех пор, пока последующее прибли-

жение изменяло значения напряжений в предыдущем приближении более чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра  $\lambda$  от 6 до 9. Для удовлетворения граничным условиям с достаточно высокой степенью точности в зависимости от расстояний между включениями в рядах (14) оставлялось от 5 до 45 членов и бралось от 100 до 200 точек  $t_m$ , в которых вычислялась невязка функционала (16). Ниже с точностью до интенсивности приложенной нагрузки  $q$  как множителя приведены некоторые из полученных результатов для напряжений и КИН, причем они даны для двух значений времени отсчета, для  $t = 0$  и  $t = 100$  час. Это связано с тем, что, как показали проведенные расчеты, практически для всех рассмотренных случаев уже через 80 час. после приложения нагрузки напряжения в пластинке не изменяются с течением времени, т.е. в пластинке устанавливается стационарное состояние.

В табл. 1, для пластины с бесконечным числом одинаковых жестких круговых включений для усилий  $\sigma_y^\infty = q$  приведены значения нормальных напряжений  $\sigma_r$  в точках  $A$  и  $B$  на площадках, касательных к контуру центрального включения в зависимости от отношения расстояний между ними к радиусу включения и времени приложения нагрузки. Случай  $h_y = \infty$  соответствует пластинке с одним бесконечным рядом жестких включений (периодической задаче). Как следует из табл. 1, с течением времени приложения нагрузки  $t$  напряжения около точек  $A$  и  $B$  могут и возрастать и убывать в зависимости от расстояний между включениями. В некоторых случаях они с течением времени даже меняют знак.

Таблица 1.

Точка	$h_y / R$	$t$ , час,	$h_x / R$					
			2,00	1,00	0,50	0,10	0,01	
A	$\infty$	0	-0,188	-0,525	-1,132	-5,088	-45,090	
		100	-0,548	-1,172	-2,436	-11,650	-101,100	
	2,00	0	-0,016	-0,176	-0,420	-1,037	-3,021	
		100	-0,252	-0,512	-0,961	-2,415	-6,619	
	1,00	0	0,002	-0,091	-0,264	-0,674	-1,805	
		100	-0,224	-0,375	-0,690	-1,659	-4,352	
	0,50	0	0,001	-0,032	-0,139	-0,373	-0,960	
		100	-0,225	-0,285	-0,488	-1,154	-2,970	
	0,10	0	-0,018	0,024	0,025	0,050	0,195	
		100	-0,252	-0,204	-0,243	-0,484	-1,201	
	0,01	0	-0,028	0,048	0,102	0,259	0,764	
		100	-0,267	-0,175	-0,143	-0,178	-0,384	
	B	$\infty$	0	1,425	1,355	1,298	1,243	1,222
			100	1,422	1,373	1,322	1,256	1,225
2,00		0	1,650	1,613	1,606	1,617	1,623	
		100	1,624	1,583	1,578	1,598	1,610	
1,00		0	1,948	1,818	1,756	1,727	1,725	
		100	1,978	1,810	1,719	1,664	1,654	
0,50		0	2,536	2,264	2,116	2,012	1,992	
		100	2,674	2,318	2,106	1,927	1,883	
0,10		0	5,251	4,383	3,947	3,628	3,569	
		100	5,737	4,617	4,036	3,560	3,445	
0,01		0	14,960	12,050	10,680	9,713	9,543	
		100	15,860	12,310	10,640	9,385	9,115	

В табл. 2, для пластины с бесконечным числом одинаковых жестких линейных включений с отношением полуосей  $b/a = 10^{-6}$  при действии усилий  $\sigma_y^\infty = q$  приведены значения КИН  $k_1^-$  для левой вершины центрального включения в зависимости от отношения расстояний между ними к полудлине линейного включения  $h_x/a$ ,  $h_y/a$  и времени приложения нагрузки. Как следует из табл. 2, с уменьшением расстояний между включениями вдоль оси  $Ox$  значения  $k_1^-$  растут, а вдоль оси  $Oy$  – могут и во-

Таблица 2

Точка	$h_y / a$	$t$ , час,	$h_x / a$					
			2,00	1,00	0,50	0,10	0,01	
КИН $k_1$ в точке $A$								
$A$	$\infty$	0	0,0616	0,0701	0,0850	0,1618	0,4882	
		100	0,0755	0,0858	0,1043	0,1984	0,5988	
	2,00	0	0,0559	0,0578	0,0632	0,0953	0,2151	
		100	0,0699	0,0716	0,0784	0,1195	0,2726	
	1,00	0	0,0529	0,0560	0,0597	0,0839	0,1808	
		100	0,0686	0,0703	0,0734	0,1030	0,2232	
	0,50	0	0,0452	0,0525	0,0593	0,0815	0,1711	
		100	0,0604	0,0674	0,0732	0,0971	0,2057	
	0,10	0	0,0248	0,0344	0,0496	0,0985	0,1947	
		100	0,0343	0,0468	0,0654	0,1177	0,2261	
	0,01	0	0,0091	0,0123	0,0198	0,0738	0,2887	
		100	0,0116	0,0160	0,0266	0,0997	0,3428	
	Напряжение $\sigma_r$ в точке $B$							
	$B$	$\infty$	0	0,946	0,946	0,946	0,946	0,946
100			0,933	0,933	0,933	0,933	0,933	
2,00		0	0,965	0,959	0,957	0,959	0,963	
		100	0,980	0,965	0,960	0,965	0,975	
1,00		0	1,010	0,997	0,985	0,971	0,966	
		100	1,099	1,061	1,030	0,996	0,982	
0,50		0	1,049	1,036	1,022	0,998	0,981	
		100	1,227	1,185	1,140	1,071	1,029	
0,10		0	1,062	1,057	1,050	1,021	0,993	
		100	1,283	1,265	1,239	1,146	1,071	
0,01		0	0,960	0,963	0,965	0,966	0,960	
		100	0,968	0,973	0,978	0,983	0,980	

зростать и убывать в зависимости от расстояний между включениями. С течением времени значения  $k_1^-$  растут.

**РЕЗЮМЕ**

Дано розв'язання задачі про визначення напруженого стану ізотропної в'язкопружної пластинки з подвійно-періодичною системою еліптичних жорстких включень. Наведені результати чисельних досліджень для кругових і лінійних включень.

**SUMMARY**

The solution of the problem on the stressed state of the isotropic viscoelastic plate with system of elliptic rigid inclusions is obtained. The results of the numerical investigation for circular and linear inclusions are given.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
2. Калоеров С.А., Мироненко А.Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями // Вісн. Донец. ун-ту. – 2005. – Вип.1. – С.71-78.
3. Калоеров С.А., Вакуленко С.В. Об общих представлениях комплексных потенциалов для изотропных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып.32. – С.79-93.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т.12. – №1. – С.53-62.
6. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

Надійшла до редакції 20.10.2005

УДК 621.967.1

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В СТЕРЖНЕ ПРИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

Е.Н. Высоцкий

Институт физики горных процессов НАН Украины, г. Донецк

Для хрупких сортов проката используют метод разделения проката на мерные длины ломкой изгибом [1], но пластичный прокат по схеме ломки изгибом не разрушается. В случае разделения такого проката знакопеременным пластическим изгибом возникает технологическая проблема получения высокого качества поверхности разделения. Известно [2], что траектория трещины в стержне при ломке изгибом определяется перераспределением во времени затухающих внутренних напряжений. Наиболее существенными из них являются медленно затухающие напряжения, создаваемые внешними нагрузками от контакта с опорами. Более высокочастотные составляющие спектра колебаний стержня имеют малую амплитуду и быстро затухают при разрушении. Возмущения, вносимые комплексами внутренних дефектов, имеют малый радиус действия и практически не влияют на отклонение траектории трещины от прямолинейности. В силу того, что в месте зарождения трещины создается большой градиент убывающих растягивающих напряжений глубоким и заостренным концентратором, оптимальным концентратором можно считать трещину, которая создает наибольший градиент напряжений [3]. Следовательно, в пластичном стержне при знакопеременном изгибе необходимо создавать такие условия, при которых будет зарождаться трещина в устье концентратора, и она сможет распространяться по закону аналогичному для усталостной трещины. Это сходство может быть связано с общим механизмом зарождения и распространения трещины: накоплением и слиянием повреждений в процессе пластической деформации [4]. В данной статье изучаются особенности разрушения пластичных круглых металлических прутков с кольцевым надрезом при постоянной амплитуде деформации изгиба. При знакопеременном пластическом изгибе стержня показывается возможность зарождения трещины в вершине надреза и распространения ее со скоростью, зависящей от количества циклов и амплитуды деформации, накопления повреждений, стимулирующих рост трещины; приводятся практические рекомендации для технологии разделения сортового проката для пластичных материалов.

**Описание эксперимента.** Образцы из стали 35, меди и алюминия диаметром 10 мм зажимали консольно и циклически изгибали в обе стороны на заданный угол  $\Delta\Theta$ , на который другой конец оставался изогнутым после снятия нагрузки. По состоянию окисной пленки на поверхности образцов вблизи надреза определяли, захватывает ли пластическая деформация близлежащие участки поверхности. При глубине надреза  $\delta \leq 0,14 \dots 0,2$  мм окисная пленка светлела (растрескивалась) в области, захваченной пластической деформацией. При больших величинах  $\delta$  пластическая деформация локализовалась в пределах нетто-сечения, ограниченного величиной кольцевого надреза. На зарождение трещины значительно влияет наличие надреза на поверхности образца. Например, в стальном образце при  $\Delta\Theta = \pm 5^\circ$  трещина появлялась после  $n = 420 - 440$  циклов. В образце с концентратором глубиной надреза  $\delta = 0,5$  мм первая трещина появлялась после нескольких циклов, а при  $\delta = 1$  мм и более – при первом же цикле нагружения.

В случае дальнейшего нагружения трещина с каждым циклом продвигалась на определенную величину, оставляя на поверхности разрушения характерную картину в виде темных дуг, соответствующих остановкам трещины. На рис. 1 изображена поверхность разрушения образцов при нагружении знакопеременным пластическим изгибом из стали 35 (рис. 1 а), цветных металлов: вверху – медь, внизу – алюминиевый сплав (рис. 1 б). При глубине трещины примерно 25 – 30% от диаметра образца усилие изгиба существенно снижалось и доламывание образца однократной нагрузкой давало высокое качество поверхности разделения.

С помощью инструментального микроскопа измеряли расстояние  $r$  от центра, к которому распространяется трещина, до наиболее удаленных точек дуг. Эти сведения представлялись в виде зависимостей  $\ln(r_0/r)$  от числа циклов  $n$ , которые имеют вид простых линий. На рис. 2 дана зависимость положения трещины от числа циклов  $n$  и амплитуды  $\Delta\Theta$  деформации для стали 35, где линия 1 –  $\delta = 1,4$  мм,  $\Delta\Theta = \pm 5^\circ$ ; 2 –  $\delta = 1,3$  мм,  $\Delta\Theta = \pm 10^\circ$ ; для алюминиевого сплава: 3 –  $\delta = 1,4$  мм,  $\Delta\Theta = \pm 10^\circ$



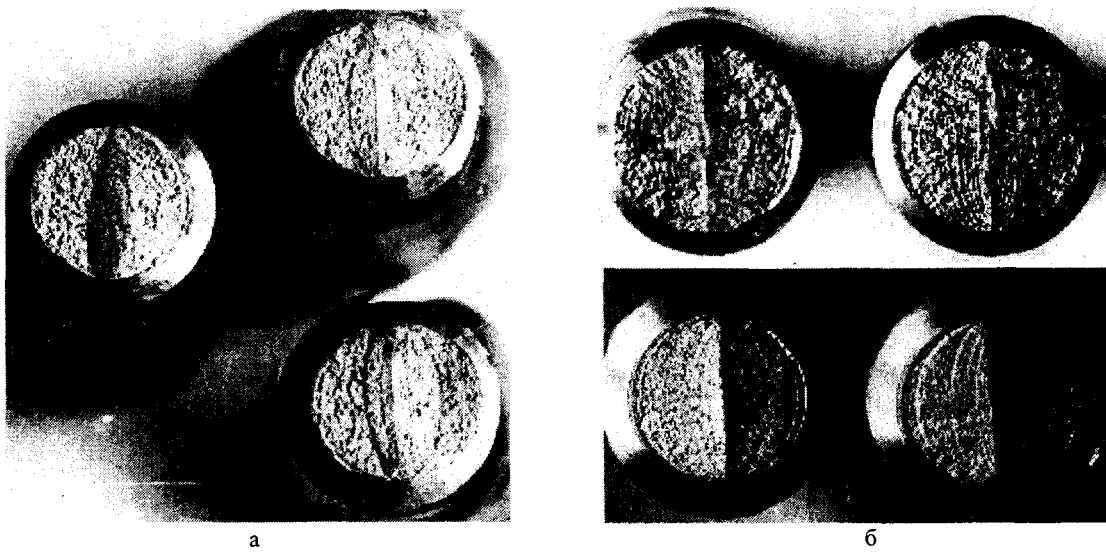


Рис.1

и меди 4 –  $\delta = 1\text{ мм}$ ,  $\Delta\Theta = \pm 5^\circ$ ; 5 –  $\delta = 1\text{ мм}$ ,  $\Delta\Theta = \pm 10^\circ$ . Их наклон определяли методом наименьших квадратов. Для больших амплитуд нагружения  $\Delta\Theta$  наклон графиков круче. Дисперсия экспериментальных данных при этом не превышала 0,004, что достаточно мало и позволяет считать логарифмическую аппроксимацию вполне адекватной.

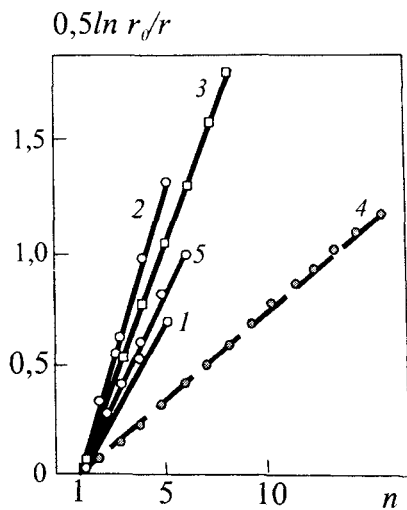


Рис. 2

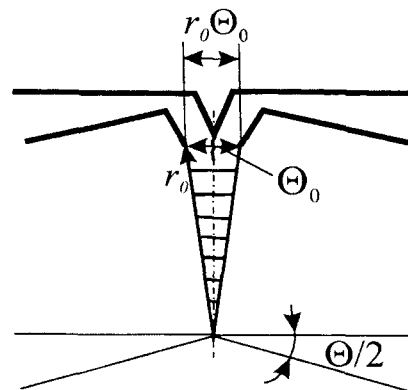


Рис. 3

**Построение модели распространения трещины.** Для построения модели распространения трещины рассмотрим балку с надрезом в плоскодеформированном состоянии. Предположим, что надрез настолько глубок, что пластическая деформация при изгибе сосредоточена в окрестности нетто-сечения, т.е. в плоскости надреза.

В произвольной точке зоны деформации трещина будет возникать по достижении пластической деформацией некоторого предельного значения. К этому моменту в рассматриваемой точке накопленные повреждения сливаются и образуют трещину.

Изогнем балку на угол  $\Theta_0$  так, чтобы в вершине надреза появилась начальная трещина. Обозначим через  $r_0$  расстояние от ее вершины до нейтральной линии балки (рис.3). Как видно, в окрестности

вершины начальной трещины пластическая деформация равна  $r_0 \Theta_0$ . Изгибая балку дальше на угол  $\Theta_0 + \Delta\Theta$ , повысим деформацию на большей глубине. Трещина увеличится так, что у ее вершины пластическая деформация не будет превышать  $r_0 \Theta_0$ . В этом случае координата  $r$  вершины трещины определяется уравнением

$$r_0 \Theta_0 = r(\Theta_0 + \Delta\Theta). \quad (1)$$

С целью дальнейшего анализа преобразуем эту формулу к виду

$$\frac{r - r_0}{r} = -\frac{\Delta\Theta}{\Theta_0} \quad (2)$$

и применим ее к знакопеременному изгибу.

Изогнем стержень на угол  $-\Delta\Theta$  в обратную сторону. При этом начальная трещина сомкнется, но не залечится. В материале появятся новые повреждения. Поэтому при изгибе стержня на угол  $+\Delta\Theta$  снова в положительную сторону координата начальной трещины изменится и станет равной  $\alpha r_0$ , где  $\alpha < 1$ . В результате координату следующего положения трещины найдем из соотношения (2):

$$\frac{r_1 - \alpha r_0}{r_1} = -\frac{\Delta\Theta}{\Theta_0}. \quad (3)$$

Таким образом, получим сходящийся при  $\Delta\Theta_n \rightarrow 0$  ряд, который переходит в интеграл. Примем  $\alpha r_{n-1} = r'_{n-1}$  и совершим предельный переход:

$$\frac{1}{\Theta_0} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\Theta \rightarrow 0}} \Delta\Theta_n = \frac{n \cdot \Delta\Theta}{\Theta_0}, \quad (4)$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ r'_{n-1} \rightarrow r_n}} \sum_n \frac{r_n - r'_{n-1}}{r_n} = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \ln \frac{r}{\alpha r_0}. \quad (5)$$

В результате получим уравнение распространения трещины:

$$\ln \frac{r}{\alpha r_0} = -\frac{n \cdot \Delta\Theta}{\Theta_0} \quad (6)$$

или

$$r_n = \alpha r_0 e^{-\Delta\Theta n / \Theta_0}. \quad (7)$$

Сравним (7) с выражением (1), дающим координату трещины при однократном нагружении на угол  $\Theta = n \Delta\Theta + \Theta_0$ . Для этого поделим координату на  $r_n$ , установленную по формуле (7):

$$\frac{r}{r_n} = \frac{e^{\Delta\Theta n / \Theta_0}}{\alpha \left(1 + \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0} n\right)}. \quad (8)$$

При симметричном цикле  $\Delta\Theta = 2\Theta_0$  будем иметь

$$\frac{r}{r_n} = \frac{e^{2n}}{\alpha(1+2n)} = \frac{1}{\alpha} \cdot (2.5; 11; 31...). \quad (9)$$

Видно, что при  $n$ -кратном знакопеременном нагружении трещина вырастает значительно меньше, чем в условиях однократного изгиба на угол  $\Theta = n \Delta\Theta + \Theta_0$ . Отсюда следует, что знакопеременное нагружение необходимо только для создания достаточно глубокой трещины с целью обеспечения приемлемого качества поверхности разрушения. Далее стержень можно быстро разрушить однократным нагру-

женням.

Скорость распространения трещины для случаев формул (1) и (7) равна

$$\frac{dr}{d\Theta} = -\frac{r_0}{\Theta_0 \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_2}\right)^2}; \quad (10)$$

$$\frac{dr_n}{dn} = -\alpha r_0 \frac{\Delta\Theta}{\Theta_0} e^{-\Delta\Theta n / \Theta_0}. \quad (11)$$

Видно, что при однократном изгибе скорость трещины уменьшается с увеличением  $\Theta$ . В случае знакопеременного изгиба с ростом  $\Theta = n \Delta\Theta$  она убывает значительно быстрее.

Таким образом, в результате исследования установлено, что при знакопеременном пластическом изгибе стержня трещина легко зарождается в вершине надреза на поверхности стержня и распространяется со скоростью, экспоненциально зависящей от количества циклов и амплитуды деформации. При этом в материале с каждым циклом деформации накапливаются повреждения, которые, сливаясь, стимулируют рост трещины. Разделение пластического проката ломкой целесообразно осуществлять в два приема. На первом этапе нагружение следует проводить циклически с заданной амплитудой деформации для создания начальной трещины глубиной 25 – 30% от диаметра проката. На втором этапе необходимо развить трещину однократным изгибом. При этом полученное качество поверхности разрушения такое же высокое, как и при однократном знакопеременном изгибе, а производительность обработки выше.

#### РЕЗЮМЕ

Експериментально і теоретично досліджено поширення тріщини за умов знакозмінного пластичного вигинання круглих стрижнів з надрізом із сталі 35, міді та алюмінію. Показано, що тріщина розвивається шляхом злиття пошкоджень, які накопичуються з кожним циклом вигинання із швидкістю, що експоненціально залежить від кількості циклів та амплітуди деформації вигинання. Подані практичні рекомендації щодо технології ділення пластичного прокату на мірні довжини вигинанням доламанням.

#### SUMMARY

The expansion of cracks at sign-variable plastic bending of notched rods from steel 35, copper and aluminium is investigated theoretically and experimentally. Cracks are shown to grow due to merging of faults that are accumulated with every bending cycle at the rate depending exponentially on the number of cycles and the amplitude of bending. Recommendations for cutting of rolled products by bending are given.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Косяк В.И., Высоцкий Е.Н. Перспективы раскроя проката круглого и многогранного профиля // Кузнечно-штамповочное пр-во. – 1977. – №7. – С.14-15.
2. Гришаев В.В., Высоцкий Е.Н. Траектория трещины при изгибе стержня // Пробл. прочности. – 1989. – №6. – С.52-56.
3. Высоцкий Е.Н. Исследование концентратора напряжений, полученного различными способами, при ломке проката изгибом // Физика и техн. высок. давлений. – 2005. – Т.15. – №3. – С.138-147.
4. Финкель В.М. Физические основы торможения разрушения. – М.: Металлургия, 1977. – 357 с.

Надійшла до редакції 14.10.2005

УДК 531.38

**ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В СЛУЧАЕ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА**

*Е.М.Миронова*

Исследовано движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемое уравнениями Кирхгофа [1,2], в случае, когда они допускают два линейных инвариантных соотношения [3,4]. Показано, что при нулевом значении характерной постоянной движение гиростата является полурегулярной прецессией первого типа относительно вертикали.

**Введение.** Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями Кирхгофа [1-3]

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times Bv + s \times v + v \times Cv, \tag{1}$$

$$\dot{v} = v \times \omega, \tag{2}$$

где  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела-носителя;  $v = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор оси симметрии силового поля;  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел (гироскопов Лагранжа);  $s = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс;  $A=(A_{ij})$  – тензор инерции, вычисленный в неподвижной точке;  $B=(B_{ij})$  и  $C=(C_{ij})$  – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка под переменными обозначает относительную производную по времени  $t$ .

В работах [4-6] уравнения (1), (2) интерпретируются как уравнения движения заряженного и намагниченного гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией электрического, магнитного и ньютоновского полей. В работах [1-3] изучаются уравнения движения тела в идеальной, несжимаемой жидкости, которые невырожденным линейным преобразованием основных переменных [6] приводятся к уравнениям (1), (2). Отмеченное свойство уравнений Кирхгофа показывает, что указанные задачи математически изоморфны и поэтому должны изучаться с учетом приоритета полученных результатов в этих задачах.

Заметим, что классические уравнения Эйлера-Пуассона следуют из уравнений (1), (2), если  $\lambda = 0, B = 0, C = 0$ .

Согласно теории интегрирующего множителя Якоби [7] для интегрирования уравнений (1), (2) с интегралами

$$A\omega \cdot \omega - 2(s \cdot v) + (Cv \cdot v) = 2E, (A\omega + \lambda) \cdot v - \frac{1}{2}(Bv \cdot v) = k, v \cdot v = 1, \tag{3}$$

где  $E, k$  – произвольные постоянные, достаточно найти дополнительный первый интеграл этих уравнений. Известно, что для уравнений Эйлера-Пуассона известны три случая (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской), в которых имеет место такой интеграл. Для уравнений (1), (2) получены пять случаев дополнительных интегралов (два случая Клебша, Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова). Обзоры основных результатов, опубликованных в этом направлении даны в работах [3,6,8,9]. Поскольку дифференциальные уравнения (1), (2) в общем случае неинтегрируемы в квадратурах [10], то в научных публикациях интенсивно изучаются инвариантные соотношения.

**Два линейных инвариантных соотношения.** Большой интерес представляет исследование двух линейных инвариантных соотношений, которые для уравнений (1), (2) без ограничения общности можно записать в виде [4]

$$x_1 = b_0 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3, \tag{4}$$

$$x_2 = c_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  первые две компоненты вектора кинетического момента  $\tilde{d} = A\dot{\omega}$ . Если через  $a = (a_{ij})$  обозначить гириационный тензор, то компонента вектора угловой скорости получим из соотношений

$$\omega_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \tag{5}$$

$$\omega_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\omega_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3.$$

Здесь  $x_3$  – третья компонента вектора  $x$ .

В задаче о движении тела в идеальной, несжимаемой жидкости условия существования двух линейных инвариантных соотношений рассмотрены в работе [3]. Здесь будем использовать результаты работы [4]. В ней показано, что при  $a_{ij}=0$  ( $i \neq j$ ) и выполнении условий

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = 0, B_{12} = 0, b_3 = \frac{B_{13}a_3}{a_3 - a_1}, c_3 = \frac{B_{23}a_3}{a_3 - a_2}, \\ B_{11} = \frac{b_1}{a_2a_3}(a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3), B_{22} = \frac{b_1}{a_2a_3}(a_1a_3 - a_1a_2 - a_2a_3), \\ B_{33} = \frac{b_1}{a_2a_3}(a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3), C_{12} = -\frac{a_1a_2b_3c_3}{a_3}, \\ C_{13} = \frac{a_1b_1b_3}{a_3}(a_1 - a_3), C_{23} = \frac{a_1b_1c_3}{a_3}(a_2 - a_3), \\ C_{11} = C_{33} + \frac{a_1}{a_3}[b_1^2(a_1 - a_3) + b_3^2(a_3 - a_1) + a_3c_3^2], \\ C_{22} = C_{33} + \frac{a_1}{a_3}[b_1^2(a_2 - a_3) + c_3^2(a_3 - a_2) + a_3b_3^2], \\ s_1 = a_1\lambda_3b_3, s_2 = a_2\lambda_3c_3, s_3 = -a_1b_1\lambda_3 \end{aligned} \quad (6)$$

уравнения (1), (2) допускают два инвариантных соотношения

$$x_1 = b_1v_1 + b_3v_3, x_2 = \frac{a_1b_1}{a_2}v_2 + c_3v_3. \quad (7)$$

В формулах (6)  $a_1 = a_{11}, a_2 = a_{22}, a_3 = a_{33}$  – компоненты гирационного тензора.

Уравнение (1), (2) на инвариантных соотношениях (7) имеют вид [4]

$$\begin{aligned} a_3\dot{x}_3 = (a_2c_3v_1 - a_1b_3v_2)[a_1b_1v_3 - a_3\lambda_3 - (a_1b_3v_1 + a_2c_3v_2)], \\ \dot{v}_3 = v_3(a_2c_3v_1 - a_1b_3v_2), \\ \dot{v}_1 = a_3x_3v_2 - v_3(a_1b_1v_2 + a_2c_3v_3), \dot{v}_2 = -a_3x_3v_1 + v_3(a_1b_1v_1 + a_1b_3v_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) допускают интегралы

$$x_3 = \frac{1}{a_3}(\ell_0v_3^{-1} + d_0v_3), v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad (9)$$

$$v_3[a_1b_3v_1 + a_2c_3v_2 + (d_0 - a_1b_1)v_3 + a_3\lambda_3] = \ell_0. \quad (10)$$

Компоненты угловой скорости в силу соотношений (5), (9), таковы

$$\omega_1 = a_1(b_1v_1 + b_3v_3), \omega_2 = a_1b_1v_2 + a_2c_3v_3, \omega_3 = \ell_0v_3^{-1} + d_0v_3. \quad (11)$$

В формулах (9)-(11)  $\ell_0$  и  $d_0$  – произвольные постоянные.

**Случай  $\ell_0=0$ .** В работе [4] изучен случай  $\ell_0 \neq 0$ . Показано, что решение уравнений (1), (2), определяемое соотношениями (7), (9), (10), описывается эллиптическими функциями времени. Положим в формулах (10), (11)  $\ell_0=0$ .

$$a_1b_3v_1 + a_2c_3v_2 + (d_0 - a_1b_1)v_3 = -a_3\lambda_3, v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad (12)$$

$$\omega_1 = a_1b_1v_1 + a_1b_3v_3, \omega_2 = a_1b_1v_2 + a_2c_3v_3, \omega_3 = d_0v_3. \quad (13)$$

Наличие первого соотношения из системы (12) позволяет дать простую геометрическую интерпретацию движения гиростата в случае  $\ell_0=0$ .

Введем в рассмотрение единичный вектор  $n$  с компонентами

$$n_1 = \frac{a_1b_3}{\mu_0}, n_2 = \frac{a_2c_3}{\mu_0}, n_3 = \frac{d_0 - a_1b_1}{\mu_0}, \quad (14)$$

где  $\mu_0^2 = a_1^2b_3^2 + a_2^2c_3^2 + (d_0 - a_1b_1)^2$ . Обозначим через  $a_0 = \cos \theta_0 = -\frac{a_3\lambda_3}{\mu_0}$ .

Считаем, что постоянная  $d_0$  удовлетворяет условию

$$(d_0 - a_1 b_1)^2 > a_3^2 \lambda_3^2 - a_1^2 b_3^2 - a_2 c_3^2. \quad (15)$$

Тогда из первого уравнения системы (12) с учетом (14), (15) вытекает

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = a_0. \quad (16)$$

То есть в процессе движения угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}$  остается постоянным. Это движение называется прецессионным относительно вертикали [5]. Выясним характер данной прецессии и изучим геометрическое место концов вектора  $\mathbf{n}$ . Поскольку решение, которое определяется соотношениями (12) и (13) и уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= d_0 v_2 - v_3 (a_1 b_1 v_2 + a_2 c_3 v_3), \quad \dot{v}_2 = -d_0 v_1 + v_3 (a_1 b_1 v_1 + a_1 b_3 v_3), \\ \dot{v}_3 &= v_3 (a_2 c_3 v_1 + a_1 b_3 v_2) \end{aligned} \quad (17)$$

записано в главной системе координат, а классификация прецессий [5] проведена в системе координат, связанной с вектором  $\mathbf{n}$ , то перейдем к последней системе координат. Введем углы Эйлера  $\theta = \theta_0$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ , так что вектор угловой скорости имеет вид [5]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{v}. \quad (18)$$

Здесь  $\dot{\varphi}$  – скорость собственного вращения гиростата вокруг вектора  $\mathbf{n}$ , а  $\dot{\psi}$  – скорость прецессии вокруг вектора  $\mathbf{v}$ . В силу инвариантности формулы (18) запишем проекции (18) на главные оси координат. На основании соотношений (13), (14) имеем

$$\begin{aligned} \mu_0 (a_1 b_1 v_1 + a_1 b_3 v_3) &= \dot{\varphi} a_1 b_3 + \mu_0 \dot{\psi} v_1, \\ \mu_0 (a_1 b_1 v_1 + a_2 c_3 v_3) &= \dot{\varphi} a_2 c_3 + \mu_0 \dot{\psi} v_2, \\ \mu_0 d_0 v_3 &= \dot{\varphi} (d_0 - a_1 b_1) + \mu_0 \dot{\psi} v_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Из системы (19) легко получить значения для  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$

$$\dot{\varphi} = v_3 \mu_0, \quad \dot{\psi} = a_1 b_1 = const. \quad (20)$$

Таким образом, скорость прецессии постоянна, то есть прецессия гиростата является полурегулярной прецессией первого типа [5].

Определим зависимость  $\varphi(t)$  из (20). Для этой цели параметризуем геометрический интеграл из системы (12) так

$$v_1 = \sin u \sin v, \quad v_2 = \sin u \cos v, \quad v_3 = \cos u. \quad (21)$$

Здесь  $u$  – угол нутации,  $v$  – угол собственного вращения, но по отношению к главной системе координат. Ясно, что эти величины являются функциями времени в отличие, например, от постоянного угла нутации между осью, проходящей через вектор  $\mathbf{n}$ , и вектор  $\mathbf{v}$ .

Подставим выражения (21) в первое равенство системы (12) и уравнения (17)

$$\begin{aligned} \dot{v}_3 &= -v_3 \sqrt{\beta_0 + \beta_1 v_3 + \beta_2 v_3^2}, \\ v &= \arctg \frac{a_2 c_3}{a_1 b_3} + \arcsin \frac{(a_1 b_1 - d_0) v_3 - a_3 \lambda_3}{\sqrt{(1 - v_3^2) [(a_1 b_3)^2 + (a_2 c_3)^2]}} + v_0, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\beta_0 = a_1^2 b_3^2 + a_2^2 c_3^2 - a_3^2 \lambda_3^2, \quad \beta_1 = 2 a_3 \lambda_3 (a_1 b_1 - d_0), \quad \beta_2 = -\mu_0^2. \quad (23)$$

Поскольку выражение  $\beta_0 + \beta_1 v_3 + \beta_2 v_3^2$  при  $|v_3| \geq 1$  отрицательно, то для действительности решения (22) необходимо потребовать, чтобы дискриминант соответствующего уравнения был положителен. Это условие, очевидно, совпадает с условием (15). Поэтому в рамках рассматриваемого класса прецессионных движений (20) решение (21), (22) действительно. При интегрировании первого уравнения системы (22) возникают ряд вариантов. Здесь остановимся на варианте  $\beta_0 > 0$ . Так как точка  $v_3 = 0$  входит в область действительности решения, то эта точка является особой точкой первого уравнения из (22). При нахождении  $v_3(t)$  примем условие  $v_3(t_0) = v_3^{(1)}$ , где  $v_3^{(1)}$  положительный корень уравнения  $\beta_0 + \beta_1 v_3 + \beta_2 v_3^2 = 0$ . Обозначим через  $v_3^{(2)}$  – отрицательный корень этого уравнения. Тогда имеем

$$v_3^{(1,2)} = \frac{1}{\mu_0^2} \left[ a_3 \lambda_3 (a_1 b_1 - d_0) \pm \sqrt{(a_1^2 b_3^2 + a_2^2 c_3^2) (\mu_0^2 - a_3^2 \lambda_3^2)} \right]. \quad (24)$$

Здесь верхний знак перед квадратным корнем соответствует индексу 1, а нижний – индексу 2. Принимая во внимание (24), из первого уравнения системы (22) имеем

$$v_3(t) = \frac{v_3^{(1)}}{ch^2 w - \frac{v_3^{(1)}}{v_3^{(2)}} sh^2 w}, \quad w = -\frac{1}{2}(t-t_0) \sqrt{-\mu_0^2 v_3^{(1)} v_3^{(2)}}. \quad (25)$$

Из формул (25) следует, что  $v_3(t_0) = v_3^{(1)}$  и  $v_3(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом движение гиростата обладает не только свойством прецессионности, но и свойством асимптотичности (при  $t \rightarrow \infty$  движение гиростата стремится к равномерному вращению относительно вектора  $\mathbf{V}$ ).

Для получения зависимости всех переменных задачи от времени необходимо подставить  $v_3(t)$  из (25) во второе выражение из (22), а затем полученные значения  $v_i(t)$  внести в соотношения (13).

Полученное прецессионное движение отличается по своему характеру от прецессионных движений, рассмотренных в [5], так как конец вектора  $\mathbf{n}$  описывает часть окружности. Это свойство следует из равенств (14). Действительно из первых двух равенств вытекает, что отношение  $n_2$  к  $n_1$  не зависит от постоянной  $d_0$ . Это значит, что при изменении  $d_0$  вектор  $\mathbf{n}$  лежит в вертикальной плоскости, составляющей с первой координатной плоскостью угол  $\arctg \frac{a_2 c_3}{a_1 b_3}$ . Проекция вектора  $\mathbf{n}$  на третью координатную ось является переменной при изменении параметра  $d_0$ .

Представляет интерес и другая интерпретация первого соотношения из системы (12). Выразим из него постоянную  $d_0$

$$\frac{a_1 b_1 v_3 - a_1 b_3 v_1 - a_2 c_3 v_2 - a_3 \lambda_3}{v_3} = d_0. \quad (26)$$

Так как  $d_0$  – произвольная постоянная, значения которой находятся из условия действительности решения, то аналитически изучаемый класс решений характеризуется тремя инвариантными соотношениями (13) уравнений (1), (2) и дробно-линейным интегралом (26) уравнений Пуассона. Последнее соотношение из системы (13) содержит произвольную постоянную. Но если воспользоваться соотношением (26), то для  $\omega_3$  можно получить равенство

$$\omega_3 = a_1 b_1 v_3 - a_1 b_3 v_1 - a_2 c_3 v_2 - a_3 \lambda_3. \quad (27)$$

То есть, если учесть первые два равенства из системы (13) и равенство (27), то получим случай трех линейных инвариантных соотношений с постоянными коэффициентами [11].

**Замечание.** Полученный в данной работе результат не может быть обобщен на случай движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона [12]. Уравнения его движения отличаются от уравнений (1), (2), так как имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) \times \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{a}\mathbf{x} \times \mathbf{v} + \mathbf{s} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{C}\mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (28)$$

В уравнениях (28) векторы  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{s}$  имеют тот же механический смысл, что и в уравнениях (1), (2),  $\mathbf{a}$  – гирационный тензор,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  постоянные матрицы третьего порядка. Показано [12], что при выполнении равенства  $a_2 = a_1$  и определенных условий на параметры уравнений (28) они допускают два инвариантных соотношения

$$x_1 = b_1 v_1 + b_3 v_3, \quad x_2 = b_1 v_2 + c_3 v_3. \quad (29)$$

При этом имеют место дополнительные интегралы

$$x_3 = \ell_0 v_3^{-1} + c_0 v_3^{a_1}, \quad v_3 (c_0 v_3^{a_1} + b_3 v_1 - b_1 v_3 + \lambda_3) = \ell_0, \quad (30)$$

где  $c_0$  и  $\ell_0$  – произвольные постоянные. Аналог линейного по компонентам  $v_1, v_2, v_3$  инвариантного соотношения может возникать из (30) только при условиях  $\ell_0 = 0, a_3 = a_1$ . Однако при этом ограниче-

ния статьи [12] дают равенства  $B_{ij} = 0$ ,  $B_{33} = B_{22} = B_{11}$ , показывающие, что уравнения (28) становятся уравнениями Кирхгофа. То есть нового результата здесь не может быть получено. Однако с точки зрения аналитических свойств двух инвариантных соотношений (29) для уравнений (28) представляет вариант  $\ell_0 = 0$ , который в силу второго равенства системы (30) приводит к соотношению

$$\frac{b_1 v_3 - b_3 v_1 - \lambda_3}{v_3^{a_3}} = c_0.$$

Таким образом, в случае двух линейных инвариантных соотношений уравнений (28) имеет место случай, когда уравнения Пуассона допускают трансцендентный интеграл (31), являющийся обобщением дробно-линейного интеграла (26). При этом зависимость  $x_3 = c_0 v_3^{a_3}$  показывает существование и нелинейных инвариантных соотношений.

#### РЕЗЮМЕ

Досліджено рух гиростата під впливом потенційних та гіроскопічних сил, описане рівняннями Кірхгофа, у випадку, коли вони припускають два лінійних інваріантних співвідношення.

#### SUMMARY

Hyrostate motion under action of potential and gyroscopic forces as well as Kirchgoff equations in the case when they allow two invariant correlations are under consideration in this case.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirchhoff G.R. Uber die Bewegung eines Rotation Korpers in einer Flussigkeit // J. fur die reine und angem. Math. – 1870. – Bd.71. – S.237-262.
2. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып.31. – С.3-17.
3. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – №4. – С.17-29.
4. Скрыпник С.В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1999. – Вып.28. – С.31-40.
5. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикладная математика и механика. – 2003. – Т.67. – Вып.4. – С.573-587.
6. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equation of motion and their transformation; II A new form of the equation of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid // I. Theor. Appl. Mech. – 1986. – Vol.5. – №5. – P.747-762
7. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 221 с.
8. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск: Издательский дом «Удмурдский университет», 2001. – 384 с.
9. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
10. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. – 1982. – Т.266. – №6. – С.1298-1300.
11. Горр Г.В., Узбек Е.К. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т.66. – Вып.3. – С.418-426.
12. Данилейко Е.А. Новое частное решение уравнений движения гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2003. – Вып.33. – С.55-60.

Надійшла до редакції 05.09.2005 р.



УДК 531.38

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ – ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ  
СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА

А.И.Молочинская

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка

В работе на основе результатов [1,2] получены условия существования асимптотически – прецессионных движений сферического по распределению масс гиростата, предельное движение которых описывается решениями уравнений Кирхгофа, полученными в [3, 4].

**Введение.** Исследование свойств асимптотических движений в механике актуально, так как оно позволяет не только рассмотреть вопросы устойчивости предельного движения, но и изучить поведение интегральных кривых дифференциальных уравнений в окрестности изучаемого решения. Эффективным методом анализа таких движений является первый метод Ляпунова [1]. В динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, он применяется в работах [2, 5-8]. В обзорной работе [8] предложена общая методика изучения асимптотически – периодических движений гиростата, базирующаяся на результатах Ляпунова и Пуанкаре. При этом в качестве механической модели рассмотрена механическая система, описываемая дифференциальными уравнениями Д.Гриоли [9].

Заметим, что в динамике твердого тела используются и другие методы исследования асимптотических движений [10-13].

В данной работе рассмотрены прецессионно – асимптотические движения гиростата, эллипсоидом инерции которого в неподвижной точке является сфера. Действующие на гиростат потенциальные и гироскопические силы характеризуются такими свойствами, которые при математическом моделировании приводят к дифференциальным уравнениям Кирхгофа. В качестве предельных движений приняты движения, описываемые решениями [3, 4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обобщенную задачу о движении гиростата с неподвижной точкой, которое описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda \ Bv) \times \omega + (s \ Cv) \times v, \quad \dot{v} = v \times \omega \tag{1}$$

где введены обозначения:  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела носителя;  $v = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – вектор гиростатического момента, характеризующий движение симметричных носимых тел;  $s = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата;  $A = (A_{ij})$  – тензор инерции гиростата, вычисленный в неподвижной точке O;  $B = (B_{ij})$ ,  $C = (C_{ij})$  – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными  $\omega$  и  $v$  обозначает относительную производную по времени  $t$ .

Уравнения (1) имеют первые интегралы:

$$A\omega \cdot \omega + 2(s \cdot v) + Cv \cdot v = 2E, \quad v \cdot v = 1, \tag{2}$$

$$(A\omega + \lambda) \cdot v + \frac{1}{2}(Bv \cdot v) = k.$$

Здесь  $E$  и  $k$  – произвольные постоянные.

Прецессионные движения гиростата относительно вертикали задаются инвариантным соотношением [2]:  $av = a_0 = \cos \theta_0$ , где  $a$  – единичный вектор, неподвижный в теле, а  $\theta_0 = \angle(a, v)$ . Подвижную систему координат выберем так, что  $a = (0,0,1)$ . Тогда векторы  $\omega$  и  $v$  в этой системе координат могут быть представлены в виде [2]:

$$v = (a'_0 \sin \varphi, a'_0 \cos \varphi, a_0), \quad \omega = \dot{\varphi} a + \dot{\psi} v, \tag{3}$$

где  $a'_0 = \sin \theta_0$ , а  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  – скорости собственного вращения и прецессии гиростата. Компоненты вектора  $\omega$  можно определить, исходя из второго равенства (3)

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + a_0 \dot{\psi}. \tag{4}$$

В качестве предельных прецессионных движений рассмотрим прецессии [3, 4]. В первом случае условия на параметры задачи (1) и прецессии (3) следующие:

$$A_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = \mu, \quad B_{11} = B_{22}, \quad B_{12} = B_{23} = 0, \\ C_{12} = C_{23} = 0, \quad C_{22} - C_{11} = \frac{1}{4\mu} B_{13}^2, \quad C_{13} = \frac{1}{4\mu} B_{13} (B_{11} - B_{33} + 3\lambda_3), \\ \lambda_1 = -\frac{3}{4} B_{13}, \quad \lambda_2 = 0, \quad s_1 = -\frac{1}{4\mu} B_{13} (2B_{11} + B_{33} + 2\lambda_3), \quad s_2 = 0, \quad (5)$$

$$s_3 = \frac{1}{4} (C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) - \frac{1}{2\mu} B_{11} (3B_{11} + B_{33} + 2\lambda_3), \quad a_0 = -\frac{1}{2}, \\ \dot{\varphi} = \dot{\psi} = b_0 \sin \varphi + c_0, \quad (6)$$

здесь  $b_0 = \frac{\sqrt{3}}{4\mu} B_{13}$ ,  $c_0 = -\frac{1}{2\mu} (3B_{11} + B_{33} + 2\lambda_3)$ .

Уравнения (6) могут быть проинтегрированы в элементарных функциях времени  $(c_0) b_0$

$$\varphi(t) = \psi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{c_0} \cdot \left( \sqrt{c_0^2 - b_0^2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{c_0^2 - b_0^2}}{2} t - b_0 \right) \right). \quad (7)$$

В силу соотношений (3), (4) решение уравнений (1) в случае (5), (6) имеет вид

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi, \quad v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi, \quad v_3 = -\frac{1}{2}, \\ \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}, \quad (8)$$

где  $\varphi(t)$  выражается формулой (7).

В качестве второго примера рассмотрим регулярную прецессию гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, полученную в [4]. Предполагая, что эллипсоид инерции является сферой, запишем условия существования:

$$A_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = \mu, \quad B_{11} = B_{22}, \quad B_{12} = 0, \\ C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{13} = -mB_{13}, \quad C_{23} = -mB_{23}, \\ \lambda_1 = a_0 B_{13}, \quad \lambda_2 = a_0 B_{23}, \quad s_1 = -ma_0 B_{13}, \quad s_2 = -ma_0 B_{23}, \\ s_3 = ma_0 B_{33} + a_0 (C_{33} - C_{11}) - B_{11} (ma_0 + n) - m\lambda_3 + mn\mu. \quad (9)$$

Так как при этом  $\varphi = nt$ ,  $\psi = mt$ , то соотношения (3) имеют вид:

$$v_1 = a'_0 \sin nt, \quad v_2 = a'_0 \cos nt, \quad v_3 = a_0, \\ \omega_1 = a'_0 m \sin nt, \quad \omega_2 = a'_0 m \cos nt, \quad \omega_3 = n + a_0 m. \quad (10)$$

Для исследование уравнений в вариациях обозначим через  $\Omega$  и  $V$  периодическое решение, которое описывает прецессионное движение (3). В качестве таких решений будем рассматривать решение (8) при условиях (5)-(6) и решение (10) при условиях (9). Положим в уравнениях (1)  $\omega = \omega + \Omega$ ,  $v = v + V$  и перейдем к системе для возмущений. Пренебрегая линейными слагаемыми, выпишем систему первого приближения для случая сферического гиростата ( $A = \mu\delta$ ,  $\delta$  – единичная матрица)

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\mu} ((\lambda \ Bv) \times \Omega + (s \ Cv) \times \gamma + \omega \times B\gamma + v \times C\gamma), \quad (11)$$

$$\dot{\gamma} = v \times \Omega - \omega \times \gamma.$$

Уравнения (11) допускают линейные интегралы, порожденные нелинейными интегралами (2)

$$\begin{aligned} \mu(\omega \ \Omega) - (s \ Cv) \ \gamma &= c_1, \quad v \ \gamma = c_2, \\ \mu(v \ \Omega) + (\lambda \ Bv + \mu\omega) \ \gamma &= c_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $c_i$  - произвольные постоянные.

Известно, что система (11) в случае периодических  $\Omega$  и  $V$  имеет четыре нулевых характеристических числа [2]. Для существования асимптотически прецессионных движений нелинейной системы, соответствующей системе (11), система (11) должна иметь по крайней мере одно положительное характеристическое число. Для исследования этого вопроса сведем изучение характеристических чисел системы (11) к изучению характеристических чисел уравнения Хилла. Введем обозначения [2].

$$T_1 = a \ a_0 v, \quad T_2 = v \ a_0 a, \quad T_3 = a \times v, \quad T_4 = s \ Cv, \quad T_5 = \lambda \ Bv, \quad (13)$$

и новые переменные

$$\begin{aligned} u_1 &= \mu(a \ \Omega), \quad u_2 = \mu(v \ \Omega), \quad u_3 = \mu(T_1 \ \Omega), \\ u_4 &= \gamma \ a, \quad u_4 = \gamma \ v, \quad u_5 = \gamma \ T_5. \end{aligned} \quad (14)$$

При  $a'_0 \neq 0$  векторы  $a, v, T_3$  будут независимы для прецессионных движений (3) и замена (14) не изменяет характеристических чисел системы (11).

С помощью выражений (13), (14) преобразуем интегралы (12) к виду

$$\begin{aligned} a_0'^2 (\dot{\phi} u_1 + \dot{\psi} u_2) - (T_1 \ T_4) u_4 - (T_2 \ T_4) u_5 - (T_3 \ T_4) u_6 &= c_1, \\ u_5 = c_2, \quad u_2 + (b \ T_1) u_4 + (b \ T_2) u_5 + (b \ T_3) u_6 &= c_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$b = (a'_0)^2 (\mu(\dot{\phi} a + \dot{\psi} v) + T_5). \quad (16)$$

Интегралы (15) позволяют ввести новые переменные

$$x_1 = u_3, \quad x_2 = u_4, \quad x_3 = u_6,$$

$$x_4 = \dot{\phi} u_1 + \dot{\psi} u_2 - \frac{1}{a_0'^2} ((T_1 \ T_4) u_4 + (T_2 \ T_4) u_5 + (T_3 \ T_4) u_6), \quad (17)$$

$$x_5 = u_5, \quad x_6 = u_2 + (b \ T_1) u_4 + (b \ T_2) u_5 + (b \ T_3) u_6.$$

В силу равенств (15), (17) имеем

$$\dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0. \quad (18)$$

Это означает, что для исследования ненулевых характеристических чисел системы (11) достаточно рассмотреть линейную систему для  $x_1, x_2, x_3$ . Используя (14), (15), (18) и обозначения (13), (16), (17) из (11) получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h_{11}(t) x_1 + h_{12}(t) x_2 + h_{13}(t) x_3, \\ \dot{x}_2 &= h_{21}(t) x_1 + h_{22}(t) x_2 + h_{23}(t) x_3, \\ \dot{x}_3 &= h_{31}(t) x_1 + h_{32}(t) x_2 + h_{33}(t) x_3, \end{aligned} \quad (19)$$

где в рассматриваемом случае  $h_{ij}(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 h_{11}(t) &= 0, \\
 h_{12}(t) &= \frac{1}{a_0'^2} (\dot{\varphi}^2(\tau_2 \quad B\tau_1) \quad \dot{\varphi}\dot{\psi}(\tau_1 \quad B\tau_1) \quad \dot{\varphi}(\tau_1 \quad C\tau_1) \\
 &\quad a_0'^2 \dot{\varphi}(\nu \quad \tau_4) + G_1(\mathbf{g}_2 \quad \tau_1) \quad G_2(\mathbf{g}_1 \quad \tau_1)), \\
 h_{13}(t) &= \frac{1}{a_0'^2} (\dot{\varphi}^2(\tau_2 \quad B\tau_3) \quad \dot{\varphi}\dot{\psi}(\tau_1 \quad B\tau_3) \quad \dot{\varphi}(\tau_1 \quad C\tau_3) + \\
 &\quad + G_1(\mathbf{g}_2 \quad \tau_3) \quad G_2(\mathbf{g}_1 \quad \tau_3)), \\
 h_{21}(t) &= \frac{1}{\mu}, \quad h_{22}(t) = 0, \quad h_{23}(t) = \dot{\psi}, \quad h_{31}(t) = 0, \\
 h_{32}(t) &= \dot{\psi} \quad \frac{1}{a_0'^2 \mu \dot{\varphi}} [(\tau_1 \quad \tau_4) + a_0'^2 (a_0 \dot{\varphi} + \dot{\psi})(\mathbf{b} \quad \tau_1)], \\
 h_{33}(t) &= \frac{1}{a_0'^2 \mu \dot{\varphi}} [(\tau_3 \quad \tau_4) + (a_0 \dot{\varphi} + \dot{\psi})(\tau_3 \quad \tau_5)],
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_1 &= \dot{\varphi} \mathbf{b}, \quad \mathbf{g}_2 = \dot{\psi} \mathbf{b} + a_0'^2 \tau_4, \\
 G_1 &= a_0'^2 [\dot{\psi} + \frac{1}{\mu} \tau_1 \quad (\tau_3 \times \mathbf{b})], \quad G_2 = a_0'^2 [\frac{1}{\mu} \tau_2 \quad (\tau_3 \times \mathbf{b}) \quad a_0 \dot{\psi}].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Известно, что линейная система (11) допускает решение  $\Omega = \dot{\omega}$ ,  $\Upsilon = \dot{\nu}$ . Преобразуя это решение с помощью (14), (17), получим, что система (19) допускает частное решение

$$x_1 = (\tau_1 \quad \mathbf{g}_2) \quad (\tau_2 \quad \mathbf{g}_1), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \dot{\varphi}. \tag{22}$$

Это означает, что система

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}^T(t) \mathbf{z} \tag{23}$$

сопряженная к системе (19) в силу (22) допускает интеграл

$$[(\tau_1 \quad \mathbf{g}_2) \quad (\tau_2 \quad \mathbf{g}_1)] \mathbf{z}_1 \quad \dot{\varphi} \mathbf{z}_3 = c. \tag{24}$$

При помощи (20) и (24) можно понизить порядок системы (23) и получить из нее уравнение

$$\ddot{\mathbf{z}}_1 + p(t) \mathbf{z}_1 = 0, \tag{25}$$

где

$$p(t) = \frac{1}{\mu} (h_{12}(t) + \frac{h_{32}(t)}{\dot{\varphi}} [(\tau_1 \quad \mathbf{g}_2) \quad (\tau_2 \quad \mathbf{g}_1)]). \tag{26}$$

Уравнение (25) является уравнением Хилла, которое будет иметь одно положительное и одно отрицательное характеристические числа при выполнении условия Ляпунова

$$p(t) \leq 0. \tag{27}$$

Тогда на основании первого метода Ляпунова система дифференциальных уравнений (1) будет допускать однопараметрическое семейство решений, которое описывает движение, асимптотическое к предельному прецессионному движению  $\omega$ ,  $\nu$  в случае  $\dot{\varphi} \neq 0$ ,  $A_{ij} = 0$ , ( $i \neq j$ ),  $A_{ij} = \mu$ , ( $i = j$ ).

2. Анализ уравнения Хилла для решений (8), (10). На основании соотношений (13) и (20)-(21), выпишем функцию  $p(t)$  из (26) в развернутом виде.

$$\begin{aligned}
 p(t) = & \left\{ (\dot{\varphi}(\lambda \ Bv) \ (v \ a_0 \mathbf{a})) + (\mathbf{s} \ Cv + \dot{\psi}(\lambda \ Bv)) \ (\mathbf{a} \ a_0 v) \right\} \\
 & \left\{ (\mathbf{a} \ a_0 v) \ (\mathbf{s} \ Cv + (\lambda \ Bv) (\dot{\psi} + a_0 \dot{\varphi})) + \mu \dot{\varphi}^2 a_0'^2 a_0 \left\{ (a_0'^2 \mu \dot{\varphi})^2 + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{a_0'^2 \mu} (\mathbf{a} \ a_0 v) \ C(\mathbf{a} \ a_0 v) + B(\mathbf{a} \ a_0 v) \ (\dot{\psi}(\mathbf{a} \ a_0 v) \\
 & + \dot{\varphi}(v \ a_0 \mathbf{a})) + a_0'^2 v \ (\mathbf{s} \ Cv) \left. \right\} \\
 & + \frac{1}{a_0'^2 \mu^2} \left\{ (\lambda \ Bv) \ (\mathbf{a} \ a_0 v) + \mu \dot{\varphi} a_0'^2 \right\} \left\{ (\lambda \ Bv) \ \mathbf{a} + \mu \dot{\varphi} \right\} + \\
 & + \left\{ (\mathbf{s} \ Cv + \dot{\psi}(\lambda \ Bv)) \ (\mathbf{a} \ a_0 v) + \mu \dot{\varphi} \dot{\psi} a_0'^2 \right\} \left\{ (\lambda \ Bv) \ v + \mu \dot{\varphi} a_0 \right\} \\
 & \left. (a_0'^2 \mu^2 \dot{\varphi})^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Учитывая в (28) условия (5)-(7) на параметры решения (8), получим

$$p(t) = p_1(t) \frac{3}{4\mu} (C_{11} \ C_{33}). \tag{29}$$

Здесь

$$p_1(t) = \frac{D_0 + D_1 \sin \varphi + D_2 \sin^2 \varphi + D_3 \sin^3 \varphi + D_4 \sin^4 \varphi}{144\mu^2 B_{13}^2 (R_0 + R_1 \sin \varphi)^2}, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 R_0 = & 2(B_{13}(7B_{11} + 5B_{33}) + 8\mu C_{13}), \quad R_1 = 3\sqrt{3} B_{13}^2, \\
 D_0 = & 324B_{13}^8 + 72B_{13}^6(7B_{11} + 5B_{33})^2 + 1152\mu B_{13}^5 C_{13}(7B_{11} + 5B_{33}) + \\
 & 8B_{13}^4((7B_{11} + 5B_{33})^2 [377B_{11}^2 + B_{33}(122B_{11} + 5B_{33})] + 576\mu^2 C_{13}^2) \\
 & 64\mu B_{13}^3 C_{13}(7B_{11} + 5B_{33})[1013B_{11}^2 - B_{33}(506B_{11} + 65B_{33})] \\
 & 1536\mu^2 B_{13}^2 C_{13}^2 [331B_{11}^2 - B_{33}(262B_{11} + 55B_{33})] + \\
 & 4096\mu^3 B_{13} C_{13}^3 (65B_{11} + 31B_{33}) + 65536\mu^4 C_{13}^4. \\
 D_1 = & 12\sqrt{3} B_{13}^3 \{ 18B_{13}^4 (3B_{11} + 5B_{33}) + \\
 & B_{13}^2 (7B_{11} + 5B_{33}) [579B_{11}^2 + B_{33}(266B_{11} + 115B_{33})] \\
 & 16\mu B_{13} C_{13} [363B_{11}^2 - B_{33}(266B_{11} + 115B_{33})] + \\
 & 64\mu^2 C_{13}^2 (21B_{11} + 23B_{33}) \}, \\
 D_2 = & 54B_{13}^4 \{ B_{13}^2 [9B_{13}^2 + 353B_{11}^2 + B_{33}(586B_{11} + 365B_{33})] + \\
 & 8\mu B_{13} C_{13} (31B_{11} + 73B_{33}) + 128\mu^2 C_{13}^2 \}, \\
 D_3 = & 81\sqrt{3} B_{13}^6 [B_{13}(59B_{11} + 81B_{33}) + 64\mu C_{13}], \quad D_4 = 2178B_{13}^8,
 \end{aligned} \tag{31}$$

Для решения (10) функция  $p(t)$  такова:

$$p(t) = \frac{1}{4\mu} \left\{ 2a'_0 (B_{13} \sin nt + B_{23} \cos nt) - 3n\mu - 2(\lambda_3 - a_0(m\mu + B_{33})) \right\}^2 + \\ + \frac{1}{\mu} a_0'^2 (m\mu(B_{11} + B_{33}) + B_{11}^2) - \frac{\mu}{4} (5n^2 - 4m^2 a_0'^2) \\ n(\lambda_3 - a_0(m\mu + B_{33})) - a_0^2 (C_{11} - C_{33}). \quad (32)$$

Представления функции  $p(t)$  в исследовании указанных решений в виде (29), (32) дано с целью выявления общих достаточных условий существования положительного характеристического числа уравнения Хилла (25).

Будем считать, что параметры задачи с уравнениями (1) таковы, что величина  $C_{11} - C_{33}$  принимает большие положительные значения, а остальные параметры задачи ограничены по своей величине. Тогда в силу структуры выражений (29)-(32) можно добиться выполнения условия (27). Следовательно, в исследуемых решениях уравнение Хилла при данных предположениях имеет положительное характеристическое число. Это обеспечивает существование однопараметрических рядов Ляпунова, которые являются решениями уравнений (1) и описывают асимптотически прецессионные движения гиростата для предельных движений (8), (10).

#### РЕЗЮМЕ

Отримані умови існування асимптотично - прецесійних рухів сферичного за розподілом мас гіростату, граничний рух яких описується періодичними рішеннями рівнянь Кірхгофа.

#### SUMMARY

Conditions of existence asymptotically precession motions spherical on distribution of mass of gyrost, which limiting motions is described by periodic solutions of Kirchhoff equations are received.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собр.Соч.; В 5 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. – 1956. – Т.2. – С.7-263.
2. Горр Г.В., Думбай Д.И. Об асимптотически прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып.26(1). – С.20-28.
3. Мазнев А.В. Прецессионно-изоконические движения в одном решении уравнений Кирхгофа // Вестник Донецкого университета. – 2001. – Вып.2. – С.12-16.
4. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамики систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т.67. – Вып.4. – С.573-587.
5. Вархалев Ю.П., Горр Г.В. Асимптотически маятниковые движения гиростата Гесса – Аппельрота // Прикл. математика и механика. – 1984. – Т.48. – Вып.3. – С.490-493.
6. Брюм А.З., Горр Г.В. Достаточные условия существования асимптотически маятниковых движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т.50. – Вып.4. – С.681-684.
7. Брюм А.З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // Механика твердого тела. – 1987. – Вып.19. – С.68-72.
8. Вархалев Ю.П., Горр Г.В. Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1992. – Вып.24. – С.25-41.
9. Grioli G. Questioni di dinamica del corpo rigidi // Atti Accad. Nat. Lincei, Rend. Cl. sci. tis., mat e natur. – 1963. – 35, 1-2. – P.35-39.
10. Болотин С.В., Козлов В.В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. Моск.ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1980. – Вып.4. – С.84-89.
11. Козлов В.В. Асимптотические решения уравнений классической механики // Прикл. математика и механика. – 1982. – Т.46. – Вып.4. – С.573-577.
12. Козлов В.В., Паломодов В.П. Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. – 1982. – Т.263. – №2. – С.285-289.
13. Маркеев А.П. О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – №4. – С.29-36.

Надійшла до редакції 17.11.2005 р.

## ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ НА ПАРАМЕТРЫ ГИДРОПУШКИ

С.А.Веремеев, А.Н.Семко

Импульсные струи жидкости высокой и сверхвысокой скорости (1000 м/с и выше) нашли широкое применение в различных технологических процессах, таких как: разрушение негабаритов и бетонных блоков, пробивание и сверление отверстий в породах и твердых материалах, проходка горных выработок, зачистка поверхностей и т.д. [1, 2]. Одной из установок для получения импульсных струй является гидропушка, при помощи которой удалось получить струи со скоростью свыше 3000 м/с [3, 4]. Известно несколько конструкций гидропушек [1]: гидропушка с поршнем безударного и ударного действия, гидропушка с уступом во входном сечении в сопло, гидропушка с пороховым приводом. Теоретически внутренняя баллистика гидропушки исследовалась разными авторами в разных постановках [1, 5-12]. В работах [5, 6] в рамках модели идеальной и несжимаемой жидкости для квазиодномерного течения получены аналитические выражения для распределения скорости и давления в длине гидропушки. Экспериментальные исследования показали, что при больших скоростях пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к большому расхождению с теорией. Поэтому в дальнейших исследованиях сжимаемость жидкости уже учитывалась [7-11]. В этом случае движение идеальной сжимаемой жидкости в гидропушке описывалось уравнениями нестационарной газовой динамики, которые решались численно. Учет сжимаемости жидкости позволил добиться лучшего согласования теории с экспериментом и правильно отразить характер волновых процессов в гидропушках ударного действия. В работе [12] анализируется влияние сжимаемости жидкости на параметры гидропушки и устанавливаются критерии учета сжимаемости. Показано, что если число Маха, рассчитанное по максимальной скорости жидкости меньше единицы, то сжимаемостью жидкости можно пренебречь.

Обычно при описании внутренней баллистики гидропушки вязкость жидкости не учитывается. Оценка сил вязкости, как правило, производится по числу Рейнольдса. Для реальных гидропушек число Рейнольдса составляет величину порядка  $10^6$ , поэтому вязкостью жидкости пренебрегают. Более точные оценки, в которых сравнивались параметры течения для вязкой и идеальной жидкости не проводились. В данной работе на примере стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости оценивается влияние вязкости на параметры гидропушки. Оценка выполнена методом исчезающей вязкости [13] для жидкостей с уменьшающейся вязкостью. Расчеты проведены методом конечных элементов при помощи программного модуля FLOTRAN пакета ANSYS. Для реальной гидропушки [11] получены количественные оценки потерь на трение, неравномерности распределения скорости по поперечному сечению, средней и расходной скорости для сильно вязкой (глицерин), нормальной (вода) и слабо вязкой жидкостей. По критериям подобия Фруда, Эйлера и Рейнольдса оценены порядки сил тяжести, давления и инерции и толщины пограничного слоя в сопле и коллиматоре гидропушки. Показано, что для воды потери на трение незначительны и влиянием ее вязкости в гидропушке можно пренебречь. Сделано заключение о допустимости квазиодномерного приближения для описания течения в гидропушке.

**Постановка задачи.** На рис. 1 приведена схема пороховой гидропушки, которая работает следующим образом. Продукты сгорания пороха 1 толкают поршень 2, который разгоняет водяной заряд 3 в цилиндрическом стволе 4. Достигнув входа в сужающееся сопло 5, вода начинает интенсивно ускоряться, приобретая в конце сопла большую скорость. Сопло заканчивается коллиматором 6, в котором гасится радиальное течение жидкости и выравнивается распределение скоростей по длине. Это позволяет получить компактную импульсную струю жидкости с постоянной по длине скоростью. На рис. 1 изображен момент, когда вода полностью заполняет сопло и коллиматор и начинается истечение струи. Как видно, движение жидкости в гидропушке нестационарное и процесс носит импульсный характер, длительность которого составляет несколько миллисекунд. Из сказанного следует, что наиболее точной для гидропушки является модель вязкой сжимаемой жидкости и нестационарное осесимметричное течение. В такой постановке задача может быть решена только численно. Однако и при численном решении здесь возникают очень большие трудности, которые еще не преодолены. Дополнительные затруднения возникают из-за наличия подвижных границ (передний и задний фронт жидкости), законы движения ко-

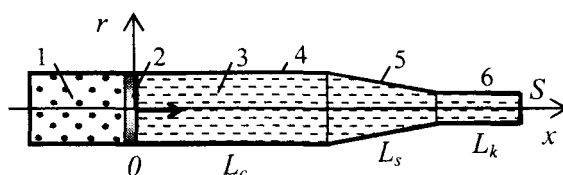


Рис. 1

торых не известны заранее и определяются в ходе решения самой задачи. Поэтому, чтобы получить какие-то результаты делают различные упрощения: пренебрегают вязкостью и сжимаемостью жидкости, считают течение квазиодномерным.

Оценку влияния вязкости произведем в момент, когда начинается истечение струи и вода полностью заполняет сопло и коллиматор. В этот момент скорость жидкости и поверхность ее соприкосновения с корпусом гидропушки максимальные, поэтому силы вязкого трения наибольшие. Для упрощения жидкость считаем несжимаемой. Таким образом, рассматривается осесимметричное установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости на участке OS, которое описывается уравнениям Навье-Стокса и неразрывности в виде

$$\rho \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v},$$

$$\text{div } \vec{v} = 0,$$

где  $\vec{v}$ ,  $p$  и  $\rho$  – скорость, давление и плотность,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

Граничные условия прилипания на стенке гидропушки, постоянства давления и скорости на входе, постоянства давления на выходе, симметрии на оси гидропушки имеют вид:

$$v_x|_G = 0, \quad v_r|_G = 0,$$

$$v_x|_{x=0} = v_c, \quad p|_{x=0} = p_c,$$

$$p|_{x=L} = p_a, \quad v_r|_{r=0} = 0.$$

Здесь  $v_x$  и  $v_r$  – осевая и радиальная компоненты скорости,  $p_c$  и  $v_c$  – давление и скорость на входе,  $p_a$  – атмосферное давление,  $L$  – координата конца коллиматора,  $G$  – внутренняя поверхность проточной части гидропушки, находящаяся в контакте с жидкостью. Начало координат помещено на входе гидропушки.

Расчеты проводились для реальной пороховой гидропушки, размеры и параметры которой взяты из работы [11]:  $R_c = 16 \text{ мм}$  и  $R_s = 7,5 \text{ мм}$  – радиусы ствола и сопла,  $L_c = 392 \text{ мм}$ ,  $L_s = 70 \text{ мм}$  и  $L_k = 60 \text{ мм}$  – длины ствола, сопла и коллиматора,  $p_c = 679 \text{ МПа}$ ,  $v_c = 259 \text{ м/с}$  (рис. 1). Значения давления и скорости на входе подобраны такими, чтобы получить при стационарном течении распределение скорости по длине гидропушки близкое к нестационарному для реальной установки на начало истечения. Исследовались вода и глицерин, плотность и вязкость которых равны  $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_w = 0,0013 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ,  $\rho_g = 1260 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_g = 1,5 \text{ Па}\cdot\text{с}$  при  $T_0 = 283 \text{ К}$  и  $p_0 = 101 \text{ кПа}$ . Для оценки потерь на трение использовались модельные слабо вязкие жидкости с плотностью  $\rho_w$  и  $\rho_g$  и вязкостью  $\mu = 10^{-15} \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

**Расчет параметров течения.** Течение жидкости в гидропушке рассчитано при помощи пакета ANSYS, который является одним из наиболее развитых и универсальных программных средств, работающих на основе метода конечных элементов [14]. Аналитический комплекс ANSYS в настоящее время обладает достаточной функциональной полнотой и содержит в своей среде все необходимые для работы расчетчика средства.

Внутри пакета ANSYS есть встроенный программный модуль FLOTTRAN, который предназначен для решения задач гидрогазодинамики. В библиотеке FLOTTRAN имеется двумерный четырехузловой элемент FLUID141, который позволяет рассчитывать гидродинамические параметры турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости. При расчетах используется  $k-\epsilon$  модель турбулентности, которая гарантирует реалистичную картину течения, и лучше всего подходит для течений в трубах и каналах. Осесимметричное движение жидкости рассчитывается в цилиндрической системе координат.

Расчетная область разбивается на элементы, которые распределены неравномерно: там, где большие градиенты параметров течения, элементы расположены гуще и имеют меньшие размеры, а там, где

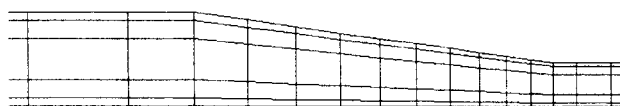


Рис. 2

параметры течения изменяются незначительно – элементы расположены реже и имеют большие размеры (рис. 2). Элементы располагались густо в сопле и коллиматоре, возле стенок и оси симметрии. Оптимальная геометрия сетки определялась подбором: для каждой отдельно взятой области (ствол, со-



плю и коллиматор) количество элементов увеличивалось до тех пор, пока результаты расчетов в пределах заданной погрешности переставали зависеть от разбиения. В итоге получена сетка, состоящая из 3150 элементов и 3286 узлов. Такое разбиение расчетной области позволило заметно повысить точность расчетов.

**Метод исчезающей вязкости.** Модуль FLOTTRAN обладает громадными возможностями моделирования и исследования течений вязкой жидкости. Однако в модуле отсутствует модель идеальной жидкости. Поэтому для определения потерь на трение и оценки влияния сил вязкости на параметры гидропушки использован метод исчезающей вязкости [13]. Идея метода состоит в том, что вместо идеальной жидкости рассчитывается течение вязкой жидкости с очень маленьким коэффициентом вязкости.

Схематически картину течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса можем представить следующим образом. Главное воздействие сил вязкости проявляется в пограничном слое, а вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной. Если совершить предельный переход  $\mu \rightarrow 0$ , что равносильно  $Re \rightarrow \infty$ , то согласно формуле Прандтля  $\delta \sim 1/\sqrt{Re}$  толщина пограничного слоя, в котором вязкость существенна, также устремится к нулю [15, 16]. Таким образом, область течения, в которой жидкость можно считать идеальной, практически совпадает со всей областью течения жидкости. На поверхности для вязкой жидкости всегда выполняется условие прилипания. Поэтому при предельном переходе, когда толщина пограничного слоя стремится к нулю, значения скорости на границе пограничного слоя стремятся к своим пределам неравномерно, а потому будут терпеть разрыв [13]. В этом есть определенная трудность в численной реализации метода исчезающей вязкости, т.к. разрыв скорости не выделяется и размывается на несколько элементов (обычно 3–5 элемента). Поэтому при исчезающей малой вязкости толщина пограничного слоя будет определяться размерами элементов, а не значением коэффициента вязкости.

**Анализ результатов расчетов.** Расчеты проведены для гидропушки, параметры которой указаны в разделе 1. На рис. 3 изображено распределение скорости и давления вдоль оси гидропушки для обычной воды (кривые 1 и 2). Сплошные кривые – расчет при помощи пакета ANSYS, пунктирные – расчет методом Годунова для квазиодномерного течения идеальной слабо сжимаемой жидкости [11, 12, 17]. Метод слабо сжимаемой жидкости состоит в том, что в уравнении состояния воды в форме Тета формально увеличивается показатель адиабаты в 100 раз, что соответствует уменьшению сжимаемости жидкости и увеличению скорости звука в ней в 10 раз. В этом случае для течения жидкости будут выполняться условия, позволяющие пренебречь ее сжимаемостью, сформулированные в [12]: число Маха  $M = 0,1 \ll 1$ .

Как видно, в стволе давление и скорость на оси устанавливаются практически постоянными и равными соответственно  $p_1 = 679 \text{ МПа}$ ,  $v_1 = 259 \text{ м/с}$ . Быстрее всего параметры течения изменяются в сопле: скорость возрастает в 4,5 раза, а давление убывает в 10 раз. В коллиматоре скорость возрастает на 4% от  $1145 \text{ м/с}$  до  $1191 \text{ м/с}$ , а давление убывает от  $65,1 \text{ МПа}$  до  $0,1 \text{ МПа}$ .

Сравнение показывает хорошее совпадение результатов расчетов в точной осесимметричной постановке для вязкой жидкости и приближенной квазиодномерной для идеальной слабо сжимаемой жидкости. Есть небольшие различия в сопле и в коллиматоре. Для идеальной жидкости давление и скорость в коллиматоре постоянные (пунктирные кривые), а для вязкой – изменяются. Эти изменения связаны с потерями на трение и перестройкой профиля скорости в разных сечениях коллиматора. Из анализа результатов следует, что квазиодномерное приближение хорошо описывает течение воды в гидропушке, для которой крутизна профиля сопла составляет  $|dR/dx| = 0,12$ . Этим оправдано широкое применение квазиодномерного приближения для описания внутренней баллистики гидропушек и водометов [1]. Также результаты расчетов показали, что влияние вязкости воды на параметры гидропушки (максимальную скорость и давление) незначительное. Этим объясняется широкое применение модели идеальной жидкости для описания внутренней баллистики гидропушки, которая дает хорошее совпадение с экспериментом. Метод слабо сжимаемой жидкости позволяет по алгоритмам, предназначенным для расчета сжимаемой жидкости, получить решение для несжимаемой жидкости, формально увеличив значение показателя адиабаты в уравнении изоэнтропы воды в нужное число раз. Этот метод позволяет контролировать работоспособность алгоритма, сравнивая численное решение с аналитическим для идеальной несжимаемой жидкости.

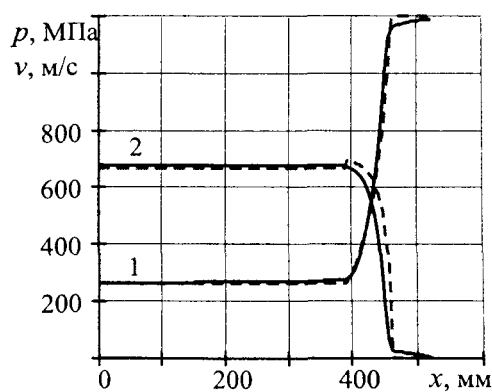


Рис. 3

На рис. 4 приведені профілі осевої швидкості для трьох рідин з сильно різною в'язкістю: вода, слабо в'язка рідина, гліцерин (криві 1, 2 і 3) в трьох сеченнях (в стволі для  $x = 100\text{ мм}$ , в сопелі для  $x = 422\text{ мм}$  і в коліматорі для  $x = 500\text{ мм}$ , рис. а), б) і в). Значення швидкості віднесені до максимального значення, а координати – до радіуса проточної частини в даному сеченні. Як видно з графіків, товщина пограничного шару, в якому швидкість змінюється від нуля до  $0,9 v_{\text{max}}$  для слабо в'язкої рідини, води і гліцерина становить в коліматорі (рис. 4в) 1, 5 і 25 %. Профіль швидкості для гліцерина близький до параболічного, а для води і моделі рідини – до прямокутного. В сопелі, де течія зсужається, відносна товщина переходного шару ще менше (рис. 4б). З наведених результатів можна зробити висновок, що вплив в'язкості води на параметри течія в різних частинах гідропушки незначительний і реальну воду можна з великою точністю вважати ідеальною.

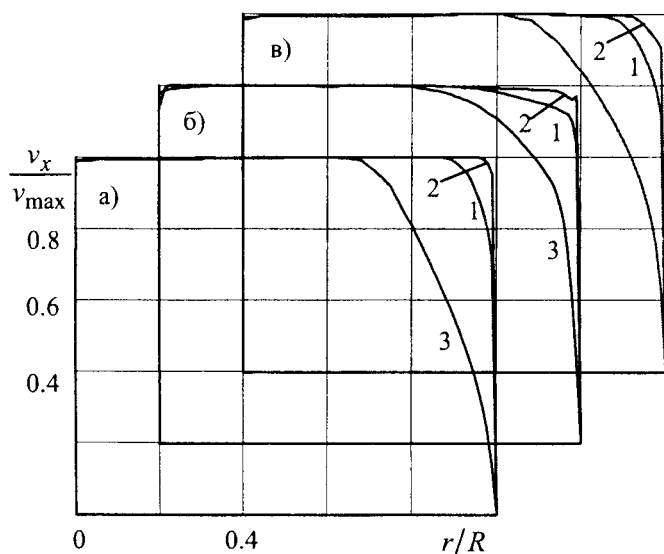


Рис. 4

Інтегрально втрати на тертя  $\epsilon$  оцінимо, по відношенню повного напора на виході для в'язкої і ідеальної рідини:

$$\epsilon = 1 - \frac{p_s + \frac{\rho \cdot v_s^2}{2}}{p_{sid} + \frac{\rho \cdot v_{sid}^2}{2}}$$

В таблиці наведені результати оцінки впливу в'язкості на гідродинамічні параметри для розглянутих рідин. Як видно, втрати повного напора на тертя для води менше 4 %, для в'язкої води з в'язкістю гліцерина досягають 32 %, а для гліцерина становлять 27,5 %. Ці результати ще раз підтверджують те, що течія води і інших не сильно в'язких рідин в гідропушці можна розглядати без урахування їх в'язкості.

Рідина	В'язкість $\mu$ , Па·с	Рідинна швидкість, м/с	Максимальна швидкість, м/с	Втрати на тертя, %	Зміна швидкості в коліматорі, м/с	Зміна тиску в коліматорі, МПа
вода	0,0013	1146	1191	3,6	46	65
слабо в'язка	$10^{-15}$	1167	1191	0	26	43
сильно в'язка	1,5	960	1151	32,3	143	201
гліцерин	1,5	890	1065	27,5	150	200
слабо в'язкий	$10^{-15}$	1046	1065	0	25	44

Точність розрахунків можна перевірити виконанням інтеграла Бернуллі, згідно якого повний напор вздовж ліній течія для ідеальної рідини повинен залишатися постійним. В розрахунках повний напор на осі гідропушки для слабо в'язкої рідини в стволі перевищує повний напор в коліматорі на 0,33%. Для ідеальної рідини при розрахунку в квазіоднорідній постановці методом Годунова інтеграл Бернуллі виконувався з точністю 0,007%. Ці дані підтверджують достовірність результатів розрахунків.

**Оцінка сил в'язкості і товщини пограничного шару за критеріями подібності.** На частинці рухомої рідини в гідропушці діють сили тяжкості, тиску і в'язкого тертя. Запишемо рівняння імпульсів для руху в'язкої несжимаємої рідини в безрозмірній формі:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{Fr} \cdot \vec{f} - \frac{1}{Eu} \nabla p + \frac{1}{Re} \cdot \Delta \vec{v}.$$

Здесь  $Fr = v_0^2 / (f_0 l_0)$  – число Фруда,  $Eu = p_0 / (\rho_0 v_0^2)$  – число Эйлера,  $Re = (\rho_0 v_0 l_0) / \mu_0$  – число Рейнольдса, определяемые из характерных величин процесса (размера области  $l_0$ , скорости  $v_0$ , и давления  $p_0$ ), а также свойств используемой жидкости (плотности  $\rho_0$  и вязкости  $\mu_0$ ).

Оценим числовые значения критериев подобия для разных частей рассматриваемой гидропушки. В стволе гидропушки в качестве масштабов выберем: диаметр ствола  $2R_c$ , скорость воды в стволе  $v_c = 259 \text{ м/с}$ , максимальное давление  $p_c = 679 \text{ МПа}$ . В сопле характерными величинами будут: диаметр сопла  $2R_s$ , скорость и давление воды на выходе из сопла  $v_s = 1145 \text{ м/с}$ ,  $p_s = 65,1 \text{ МПа}$ . Тогда для течения в стволе получим следующие значения критериев подобия:  $Re = 6,4 \cdot 10^6$ ,  $Fr = 2,1 \cdot 10^5$ ,  $Eu = 10$ , а для течения в сопле соответственно  $Re = 1,3 \cdot 10^7$ ,  $Fr = 8,9 \cdot 10^6$ ,  $Eu = 0,05$ . Аналогичные оценки для глицерина дают следующие значения критериев подобия в стволе:  $Re = 7,0 \cdot 10^3$ ,  $Fr = 2,1 \cdot 10^5$ ,  $Eu = 8$ ; в сопле:  $Re = 1,1 \cdot 10^4$ ,  $Fr = 5,4 \cdot 10^6$ ,  $Eu = 0,2$ . Из анализа этих данных следует, что для воды силами вязкости и тяжести можно пренебречь. Для глицерина силой тяжести можно пренебречь, а вязкость надо учитывать, т.к. числа Рейнольдса для глицерина на три порядка меньше, чем для воды.

При заданных числах Рейнольдса течение воды в гидропушке будет турбулентным. Как известно, при турбулентном течении в круглых трубах профиль скорости устанавливается на начальном участке, длина которого по разным оценкам составляет от 50 до 100 диаметров трубы от входа в трубу [16]. Для рассматриваемой гидропушки длина ствола, заполненного водой  $L_c / 2R_c = 12$ , что гораздо меньше начального участка. Поэтому профиль скорости не успевает установиться и будет близок к прямоугольному (кривая 1 на рис. 4 а). В этом случае в потоке можно выделить ядро с постоянной скоростью, которое занимает около 90% поперечного сечения, и пограничный слой, толщиной около 10% от радиуса трубы, в котором скорость изменяется от нуля до максимальной. Толщину пограничного слоя оценим по формуле  $\delta = 0,37 x Re_x^{-1/5}$ , которая справедлива для турбулентного пограничного слоя на тонкой пластине или удлиненных телах [15], где  $x$  – расстояние от начала трубы,  $Re_x = \rho_0 v_0 / x \mu_0$  – местное число Рейнольдса. Подстановка числовых данных для воды дает:  $\delta_c = 0,24 R_c$  для течения в стволе и  $\delta_s = 0,13 R_s$  для течения в сопле. Аналогичные оценки для глицерина дают толщину пограничного слоя в 4 раза больше:  $\delta_c = 0,95 R_c$  и  $\delta_s = 0,52 R_s$ .

Для сравнения, толщина ламинарного пограничного слоя для воды, вычисленная при тех же условиях по формуле  $\delta = 4,64 x Re_x^{-1/2}$ , дает величины на порядок меньше:  $\delta_c = 0,013 R_c$  для течения в стволе и  $\delta_s = 0,007 R_s$  для течения в сопле. Для глицерина толщина ламинарного пограничного слоя почти в 35 раз больше, чем для воды. Из этих оценок видно, что пограничным слоем при течении воды в гидропушке можно пренебречь, а глицерина – нет. Отметим, что сопло гидропушки является коническим и сужающимся (конфузорным), а значит, толщина пограничного слоя будет меньше, чем в цилиндрическом канале, из-за поджатия потока [15, 16]. Напомним, что толщина пограничного слоя  $\delta$  равна расстоянию, на котором скорость жидкости на 1% меньше скорости набегающего потока, и определяется довольно приблизительно. Лучше для оценки использовать толщину вытеснения  $\delta^* = \delta/3$  или толщину потери импульса  $\delta^{**} = 2\delta/15$ , которые имеют физический смысл.

**Оценка двумерного характера течения в сопле гидропушки.** С помощью полученных результатов можно оценить правомерность квазиодномерного приближения, которое широко применяется для расчета параметров внутренней баллистики гидропушек и водометов [1]. На рис. 5 приведено поле скоростей и изобары (длина вектора пропорциональна скорости, а давление дано возле изобар), а на рис. 6 распределение относительной радиальной и осевой скорости на оси гидропушки в сопле и прилегающих к нему участках. Максимальная радиальная скорость  $v_{r \max}$  отнесена к максимальной осевой  $v_{x \max}$ , а

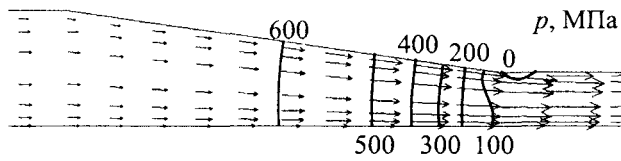


Рис.5

максимальная осевая  $v_{x \max}$  – к расходной  $v_Q$  в тех же сечениях (кривые 1 и 2).  
 Как видно из рис. 5 векторы скорости в каждом сечении почти параллельны друг другу и мало изменяются по длине. Влияние вязкости сказывается в настолько тонком пограничном слое, что при этом масштабе он не отражается на рисунке. Изобары практически совпадают с плоскими поперечными сечениями, градиент давления в радиальном направлении близок к нулю. Такое распределение параметров позволяет пренебречь их изменением по сечению, считая их равным некоторым средним, а учитывать только осевое изменение. У входа в коллиматор возле его поверхности возникает кавитация, на что указывает изобара с нулем давления. Кавитация возникает потому, что коническое сопло и коллиматор стыкуются без плавного сопряжения, в результате чего поток воды отрывается от стенки.

Как видно из рис. 6 в сопле радиальная скорость на порядок меньше осевой, а осевая скорость мало отличается от расходной. Например, в сечениях  $x_1 = 392 \text{ мм}$ ,  $x_2 = 422 \text{ мм}$  и  $x_3 = 452 \text{ мм}$  (перед соплом, по середине сопла и за соплом) отношения максимальных значений скоростей  $v_{r \max} / v_{x \max}$

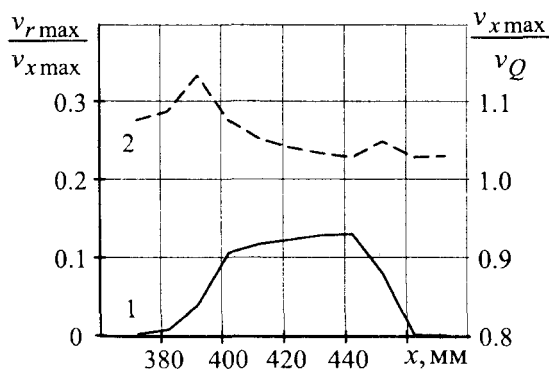


Рис. 6

составляют 0,04, 0,12 и 0,08 соответственно. Из анализа этих данных следует, что радиальным течением в гидропушке можно пренебречь, рассматривая течение жидкости в квазиодномерной постановке. В такой постановке радиальное течение учитывается интегрально через переменную площадь поперечного сечения, которая входит в уравнение неразрывности. Эти выводы подтверждаются хорошим совпадением результатов расчетов, приведенных ранее на рис. 2.

Для данной гидропушки предположение о малости угла наклона скорости и однородности давления по сечению хорошо соответствует реальным условиям, поэтому одномерная теория дает

хорошие результаты. Однако существуют такие течения в каналах, в которых заведомо имеются большие углы наклона скорости и большие поперечные ускорения (например, гидропушка с уступом во входном сечении в сопло [18]). В этих случаях одномерная теория дает удовлетворительные для практики сведения для суммарных явлений между двумя сечениями до и после уступа, в которых предположение о малости угла наклона скорости более или менее удовлетворяется (в окрестности уступа углы наклона могут быть значительными).

Таким образом, при помощи вычислительного пакета ANSYS FLOTTRAN проведено численное моделирование стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости внутри гидропушки. Получены поля гидродинамических величин для воды, глицерина и слабо вязких жидкостей; выполнена оценка влияния вязкости на параметры течения; определены потери на трение, составившие для воды и глицерина соответственно 4% и 28%. Сравнение результатов для осесимметричного и квазиодномерного течения показало допустимость квазиодномерного приближения и пренебрежения вязкостью для описания внутренней баллистики гидропушки. Достоверность результатов расчетов проверялась по выполнению законов сохранения и сравнением с результатами, полученными другими методами.

## РЕЗЮМЕ

На основі обчислювальної кінцевоелементної системи ANSYS FLOTTRAN здійснено чисельне моделювання стаціонарної течії рідини усередині гідрогармати. Отримані поля гідродинамічних величин і їх розподіл для води, глицерину та модельної слабо в'язкої рідини. Оцінка впливу в'язкості здійснена різними засобами: методом зникаючої в'язкості, по числу Рейнольдса і товщині пограничного шару, за допомогою рівняння Бернуллі. Показано, що для води впливом в'язкості можна нехтувати. Установлено, що оцінки по числу Рейнольдса добре узгоджуються з результатами точних осесиметричних розрахунків для в'язкої рідини і можуть бути використані для вибору моделі в'язкої або ідеальної рідини. Також розглянута правомірність квазіодновимірного наближення течії в соплі гідрогармати.

SUMMARY

The finite element-based program ANSYS FLOTRAN is used for the simulation of steady-state fluid flow inside the hydrocannon as well as for validity of quasion-dimensional approximation of fluid flow in the hydrocannon nozzle. Distributions of hydrodynamic parameters are obtained for viscous incompressible water, glycerol and model low viscosity fluid. The friction loss is estimated using disappearing-viscosity method, Reynolds number and boundary layer thickness and by the Bernoulli equation. It was shown that for water viscosity influence is neglected. It was determined that Reynolds number rating is in good accord with results obtained by accurate axisymmetric computation for viscous liquid and that it can be used when choosing viscous or ideal fluid model.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Атанов Г.А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К: Вища шк., 1987. – 155 с.
2. Vijay M.M. Pulsed jets: fundamentals and applications // Proc. 5th Pacific Rim Int. Conf. on Water Jet Technology. New Delhi, India, February 3-5, 1998. – P.610-627.
3. Cooley W.C., Lucke W.N. Development and Testing of a Water Cannon for Tunneling // Proc. 2nd Int. Symp. on Jet Cutting Technology. Cambridge (England). – 1974. – P.103-117.
4. Edney B. Experimental studies of pulsed water jets // Proc. 3rd Int. Symp. on Jet Cutting Technology. Chicago (Illinois). – 1976. – P.11-26.
5. Кавитационный эффект в экспоненциальном струйном насадке / Б.В.Войцеховский, Ю.А.Дудин, Ю.А.Николаев и др. // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР. – 1971. – Вып.9. – С.7-11.
6. Ryhming J.L. Analysis of unsteady incompressible jet nozzle flow // J. Appl. Math. and Phys. – 1973. – Vol.24. – P.149-164.
7. Glenn L.A. The mechanics of the impulsive water cannon // Comp. and Fl. – 1975. – V.3. – P.197-215.
8. Atanov G.A. Interior ballistics of impulsive water jet // Proc. 6th Int. Symp. on Jet Cutting Technology. BHRA, Cranfield. Bedford (England). – 1982. – P.141-159.
9. Семко А.Н. Расчет течения жидкости в гидропушке численным методом с искусственной вязкостью // Прикладная гидромеханика. – 2000. – Т.2(74). – С.88-91.
10. Атанов Г.А., Семко А.Н., Украинский Ю.Д. Исследование внутренней баллистики гидропушки // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1983. – №4. – С.168-170.
11. Atanov G.A., Semko A.N., Petrenko O.P., Geskin E.S., Samardzic V., Goldenberg B. Peculiarities of the powder hydrocannon operation // Proc. 2003 ASME Int. Mech. Eng. Congress & Exposition. Washington, D.C., November 16-21, 2003. – IMECE2003-42788
12. Семко А.Н. О влиянии сжимаемости жидкости на параметры гидропушки // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т.74. – №1. – С.1-5.
13. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз, 1963. – 728 с.
14. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
15. Повх И.В. Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, 1976. – 502 с.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
17. Семко А.Н. Внутренняя баллистика порохового водомета и гидропушки // Теорет. и прикл. механика. – Харьков: Основа, 2002. – Вып.35. – С.181-185.
18. Атанов Г.А., Семко А.Н. О соотношении между динамическим давлением ультраструи и статическим давлением в установке // Аэрогазодинамика нестационарных процессов. – Томск, Томский ун-т, 1987. – С.9-13.

Надійшла до редакції 06.08.2005 р.

УДК 532.543

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЫБРОСОВ В АТМОСФЕРЕ ОТ ИСТОЧНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В ОБЛАСТИ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ**

*А.Б.Ступин, В.С.Оверко*

Рост промышленных мощностей и сопутствующее ему загрязнение биосферы различными типами загрязняющих веществ требуют решения задач экологической направленности.

При этом особую актуальность приобретают исследования по расчёту диффузии загрязняющих веществ в атмосфере. Широкое развитие получили эмпирические модели и модели, основанные на аналитическом решении уравнения диффузии. При этом значительный прогресс в этой области связан с отказом от концепции точечного источника. Учет крупномасштабных флуктуаций ветрового потока, различных типов подстилающей поверхности, неустойчивости приземного слоя атмосферы, хорошее согласование рассеяния примеси и распределения Гаусса, все это делает их наиболее приемлемыми для решения экологических задач в глобальных и региональных масштабах. Однако, если исследуемая область сравнительно невелика, например представляет собой промплощадку, то орографическая неоднородность местности делает непригодными аналитические методы расчета рассеяния примеси. Этого недостатка лишены численные методы, которые позволяют учесть влияние вихревых структур, возникающих в области возникновения вихревых структур. Поэтому в данном случае более перспективным представляются численные методы, основанные на решении уравнений Навье-Стокса, которые при современном развитии вычислительной техники дают более точное представление о распределении загрязнений в локальных масштабах.

При течении ветрового потока в области со сложной геометрией возникают области аэродинамической тени, отрывные зоны, а в отдельных случаях формируются так называемые вихревые дорожки. Данные гидродинамические особенности течения оказывают значительное влияние на диффузию примесей в атмосфере. Кроме того, на процесс рассеивания выбросов оказывает влияние термическая стратификация атмосферы.

Поэтому, большой интерес представляет учет совместного влияния термической стратификации атмосферы и неоднородности рельефа подстилающей поверхности.

В настоящей работе проведен численный расчет распространения выброса от постоянно действующего источника в стратифицированной атмосфере при наличии неоднородностей рельефа типа впадин различной формы. Задача решалась в двумерной постановке.

Численное исследование полей концентрации проведено путем решения полной системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска и уравнений тепло- и массопереноса.

Система исходных расчетных уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \text{Ri}T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}_d} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \tag{4}$$

где  $\text{Re} = \frac{U \cdot b}{\nu}$  – число Рейнольдса,  $\text{Ri} = \frac{g \cdot \beta \cdot b (T_0 - T_h)}{U^2}$  – число Ричардсона,  $\text{Pe} = \frac{U \cdot b}{a}$  – тепловое число

Пекле,  $\text{Pe}_d = \frac{U \cdot b}{D}$  – диффузионное число Пекле.

Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров:  $\text{Re} = 10000$ ,  $\text{Pe} = 7000$ ,  $\text{Pe}_d = 7000$ .

На левой границе задавались начальные безразмерные профили полей скорости, температуры и концентрации, общий вид которых приведен на рис. 1. Для моделирования источника переменной интенсивности использовалось соотношение  $C_{\text{гран}} = C_{0\text{гран}} e^{-\alpha t}$ , где  $t$  – безразмерное время,  $\alpha$  – параметр убывания.

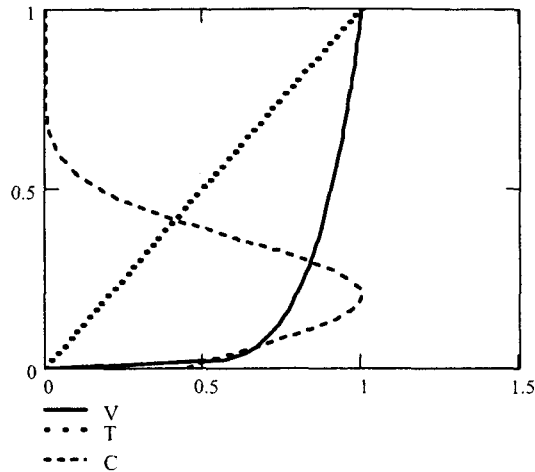


Рис. 1. Начальные профили скорости, температуры и концентрации

Конечно-разностная аппроксимация исходной системы уравнений и краевые условия изложены в работах [1, 2, 3].

В данной работе исследовано два типа впадин: резкое уменьшение глубины (тип 1) и плавное уменьшение глубины (тип 2).

На рис. 2 и рис. 3 представлено распределение концентрации в момент времени, когда основная часть выброса находится над впадиной. И в первом и во втором случае наблюдается отсутствие проникновения выброса в данную область, что объясняется возникновением во впадинах областей с повышенным давлением.

На рис. 4 и рис. 5 визуализирована ситуация прохода основной части облака над впадиной. Здесь наблюдается увеличение концентрации загрязняющих веществ над впадиной, так как происходит «прокачка жидкости через вихрь». Что в дальнейшем приведет к повышенной концентрации загрязняющих веществ во впадинах.

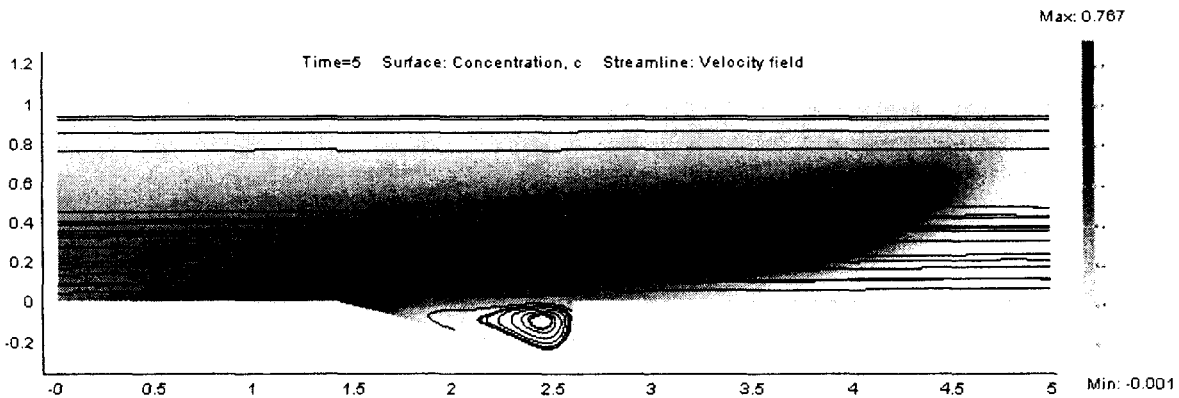


Рис. 2. Поле концентрации примеси и линии тока для  $t=5$  (тип 1)

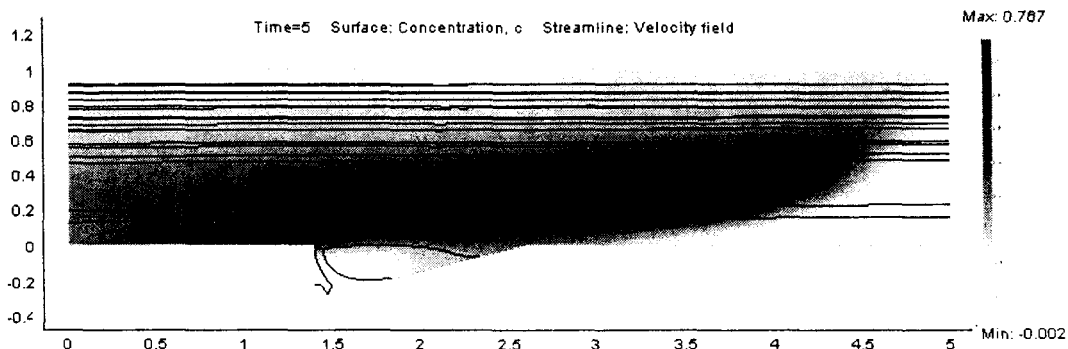


Рис. 3. Поле концентрации примеси и линии тока для  $t=5$  (тип 2)

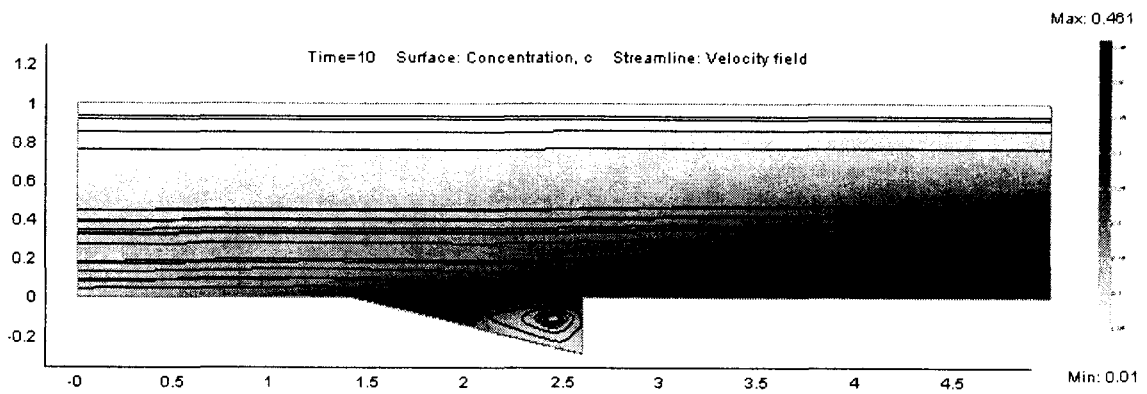


Рис. 4. Поле концентрации примеси и линии тока для t=10 (тип 1)

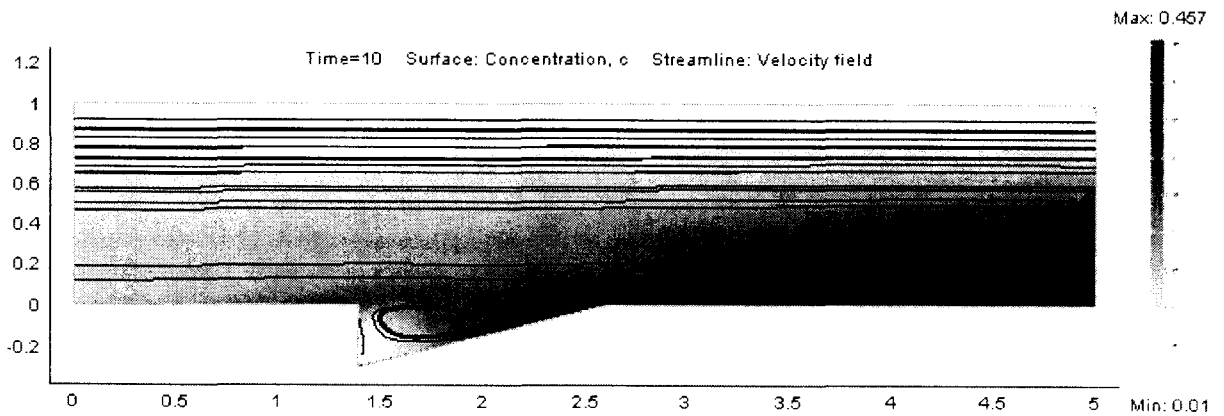


Рис. 5. Поле концентрации примеси и линии тока для t=10 (тип 2)

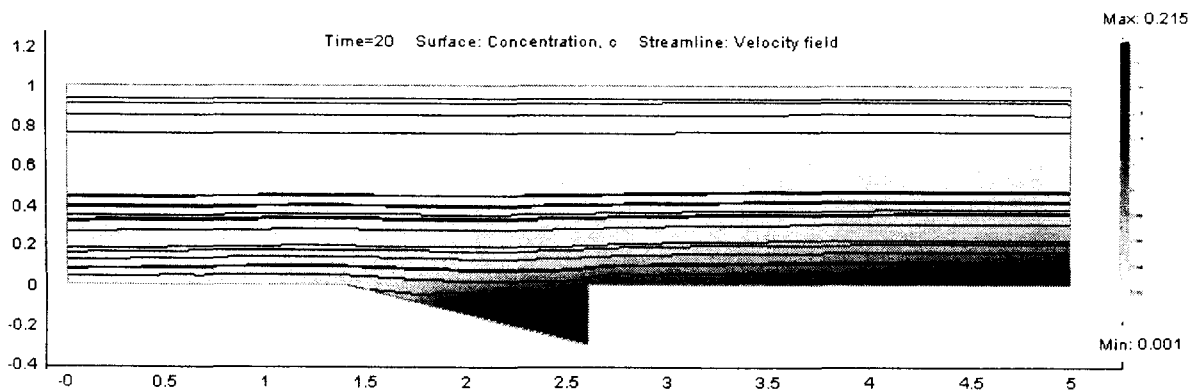


Рис. 6. Поле концентрации примеси и линии тока для t=20 (тип 1)

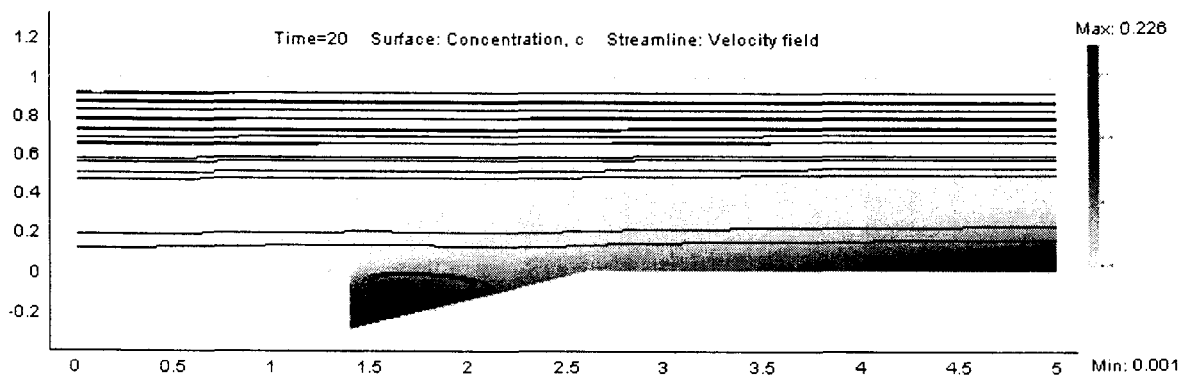


Рис. 7. Поле концентрации примеси и линии тока для t=20 (тип 2)



Рис. 6 и рис. 7 иллюстрируют состояние, когда облако загрязняющих веществ прошло над впадиной. В данном случае наблюдается повышенное содержание загрязняющих веществ во впадинах по сравнению с остальной областью, причем для области типа 1 концентрация выше, чем для области 2. Данный эффект возникает из-за того, что в первом случае возникает более обширная вихревая область так как в первом случае реализуется течение диффузорного типа, имеющее тенденцию к неустойчивости, а во втором – конфузорного типа, стабилизирующее поток.

#### **РЕЗЮМЕ**

Досліджено вплив форми рельєфу на поширення викидів в атмосфері. Визначено зони з високою залишковою концентрацією забруднюючих речовин і їхня залежність від форми западин.

#### **SUMMARY**

Influence of the form of a relief on distributions of emissions in an atmosphere is investigated. Zones with high residual concentration of polluting substances and their dependence on the form of hollows are determined.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Бруцкий Е.В., Ступин А.Б., Оверко В.С., Дмитренко Н.А. Численное исследование полей концентрации вблизи препятствия при его обтекании термически стратифицированным потоком // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2002. – №1. – С.217-222.
2. Ступин А.Б., Бруцкий Е.В., Оверко В.С., Дмитренко Н.А. Численное исследование полей концентрации вблизи препятствия в условиях термических инверсий атмосферы // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2003. – №1. – С.180-183.
3. Марчук Г.И. «Вычислительные методы в прикладной математике». – Новосибирск, 1978.
4. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1975. – 448 с.

*Надійшла до редакції 17.11.2005*