

ISSN 2415-7058

**Вестник  
Донецкого  
национального  
университета**



НАУЧНЫЙ  
ЖУРНАЛ  
*Основан  
в 1997 году*

---

*Серия А*  
**Естественные  
науки**

---

**4/2016**

---

**Редакционная коллегия журнала «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки»**

**Главный редактор** – д-р физ.-мат. наук, проф. **С.В. Беспалова**

**Зам. главного редактора** – д-р биол. наук, проф. **О.С. Горецкий**

**Ответственные секретари:** канд. физ.-мат. наук, доц. **Е.В. Алтухов**; канд. физ.-мат. наук **М.В. Фоменко**

**Члены редколлегии:** д-р хим. наук, проф. **А.С. Алемасова**; д-р экон. наук., проф. **В.Н. Андриенко**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Белоусов**; д-р биол. наук, проф. **М.И. Бойко**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Б.В. Бондарев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вал.В. Волчков**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Вит.В. Волчков**; д-р биол. наук, проф. **А.З. Глухов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.С. Гольцев**; д-р физ.-мат. наук, проф. **Г.В. Горр**; д-р техн. наук, проф. **В.В. Данилов**; д-р физ.-мат. наук, проф. **С.А. Калоеров**; д-р физ.-мат. наук, проф. **А.Г. Милославский**; д-р хим. наук, проф. **В.М. Михальчук**; д-р техн. наук, проф. **Ф.В. Недопекин**; д-р техн. наук, проф. **В.И. Сторожев**; д-р физ.-мат. наук, д-р техн. наук, проф. **В.К. Толстых**; д-р хим. наук, проф. **Т.Г. Тюрина**; д-р биол. наук, проф. **Н.Н. Ярошенко**.

**The Editorial Board of the journal “Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences”**

**The Editor-in-Chief** – Dr. of phys. and math., prof. **S.V. Bespalova**

**The Deputy of the Editor-in-Chief** – Dr. of biol., prof. **O.S. Goretskii**

**Executive Secretaries:** Cand. of phys. and math., docent **E.V. Altukhov**, Cand. of phys. and math. **M.V. Fomenko**

**The Members of the Editorial Board:** Dr. of chem., prof. **A.S. Alemasova**; Dr. of econ., prof. **V.N. Andrienko**; Dr. of tech., prof. **V.V. Belousov**; Dr. of biol., prof. **M.I. Boyko**; Dr. of phys. and math., prof. **B.V. Bondarev**; Dr. of phys. and math., prof. **Val.V. Volchkov**; Dr. of phys. and math., prof. **Vit.V. Volchkov**; Dr. of biol., prof. **A.Z. Glukhov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.S. Goltsev**; Dr. of phys. and math., prof. **G.V. Gorr**; Dr. of tech., prof. **V.V. Danilov**; Dr. of phys. and math., prof. **S.A. Kaloerov**; Dr. of phys. and math., prof. **A.G. Miloslavsky**; Dr. of chem., prof. **V.M. Mikhal'chuk**; Dr. of tech., prof. **F.V. Nedopiokin**; Dr. of tech., prof. **V.I. Storozhev**; Dr. of phys. and math., Dr. of tech., prof. **V.K. Tolstykh**; Dr. of chem., prof. **T.G. Tyurina**; Dr. of biol., prof. **N.N. Jaroshenko**.

**Адрес редакции:** ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
ул. Университетская, 24  
283001, г. Донецк

**Тел:** (062) 302-92-56, 302-92-93

**E-mail:** [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)

**URL:** <http://donnu.ru/vestnikA>

Научный журнал «Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ МОН ДНР № 1134 от 01.11.2016 г.) по следующим группам научных специальностей: 01.01.00 – Математика; 01.02.00 – Механика; 05.13.00 – Информатика, вычислительная техника и управление; 01.04.00 – Физика; 02.00.00 – Химические науки; 03.02.00 – Общая биология.

*Печатается по решению Ученого совета ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
Протокол № 10 от 25.11.2016 г.*

# Вестник Донецкого национального университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

Серия А. Естественные науки

№ 4

Донецк 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Механика*

- Алтухов Е.В., Фоменко М.В.* Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины со скользящей заделкой торцов 3
- Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* Инвариантные соотношения частных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона 11
- Калоеров С.А.* Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластинах при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях 19
- Моисеенко И.А., Волчков Вит.В.* Распространение нормальных волн в трансверсально-изотропном радиально-неоднородном полом цилиндра с секторным вырезом 35
- Нескородев Р.Н.* Ползучесть анизотропных горных пород с выработками в условиях обобщенной плоской деформации 50

### *Физика*

- Пойманов В.Д.* Спектр поверхностных поляритонов и оптические свойства структуры полупроводник-антиферродиелектрик 58
- Румянцев В.В.* О новой научно-технологической парадигме 67

### *Информатика, вычислительная техника и управление*

- Данилов В.В., Белик Т.В., Ефимович А.П., Третьяков И.А.* Оптические информационные технологии. Элементная база 72
- Толстых В.К., Пишеничный К.А.* Идентификация модели теплообменного аппарата ректификационной колонны воздухоразделительной установки 80

### *Химические науки*

- Лыга Р.И., Михальчук В.М., Гуртовой Д.В.* Свойства эпоксидно-кремнеземных композитов аминного отверждения, полученные золь-гель методом 87
- Макарова Р.А., Хилько С.Л.* Квантовохимическое моделирование взаимодействий додецилсульфата натрия с низшими спиртами 95
- Тюрина Т.Г., Крюк Т.В., Нестеренко Д.Ю.* Амидирование янтарного ангидрида алифатическими алкиламинами и сульфаниламидом 103

### *Биологические науки*

- Прокопенко Е.В.* Пауки (Aranei) мезофитного луга в зоне влияния высоковольтной линии электропередачи 110
- Романенко В.А., Кочура Д.А.* Психофизиологический базис успешности обучения студентов 116
- Ярошенко Н.Н.* Панцирные клещи и сопутствующие почвообитатели балки Климушанской БООПТРЗ «Хомутовская степь – Меотида» 123

**CONTENTS**

***Mechanics***

- Altukhov E.V., Fomenko M.V.* Vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate with sliding clamping of faces 3
- Gorr G.V., Balaklitskaya T.V.* Invariant relations of particular solutions of equations of Kirchhoff–Poisson 11
- Kaloerov S.A.* The potential electromagnetic fields in piezoplates under the force, electromagnetic and thermal action 19
- Moiseyenko I.A., Volchkov Vit.V.* Propagation of normal waves in transversely isotropic radially inhomogeneous hollow cylinder with a sector cut 35
- Neskorodev R.N.* Creep anisotropic rocks with excavation in the generalized plane strain conditions 50

***Physics***

- Poimanov V.D.* The spectrum of surface polaritons and optical properties of structure semiconductor-antiferroelectric 58
- Rumyantsev V.V.* About new scientific-technological paradigm 67

***Computer science, computer engineering and control***

- Danilov V.V., Belik T.V., Yefymovych A.P., Tretyakov I.A.* Optical information technologies. Elemental base 72
- Tolstykh V.K., Pshenychnyi K.A.* Identification of heat exchanger model for air separation plant in rectification column 80

***Chemical sciences***

- Lyga R.I., Mikhal'chuk V.M., Gurtovoj D.V.* The properties of epoxy-silica composites of amine curing, obtained via sol-gel method 87
- Makarova R.A., Khil'ko S.L.* Quantum chemical modeling of interactions sodium dodecyl sulfate with a lower alcohol 95
- Tyurina T.G., Kryuk T.V., Nesterenko D.Yu.* Amidation of succinic anhydride by aliphatic alkylamines and a sulphonamide 103

***Biological sciences***

- Prokopenko E.V.* Spiders (Aranei) of mesophytic meadow in the zone of influence of high power lines 110
- Romanenko V.A., Kochura D.A.* The psychophysiological basis of students learning success 116
- Yarosenko N.N.* Oribatid mites and related soil microarthropods of gulch «Klimushanskaya» reserve «Khomutovskaya Steppe – Meotida» 123

## М Е Х А Н И К А

УДК 539.3:534.1

**КОЛЕБАНИЯ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ  
УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКОЙ ТОРЦОВ**© 2016. *Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко*

В трехмерной постановке рассмотрена задача теории упругости об установившихся колебаниях непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины, на лицевых плоскостях которой выполняются условия плоского торца. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний. Выполнены численные исследования трансцендентного дисперсионного уравнения, описывающего частотный спектр Р-SV волн. Исследовано влияние показателя неоднородности материала на изменение собственных значений. Представлены диаграммы дисперсионных кривых, графики изменения фазовых скоростей.

**Ключевые слова:** поперечно-неоднородная изотропная пластина, условия скользящей заделки, установившиеся колебания, метод однородных решений, дисперсионные спектры, фазовые скорости, частоты запираания.

**Введение.** Непрерывное изменение упругих свойств материала по одной из координат характерно для многих тел. Поперечно-неоднородные пластины широко применяются в качестве составных элементов многих современных конструкций. Проблемы проектирования, моделирования и исследования в области функционально-градиентных материалов отражены, например, в работах [1, 2]. Решение конкретных краевых задач теории упругости для функционально-градиентных сред сопряжено с необходимостью учета неоднородности материала. Анализ математических теорий поперечно-неоднородных упругих плит отражен в монографии [3], где отмечается, что актуальным является развитие аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния и волновых полей в поперечно-неоднородных плитах на основе уравнений пространственной теории упругости. Одним из эффективных точных аналитических методов решения трехмерных краевых задач о колебаниях неоднородных, в частности, слоистых пластин является метод однородных решений [3–6], который был впервые предложен в работе [7]. В монографии [6] на основе однородных решений изложены аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач трехмерной теории упругости о равновесии и гармонических колебаниях однородных и поперечно-неоднородных изотропных пластин. В указанной работе для поперечно-неоднородных пластин вихревое и потенциальное решения описаны спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. В случае экспоненциального изменения модуля сдвига и плотности получены однородные решения уравнений упругих гармонических колебаний непрерывно-неоднородной по толщине изотропной пластины в случаях жестко защемленных плоских граней [8] и покрытых диафрагмой торцов [9].

Целью данной работы является получение однородных решений краевой задачи о гармонических колебаниях непрерывно-неоднородной по толщине изотропной пластины с экспоненциальной зависимостью модуля сдвига и плотности от толщины в случае скользящей заделки торцов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим пластину постоянной толщины  $2h$ , отнесенную к размерным прямоугольным декартовым координатам  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ . Координатную плоскость  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  совместим со срединной плоскостью пластины, а ось  $\tilde{x}_3$  направим перпендикулярно торцам пластины. На лицевых гранях пластины ( $\tilde{x}_3 = \pm h$ ) выполняются условия скользящей заделки, а на ее боковой поверхности действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени с круговой частотой  $\omega$  усилия. Предполагается, что модуль сдвига  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{x}_3)$  и плотность  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)$  материала пластины являются функциями поперечной координаты и изменяются по экспоненциальному закону

$$\tilde{G}(\tilde{x}_3) = \tilde{G}_0 e^{\alpha\tilde{x}_3/h}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{x}_3) = \tilde{\rho}_0 e^{\alpha\tilde{x}_3/h}, \quad \nu, \tilde{G}_0, \tilde{\rho}_0, \alpha = \text{const}.$$

Введем безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned} x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/(\lambda R), \quad \lambda = h/R, \\ u_i(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/(2\tilde{G}_0) \quad (i, j = \overline{1,3}), \\ G(x_3) = \tilde{G}(\tilde{x}_3)/\tilde{G}_0, \quad \rho(x_3) = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)/\tilde{\rho}_0, \quad \Omega = h\omega/c_S, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R$  – характерный линейный размер пластины в плане,  $\Omega$  – приведенная частота упругих колебаний,  $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$  – скорость сдвиговой объемной волны в материале однородной пластины.

На основании введенных обозначений (1) задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений движения (равновесия при  $\Omega = 0$ ) в перемещениях

$$\begin{aligned} \lambda^2 \nu_0 \partial_1 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_1 + \alpha (\lambda \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) + \Omega^2 u_1 = 0, \\ \lambda^2 \nu_0 \partial_2 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_2 + \alpha (\lambda \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) + \Omega^2 u_2 = 0, \\ \lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 + 2\alpha (\partial_3 u_3 + \lambda \nu \nu_0 \theta) + \Omega^2 u_3 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с учетом граничных условий на торцах пластины ( $x_3 = \pm 1$ )

$$\sigma_{j3}(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (j = \overline{1,2}), \quad u_3(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\partial_i = \partial/\partial x_i \quad (i = \overline{1,3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1} \partial_3 u_3, \quad \nu_0 = 1/(1-2\nu).$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{j3}$  ( $j = 1, 2$ ) в выражениях (3) связаны с компонентами вектора перемещений соотношениями

$$\sigma_{j3} = \frac{1}{2} G(x_3) (\partial_j u_3 + \lambda^{-1} \partial_3 u_j).$$

Следует отметить, что исходную задачу из-за несимметричного по толщине строения пластины невозможно разделить на симметричную и кососимметричную

подзадачи, как в случае однородной пластины [10]. Приведение трехмерной краевой задачи (2), (3) к двумерной осуществим методом однородных решений.

**Построение однородных решений задач.** Решение краевой задачи (2), (3) представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) \\ -p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{pmatrix} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2) \\ n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2) \\ q_p(x_3) C_p(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

На основании результатов, представленных в монографии [6] для поперечно-неоднородных пластин, неизвестные функции  $p_k(x_3)$ ,  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  в выражении (4) находятся из обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} (Gp')' + (\delta^2 G + \rho \Omega^2) p &= 0; \\ (Gn')' + (\rho \Omega^2 + (1 + \nu_0) \gamma^2 G) n + \lambda (G'q + G\nu_0 q') &= 0, \\ ((1 + \nu_0) Gq')' + (\rho \Omega^2 + \gamma^2 G) q + \frac{\gamma^2}{\lambda} (2(\nu_0 G)' n + G\nu_0 n') &= 0, \end{aligned}$$

а функции  $B_k(x_1, x_2)$  и  $C_p(x_1, x_2)$  являются метагармоническими

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k / \lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \quad D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p / \lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0.$$

В случае изменения величин  $G(x_3)$  и  $\rho(x_3)$  по экспоненциальному закону собственные функции  $p_k(x_3)$  и собственные значения  $\delta_k$  вихревого состояния находятся из спектральной задачи

$$p''(x_3) + \alpha p'(x_3) + (\Omega^2 + \delta^2) p(x_3) = 0, \quad p'(\pm 1) = 0$$

и получаются такими

$$\begin{aligned} p_k(x_3) &= e^{-\alpha x_3 / 2} \left( \alpha \sin \frac{\pi k}{2} (1 - x_3) - \pi k \cos \frac{\pi k}{2} (1 - x_3) \right), \\ \delta_k &= \sqrt{\left( \frac{\pi k}{2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{2} \right)^2 - \Omega^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично собственные функции  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  потенциального состояния определяются из решения задачи

$$\begin{aligned} n'' + \alpha n' + ((1 + \nu_0) \gamma^2 + \Omega^2) n + \lambda \nu_0 q' + \alpha \lambda q &= 0, \\ q'' + \alpha q' + \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{1 + \nu_0} q + \frac{\nu_0 \gamma^2}{\lambda (1 + \nu_0)} n' + \frac{\alpha (\nu_0 - 1) \gamma^2}{\lambda (1 + \nu_0)} n &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$n'(\pm 1) = 0, \quad q(\pm 1) = 0, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – параметр разделения переменных.

Уравнения (6) для рассматриваемого случая неоднородности материала пластины являются системой обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы (6) имеет вид

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0, \quad (8)$$

в котором

$$a_0 = 2(1-\nu), \quad a_1 = 4\alpha(1-\nu), \quad a_2 = 2(1-\nu)(\alpha^2 + 2\gamma^2) + (3-4\nu)\Omega^2, \\ a_3 = 4\alpha(1-\nu)\gamma^2 + \alpha(3-4\nu)\Omega^2, \quad a_4 = (\gamma^2 + \Omega^2)(2(1-\nu)\gamma^2 + (1-2\nu)\Omega^2) - 2\alpha^2\nu\gamma^2.$$

Корни данного уравнения получаются такими:

$$s_1 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_1, \quad s_2 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_1, \quad s_3 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_2, \quad s_4 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_2,$$

где

$$\gamma_1^2 = \gamma^2 + \frac{1-2\nu}{2-2\nu}\Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} + d_1, \quad \gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} - d_1, \\ d_1 = \frac{\Omega^2 - d}{4(1-\nu)}, \quad d = \sqrt{\Omega^4 + 16\alpha^2\gamma^2\nu(1-\nu)}, \quad i^2 = -1. \quad (9)$$

Следовательно, решением краевой задачи (6), (7) являются функции

$$n_p(x_3) = H_{1p}e^{s_{1p}x_3} + H_{2p}e^{s_{2p}x_3} + H_{3p}e^{s_{3p}x_3} + H_{4p}e^{s_{4p}x_3}, \\ q_p(x_3) = Q_{1p}e^{s_{1p}x_3} + Q_{2p}e^{s_{2p}x_3} + Q_{3p}e^{s_{3p}x_3} + Q_{4p}e^{s_{4p}x_3}.$$

Здесь

$$H_1 = \left[ ((a_3s_4 + a_4s_3)s_2 - 2a_2s_3s_4) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (a_3s_4 - a_4s_3)s_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \right] \cos \gamma_2, \\ H_2 = -\left[ ((a_3s_4 + a_4s_3)s_1 - 2a_1s_3s_4) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + (a_3s_4 - a_4s_3)s_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \right] \cos \gamma_2, \\ H_3 = -\cos \gamma_1 \left[ (a_1s_2 - a_2s_1)s_4 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - ((a_1s_2 + a_2s_1)s_4 - 2a_4s_1s_2) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \right], \\ H_4 = -\cos \gamma_1 \left[ (a_1s_2 - a_2s_1)s_3 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + ((a_1s_2 + a_2s_1)s_3 - 2a_3s_1s_2) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \right], \\ a_1 = (\alpha_1 + 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), \quad a_2 = (\alpha_1 - 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), \\ a_3 = (\alpha_1 + 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), \quad a_4 = (\alpha_1 - 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), \\ \alpha_1 = -\alpha(1-4\nu), \quad \kappa^2 = 2\gamma^2 + \Omega^2, \\ Q_j = \frac{a_j H_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1,4}), \quad \Delta = 4\lambda(\Omega^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2\nu(1-\nu)). \quad (10)$$

Собственные значения  $\gamma_p$  находятся из дисперсионного уравнения



$$\begin{aligned}
 F(\gamma, \Omega) = & \left( \tau_1 (\alpha^2 (1 - 4\nu) + 4\gamma_2^2) - \tau_2 (\alpha^2 (1 - 4\nu) + 4\gamma_1^2) \right)^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 + \\
 & + 64\alpha^2 \nu^2 (\gamma_2 \tau_1 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - \gamma_1 \tau_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \times \\
 & \times (\gamma_2 \tau_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \gamma_1 \tau_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где  $\tau_1 = (\alpha^2 + 4\gamma_1^2)(\Omega^2 + 2\gamma^2 - d)$ ,  $\tau_2 = (\alpha^2 + 4\gamma_2^2)(\Omega^2 + 2\gamma^2 + d)$ .

Уравнение (11) связывает собственные значения  $\gamma$  и частоту  $\Omega$  при заданных значениях коэффициента С.Д. Пуассона  $\nu$  и параметра неоднородности  $\alpha$  и описывает частотный спектр P-SV волн. При фиксированной частоте  $\Omega$  корни  $\gamma_p$  этого уравнения могут быть действительными, мнимыми или комплексными. Действительные и комплексные корни  $\gamma$  отвечают нераспространяющимся волнам. Мнимые корни  $\gamma$  соответствуют бегущим волнам, которые имеют важное значение для исследования процесса переноса энергии.

Описываемый уравнением (11) частотный спектр содержит, в частности, две специфические моды, которые задаются соотношениями  $\gamma_1 = 0$  или  $\gamma_2 = 0$ . Корни характеристического уравнения (8) для этих решений являются кратными. Поэтому им соответствует иная структура собственных функций  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  и эти случаи требуют дополнительных исследований. В отличие от однородной пластины ( $\alpha = 0$ ), кривая каждой такой моды состоит из действительной, начинающейся при нулевой частоте  $\Omega$ , и мнимой ветвей.

Полагая в выражениях (5)–(11) частоту  $\Omega = 0$  получаем решение соответствующей задачи о равновесии неоднородной пластины.

Анализ распространения волн в пластине предполагает получение соответствующих асимптотических выражений для уравнения (11) при больших и малых значениях величин  $\gamma$ ,  $\Omega$ .

Для мнимых мод при малых значениях  $\gamma$  имеем длинноволновый диапазон. В этом случае для всех мнимых участков дисперсионных ветвей характерно наличие частот запираания распространяющихся волн [11]. Для их определения полагаем в соотношении (11)  $\gamma = 0$  и получаем две независимые серии частот запираания

$$\Omega_{k1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu} \left( (\pi k)^2 + \alpha^2 \right)}, \quad \Omega_{k2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi k)^2 + \alpha^2} \quad (k = 1, 2, \dots).
 \tag{12}$$

Соотношения (12) совпадают с аналогичными для случаев жестко заземленных [8] или покрытых диафрагмой [9] торцов. Как видно, частоты запираания второй серии не зависят от значений коэффициента С.Д. Пуассона  $\nu$ .

Оценим предельные значения фазовых скоростей  $v_p = \Omega/\gamma$  ( $\gamma = \text{Im} \gamma$ ) распространяющихся мод в высокочастотной области коротковолнового диапазона (большие значения  $\gamma$ ). При  $\gamma \rightarrow \infty$  из дисперсионного соотношения (11) для всех распространяющихся мод получаем асимптотическое выражение

$$v_p = 1.$$

Таким образом, размерная фазовая скорость  $c_p$  получается такой же, как и скорость сдвиговых объемных волн  $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$  в материале однородной пластины с физико-

механическими характеристиками  $\nu$ ,  $\tilde{G}_0$ ,  $\tilde{\rho}_0$ .

Для малых значений частоты  $\Omega$  и параметра неоднородности  $\alpha$  с помощью асимптотического анализа получаем соответствующее предельное выражение для уравнения (11), а именно, при  $\Omega, \alpha \rightarrow 0$  получаем известные результаты [12]

$$\sin^2 \gamma \cos^2 \gamma = 0.$$

**Результаты численных исследований.** На основании численного решения дисперсионного уравнения (11) на рис. 1 представлены дисперсионные кривые – зависимости собственных значений  $\gamma$  от частоты  $\Omega$  при  $\nu=0,3$  и  $\alpha=1$ . На

диаграмме дисперсионных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ( $\text{Re}\gamma, \Omega$ ) и мнимую ( $\text{Im}\gamma, \Omega$ ) плоскости. Видно, что дисперсионные спектры подобны аналогичному для однородной пластины [10]. Однако имеются количественные и некоторые качественные отличия в поведении мод. Так, для частот  $\Omega > 3,689$  данное уравнение имеет комплексные корни  $\gamma$ , а

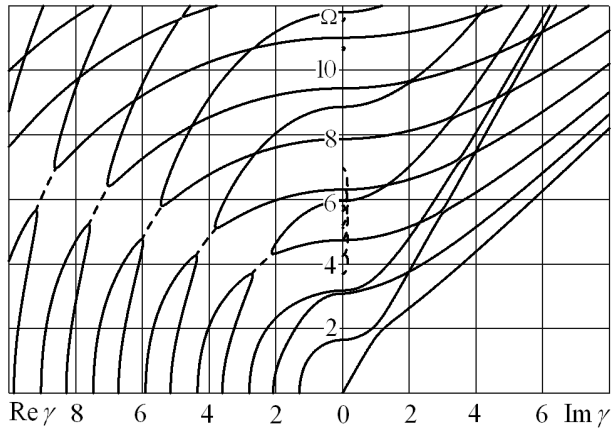


Рис. 1

в случае однородной пластины дисперсионный спектр содержит только действительные ветви.

Данные рис. 2 иллюстрируют изменения безразмерных фазовых скоростей  $v_p = \Omega / \text{Im} \gamma$  распространяющихся волн в диапазоне приведенной частоты  $0 \leq \Omega \leq 10$ . Как видно из указанного рисунка, для мод характерна значительная дисперсия их скорости. Особенно выделяется первая мода, которая распространяется при любой частоте  $\Omega$  (здесь частота запирающая равна нулю). Пунктирная линия соответствует однородной пластине.

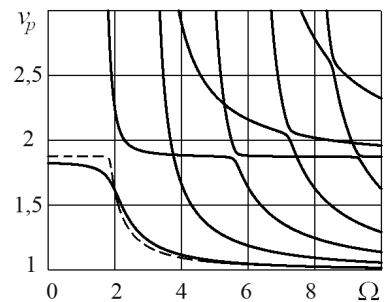


Рис. 2

Влияние показателя неоднородности  $\alpha$  материала пластины на изменение мнимых собственных значений  $\gamma$  для первой распространяющейся моды отражено на рис. 3. Здесь величина  $\Delta\gamma(\Omega; \alpha) = \gamma(\Omega; \alpha) - \gamma(\Omega; 0)$  характеризует отклонение собственного значения  $\gamma(\Omega; \alpha)$  в случае неоднородной пластины от однородной  $\gamma(\Omega; 0)$  при заданной частоте  $\Omega$ . При  $\Omega \approx 2$  мнимые собственные значения для различных  $\alpha$  практически совпадают:  $\gamma = (1,232 \pm 0,006) i$ . В диапазоне частот  $\Omega < 2$  собственные

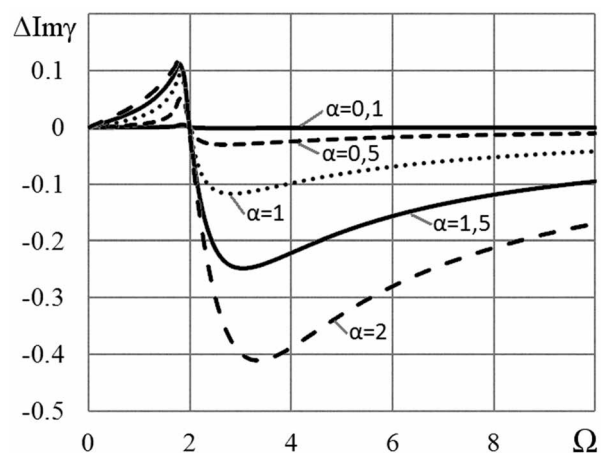


Рис. 3

значения для неоднородной пластины увеличиваются, а при  $\Omega > 2$  наблюдается противоположный эффект.

**Выводы.** С помощью аналитического метода однородных решений рассмотренная трехмерная краевая задача приведена к счетному множеству двумерных задач. Однородные решения, как и в случае однородной пластины, состоят из суммы вихревого и потенциального состояний.

Собственные значения и собственные функции вихревого решения находятся в явном виде. Собственные функции потенциального решения также находятся в явном виде, а для определения собственных значений получено трансцендентное дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между частотой колебаний и собственными значениями при заданных параметрах.

На основании аналитических исследований дисперсионных уравнений в явном виде получены частоты запираания, множество которых состоит из двух серий. На основании численных исследований изучена зависимость собственных значений от изменения показателя неоднородности материала пластины и частоты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Birman V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, No 5. – P. 195–216.
2. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
3. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю.А. Устинов. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
4. Шевченко В.П. Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца / В.П. Шевченко, Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Доповіді НАН України. – 2011. – № 9. – С. 70–77.
5. Космодамианский А.С. Трехмерные задачи о вынужденных колебаниях транслопных неоднородных многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Е.В. Алтухов // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 11. – С. 49–52.
6. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
7. Лурье А.И. К теории толстых плит / А.И. Лурье // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6, № 2-3. – С. 151–168.
8. Фоменко М.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с жесткими торцами / М.В. Фоменко // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2013. – № 2. – С. 71–77.
9. Алтухов Е.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с покрытыми диафрагмой торцами / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко // Тр. Ин-та прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 3–9.
10. Алтухов Е.В. Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагми / Е.В. Алтухов, Ю.В. Панченко, А.Ю. Богатчук // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.
11. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
12. Буланов Г.С. Решение смешанной задачи о концентрации напряжений в толстой пластине / Г.С. Буланов, В.А. Шалдырван // Теорет. и прикладная механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 5–9.

*Поступила в редакцию 24.10.2016 г.*

#### VIBRATIONS OF CONTINUOUSLY INHOMOGENEOUS IN THE THICKNESS ELASTIC PLATE WITH SLIDING CLAMPING OF FACES

*E.V. Altukhov, M.V. Fomenko*

The problem of elasticity theory about steady-state vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate under conditions of a flat end is considered in three-dimensional statement. The

homogeneous solutions of the system of motion equations in displacements are received as the sum of the vortex and potential states. The computational investigations of the dispersive equation describing frequency spectrum of P-SV waves are carried out. Influence of the inhomogeneity parameter of a material on change of eigenvalues is researched. Diagrams of spectral curves and curves of phase velocities are represented.

**Keywords:** transverse-inhomogeneous isotropic plate, sliding fixing, steady-state vibration, homogeneous solutions method, dispersion spectra, phase velocities, cut-off frequencies.

**Алтухов Евгений Викторович**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
E-mail: ealtukhov@ukr.net  
Тел.: (062) 302-92-93

**Altukhov Evgenii Victorovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent,  
Donetsk National University, Donetsk

**Фоменко Максим Владимирович**

кандидат физико-математических наук,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
E-mail: maxim\_fom@mail.ru

**Fomenko Maksim Vladimirovich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,  
Donetsk National University, Donetsk

УДК 531.38

## ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА

© 2016. Г.В. Горр, Т.В. Балаклицкая

Получена классификация инвариантных соотношений в частных решениях уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиристора под действием потенциальных и гироскопических сил, в основу, которой положена функциональная зависимость компонент угловой скорости гиристора.

**Ключевые слова:** классификация, инвариантные соотношения, гиристорат.

**Введение.** Поскольку уравнения Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиристора под действием потенциальных и гироскопических сил неинтегрируемы в квадратурах [1, 2], то актуальной становится задача построения частных решений этих уравнений. В качестве метода поиска решений уравнений Кирхгофа–Пуассона может быть принят метод инвариантных соотношений (ИС), разработанный Т. Леви–Чивитой [3] и П.В. Харламовым [4]. Обзор результатов, полученных в задаче построения решений уравнений динамики твердого тела, приведен в монографиях [5–7]. В этих монографиях показано, что наличие частных решений уравнений динамики твердого тела с неподвижной точкой позволило на основании уравнений П.В. Харламова [8] установить новые свойства движения тела в построенных решениях уравнений Эйлера–Пуассона. Применение теории возмущений дифференциальных уравнений (например, первого метода Ляпунова [9]) дает возможность найти и новые классы асимптотических движений гиристора, предельные движения которых описываются известными частными решениями рассматриваемых уравнений [6, 7].

Одним из важных подходов в получении новых решений уравнений движения гиристора является подход, основанный на свойствах ИС, которые описываются функциональными зависимостями компонент вектора угловой скорости. Классификация решений уравнений Эйлера–Пуассона по указанному признаку приведена в [5]. В данной статье исследованы ИС для решений уравнений Кирхгофа–Пуассона. Установлены свойства ИС, которые не имеют аналогов в классической задаче о движении гиристора, имеющего неподвижную точку. В частности найдены ИС, являющиеся многочленами восьмого порядка относительно компонент вектора угловой скорости.

**Постановка задачи.** Рассмотрим дифференциальные уравнения класса Кирхгофа–Пуассона [5–7]

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{x} + \bar{\lambda}) \times a\bar{x} + a\bar{x} \times B\bar{v} + \bar{s} \times \bar{v} + \bar{v} \times C\bar{v}, \quad (1)$$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times a\bar{x}. \quad (2)$$

В (1), (2) введены обозначения:  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – момент количества движения;  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – единичный вектор оси симметрии силовых полей;  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – гиристатический момент;  $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор, характеризующий обобщенный центр масс гиристора;  $a = (a_{ij})$  – гирационный тензор;  $B = (B_{ij})$  и  $C = (C_{ij})$  – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными  $\bar{x}$  и  $\bar{v}$  обозначает производную по времени  $t$ .

Уравнения (1), (2) имеют три интеграла

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = 1, (\bar{x} + \bar{\lambda}) \cdot \bar{v} - \frac{1}{2}(B\bar{v} \cdot \bar{v}) = k, (a\bar{x} \cdot \bar{x}) - 2(\bar{s} \cdot \bar{v}) + (C\bar{v} \cdot \bar{v}) = 2E, \quad (3)$$

где  $k$  и  $E$  – произвольные постоянные.

Уравнения (1), (2) описывают движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и в силу гидродинамической аналогии [10] могут рассматриваться, как уравнения движения твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Пусть в результате интегрирования уравнений (1), (2) с интегралами (3) получены функции

$$x_i = x_i(\sigma), \quad v_i = v_i(\sigma), \quad \dot{\sigma} = f(\sigma) \quad (4)$$

Здесь  $\sigma$  – вспомогательная переменная, зависимость которой от  $t$  устанавливается из последнего уравнения системы (4). На основании (4) компоненты вектора угловой скорости  $\bar{\omega} = a\bar{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  могут быть выражены через вспомогательную переменную  $\sigma$

$$\omega_i = \omega_i(\sigma) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (5)$$

В статье ставится задача нахождения из (5) функций

$$F_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0, \quad F_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0. \quad (6)$$

Линией пересечения поверхностей (6) является подвижный годограф вектора угловой скорости. На основании двух последних уравнений из (4) и уравнений (5) могут быть найдены и уравнения неподвижного годографа угловой скорости [8]. С помощью теоремы Пуансо движение гиростата представимо качением без скольжения подвижного годографа угловой скорости по неподвижному годографу этого вектора. Таким образом, ИС (6) играют важную роль в истолковании движения гиростата. Кроме этого на основании свойств уравнений (6) может быть поставлена задача о нахождении новых решений уравнений (1), (2), которые характеризуются ИС (6) заданной структуры.

**Линейные инвариантные соотношения по всем переменным задачи.**

Линейные инвариантные соотношения по всем переменным задачи (1), (2) исследованы С.А. Чаплыгиным [11, 12], П.В. Харламовым [13], Г.В. Горром и Е.К. Узбек [14], С.В. Скрипник [15] и другими (см., обзоры [5–7]).

**Три линейных инвариантных соотношения.** Зададим для уравнений (1), (2) три ИС. В векторном виде имеем

$$\bar{x} = \bar{q}_0 + Q\bar{v}, \quad (7)$$

где  $\det Q \neq 0$ ,  $\bar{q}_0$  – постоянный вектор,  $Q$  – постоянная матрица третьего порядка с элементами  $q_{ij}$  ( $i, j = \overline{1,3}$ ). В силу принятых условий из (7) найдем

$$\bar{v} = Q^{-1}(\bar{x} - \bar{q}_0). \quad (8)$$

Подставим (8) в уравнение (2). Тогда получим уравнение следующего вида [14]

$$\dot{\bar{v}} = \bar{v} \times \bar{m} + G^+\bar{v} + \bar{v} \times G^-\bar{v}. \quad (9)$$

Здесь  $\bar{m}$  – постоянный вектор,  $G^+$  – симметричная матрица,  $G^-$  – антисимметричная матрица. В общем случае система (9) имеет интеграл с фиксированной постоянной

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1. \quad (10)$$

Если внесем (8) в соотношение (10), то получим ИС по компонентам момента количества движения, которое является многочленом второго порядка.

В [14] рассмотрены два случая интегрирования уравнения (9). Для первого случая выполняется условие  $G^- = 0$ . Уравнение (9) допускает квадратичный интеграл

$$(G^+\bar{v} \cdot \bar{v}) + 2(\bar{m} \cdot \bar{v}) = c_0, \quad (11)$$

где  $c_0$  – произвольная постоянная. При подстановке (8) в соотношение (11) получим ИС – многочлен второго порядка по переменным  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Во втором случае имеет место равенство  $G^+ = 0$ , при выполнении которого уравнение (9) преобразуется к виду [14]

$$\dot{\vec{v}} = \vec{v} \times \vec{m} + \vec{n}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}). \quad (12)$$

Здесь  $\vec{n}$  – постоянный вектор. Уравнение (12) допускает линейный первый интеграл

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = n_0, \quad (13)$$

где  $n_0$  – произвольная постоянная. Подставив (8) в (13), найдем ИС, имеющее вид многочлена первого порядка относительно компонент  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

Преобразуя указанные выше ИС к компонентам угловой скорости, можно сделать следующий вывод: в первом случае имеют место два полиномиальных ИС по  $\omega_i$  второго порядка; во втором случае – одно полиномиальное ИС второго порядка, а другое – линейное ИС по компонентам  $\omega_i$ .

**Замечание.** В статье [14] получены и случаи, когда уравнение (9) допускает трансцендентный интеграл. Для него и ИС на компоненты  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) будет иметь трансцендентный характер.

**Два линейных инвариантных соотношения.** Следуя статье [15], зададим для уравнений (1), (2) два ИС

$$x_1 = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i v_i, \quad x_2 = c_0 + \sum_{i=1}^3 c_i v_i, \quad (14)$$

где  $b_k, c_k$  ( $k = \overline{0,3}$ ) – постоянные. В [15] показано, что исследование условий существования решений (14) для уравнений (1), (2) можно проводить в главной системе координат, то есть гирационный тензор можно принять в виде  $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ . Существуют два класса решений уравнений (1), (2) с ИС (14).

Для первого класса ИС (14) таковы

$$x_1 = b_1 v_1 + b_3 v_3, \quad x_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2} v_3 + c_3 v_3, \quad (15)$$

а уравнения (1), (2) имеют первый интеграл

$$x_3 = \frac{1}{a_3} \left( \frac{l_0}{2v_3} + d_0 v_3 \right), \quad (16)$$

где  $l_0$  – произвольная постоянная. При наличии соотношений (15), (16) уравнение (2) допускает два интеграла

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad [a_1 b_3 v_1 + a_2 c_3 v_2 + (d_0 - a_1 b_1) v_3 + a_3 \lambda_3] = \frac{l_0}{2v_3}. \quad (17)$$

С помощью выражения (16) второе соотношение из (17) преобразуем к виду

$$a_1 b_3 v_1 + a_2 c_2 v_2 + (2d_0 - a_1 b_1) v_3 = a_3 x_3. \quad (18)$$

Равенства (15), (18) представляют собой систему трех неоднородных линейных уравнений относительно  $v_1, v_2, v_3$ . Выбором постоянной  $d_0$  добьемся условия того, что эта система имеет единственное решение. Подстановка найденных значений  $v_i$  в соотношения (17) приводит к двум ИС, которые являются многочленами второго порядка относительно  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Переходя в них к компонентам угловой скорости  $\omega_i$  ( $x_i = \omega_i/a_i$ ), получим два ИС второго порядка.

Для второго класса ИС (14) существует дополнительный первый интеграл уравнений (1), (2)

$$x_3 - d_0 v_3 = \sigma_0, \quad (19)$$

где  $d_0$  – фиксированная постоянная,  $\sigma_0$  – произвольная постоянная. В случае (19) ИС (14) принимают вид

$$b_0 + b_1v_1 + b_2v_2 = x_1, \quad c_0 + c_1v_1 + c_2v_2 = x_2. \quad (20)$$

С помощью (19), (20) в статье [15] установлен квадратичный первый интеграл уравнения (2)

$$g_0 + g_1v_1 + g_2v_2 + g_3v_3 + g_4v_1v_2 + g_5v_1^2 + g_6v_2^2 + g_7v_3^2 = c_0. \quad (21)$$

Здесь  $g_i$  ( $i = \overline{0,7}$ ) – фиксированные постоянные,  $c_0$  – произвольная постоянная. Определяя  $v_1, v_2, v_3$  из уравнений (19), (20) и подставляя их в первое соотношение из (17) и в равенство (21), получим два полиномиальных ИС второго порядка относительно  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Переходя в них к  $\omega_i$ , устанавливаем два полиномиальных ИС второго порядка относительно  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

**Замечание.** Случай одного ИС [13] ( $x_1 = b_0 + \sum_{i=3}^3 b_i v_i$ ) не представляет интереса, так как для него система (1), (2) не интегрируема в квадратурах. На основании указанного ИС и интегралов (3) можно получить только одно ИС на компоненты угловой скорости [6].

**Квадратичные инвариантные соотношения по всем переменным задачи.** В статье [16] при условиях  $a = \text{diag}(a_1, a_1, a_1)$ ,  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ ,  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  установлено следующее решение уравнений (1), (2)

$$x_1 = \frac{1}{2}\mu_0\alpha_1 + (\mu_0(\alpha_2 + 1) + f_0)v_1 + f_1v_1^2, \quad (22)$$

$$x_2 = v_2(f_0 + f_1v_1), \quad x_3 = v_3[(f_0 + \mu_0) + f_1v_1], \quad (23)$$

$$v_2 = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1v_1 + \alpha_2v_1^2}, \quad v_3 = \sqrt{(1 - \alpha_0) - \alpha_1v_1 - (1 + \alpha_2)v_1^2}, \quad (24)$$

$$v_1 = \frac{a_1(B_3 - B_2)}{2} \sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1v_1 + \alpha_2v_1^2)[(1 - \alpha_0) - \alpha_1v_1 - (1 + \alpha_2)v_1^2]}, \quad (25)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4\lambda_1}{3(B_3 - B_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{B_1 - B_3}{B_3 - B_2}, \quad f_0 = B_1 + B_2 + \frac{4(C_3 - C_2)}{a_1(B_2 - B_3)},$$

$$f_1 = \frac{\alpha_1}{2}(B_1 - B_2), \quad \mu_0 = \frac{1}{2}(B_3 - B_2). \quad (26)$$

В решении (22)–(26) гиросtatический момент направлен по барицентрической оси ( $s_2 = s_3 = 0$ ); параметры задачи удовлетворяют условиям

$$C_1(B_2 - B_3) + C_2(B_3 - B_1) + C_3(B_1 - B_2) = \frac{a_1}{4}(B_1 - B_2)(B_2 - B_3)(B_3 - B_1),$$

$$2s_1 = \alpha_1(C_2 - C_3) + \frac{a_1\alpha_1(B_3 - B_2)}{4}[B_1 + B_3 - 2B_2 + 2f_0 - 2\alpha_0(B_3 - B_2)].$$

Действительность решения (22)–(26) следует из условия  $0 < \alpha_0 < 1$ , которого можно добиться выбором параметров  $\lambda_1, B_2, B_3$ .

Определяя  $v_1$  из (22) и подставляя найденное значение в соотношения (23), (24), получим два ИС, которые являются многочленами четвертого порядка относительно  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Им, очевидно, соответствуют два ИС по компонентам угловой скорости, имеющие тоже четвертый порядок.

**Дробно-линейные инвариантные соотношения по всем переменным задачи.** Выпишем частный случай решения [17] уравнений (1), (2), характеризующийся ИС



дробно-линейной структурой по всем переменным. Положим  $a = \text{diag}(2a_0, 3a_0, 5a_0)$  ( $a_0$  – положительный параметр),  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ ,  $C = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$ ,  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$ ,  $\bar{s} = (s_1, 0, 0)$  и примем условия

$$\lambda_1 = -\frac{115\sqrt{3}}{48a_0}\mu_0, \quad B_1 = \frac{3\mu_0}{a_0}, \quad B_2 = \frac{\mu_0}{a_0}, \quad B_3 = \frac{8\mu_0}{5a_0},$$

$$s_1 = -\frac{5\sqrt{3}}{2a_0^3}\mu_0, \quad C_1 - C_3 = \frac{21\mu_0^2}{5a_0^3}, \quad C_2 - C_1 = -\frac{191}{24a_0^3}\mu_0^2,$$

где  $\mu_0$  – постоянный параметр. В силу указанных условий из [17] имеем

$$v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{21(v_1 - v_1^{(1)})(v_1 - v_1^{(2)})}, \quad v_3 = \frac{5}{2}\sqrt{-v_1(v_1 + \sqrt{3})},$$

$$x_1 = \frac{\mu_0}{a_0}\left(\frac{45\sqrt{3}}{16} + \frac{7}{4}v_1 - \frac{5\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}v_1 + 2)}\right),$$

$$x_2 = \frac{\mu_0 v_2(v_1)}{a_0}\left(-\frac{11}{12} + \frac{5}{2(\sqrt{3}v_1 + 2)}\right), \quad x_3 = \frac{\mu_0 v_3(v_1)}{5a_0}\left(-\frac{7}{4} + \frac{15}{2(\sqrt{3}v_1 + 2)}\right),$$

$$\dot{v}_1 = \frac{5\sqrt{21}}{4}\sqrt{-v_1(v_1 - v_1^{(1)})(v_1 - v_1^{(2)})(v_1 + \sqrt{3})}. \quad (27)$$

В формулах (27)  $v_1^{(1)} = -1,96$ ,  $v_1^{(2)} = -0,09$ , переменная  $v_1$  изменяется в промежутке  $[v_1^{(2)}, 0]$ .

Если исключим переменную  $v_1$  в третьем, четвертом и пятом соотношениях системы (27) с помощью первого и второго соотношения этой системы, то получим два ИС полиномиальной структуры относительно  $x_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) восьмого порядка. То есть решение (27) характеризуется двумя полиномиальными ИС по компонентам  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) восьмого порядка.

**Инвариантные соотношения для прецессионных движений гиростата.** Рассмотрим прецессионные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в задаче (1), (2). Прецессионные движения можно охарактеризовать инвариантными соотношениями [6]

$$\bar{a} \cdot \bar{v} = a_0, \quad \bar{\omega} = \phi \bar{a} + \psi \bar{v}, \quad (28)$$

где  $a_0 = \cos \theta_0$  ( $\theta_0 = \angle(\bar{a}, \bar{v})$ ),  $\phi$  и  $\psi$  – скорости собственного вращения и прецессии гиростата. Положим в (28)  $\bar{a} = (0, 0, 1)$ ; тогда из (28) получим

$$v_1 = a'_0 \sin \phi, \quad v_2 = a'_0 \cos \phi, \quad v_3 = a_0,$$

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\psi} \sin \phi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\psi} \cos \phi, \quad \omega_3 = a_0 \dot{\psi} + \dot{\phi}. \quad (29)$$

При подстановке выражений (29) в уравнение (2) получим тождество. Следовательно, для нахождения условий существования прецессий (28) гиростата необходимо привлекать уравнение (1). В [6] приведен обзор результатов, установленных в задаче изучения прецессий гиростата, которая описывается уравнениями (1), (2).

**Регулярные прецессии.** Пусть в (29)  $\dot{\phi} = n$ ,  $\dot{\psi} = m$ , где  $n$  и  $m$  – постоянные, тогда

$$v_1 = a'_0 \sin nt, \quad v_2 = a'_0 \cos nt, \quad v_3 = a_0,$$

$$\omega_1 = a'_0 m \sin nt, \quad \omega_2 = a'_0 m \cos nt, \quad \omega_3 = a_0 m + n. \quad (30)$$

Условия существования прецессий (30) в задаче (1), (2) выписаны в [6]. Из формул (30) следует, что регулярные прецессии (30) описываются двумя полиномиальными ИС первого и второго порядка

$$\omega_3 = a_0 t + n, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0'^2 t^2.$$

**Полурегулярные прецессии первого типа.** Эти прецессии характеризуются условием  $\dot{\psi} = m$ , где  $m$  – постоянная. Из (29) следует (запишем формулы для  $\omega_i$ )

$$\omega_1 = a_0' t \sin \varphi, \quad \omega_2 = a_0' t \cos \varphi, \quad \omega_3 = a_0 t + \dot{\varphi}. \quad (31)$$

В [6] показано, что зависимость  $\dot{\varphi}$  от  $\varphi$  может быть двух видов

$$a) \dot{\varphi} = p_0 + p_1 \sin \varphi, \quad б) \dot{\varphi} = \sqrt{q_0 + q_1 \sin \varphi}, \quad (32)$$

где  $p_0, p_1, q_0, q_1$  – параметры.

Рассмотрим случай а) из (32). Запишем компоненты  $\omega_i$  с учетом первого соотношения (32)

$$\omega_1 = a_0' t \sin \varphi, \quad \omega_2 = a_0' t \cos \varphi, \quad \omega_3 = (a_0 t + p_0) + p_1 \sin \varphi. \quad (33)$$

Из (33) следует, что ИС для компонент вектора угловой скорости являются многочлены первого и второго порядка.

Для случая б) из (32) с помощью выражений для  $\omega_i$  из (29) устанавливаем два ИС на компоненты угловой скорости, имеющие структуру многочленов второго порядка.

**Полурегулярные прецессии второго типа.** Эти движения характеризуются условием  $\dot{\psi} = n$ , где  $n$  – постоянная. Изучим вначале случай прецессионно – изоконических движений гиростата – движений, для которых

$$\dot{\psi} = \frac{n}{b_0 + c_0 \sin nt} \quad (b_0^2 = 1 + c_0^2). \quad (34)$$

Подставляя выражение (34) в формулы для  $\omega_i$  из (29) и исключая переменную  $\varphi$  в полученных выражениях, определим два ИС – многочлены второго порядка относительно  $\omega_i$ .

В общем случае [6] скорость собственного вращения гиростата для уравнений (1), (2) имеет вид

$$\dot{\psi} = \mu_0 + \frac{q_1 \cos \varphi + q_1' \sin \varphi + q_0}{r_2 \cos 2\varphi + r_2' \sin 2\varphi + r_1 \cos \varphi + r_1' \sin \varphi + r_0}, \quad (35)$$

где  $\mu_0, q_i (i = \overline{0,1}), q_1', r_j, r_j' (j = \overline{1,2}), r_0$  – постоянные. Запишем выражения для  $\omega_i$  из (29) на основании условий  $\dot{\psi} = n$  и (35):

$$\omega_1 = \frac{a_0'(\omega_3 - n)}{a_0} \sin \varphi, \quad \omega_2 = \frac{a_0'(\omega_3 - n)}{a_0} \cos \varphi, \\ \omega_3 = (a_0 \mu_0 + n) + \frac{q_1 \cos \varphi + q_1' \sin \varphi + q_0}{r_2 \cos 2\varphi + r_2' \sin 2\varphi + r_1 \cos \varphi + r_1' \sin \varphi + r_0}. \quad (36)$$

Определив из первых двух равенств системы (36)  $\sin \varphi, \cos \varphi$  и подставив найденные значения в равенство  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  и третье соотношение из (36), получим два ИС, которые являются многочленами по  $\omega_i$  второго и третьего порядка.

**Прецессии общего вида.** Пусть функции  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  удовлетворяют условию [6]

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \alpha_0 + \beta_0 \sin \varphi. \quad (37)$$

С помощью равенств (37) в формулах для  $\omega_i$  из (29) исключим переменную  $\varphi$ . В результате получим два ИС на компоненты  $\omega_i$ , имеющие структуры многочленов второго порядка.

Когда выполняются равенства [18]

$$\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \sqrt{\gamma_0 + \varepsilon_0 \sin \varphi}, \quad (38)$$

где  $\gamma_0, \varepsilon_0$  – параметры, из соотношений для  $\omega_i$ , указанных в (29) найдем два многочлена по  $\omega_i$  второго и третьего порядков.

Для класса прецессий [18]

$$\dot{\psi} = \lambda_0 \dot{\varphi}, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{p_0 + p_1 \sin \varphi}$$

порядки ИС такие же, как и в случае (38).

В случае прецессий, которые характеризуются равенствами [18]

$$\dot{\varphi} = b_0 + c_0 \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{h_0 + h_1 \sin \varphi},$$

где  $b_0, c_0, h_0, h_1$  – постоянные параметры, на основании соотношений для  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) из (29) получим два многочлена по  $\omega_i$  третьего и четвертого порядков.

Пусть скорости собственного вращения и прецессии задаются равенствами [18]

$$\dot{\varphi} = \sqrt{f_0 + f_1 \sin \varphi}, \quad \dot{\psi} = A_0 + B_0 \sin \varphi + C_0 \dot{\varphi}. \quad (39)$$

Внесем выражения (39) в формулы для  $\omega_i$  из (29)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \alpha'_0 (A_0 + B_0 \sin \varphi + C_0 \sqrt{f_0 + f_1 \sin \varphi}) \sin \varphi, \\ \omega_2 &= \alpha'_0 (A_0 + B_0 \sin \varphi + C_0 \sqrt{f_0 + f_1 \sin \varphi}) \cos \varphi, \\ \omega_3 &= \alpha_0 (A_0 + B_0 \sin \varphi) + (\alpha_0 C_0 + 1) \sqrt{f_0 + f_1 \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (40)$$

Исключая в (40) переменную  $\varphi$ , определим два полиномиальных ИС по  $\omega_i$  четвертого порядка.

**Заключение.** В статье изучены инвариантные соотношения в решениях уравнений Кирхгофа–Пуассона. Рассмотрены решения этих уравнений, которые являются линейными, квадратичными, дробно-линейными функциями по основным переменным задачи (1), (2). Исследованы прецессионные движения гиростата с различными зависимостями скорости собственного вращения и прецессии от угла собственного вращения гиростата. Определены свойства ИС для указанных случаев; показано, что порядок полиномиальных ИС изменяется от единицы до восьми. Данные результаты позволяют выполнить сравнительный анализ полученных здесь ИС и ИС для классической задачи о движении тяжелого гиростата [5].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В. Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа / А.В. Борисов, И.С. Мамаев // *Reg. Chaot. Dyn.* – 1996. – Vol. 1, No 2. – P. 61–73.
2. Козлов В.В. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа / В.В. Козлов, Д.А. Онищенко // *Докл. АН СССР.* – 1982. – Т. 266, № 6. – С. 1298–1300.
3. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – В 2-х т. – М: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч 2. – 555 с.
4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // *Механика твердого тела.* – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
5. Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние / Г.В. Горр., Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова. – К.: Наук. думка, 1978. – 296 с.

6. Горр Г.В., Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г.В. Горр, А.В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
7. Горр Г.В. Движение гиростата / Г.В. Горр, А.М. Ковалев. – К.: Наук. думка, 2013. – 408 с.
8. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 3. – С. 502–507.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения: Собр. соч. в 5 т. / А.М. Ляпунов – Т. 2. – М., Л.: Изд-во СССР, 1956. – С. 7 – 263.
10. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mec. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 747–754.
11. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая / С.А. Чаплыгин // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1894. – Т. 6, вып. 2. – С. 20–42.
12. Чаплыгин С.А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С.А. Чаплыгин // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. – 1897. – Т. 20, вып. 1. – С. 115–170; вып. 2. – С. 173–246.
13. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П.В. Харламов // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1963. – №4. – С. 17–29.
14. Горр Г.В. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношениях / Г.В. Горр, Е.К. Узбек // Прикл. Математика и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 3. – С. 418–426.
15. Скрыпник С.В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики / С.В. Скрыпник // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
16. Горр Г.В. Новые решения в задаче о движении тела в поле потенциальных и гироскопических сил / Г.В. Горр, Е.М. Миронова // Доп. НАН Украины. – 2001. – № 4. – С. 41–48.
17. Узбек Е.К. О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Е.К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 6. – С. 964–970.
18. Горр Г.В. Новые классы прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Г.В. Горр, Е.К. Щетинина // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 12. – С. 36–45.

*Поступила в редакцию 14.10.2016 г.*

#### INVARIANT RELATIONS OF PARTICULAR SOLUTIONS OF EQUATIONS OF KIRCHHOFF–POISSON

**G.V. Gorr, T.V. Balaklitskaya**

A classification of invariant ratios in private solutions of Kirchhoff – Poisson to the problem of motion of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces, which is based on the functional dependence of the component angular velocity of a gyrostat.

**Keywords:** classification, invariant relations, gyrostat.

**Горр Геннадий Викторович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
ГУ «Институт прикладной математики и механики»,  
г. Донецк,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк  
83001, ул. Университетская, 24  
E-mail: gvgorr@gmail.com  
Тел.: +38-050-959-17-38

**Gorr Gennadij Viktorovich,**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full  
Professor,  
State Institution “Institute of Applied Mathematics and  
Mechanics”, Donetsk  
Donetsk National University, Donetsk

**Балаклицкая Татьяна Витальевна**

ГОУ ВПО “Донецкий национальный университет”,  
г. Донецк, студентка  
83001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ  
E-mail: barilka@ukr.net  
Тел.: +38-095-38-92-951

**Balaklitskaya Tat'yana Vital'evna**

Donetsk National University, Donetsk,  
student

УДК 539.3

## ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ПЬЕЗОПЛАСТИНАХ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

© 2016. С.А. Калоеров

С использованием системы дифференциальных уравнений электромагнитотермоупругости для функций напряжений Эри и функций индукций электрического и магнитного полей даны решения задач для пьезопластинок под действием различных механических, электромагнитных и тепловых полей. Для прямоугольной и бесконечной сплошной пластинок даны точные аналитические решения задач. Во всех задачах получены выражения для основных характеристик (температуры, напряжений, векторов индукций и напряженностей электромагнитного поля). Показано, что в случае действия однородных механического, теплового и электромагнитного полей основные характеристики постоянны во всех точках, потенциалы электрического и магнитного полей являются линейными функциями координат и удовлетворяют условиям потенциальности поля. В случае действия линейного потока тепла потенциалы электрического и магнитного полей становятся квадратичными функциями координат и удовлетворяют условиям потенциальности поля только при определенных связях между тепловыми пиромодулями и коэффициентами теплопроводности материала пьезопластины. Для всех рассмотренных случаев осуществлен переход к потенциалам обобщенных комплексных переменных.

**Ключевые слова:** электромагнитотермоупругость; уравнения состояния; функции напряжений и индукций; комплексные потенциалы; тепловой поток.

В современной промышленности в качестве материалов конструкций широко используются пьезоматериалы, для которых имеют место прямой и обратный пьезоэффекты [1, 2]. Под действием механических сил, тепловых и электромагнитных полей в таких элементах возникают высокие концентрации напряжений, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. В связи с этим актуальны вопросы разработки методов определения напряженно-деформированного и предельно-равновесного состояния упругих тел из пьезоматериалов при механических, тепловых и электромагнитных воздействиях. К настоящему времени решены многие вопросы теории [3–7], а также различные задачи определения напряженно-деформированного состояния тел из таких материалов. Но при этом рассматривались простейшие случаи тел, занимающие односвязные области. В работах [8, 9] разработаны методы решения двумерных и плоских задач для многосвязных областей с отверстиями и включениями произвольной конфигурации для случаев действия механических сил и электромагнитных полей. Аналогичные задачи для температурных воздействий рассмотрены в работах [10]. Но многие вопросы для случая температурных воздействий остались нерешенными. Это, в частности, действие линейного потока тепла, учет вязкоупругих свойств материалов. В данной статье получены соотношения, позволяющие решать общие задачи электромагнитотермоупругости для пьезопластин, находящихся в потенциальном электромагнитном поле при произвольных воздействиях, в том числе линейных потоков тепла.

**1. Постановка задач и сведение их к задачам для функций напряжений и индукций.** Рассмотрим тонкую пластинку малой толщины, имеющую в каждой точке плоскость тепловой и материальной симметрии, параллельную ее срединной плоскости. Введем в срединной плоскости пластинки систему координат  $Oxyz$  с осью  $z$ , перпендикулярной срединной плоскости. Будем считать, что температура не

меняется по толщине пластинки или ее основания теплоизолированы, основания пластинки свободны от механических и электромагнитных воздействий, т.е. усилия и индукция на них равны нулю; на боковой поверхности заданы температура или плотность потока тепла, потенциалы или индукции электрического и магнитного поля, а также внешние усилия или перемещения, причем здесь внешние воздействия распределены симметрично относительно срединной плоскости и мало меняются по толщине. Объемные силы, свободные электрические заряды и заряды магнитных диполей отсутствуют.

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ) для пластинки сводится к решению задачи теплопроводности, затем задачи термоэлектромагнитоупругости.

Решение плоской задачи стационарной теплопроводности сводится к решению уравнения теплопроводности [11–14]

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $k_{ij}$  – соответствующие коэффициенты теплопроводности материала пластинки, при заданных граничных условиях. Если решением этого уравнения температура  $T$  определена, то проекции вектора теплопроводности на оси координат и на нормаль вычисляются по формулам

$$q_x = -\left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad q_y = -\left(k_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}\right); \quad (1.2)$$

$$q_n = -\left((k_{11} \cos nx + k_{12} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial x} + (k_{12} \cos nx + k_{22} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial y}\right). \quad (1.3)$$

Граничные условия для определения функции  $T(x, y)$  имеют вид

$$T|_L = \varphi(x, y) \quad (1.4)$$

при заданной на контуре  $L$  температуре,

$$\left[ (k_{11} \cos nx + k_{12} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial x} + (k_{12} \cos nx + k_{22} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \Big|_L = -g(x, y), \quad (1.5)$$

когда на контуре  $L$  известна плотность потока тепла (1.3),

$$\left[ (k_{11} \cos nx + k_{12} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial x} + (k_{12} \cos nx + k_{22} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \Big|_L = -h[T_e - T], \quad (1.6)$$

при конвективном теплообмене с окружающей средой,

$$T_1|_L = T_2|_L,$$

$$\begin{aligned} & \left[ (k_{11}^1 \cos nx + k_{12}^1 \cos ny) \frac{\partial T_1}{\partial x} + (k_{12}^1 \cos nx + k_{22}^1 \cos ny) \frac{\partial T_1}{\partial y} \right] \Big|_L = \\ & = -\left[ (k_{11}^2 \cos nx + k_{12}^2 \cos ny) \frac{\partial T_2}{\partial x} + (k_{12}^2 \cos nx + k_{22}^2 \cos ny) \frac{\partial T_2}{\partial y} \right] \Big|_L, \quad (1.7) \end{aligned}$$

для идеального теплового контакта двух тел, где величины со значками 1 и 2 относятся к двум контактирующим телам.

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости при известной функции распределения температуры  $T(x, y)$  сводится решению основной системы уравнений [2, 3, 5, 8, 9], состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (1.8)$$

уравнений вынужденной электростатики

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

уравнений электромагнитоупругого состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y + \alpha_1 T, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y + \alpha_2 T, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y + \alpha_6 T, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + v_{11}B_x + v_{12}B_y + t_1^\sigma T, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{21}D_x + \beta_{22}D_y + v_{21}B_x + v_{22}B_y + t_2^\sigma T, \\ H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + v_{11}D_x + v_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y + m_1^\sigma T, \\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + v_{21}D_x + v_{22}D_y + \chi_{21}B_x + \chi_{22}B_y + m_2^\sigma T, \end{aligned} \quad (1.10)$$

соотношений Коши для малых деформаций и соотношений потенциальности электромагнитного поля

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (1.11)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (1.12)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  и  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $u, v, w$  – проекции вектора перемещений;  $D_x, D_y, D_z, E_x, E_y, E_z$  и  $\phi$  – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля;  $B_x, B_y, B_z, H_x, H_y, H_z$  и  $\psi$  – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал магнитного поля;  $s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля и температуре;  $g_{ki}$  и  $p_{ki}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях

и температуре;  $\beta_{kl}$ ,  $\chi_{kl}$  и  $\nu_{kl}$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре;  $\alpha_j$  – коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля;  $t_n^\sigma$  и  $m_n^\sigma$  – тепловые пирозлектрические и пиромангнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях;  $T = T_m - T_H$  – разность температур в текущем состоянии  $T_m$  и начальном состоянии  $T_H$ , при котором напряжения и деформации, индукции и напряженности электромагнитного поля равны нулю.

Систему (1.8)–(1.12) нужно решать при заданных на границе механических, электрических и магнитных условиях:

$$\sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny = X_n, \quad \tau_{xy} \cos nx + \sigma_y \cos ny = Y_n, \quad (1.13)$$

если заданы усилия;

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad (1.14)$$

при заданных перемещениях;

$$D_x \cos nx + D_y \cos ny = D_n, \quad B_x \cos nx + B_y \cos ny = B_n, \quad (1.15)$$

если заданы индукции;

$$\varphi = \varphi^*, \quad \psi = \psi^*, \quad (1.16)$$

при заданных потенциалах.

Кроме того должны выполняться уравнения совместности деформаций, из которых в случае плоской задачи остается одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.17)$$

Введем функции напряжений  $F(x, y)$  [15], электрической индукции  $X(x, y)$  и магнитной индукции  $\Omega(x, y)$  [8, 9] таким образом, чтобы уравнения (1.8) и первое и третье (1.9) удовлетворялись тождественно, положив:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ D_x &= \frac{\partial X}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial X}{\partial x}, \quad B_x = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подставив выражения (1.18) в уравнения (1.10), а затем полученные выражения в (1.17), во второе и четвертое уравнения системы (1.9), приходим к системе дифференциальных уравнений [10]

$$\begin{aligned} L_{4s} F + L_{3g} X + L_{3p} \Omega &= L_{2\alpha} T, \\ L_{3g} F + L_{2\beta} X + L_{2v} \Omega &= L_{1e} T, \\ L_{3p} F + L_{2v} X + L_{2\chi} \Omega &= L_{1m} T, \end{aligned} \quad (1.19)$$



где

$$\begin{aligned}
 L_{4s} &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\
 L_{3g} &= -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{3p} &= -p_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (p_{12} + p_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (p_{21} + p_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + p_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
 L_{2\beta} &= -\beta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{2\nu} = -\nu_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \nu_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 L_{2\chi} &= -\chi_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\chi_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \chi_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{2\alpha} = -\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
 L_{1t} &= -t_2^\sigma \frac{\partial}{\partial x} + t_1^\sigma \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{1m} = -m_2^\sigma \frac{\partial}{\partial x} + m_1^\sigma \frac{\partial}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Систему дифференциальных уравнений (1.19) нужно решать при заданных на границе механических, электрических и магнитных условиях. Так, если на контуре заданы усилия, то из (1.13) будем иметь [15]

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \pm \int_0^s X_{ln} ds + c_{l1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \mp \int_0^s Y_{ln} ds + c_{l2}. \tag{1.21}$$

Электромагнитные граничные условия при заданных на границе индукциях (1.15) будут такими [8, 9]:

$$X = \pm \int_0^s D_{ln} ds + c_{l3}, \quad \Omega = \pm \int_0^s B_{ln} ds + c_{l4}. \tag{1.22}$$

В условиях (1.21) и (1.22) верхние знаки относятся к внешнему контуру, нижние – к контурам отверстий;  $c_{lj}$  – произвольные постоянные.

Если в приведенных выше соотношениях положить равными нулю магнитные  $p_{ki}$ ,  $\chi_{kl}$  и магнитоэлектрические  $\nu_{kl}$  постоянные и принять функцию магнитной индукции  $\Omega(x, y)$  равной нулю, то из трех дифференциальных уравнений (1.19) останутся первые два уравнения для нахождения функций напряжений  $F(x, y)$  и электрической индукции  $X(x, y)$ , что соответствует задаче электроупругости [8]. Если же в приведенных соотношениях положить равными нулю электрические  $g_{ki}$ ,  $\beta_{kl}$  и магнитоэлектрические  $\nu_{kl}^\sigma$  постоянные и принять функцию электрической индукции  $X(x, y)$  равной нулю, то из системы (1.19) останутся первое и третье уравнения для нахождения функций напряжений  $F(x, y)$  и магнитной индукции  $\Omega(x, y)$  и мы придем к задаче магнитоупругости [8]. Если же в указанных соотношениях положить равными нулю все постоянные за исключением  $s_{ij}$  и принять функции электрической  $X(x, y)$  и

магнитной индукций  $\Omega(x, y)$  равными нулю, то в системе (1.19) останется одно дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка для нахождения функции напряжений  $F(x, y)$ , что соответствует плоской задаче классической теории упругости [15].

**2. Решения плоских задач для прямоугольника и бесконечной сплошной пластинки.** В решении конкретных задач с использованием комплексных потенциалов большой интерес представляют решения соответствующих задач для сплошной бесконечной пластинки. Будем бесконечную пластинку рассматривать как прямоугольную со сторонами  $2c$  и  $2d$  (рис. 1), длины сторон которой стремятся к бесконечности, когда на сторонах заданы внешние усилия, индукции или потенциалы электрического и магнитного полей, а также температура.

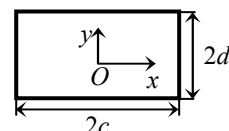


Рис. 1

Для решения данной задачи искомые функции напряжений  $F(x, y)$ , электрической и магнитной индукций  $X(x, y)$  и  $\Omega(x, y)$ , потенциалы электрического и магнитного полей  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  выберем в виде полиномов

$$T(x, y) = t_x x + t_y y + t_0; \quad (2.1)$$

$$F(x, y) = \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_1}{2} y^2 - a_3 xy; \quad (2.2)$$

$$X(x, y) = -d_2 x + d_1 y; \quad (2.3)$$

$$\Omega(x, y) = -b_2 x + b_1 y; \quad (2.4)$$

$$\varphi(x, y) = -e_1 x - e_2 y + \varphi_0; \quad (2.5)$$

$$\psi(x, y) = -h_1 x - h_2 y + \psi_0. \quad (2.6)$$

Знаки перед коэффициентами выбраны для удобства дальнейшего их использования.

Функции (2.1)–(2.6) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1) и (1.19), а неизвестные их коэффициенты будем находить, удовлетворяя граничным условиям на сторонах прямоугольника. Заметим, что через коэффициенты приведенных выше полиномов на основании формул (1.2), (1.18) легко находятся выражения компонент потока тепла, напряжений и индукций:

$$q_x = -k_{11} t_x - k_{12} t_y, \quad q_y = -k_{12} t_x - k_{22} t_y; \quad (2.7)$$

$$\sigma_x = a_1, \quad \sigma_y = a_2, \quad \tau_{xy} = a_3;$$

$$D_x = d_1, \quad D_y = d_2, \quad B_x = b_1, \quad B_y = b_2,$$

$$E_x = e_1, \quad E_y = e_2, \quad H_x = h_1, \quad H_y = h_2. \quad (2.8)$$

Используя приведенные функции, решим ряд задач для прямоугольника и бесконечной пластинки. Будем рассматривать случай однотипных электрических и магнитных условий на сторонах (на бесконечности). Рассмотрим связанные задачи электромагнитоупругости без учета температуры и несвязанную задачу термоэлектромагнитоупругости при задании на сторонах температуры и отсутствии механических и электромагнитных воздействий.1.

**Действие механических сил и индукций электромагнитного поля.** Пусть без учета температуры на сторонах пластинки  $x = \pm c$ ,  $y = \pm d$  заданы соответствующие

растягивающие и касательные усилия постоянной интенсивности  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и индукции электрического и магнитного поля с компонентами векторов  $D_x, B_x, D_y, B_y$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \quad D_x = D_x^0, \quad B_x = B_x^0 \quad \text{при } x = \pm c, \\ \sigma_y = \sigma_y^0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \quad D_y = D_y^0, \quad B_y = B_y^0 \quad \text{при } y = \pm d. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Учитывая (2.8), для коэффициентов функций (2.2)–(2.4) найдем

$$a_1 = \sigma_x^0, \quad a_2 = \sigma_y^0, \quad a_3 = \tau_{xy}^0, \quad d_1 = D_x^0, \quad d_2 = D_y^0, \quad b_1 = B_x^0, \quad b_2 = B_y^0. \quad (2.10)$$

Зная эти коэффициенты, а, следовательно, и функции  $F(x, y)$ ,  $X(x, y)$  и  $\Omega(x, y)$ , по формулам (1.18) находим значения напряжений и индукций в любых точках пластинки:

$$\sigma_x = \sigma_x^0, \quad \sigma_y = \sigma_y^0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \quad D_x = D_x^0, \quad D_y = D_y^0, \quad B_x = B_x^0, \quad B_y = B_y^0, \quad (2.11)$$

а из уравнений (1.10) найдем деформации и компоненты векторов напряженности:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= s_{11}\sigma_x^0 + s_{12}\sigma_y^0 + s_{16}\tau_{xy}^0 + g_{11}D_x^0 + g_{21}D_y^0 + p_{11}B_x^0 + p_{21}B_y^0, \\ \varepsilon_y^0 &= s_{12}\sigma_x^0 + s_{22}\sigma_y^0 + s_{26}\tau_{xy}^0 + g_{12}D_x^0 + g_{22}D_y^0 + p_{12}B_x^0 + p_{22}B_y^0, \\ \gamma_{xy}^0 &= s_{16}\sigma_x^0 + s_{26}\sigma_y^0 + s_{66}\tau_{xy}^0 + g_{16}D_x^0 + g_{26}D_y^0 + p_{16}B_x^0 + p_{26}B_y^0; \\ E_x^0 &= -g_{11}\sigma_x^0 - g_{12}\sigma_y^0 - g_{16}\tau_{xy}^0 + \beta_{11}D_x^0 + \beta_{12}D_y^0 + \nu_{11}B_x^0 + \nu_{12}B_y^0, \\ E_y^0 &= -g_{21}\sigma_x^0 - g_{22}\sigma_y^0 - g_{26}\tau_{xy}^0 + \beta_{21}D_x^0 + \beta_{22}D_y^0 + \nu_{21}B_x^0 + \nu_{22}B_y^0, \\ H_x^0 &= -p_{11}\sigma_x^0 - p_{12}\sigma_y^0 - p_{16}\tau_{xy}^0 + \nu_{11}D_x^0 + \nu_{12}D_y^0 + \chi_{11}B_x^0 + \chi_{12}B_y^0, \\ H_y^0 &= -p_{21}\sigma_x^0 - p_{22}\sigma_y^0 - p_{26}\tau_{xy}^0 + \nu_{21}D_x^0 + \nu_{22}D_y^0 + \chi_{21}B_x^0 + \chi_{22}B_y^0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Интегрируя эти соотношения, найдем

$$\begin{aligned} u = \varepsilon_x^0 x + u_0, \quad v = \varepsilon_y^0 y + v_0, \\ \varphi(x, y) = E_x^0 x + E_y^0 y + \varphi_0, \quad \psi(x, y) = H_x^0 x + H_y^0 y + \psi_0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При этом учтено, что в данном случае угол поворота пластинки равен нулю:

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.15)$$

Для бесконечной пластинки (при  $c, d \rightarrow \infty$ ) получаем те же формулы, если всюду индекс 0 вверху заменим на индекс  $\infty$ , которому соответствуют значения тех же величин в бесконечно удаленной точке.

Во всех приведенных в этом пункте формулах в случае действия только механических сил нужно положить равными нулю компоненты индукций электромагнитного поля, и, наоборот, в случае действия только электромагнитного поля нужно положить равными нулю напряжения.

**Действие механических сил и разности потенциалов электромагнитного поля.** Пусть без учета температуры на сторонах пластинки  $x = \pm c, y = \pm d$  заданы

соответствующие растягивающие и касательные усилия постоянной интенсивности  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , а также потенциалы электрического и магнитного полей  $\varphi(\pm c, y)$ ,  $\psi(\pm c, y)$ ,  $\varphi(x, \pm d)$ ,  $\psi(x, \pm d)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \quad \varphi = \varphi(\pm c, y), \quad \psi = \psi(\pm c, y) \quad \text{при } x = \pm c, \\ \sigma_y &= \sigma_y^0, \quad \tau_{xy} = \tau, \quad \varphi = \varphi(x, \pm d), \quad \psi = \psi(x, \pm d) \quad \text{при } y = \pm d. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В этом случае из граничных условий для напряжений и потенциалов будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma_x^0, \quad a_2 = \sigma_y^0, \quad a_3 = \tau_{xy}^0, \\ e_1c - e_2y + \varphi_0 &= \varphi(-c, y), \quad -e_1c - e_2y + \varphi_0 = \varphi(c, y), \\ h_1c - h_2y + \psi_0 &= \psi(-c, y), \quad -h_1c - h_2y + \psi_0 = \psi(c, y), \\ -e_1x + e_2d + \varphi_0 &= \varphi(x, -d), \quad -e_1x - e_2d + \varphi_0 = \varphi(x, d), \\ -h_1x + h_2d + \psi_0 &= \psi(x, -d), \quad -h_1x - h_2d + \psi_0 = \psi(x, d). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вычислив разности потенциалов на противоположных сторонах, из соотношений (2.17) получим

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\varphi(-c, y) - \varphi(c, y)}{2c}, \quad e_2 = \frac{\varphi(x, -d) - \varphi(x, d)}{2d}, \\ h_1 &= \frac{\psi(-c, y) - \psi(c, y)}{2c}, \quad h_2 = \frac{\psi(x, -d) - \psi(x, d)}{2d}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Окончательно для напряжений и компонент векторов напряженностей в любых точках пластинки находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0, \quad \sigma_y = \sigma_y^0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \\ E_x^0 &= e_1 = \frac{\varphi(-c, y) - \varphi(c, y)}{2c}, \quad E_y^0 = e_2 = \frac{\varphi(x, -d) - \varphi(x, d)}{2d}, \\ H_x^0 &= h_1 = \frac{\psi(-c, y) - \psi(c, y)}{2c}, \quad H_y^0 = h_2 = \frac{\psi(x, -d) - \psi(x, d)}{2d}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

По этим значениям найдем компоненты векторов индукций  $D_x^0$ ,  $D_y^0$ ,  $B_x^0$ ,  $B_y^0$ , решая следующую из последних 4 уравнений состояния (1.10) систему

$$\begin{aligned} E_x^0 &= -g_{11}\sigma_x^0 - g_{12}\sigma_y^0 - g_{16}\tau_{xy}^0 + \beta_{11}D_x^0 + \beta_{12}D_y^0 + \nu_{11}B_x^0 + \nu_{12}B_y^0, \\ E_y^0 &= -g_{21}\sigma_x^0 - g_{22}\sigma_y^0 - g_{26}\tau_{xy}^0 + \beta_{21}D_x^0 + \beta_{22}D_y^0 + \nu_{21}B_x^0 + \nu_{22}B_y^0, \\ H_x^0 &= -p_{11}\sigma_x^0 - p_{12}\sigma_y^0 - p_{16}\tau_{xy}^0 + \nu_{11}D_x^0 + \nu_{12}D_y^0 + \chi_{11}B_x^0 + \chi_{12}B_y^0, \\ H_y^0 &= -p_{21}\sigma_x^0 - p_{22}\sigma_y^0 - p_{26}\tau_{xy}^0 + \nu_{21}D_x^0 + \nu_{22}D_y^0 + \chi_{21}B_x^0 + \chi_{22}B_y^0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

После этого по формулам (2.12) и (2.14) найдем деформации, перемещения и потенциалы.

Если на противоположных сторонах пластинки значения потенциалов равны нулю, то в приведенных формулах нужно принимать  $e_1 = e_2 = h_1 = h_2 = 0$ .

Для бесконечной пластинки (при  $c, d \rightarrow \infty$ ) во всех приведенных выражениях нужно верхний индекс 0 заменить на  $\infty$ .

Во всех приведенных в этом пункте формулах в случае действия только механических сил нужно положить равными нулю компоненты векторов напряженностей электромагнитного поля, а в случае действия только электромагнитного поля нужно положить равными нулю напряжения.

В задачах несвязанной термоэлектромагнитоупругости учитывается только влияние температуры, и считается, что механические и электромагнитные воздействия отсутствуют. Ниже рассмотрим случаи, когда на сторонах пластинки равны нулю напряжения и компоненты векторов индукции.

**Действие постоянной температуры на контуре.** Пусть на сторонах пластинки задана постоянная температура  $T_0$ , внешние усилия и индукции электрического и магнитного поля равны нулю. Тогда из условий на сторонах

$$\begin{aligned} T = T_0, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad D_x = 0, \quad B_x = 0 \quad \text{при } x = \pm c; \\ T = T_0, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad D_y = 0, \quad B_y = 0 \quad \text{при } y = \pm d. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Тогда из граничных условий на сторонах пластинки будем иметь

$$t_x = t_y = a_1 = a_2 = a_3 = d_1 = d_2 = b_1 = b_2 = 0, \quad t_0 = T_0.$$

Зная эти коэффициенты, найдем основные характеристики температурного, механического и электромагнитного полей. Температура во всех точках пластинки будет равна  $T_0$ , напряжения и компоненты векторов электрической и магнитной индукций всех точек пластинки получаются равными нулю, для компонент векторов электрической и магнитной напряженностей из уравнений состояния (1.10). Окончательно для всех величин имеем

$$\begin{aligned} T = T_0, \quad \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = D_x^0 = D_y^0 = B_x^0 = B_y^0 = 0, \\ E_x^0 = t_1^\sigma T_0, \quad E_y^0 = t_2^\sigma T_0, \quad H_x^0 = m_1^\sigma T_0, \quad H_y^0 = m_2^\sigma T_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

После этого по формулам (2.12) и (2.14) найдем деформации, перемещения и потенциалы.

Для бесконечной пластинки (при  $c, d \rightarrow \infty$ ) и в данной задаче во всех приведенных выражениях нужно верхний индекс 0 заменить на  $\infty$ .

**Действие линейного потока тепла.** Пусть на сторонах прямоугольника равны нулю значения напряжений и индукций и прямоугольник находится в поле линейного потока тепла, направленного под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  (рис. 2), т. е. для проекций вектора теплопроводности на оси координат получим [11]

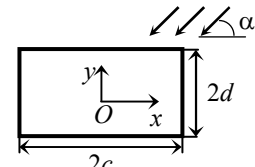


Рис. 2

$$q_x = -q \cos \alpha, \quad q_y = -q \sin \alpha, \quad (2.23)$$

а для плотности потока тепла на площадке с нормалью  $\vec{n}$  на основании (1.3) и (2.23) будем иметь

$$q_n = -q (\cos \alpha \cos nx + \sin \alpha \cos ny). \quad (2.24)$$

Подставив выражения (2.23) в левые части соотношений (2.7) и решив полученную систему уравнений, находим

$$t_x = \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\varepsilon^2} q, \quad t_y = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\varepsilon^2} q, \quad (2.25)$$

где  $\varepsilon^2 = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$ . Считая, что значения температуры в начале координат  $t_0 = 0$ , окончательно для температуры получаем

$$T(x, y) = t_x x + t_y y. \quad (2.26)$$

Кроме того, учитывая, что напряжения и индукции на сторонах прямоугольника равны нулю, найдем, что они такими будут и во всех точках

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = D_x^0 = D_y^0 = B_x^0 = B_y^0 = 0. \quad (2.27)$$

Тогда для компонент векторов напряженностей из уравнений состояния (1.10) будем иметь

$$\begin{aligned} E_x &= t_1^\sigma (t_x x + t_y y), & E_y &= t_2^\sigma (t_x x + t_y y), \\ H_x &= m_1^\sigma (t_x x + t_y y), & H_y &= m_2^\sigma (t_x x + t_y y), \end{aligned} \quad (2.28)$$

причем в силу потенциальности возникающего электромагнитного поля на основе второго и четвертого соотношений (1.9) должны выполняться условия

$$t_2^\sigma t_x - t_1^\sigma t_y = 0, \quad m_2^\sigma t_x - m_1^\sigma t_y = 0, \quad (2.29)$$

из которых следуют связи между тепловыми пиромодулями и компонентами вектора теплопроводности

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{t_y}{t_x},$$

записываемые на основе (2.25) в виде

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha} = \frac{k_{11} \operatorname{tg} \alpha - k_{12}}{k_{22} - k_{12} \operatorname{tg} \alpha}. \quad (2.30)$$

Интегрируя равенства (1.12), получим выражения для потенциалов электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\frac{1}{2} t_1^\sigma t_x x^2 - \frac{1}{2} t_2^\sigma t_y y^2 - t_1^\sigma t_x x y + \varphi_0, \\ \psi(x, y) &= -\frac{1}{2} m_1^\sigma t_x x^2 - \frac{1}{2} m_2^\sigma t_y y^2 - m_1^\sigma t_x x y + \psi_0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

причем имеют место соотношения (2.30).

Из уравнений состояния (1.10) для этого случая будем иметь

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1 T, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_2 T, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_6 T. \quad (2.32)$$

Учитывая выражение (2.26) и интегрируя первые два равенства (2.32), получаем

$$u(x, y) = \frac{\alpha_1 t_x}{2} x^2 + \alpha_1 t_y xy + f_1(y), \quad v(x, y) = \frac{\alpha_2 t_x}{2} y^2 + \alpha_2 t_y xy + f_2(x).$$

Подставляя эти функции в третье равенство (2.32), будем иметь

$$(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x)x + f_1'(y) = -(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y)y - f_2'(x) = \omega_3.$$

При выводе последних соотношений учтено, что, если одна функция, зависящая от  $x$ , равна другой функции, зависящей от  $y$ , то эти функции являются постоянными ( $\omega_3$ ). Интегрируя последние равенства, найдем функции  $f_1(y)$  и  $f_2(x)$ . Подставив эти функции в выражения для  $u$  и  $v$ , окончательно получим значения перемещений в сплошной пластинке при действии бесконечного линейного потока тепла

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\alpha_1 t_x}{2} x^2 - \frac{\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y}{2} y^2 + \alpha_1 t_y xy - \omega_3 y + u_0, \\ v(x, y) &= \frac{\alpha_2 t_y}{2} y^2 - \frac{\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x}{2} x^2 + \alpha_2 t_x xy + \omega_3 x + v_0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где  $-\omega_3 y + u_0$ ,  $\omega_3 x + v_0$  – жесткие перемещения пластинки как целого.

Для материала с тепловой ортотропией ( $k_{12} = 0$ ) получим соотношения

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{k_{11}}{k_{22}} \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{t_1^\sigma}{t_2^\sigma} = \frac{m_1^\sigma}{m_2^\sigma} = \frac{k_{22}}{k_{11}} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2.34)$$

Откуда следует, что при  $\alpha = 0$  необходимо соблюдение равенство  $t_2^\sigma = m_2^\sigma = 0$ , при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  – равенства  $t_1^\sigma = m_1^\sigma = 0$ , что имеет место для постоянных известных материалов.

Таким образом, при действии линейного потока тепла (2.26) потенциальное электромагнитное поле в прямоугольной пластинке при задании на сторонах нулевых напряжений и индукций возникает только при соблюдении условий (2.30), для ортотропного тела – условий (2.34). В случае бесконечной пластинки (при  $c, d \rightarrow \infty$ ) и в данной задаче во всех приведенных выражениях нужно верхний индекс 0 заменить на  $\infty$ .

Пусть теперь при действии линейного потока тепла на сторонах прямоугольника равны нулю напряжения и напряженности электромагнитного поля, т. е. потенциалы постоянны. Тогда имеют место формулы (2.23)–(2.26) и, кроме того, учитывая, что напряжения и напряженности на сторонах прямоугольника равны нулю, найдем, что они такими будут и во всех точках

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = E_x^0 = E_y^0 = H_x^0 = H_y^0 = 0.$$

Тогда из уравнений состояния (1.10) для определения индукций будем иметь систему уравнений

$$\beta_{11} D_x^0 + \beta_{12} D_y^0 + \nu_{11} B_x^0 + \nu_{12} B_y^0 = -t_1^\sigma T,$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{21}D_x^0 + \beta_{22}D_y^0 + \nu_{21}B_x^0 + \nu_{22}B_y^0 &= -t_2^\sigma T, \\
 \nu_{11}D_x^0 + \nu_{12}D_y^0 + \chi_{11}B_x^0 + \chi_{12}B_y^0 &= -m_1^\sigma T, \\
 \nu_{21}D_x^0 + \nu_{22}D_y^0 + \chi_{21}B_x^0 + \chi_{22}B_y^0 &= -m_2^\sigma T,
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

из которой следует, что компоненты индукций будут линейными функциями от  $T$ , а, следовательно, от  $x$  и  $y$ . Решая эту систему, найдем выражения  $D_x^0$ ,  $D_y^0$ ,  $B_x^0$ ,  $B_y^0$ . В этом случае потенциальность электромагнитного поля обеспечена при любых углах действия температурного поля, а при удовлетворении граничным условиям задачи электромагнитоупругости, где присутствуют индукции и перемещения, нужно использовать полученные от решения системы (2.35) значения, а для перемещений интегрировать следующие из первых 3 равенств системы (1.10) равенства

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= g_{11}D_x^0 + g_{21}D_y^0 + p_{11}B_x^0 + p_{21}B_y^0 + \alpha_1 T, \\
 \varepsilon_y^0 &= g_{12}D_x^0 + g_{22}D_y^0 + p_{12}B_x^0 + p_{22}B_y^0 + \alpha_2 T, \\
 \gamma_{xy}^0 &= g_{16}D_x^0 + g_{26}D_y^0 + p_{16}B_x^0 + p_{26}B_y^0 + \alpha_6 T,
 \end{aligned}$$

Следовательно, при действии линейного потока тепла (2.26) в прямоугольной пластинке при задании на сторонах нулевых напряжений и напряженностей электромагнитное поле всегда потенциально, но при решении задач нужно определять компоненты индукции поля и упругие перемещения. В случае бесконечной пластинки (при  $c, d \rightarrow \infty$ ) и в данной задаче во всех приведенных выражениях нужно верхний индекс 0 заменить на  $\infty$ .

Учитывая это, для бесконечной пластинки с отверстиями и включениями можно решать задачи о действии линейного потока тепла, используя метод суперпозиции [11].

При использовании метода суперпозиции температурное и термоэлектромагнитоупругое состояния представляются как суммы состояний в сплошной пластинке и возмущенных за счет отверстий и включений. Если для определения возмущенных температурного и электромагнитного состояний использовать комплексный потенциал теплопроводности и комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости, то, исходя из полученных выше результатов, основные характеристики поля (температура, напряжения, компоненты векторов индукций и напряженностей) в случае нулевых значений компонентов индукций представятся в виде [8–11]

$$\begin{aligned}
 T(x, y) &= T^*(x, y) + 2 \operatorname{Re} F_5(z_5), \\
 (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, D_x, D_y, B_x, B_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}) \Phi'_k(z_k),
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k), \tag{2.37}$$

где величины со знаком звездочка сверху ( $*$ ) вычисляются по соответствующим формулам (2.26) (2.28);



$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = \nu_k \mu_k, \\ \lambda_{8k} &= -\nu_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k; \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$z_k = x + \mu_k y \quad (2.39)$$

$\mu_5$  – корень характеристического уравнения задачи теплопроводности [13, 14]

$$k_{22}\mu^2 + 2k_{12}\mu + k_{11} = 0; \quad (2.40)$$

$\mu_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – корни характеристического уравнения электромагнитоупругости

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (2.41)$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \quad (2.42)$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\rho_k,$$

$$h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (\nu_{11}\mu_k - \nu_{12})\nu_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k,$$

$$\nu_k = \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)},$$

$$\rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k)l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}),$$

$$\nu_5 = \frac{r_\chi(\mu_5)}{r_5(\mu_5)}, \quad \rho_5 = \frac{r_\omega(\mu_5)}{r_5(\mu_5)}, \quad r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)},$$

$$l_5(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2\nu}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix},$$

$$l_{\omega}(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2v}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix}.$$

$$l_{2\alpha}(\mu_5) = -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2, \quad l_{1t}(\mu_5) = t_1^{\sigma} \mu_5 - t_2^{\sigma}, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1^{\sigma} \mu_5 - m_2^{\sigma},$$

$$r_k^0 = g_{11} \mu_k^2 - g_{16} \mu_k + g_{12} - (\beta_{11} \mu_k - \beta_{12}) v_k - (v_{11} \mu_k - v_{12}) \rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1^{\sigma}}{r_5},$$

$$h_k^0 = p_{11} \mu_k^2 - p_{16} \mu_k + p_{12} - (v_{11} \mu_k - v_{12}) v_k - (\chi_{11} \mu_k - \chi_{12}) \rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1^{\sigma}}{r_5 \mu_5};$$

$$p_k = s_{11} \mu_k^2 - s_{16} \mu_k + s_{12} + (g_{11} \mu_k - g_{21}) v_k + (p_{11} \mu_k - p_{21}) \rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_1}{r_5},$$

$$q_k = s_{12} \mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left( g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left( p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_2}{r_5 \mu_5}; \quad (2.43)$$

$$(E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) = (t_1^{\sigma}, t_2^{\sigma}, m_1^{\sigma}, m_2^{\sigma}) T^*(x, y)$$

$F_5(z_5)$  – комплексный потенциал теплопроводности, определяемый из граничных условий теплопроводности [11], содержащих в правых частях  $T^*$  и ее производные;

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5; \quad (2.44)$$

$\Phi_k(z_k)$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – комплексные потенциалы электромагнитоупругости, определяемые из граничных условий электромагнитоупругости известными методами [8–10]. При этом, в случае задания на границе перемещений и в контактных задачах в правые части граничных условий будут входить  $\varphi^*(x, y)$ ,  $\psi^*(x, y)$  и  $u^*(x, y)$ ,  $v^*(x, y)$ , вычисляемые по формулам (2.31) и (2.33) для аналогичных величин без звездочки вверху.

Можно, конечно, решение для сплошной бесконечной пластинки ввести в комплексные потенциалы и удовлетворять затем обычным граничным условиям. В функцию  $F_5(z_5)$  это нужно вводить линейным слагаемым, в функции  $\Phi_k(z_k)$  – квадратичными слагаемыми. Тогда для комплексных потенциалов, учитывающих и линейное распределение температуры, обозначаемых ниже индексом звездочка вверху, получим

$$F_5^*(z_5) = c_5 z_5 + F_5(z_5) \quad \Phi_k^*(z_k) = \Gamma_{k2} z_k^2 + \Phi_k(z_k), \quad (2.45)$$

где  $F_5(z_5)$ ,  $\Phi_k(z_k)$  – функции, определяемые обычными методами [8–11] из соответствующих граничных условий на контурах областей. Постоянные  $c_5$ ,  $\Gamma_{k2}$ , отвечающие за решение задачи для сплошной пластинки легко вычисляются. Так, на основе (2.26) и (2.45) имеем

$$T(x, y) = \operatorname{Re} F_5^*(z_5) = c_5 z_5 + \overline{c_5} \overline{z_5} = t_x x + t_y y$$

Учитывая, что  $z_k = x + \mu_k y$  и сравнивая коэффициенты при  $x$  и  $y$ , получаем

$$c_5 = \frac{t_y - t_x \mu_5}{\mu_5 - \overline{\mu_5}}. \quad (2.46)$$

Тогда

$$\Phi_5^*(z_5) = r_5 \int F_5^*(z_5) dz_5 = \Gamma_{52} z_5^2,$$

где  $\Gamma_{52} = r_5 c_5 / 2$ . По аналогии с  $\Phi_5(z_5)$  находим

$$\Phi_k^*(z_k) = \Gamma_{k2} z_k^2 \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (2.47)$$

При этом  $\Gamma_{k2}$  – постоянные, определяемые из условий равенства нулю напряжений и индукций (2.36):

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10,k}) \Gamma_{k2} z_k = 0. \quad (2.48)$$

Подставляя в (2.48)  $z_k = x + \mu_k y$ , приравнивая затем нулю коэффициенты при  $x$ ,  $y$  и учитывая характеристические уравнения (2.40), получим систему для определения коэффициентов  $\Gamma_{k2}$  ( $k = \overline{1, 4}$ ). Следовательно, постоянные  $c_5$ ,  $\Gamma_{k2}$  известны и неизвестные комплексные потенциалы в общих выражениях (2.45) можно найти на основе разработанных методов [8–11, 13, 16,], удовлетворяя соответствующим граничным условиям для комплексных потенциалов, в которых нужно заменять  $F_5(z_5)$  и  $\Phi_k(z_k)$  на  $F_5^*(z_5)$   $\Phi_k^*(z_k)$  без учета  $T^*(x, y)$  и  $E_x^*$ ,  $E_y^*$ ,  $H_x^*$ ,  $H_y^*$ ,  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$  и  $v^*$ .

Аналогичные соотношения получаются, если в случае температурного потока на бесконечности равны нулю компоненты векторов напряженностей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц / Дж. Най. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 388 с.
3. Гринченко В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5)
4. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков / И. С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
5. Ландау Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 621 с.
6. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
7. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
8. Калоеров С. А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, А. И. Баева, О. И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
9. Калоеров С. А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С. А. Калоеров, А. В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
10. Калоеров С. А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С. А. Калоеров, О. А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 4. – С. 81–91.
11. Калоеров С. А. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С. А. Калоеров, Ю. С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.

12. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
13. Космодамианский А. С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А. С. Космодамианский, С. А. Калоеров. – К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
14. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела / А. И. Уздалев. – Саратов: Изд-во СГУ, 1967. – 167 с.
15. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
16. Калоеров С. А. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С. А. Калоеров, Ю. С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.

*Поступила в редакцию 27.04.2016 г.*

#### THE POTENTIAL ELECTROMAGNETIC FIELDS IN PIEZOPLATES UNDER THE FORCE, ELECTROMAGNETIC AND THERMAL ACTION

**S.A. Kaloerov**

Using the system of electromagnetoelasticity differential equations for Airy stress function and electric and magnetic fields induction functions the solutions of the problems for piezoplate under the force, electromagnetic and thermal fields action are given. For rectangular and infinite continuous plates the exact solutions are given. The expressions for main characteristics (temperature, stresses, electromagnetic field induction and tension vectors) are found. It was shown that in case of homogenous force, thermal and electromagnetic fields action the main characteristics are constant and the electric and magnetic field potentials are the linear functions which satisfy the potentiality conditions. In case of linear heat flow action the potentials are the quadratic functions, but satisfaction of the potentiality condition takes place only when distinct relation between the piezoplate material pyromodules and thermal conductivities. For all considered cases the transition to the complex potentials of generalized complex variables was done.

**Keywords:** electromagnetoelasticity; the state equations; the stress and induction functions; complex potentials; the heat flow.

**Калоеров Стефан Алексеевич**

доктор физико-математических наук, профессор,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк  
E-mail: kaloerov@mail.ru

**Kaloerov Stefan Alekseevich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor,  
Donetsk National University, Donetsk,  
Professor at the Department of Elasticity Theory and  
Computational Mathematics

УДК 539.3:534.1

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН  
В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ  
ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ С СЕКТОРНЫМ ВЫРЕЗОМ**© 2016. *И.А. Моисеенко, Вит.В. Волчков*

Волновое движение описывается на основе полной системы уравнений линейной динамической теории упругости. Модули упругости и плотность материала цилиндра задаются экспоненциально-степенной функцией от радиальной координаты. Граничные условия на участках секторного выреза моделируются нанесением абсолютно гибкого микропанцирного покрытия. Общее решение системы дифференциальных уравнений модели строится для произвольного азимутального волнового числа в матричной форме в виде разложений радиальных составляющих решения в равномерно и по норме сходящиеся ряды по обобщенной кольцевой координате. Представлено также дисперсионное соотношение, описывающее спектры гармоник нормальных волн для случая жестко закрепленных цилиндрических участков граничной поверхности. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности и угловой меры секторного выреза на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы; трансверсально-изотропный; полый цилиндр; секторный вырез; распространение волн; дисперсионные кривые.

**Введение.** Главной сложностью при рассмотрении моделей волноводов с радиальной неоднородностью физико-механических свойств является существенная ограниченность примеров задач, допускающих построение точных решений уравнений теории упругости, поэтому учет такой неоднородности в доминирующем числе исследований проводится с привлечением численных или численно-аналитических методов, таких как достаточно требовательных к вычислительным мощностям методов численного трехмерного моделирования волновых полей; не всегда обеспечивающих желаемую точность получаемых результатов методов теории возмущений; подходов, основанных на применении спектрального метода для формулировки обобщенной задачи на собственные значения; методов, основанных на применении матричного уравнения Риккати [1–4]. Отмеченная сложность актуализирует каждое новое точное решение в рассматриваемом классе задач, с одной стороны, позволяющее провести новые численные исследования влияния неоднородности на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн, с другой стороны, обеспечивающее возможность верификации результатов, полученных с привлечением численных или численно-аналитических методов.

Известно, что при исследовании задачи о распространении нормальных упругих волн вдоль трансверсально изотропного полого цилиндра концентрического кругового сечения вопрос сводится к построению общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В классическом случае эти уравнения разрешимы через цилиндрические функции целого индекса [5]. Аналогичные представления через цилиндрические функции дробного индекса обеспечивают решение указанной задачи в случае усложнения геометрии волновода за счет появления секторного выреза со специальным типом граничных условий на участках этого выреза (абсолютно гибкое нерастяжимое покрытие). Однако при переходе к рассмотрению нового поколения функционально-градиентных материалов такие подходы к построению решения уже результата не дают. Одним из подходов,

обеспечивающих возможность построения общих решений указанной системы дифференциальных уравнений в этом случае, является задание специального вида функционального закона радиального изменения физико-механических характеристик материала волновода и привлечение аппарата рядов по обобщенной радиальной координате. Такой подход в осесимметричном случае использовался для построения общих решений модели и исследования эффектов влияния фактора радиальной неоднородности трансверсально-изотропных материалов на характеристики дисперсионных спектров и фазовых скоростей распространяющихся нормальных волн в полых цилиндрах концентрического кругового сечения применительно к волнам крутильного [6] и продольно-сдвигового [7] типов.

В данной работе методика построения общих решений модели, описывающей распространение нормальных упругих волн вдоль протяженных цилиндров кольцевого сечения, изготовленных из радиально неоднородных трансверсально изотропных материалов, распространена на случай наличия в волноводе секторного выреза со специальным типом граничных условий на участках этого выреза.

**Постановка задачи.** Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр концентрического кольцевого сечения с секторным вырезом, имеющий внутренний радиус  $R_1$ , внешний радиус  $R_2$  и угловую меру секторного выреза  $2\pi - 2\alpha$ . Волновод занимает в отнесенных к нормирующему параметру  $R_* = (R_1 + R_2)/2$  безразмерных цилиндрических координатах область

$$V = \{r \in [1-h, 1+h]; \theta \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\} \quad (0 < \alpha < \pi),$$

имеет нормированную толщину стенок  $2h = (R_2 - R_1)/R_*$  и граничную поверхность  $G = G^{(\theta)} \cup G^{(r)}$ , где

$$G^{(\theta)} = \{r \in [1-h, 1+h]; \theta = \pm\alpha; z \in (-\infty, \infty)\}, \quad G^{(r)} = \{r = 1 \pm h; \theta \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Задача исследования свойств нормальных упругих волн вдоль рассматриваемого волновода ставится в системе нормированных безразмерных цилиндрических координат  $Or\theta z$  с использованием соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами. Данные соотношения формулируются для проекций на оси цилиндрической системы координат безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений  $(u_r, u_\theta, u_z)$ , отнесенных к нормирующему параметру  $R_*$ , а также для безразмерных характеристик напряженно-деформированного состояния на основных площадках цилиндрической координатной системы  $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})$ , отнесенных к нормирующему параметру  $c_*$ . Основные соотношения модели включают систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_r \sigma_{rr} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} + r^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r \sigma_{r\theta} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} + 2r^{-1} \sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r \sigma_{rz} + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta z} + \partial_z \sigma_{zz} + r^{-1} \sigma_{rz} - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

определяющие соотношения обобщенного линейного закона Гука для случая трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44}\varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = c_{44}\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66}\varepsilon_{r\theta},\end{aligned}\tag{2}$$

уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций  $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta})$  и компонентами безразмерного вектора упругих волновых перемещений  $(u_r, u_\theta, u_z)$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = r^{-1}u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta, \quad \varepsilon_{zz} = \partial_z u_z, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1}\partial_\theta u_z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial_z u_r + \partial_r u_z, \quad \varepsilon_{r\theta} = r^{-1}\partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1})u_\theta.\end{aligned}\tag{3}$$

Данная модель включает граничные условия на участках секторного выреза  $G^{(0)}$

$$u_r|_{G^{(0)}} = u_z|_{G^{(0)}} = \sigma_{\theta\theta}|_{G^{(0)}} = 0,\tag{4}$$

моделирующие нанесение абсолютно гибкого покрытия, а также на цилиндрических участках  $G^{(r)}$  в представленном исследовании для случая их жесткого закрепления

$$u_r|_{G^{(r)}} = u_\theta|_{G^{(r)}} = u_z|_{G^{(r)}} = 0.\tag{5}$$

Во введенных представлениях  $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2\}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  модули упругости трансверсально-изотропного материала волновода;  $\rho$  – плотность материала волновода;  $t$  – время;  $\partial_j = \partial/\partial j$  ( $j = r, \theta, z, t$ ).

Полагается, что материал цилиндра является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность и нормированные модули упругости соответственно описываются представлениями

$$\begin{aligned}\rho &= \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad c_j = \tilde{c}_j \exp(f_{\lambda,q}(r)) \quad (j \in \{11, 12, 13, 33, 44, 66\}), \\ f_{\lambda,q}(r) &= \lambda((r-1)/h)^q\end{aligned}\tag{6}$$

в которых  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) и  $q$  ( $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) – параметры функциональной неоднородности.

**Интегрирование уравнений волнового деформирования и получение дисперсионных соотношений.** В исследуемых нормальных волнах с круговой частотой  $\omega$  и нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $k$ , следуя методу разделения переменных, с учетом граничных условий (4) вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_r^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda, q}(r)/2) \cos(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= \tilde{u}_\theta^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda, q}(r)/2) \sin(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ u_z(r, \theta, z, t) &= i\tilde{u}_z^{(n)}(r) \exp(-f_{\lambda, q}(r)/2) \cos(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\beta$  – параметр, задающий тип симметрии волновых движений относительно полуплоскости  $\{r \in [0, \infty); \theta = 0; z \in (-\infty, \infty)\}$ , а именно, «симметричные» волны  $S$ -типа, когда  $\beta = 0$ ,

$$u_r(r, -\theta, z, t) = u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t), \quad u_z(r, -\theta, z, t) = u_z(r, \theta, z, t),$$

и «антисимметричные» волны  $A$ -типа ( $\beta = \pi/2$ )

$$u_r(r, -\theta, z, t) = -u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t), \quad u_z(r, -\theta, z, t) = -u_z(r, \theta, z, t),$$

$\tau^{(n)}$  – определяемые из граничных условий (4) волновые числа

$$\tau^{(n)} = \begin{cases} (n-1/2)\pi/\alpha & \text{если } \beta = 0 \\ n\pi/\alpha & \text{если } \beta = \pi/2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (8)$$

Последовательная подстановка представлений (6), (7) в соотношения (3), (2), (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих компонент безразмерного вектора перемещений  $(\tilde{u}_r^{(n)}, \tilde{u}_\theta^{(n)}, \tilde{u}_z^{(n)})$

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{c}_{11} (r^2 d_r^2 + r d_r - 1) - (\tau^{(n)})^2 \tilde{c}_{66} + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 + \right. \\ & + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left( (1 - qr - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2) \tilde{c}_{11} / 2 + (r-1) \tilde{c}_{12} \right) \tilde{u}_r^{(n)} + \\ & + \tau^{(n)} \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / 2 - \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{66} \right) \tilde{u}_\theta^{(n)} - \\ & - k r \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / 2 \right) \tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\ & \tau^{(n)} \left( -(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66}) / 2 - \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{66} \right) \tilde{u}_r^{(n)} + \\ & + \left( \tilde{c}_{66} (r^2 d_r^2 + r d_r - 1) - (\tau^{(n)})^2 \tilde{c}_{11} + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44}) r^2 + \right. \\ & + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left( 3 - (q+2)r - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2 \right) \tilde{c}_{66} / 2 \tilde{u}_\theta^{(n)} + k \tau^{(n)} (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r \tilde{u}_z^{(n)} = 0, \\ & k r \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) (r d_r + 1) - \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} (\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44}) / 2 \right) \tilde{u}_r^{(n)} + \\ & + k \tau^{(n)} (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r \tilde{u}_\theta^{(n)} + \left( \tilde{c}_{44} (r^2 d_r^2 + r d_r) - (\tau^{(n)})^2 \tilde{c}_{44} + (\Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33}) r^2 + \right. \\ & \left. + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left( 1 - qr - \lambda q h^{-q} r (r-1)^q / 2 \right) \tilde{c}_{44} / 2 \right) \tilde{u}_z^{(n)} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$



Здесь  $\Omega^2 = \tilde{r}R_*^2\omega^2/c_*$ ,  $d_r = d/dr$ . В качестве метода построения общего решения уравнений (9) в данной работе используется подход, основанный на представлениях искомых решений в виде рядов по обобщенной кольцевой координате [8]. Вводится замена переменных  $r = hx + 1$  ( $x \in [-1, 1]$ ). С учетом физической модели рассматриваемой задачи для искомых решений вводятся представления

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\delta}, & \tilde{u}_\theta^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m+\delta}, \\ \tilde{u}_z^{(n)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^{m+\delta} & (|a_0| + |b_0| + |d_0| \neq 0) \end{aligned} \quad (10)$$

с допустимыми значениями параметра  $\delta$ :  $\delta \in \{0, 1\}$  либо  $\text{Re}(\delta) > 1$ . Подстановка разложений (10) в уравнения (9) приводит к системе рекуррентных уравнений относительно коэффициентов разложений (10). Для каждого азимутального волнового числа  $\tau^{(n)}$  (8) указанная система рекуррентных уравнений имеет шесть независимых базисных решений, которые в матричной форме представляются в виде двух матричных базисных решений

$$\mathbf{U}^{(n,\delta)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+\delta} \mathbf{X}_m^{(n,\delta)} \quad (\delta = 0, 1). \quad (11)$$

Матричные коэффициенты разложений (11) определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(n,\delta)} &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)} \cdot \mathbf{X}_{m-j}^{(n,\delta)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(n,\delta)} \cdot \mathbf{X}_{m-q-j}^{(n,\delta)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(n,\delta)} \cdot \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(n,\delta)} \\ & \quad (m = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j^{(n,\delta)} &= \mathbf{O} \quad (\delta = 0, 1; j = \overline{-\max(2, 2q), -1}), \quad \mathbf{X}_0^{(n,0)} = \mathbf{X}_0^{(n,1)} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{X}_1^{(n,0)} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{X}_1^{(n,1)} &= \begin{bmatrix} -h/2 & -\tau^{(n)}h(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/(2\tilde{c}_{11}) & kh(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})/(2\tilde{c}_{11}) \\ \tau^{(n)}h(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/(2\tilde{c}_{66}) & -h/2 & 0 \\ -kh(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})/(2\tilde{c}_{44}) & 0 & -h/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнений (9) с использованием базисных решений (11) записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_r^{(n)}(x) \\ \tilde{u}_\theta^{(n)}(x) \\ \tilde{u}_z^{(n)}(x) \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{(n,0)}(x) \cdot \begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{bmatrix} + \mathbf{U}^{(n,1)}(x) \cdot \begin{bmatrix} p_4^{(n)} \\ p_5^{(n)} \\ p_6^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $p_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1, 6}$ ) произвольные постоянные. Выше использованы обозначения для квадратных матричных объектов размерности 3:  $\mathbf{E}$  – единичная матрица;  $\mathbf{O}$  – нулевая

матрица;  $\mathbf{X}_j^{(n,\delta)}$  – матричные коэффициенты;  $\mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)}$  ( $m = \overline{2, \infty}$ ;  $j = \overline{1, 11}$ ;) – матрицы, ненулевые элементы которых имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = -h(2m+2\delta-3)/(m+\delta), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= -\tau^{(n)}h(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/((m+\delta)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= \tau^{(n)}h(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})/((m+\delta)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= kh(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})/((m+\delta)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -kh(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})/((m+\delta)\tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -h^2 \left( (m+\delta-3)(m+\delta-1)\tilde{c}_{11} + \Omega^2 - k^2\tilde{c}_{44} - (\tau^{(n)})^2\tilde{c}_{66} \right) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -h^2 \left( (m+\delta-3)(m+\delta-1)\tilde{c}_{66} + \Omega^2 - k^2\tilde{c}_{44} - (\tau^{(n)})^2\tilde{c}_{11} \right) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -h^2 \left( (m+\delta-2)^2\tilde{c}_{44} + \Omega^2 - k^2\tilde{c}_{33} - (\tau^{(n)})^2\tilde{c}_{44} \right) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= -\tau^{(n)}h^2(-\tilde{c}_{11} + (m+\delta-2)\tilde{c}_{12} + (m+\delta-3)\tilde{c}_{66}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= \tau^{(n)}h^2(\tilde{c}_{11} + (m+\delta-2)\tilde{c}_{12} + (m+\delta-1)\tilde{c}_{66}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= 2kh^2(m+\delta-2)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -kh^2(2m+2\delta-3)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{2,3} &= -k\tau^{(n)}h^2(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} \right]_{3,2} &= -k\tau^{(n)}h^2(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -2h^3(\Omega^2 - k^2\tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -2h^3(\Omega^2 - k^2\tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -2h^3(\Omega^2 - k^2\tilde{c}_{33}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= kh^3(m+\delta-3)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= -kh^3(m+\delta-2)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{2,3} &= -k\tau^{(n)}h^3(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)} \right]_{3,2} &= -k\tau^{(n)}h^3(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / ((m+\delta)(m+\delta-1)\tilde{c}_{44}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= -h^4 \left( \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} \right) / \left( (m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= -h^4 \left( \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{44} \right) / \left( (m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{66} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,4}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= -h^4 \left( \Omega^2 - k^2 \tilde{c}_{33} \right) / \left( (m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{44} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[ \mathbf{A}_{m,5}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda q (q-1) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \lambda q h \left( (2q-1) \tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{12} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= \lambda q h (2q+1) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= \lambda q h (2q-1) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= -\lambda q \tau^{(n)} h \left( \tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= -\lambda q \tau^{(n)} h \left( \tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{66} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q k h \left( \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,6}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q k h \left( \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{44} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \lambda q h^2 \left( q \tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{12} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} &= \lambda q h^2 (q+2) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} &= \lambda q^2 h^2 / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,2} &= -\lambda q \tau^{(n)} h^2 \left( \tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{2,1} &= -\lambda q \tau^{(n)} h^2 \left( \tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{66} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{66} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q k h^2 \left( \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44} \right) / \left( (m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,7}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q k h^2 \left( \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44} \right) / \left( (m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{44} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,8}^{(n,\delta)} \right]_{1,3} &= \lambda q k h^3 \left( \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{11} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,8}^{(n,\delta)} \right]_{3,1} &= \lambda q k h^3 \left( \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{44} \right) / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \tilde{c}_{44} \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[ \mathbf{A}_{m,9}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 / \left( 4(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[ \mathbf{A}_{m,10}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 h / \left( 2(m+\delta)(m+\delta-1) \right), \\
 \left[ \mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{2,2} = \left[ \mathbf{A}_{m,11}^{(n,\delta)} \right]_{3,3} = \lambda^2 q^2 h^2 / \left( 4(m+\delta)(m+\delta-1) \right).
 \end{aligned}$$

По аналогии с (7) вводятся представления

$$\begin{aligned}\sigma_j(r, \theta, z, t) &= \tilde{\sigma}_j^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda, q}(r)/2) \cos(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz) \quad (j = rr, \theta\theta, zz), \\ \sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t) &= i\tilde{\sigma}_{\theta z}^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda, q}(r)/2) \sin(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ \sigma_{rz}(r, \theta, z, t) &= i\tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda, q}(r)/2) \cos(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) &= \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(r) \exp(f_{\lambda, q}(r)/2) \sin(\tau^{(n)}\theta + \beta) \exp(-i\omega t + ikz)\end{aligned}$$

и на основании (2), (3), (6), (7), (11), (13) с учетом замены переменных  $r = hx + 1$  определяются два базисных матричных решения

$$\mathbf{S}^{(n, \delta)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m+\delta} \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \cdot \mathbf{X}_m^{(n, \delta)} \quad (\delta = 0, 1) \quad (14)$$

для амплитудных составляющих компонент безразмерного тензора напряжений

$$\begin{aligned}& \left[ \tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(n)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(n)}(x) \right]^T = \\ &= \mathbf{S}^{(n, 0)}(x) \cdot \begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{bmatrix} + \mathbf{S}^{(n, 1)}(x) \cdot \begin{bmatrix} p_4^{(n)} \\ p_5^{(n)} \\ p_6^{(n)} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

В (14)  $\mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x)$  – матричные функции размерности  $6 \times 3$ , элементы которых имеют вид

$$\begin{aligned}\left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{1,1} &= \left( (m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2 \right) \tilde{c}_{11}/h + \tilde{c}_{12}/(hx+1), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{1,2} &= \tau^{(n)} \tilde{c}_{12}/(hx+1), \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{1,3} = -k\tilde{c}_{13}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{2,1} &= \left( (m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2 \right) \tilde{c}_{12}/h + \tilde{c}_{11}/(hx+1), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{2,2} &= \tau^{(n)} \tilde{c}_{11}/(hx+1), \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{2,3} = -k\tilde{c}_{13}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{3,1} &= \left( (m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2 \right) \tilde{c}_{13}/h + \tilde{c}_{13}/(hx+1), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{3,2} &= \tau^{(n)} \tilde{c}_{13}/(hx+1), \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{3,3} = -k\tilde{c}_{33}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{4,1} &= 0, \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{4,2} = k\tilde{c}_{44}, \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{4,3} = -\tau^{(n)} \tilde{c}_{44}/(hx+1), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{5,1} &= k\tilde{c}_{44}, \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{5,2} = 0, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{5,3} &= \left( (m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2 \right) \tilde{c}_{44}/h, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{6,1} &= -\tau^{(n)} \tilde{c}_{66}/(hx+1), \quad \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{6,3} = 0, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(n, \delta)}(x) \right]_{6,2} &= \left( (m+\delta)/x - \lambda qx^{q-1}/2 \right) \tilde{c}_{66}/h - \tilde{c}_{66}/(hx+1).\end{aligned}$$

Специальный вид комплексных представлений (7) обуславливает при  $m \rightarrow \infty$  справедливость оценок

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{m,1}^{(n,\delta)} + 2h\mathbf{E}\| &\leq \kappa_1/m, & \|\mathbf{A}_{m,2}^{(n,\delta)} + h^2\mathbf{E}\| &\leq \kappa_2/m, & \|\mathbf{A}_{m,3}^{(n,\delta)}\| &\leq \kappa_3/m, \\ \|\mathbf{A}_{m,j}^{(n,\delta)}\| &\leq \kappa_j/m^2 & (j = \overline{4,11}), \end{aligned}$$

непосредственным следствием которых является асимптотическое представление для рекуррентных соотношений (12) в виде

$$\mathbf{X}_m^{(n,\delta)} = -2h\mathbf{X}_{m-1}^{(n,\delta)} - h^2\mathbf{X}_{m-2}^{(n,\delta)}. \quad (15)$$

Характеристическое уравнение для (15)  $\zeta^2 + 2h\zeta + h^2 = 0$  имеет кратный корень  $\zeta = -h$ , определяющий радиус сходимости  $h^{-1} > 1$  для разложений (11), (14). Следовательно, указанные разложения на отрезке  $x \in [-1, 1]$  сходятся равномерно и по норме [9].

Подстановка представлений (13) в граничные условия (5) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка относительно неизвестных постоянных  $p_j^{(n)}$  ( $j = \overline{1,6}$ ), порождающей искомое дисперсионное уравнение

$$F(\Omega, k) = \det \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{U}^{(n,0)}(-1) & \mathbf{U}^{(n,1)}(-1) \\ \mathbf{U}^{(n,0)}(1) & \mathbf{U}^{(n,1)}(1) \end{array} \right] = 0.$$

**Результаты численных исследований.** Особенностью рассматриваемых граничных условий на участках секторного выреза  $G^{(\theta)}$  (4) является то, что случай  $\alpha = \pi/2$  фактически реализует модель распространения нормальных упругих волн в полем цилиндре кругового кольцевого сечения. Это позволило провести численную верификацию построенных общих решений в случае однородного волновода.

При численном исследовании факторов влияния параметров радиальной неоднородности  $(\lambda, q)$  и значений азимутального волнового числа  $\tau^{(n)}$  на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн в качестве базового радиально однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  был выбран трансверсально-изотропный материал цилиндра  $Zn$  ( $c_* = 10^{10} \text{ H/m}^2$ )

$$\{\tilde{c}_{11} = 16,35; \tilde{c}_{12} = 2,64; \tilde{c}_{13} = 5,17; \tilde{c}_{33} = 5,31; \tilde{c}_{44} = 3,78; \tilde{\rho} = 7134 \text{ кг/м}^3\}.$$

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн проводился для случаев  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 1$  и  $\alpha = 9\pi/10$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 5/9$  в диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega_{норм} = \omega a/c_t \in [0; 7]$  и нормализованного продольного волнового числа  $k_{норм} = k a \in [0; 70]$  ( $a = R_*$ ) для однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  и неоднородного  $(\lambda, q) \in \{(\pm \ln(3/2), 6), (\pm \ln(3/2), 7)\}$  материала полого цилиндра нормированной толщины  $2h = 0,4$ . Выбор параметров неоднородности обуславливался

целями: ограничить локальную неоднородность материала вблизи цилиндрических участков граничной поверхности волновода значениями  $-33\%$  и  $50\%$ ; рассмотреть случаи симметричного и антисимметричного закона изменения неоднородности материала относительно срединной цилиндрической поверхности волновода. На рис. 1 и рис. 2 представлены спектры распространяющихся нормальных волн в неоднородных волноводах с параметрами неоднородности соответственно  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (-\ln(3/2), 6)$  в случае  $\alpha = 9\pi/10$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 5/9$ .

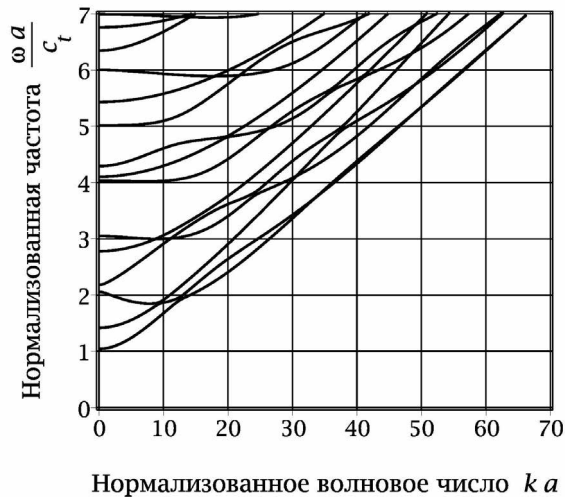


Рис. 1

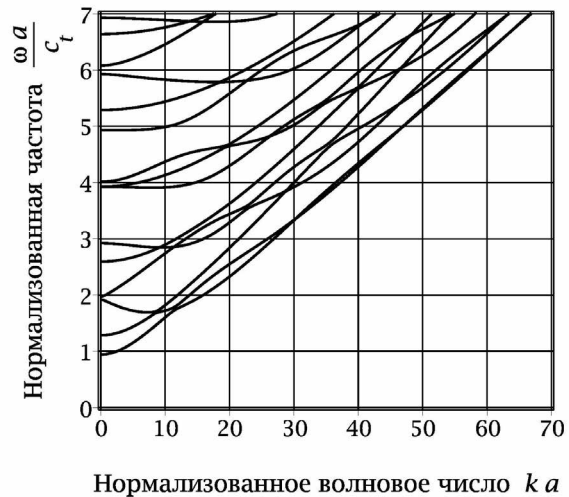


Рис. 2

Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости для всех рисунков представленного исследования имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице нормализованной критической частоты первой моды спектра для однородного волновода в случае  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 1$  ( $\Omega_{0,0}^{(1)}(0) \approx 15,3639$ ). Сравнительный анализ всех спектров, построенных и исследованных для перечисленных выше значений параметров неоднородности материала цилиндра, угловой меры секторного выреза и типа волновых движений показывает относительную стабильность общей качественной топологической картины мод распространяющихся волн, характеризующейся большим количеством достаточно узких областей частот (назовем характерными такие частоты и соответствующие им значения продольного волнового числа) локального существенного сближения смежных мод спектра с ярко выраженной картиной «обмена» групповыми скоростями соответствующих этим модам нормальных распространяющихся волн.

Для количественной оценки влияние параметров волновода на характер поведения отдельных мод используется функция сравнения парных по номеру мод в спектрах неоднородного и однородного волноводов  $\Delta\Omega(k) = (\omega_{\lambda,q}(k) - \omega_{0,0}(k))a/c_t$ . Ниже представлены для случая  $\alpha = 9\pi/10$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 5/9$  результаты сопоставления спектров неоднородных  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  (рис. 3, 7–9),  $(\lambda, q) = (-\ln(3/2), 6)$  (рис. 4),  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 7)$  (рис. 5),  $(\lambda, q) = (-\ln(3/2), 7)$



Рис. 3



Рис. 4



Рис. 5



Рис. 6

(рис. 6) и однородного волновода  $(\lambda, q) = (0, 0)$ . Результат сравнения каждой пары мод визуализируется уникальным в рамках рисунка типом линии, порядковый номер в спектре сопоставляемых мод указывается в сноске в нижней части рисунка. В качестве примера общих закономерностей, выявленных в исследованном диапазоне изменения нормализованной частоты и продольного волнового числа отмечаются следующие: весь спектр неоднородного волновода в случае симметричного закона изменения неоднородности ( $q = 6$ ) при «уплотнении» материала вблизи цилиндрических участков граничной поверхности  $\lambda = \ln(3/2)$  смещался в область более высоких частот (рис. 3), и, наоборот, при «разгрузке» материала вблизи цилиндрических участков граничной поверхности  $\lambda = -\ln(3/2)$  – смещался в область более низких частот (рис. 4); в случае антисимметричного характера закона изменения неоднородности ( $q = 7$ ) количественные различия в сравниваемых спектрах отмечаются на порядок меньшие, чем для симметричного случая (рис. 5, 6), при этом общих для всех мод спектра тенденции в случае «уплотнения» материала вблизи внешнего (и «разгрузкой» вблизи внутреннего) цилиндрического участка граничной поверхности не наблюдается (рис. 5), в то время как в случае «уплотнения» материала вблизи внутреннего (и «разгрузкой» вблизи внешнего) цилиндрического участка граничной поверхности смещение мод неоднородного волновода в сторону более низких частот отмечается только в области длинных волн  $ka < 30$  (рис. 6); в достаточной мере

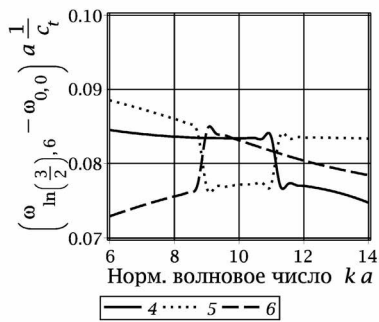


Рис. 7

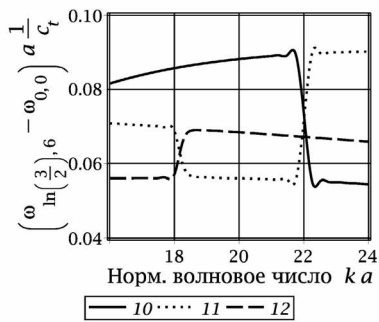


Рис. 8

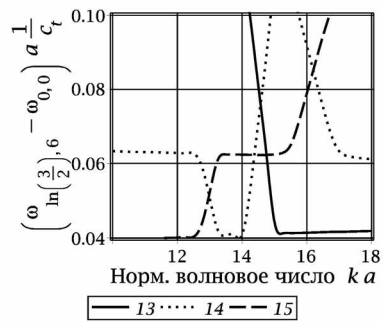


Рис. 9

стационарная картина поведения парных мод в сопоставляемых спектрах претерпевает существенные количественные и качественные изменения в узких локальных областях характерных частот. Для отмеченной последней закономерности имеют место следующие тенденции: в случае симметричного закона изменения неоднородности ( $q = 6$ ) старшая по номеру в паре смежных мод неоднородного волновода в не пересекающихся областях характерных частот резко «обрывается» к парной моде однородного цилиндра, а младшая – резко «отдаляется» от парной моды однородного цилиндра (на рис. 3 1-я и 2-я моды  $k_{норм} \approx 12; 32; 48$ ; 2-я и 3-я моды  $k_{норм} \approx 9$ ; 3-я и 4-я моды  $k_{норм} \approx 30; 48$ ; 4-я и 5-я моды  $k_{норм} \approx 23; 37$ ; на рис. 4 1-я и 2-я моды  $k_{норм} \approx 11; 31; 47$ ; 2-я и 3-я моды  $k_{норм} \approx 8$ ; 3-я и 4-я моды  $k_{норм} \approx 29; 47$ ; 4-я и 5-я моды  $k_{норм} \approx 23; 36$ ), в то время как в пересекающихся областях характерных частот характер поведения мод меняется строго на противоположный (на рис. 3–4, 7–9 4-я и 5-я моды  $k_{норм} \approx 11$ ; 5-я и 6-я моды  $k_{норм} \approx 9$ ; 10-я и 11-я моды  $k_{норм} \approx 22$ ; 11-я и 12-я моды  $k_{норм} \approx 18$ ; 13-я и 14-я моды  $k_{норм} \approx 15$ ; 14-я и 15-я моды  $k_{норм} \approx 13$ ); для антисимметричного случая неоднородности общих тенденций в поведении смежных мод неоднородного волновода в зонах характерных частот не выявлено, наряду с поведением, имеющим место в симметричном случае в не пересекающихся областях характерных частот (на рис. 5 1-я и 2-я моды  $k_{норм} \approx 11,5$ ; 2-я и 3-я моды  $k_{норм} \approx 8$ ; 3-я и 4-я моды  $k_{норм} \approx 29,5$ ; 4-я и 5-я моды  $k_{норм} \approx 37$ ; на рис. 6 1-я и 2-я моды  $k_{норм} \approx 12,5$ ) имеет место также поведение, характеризующееся резким локальным «отдалением» смежных мод неоднородного волновода от установившейся траектории с последующим таким же резким «возвращением» на указанную траекторию (на рис. 5–6 1-я и 2-я моды  $k_{норм} \approx 32$ ; 4-я и 5-я моды  $k_{норм} \approx 23$ ), в отдельных случаях сопровождающееся локальным резким «отдалением» с последующим резким «возвращением» к соответствующим парным модам однородного волновода (на рис. 5–6 1-я и 2-я моды  $k_{норм} \approx 48$ ; 3-я и 4-я моды  $k_{норм} \approx 47,5$ ).

Выявленные закономерности в топологии мод спектров неоднородных и однородных волноводов нашли отражение и в картине распределения фазовых (рис. 10–11) и групповых (рис. 12–15) скоростей распространяющихся нормальных волн. Распределения фазовых скоростей на рис. 10 и рис. 11 соответствуют спектрам, представленным соответственно на рис. 1 и рис. 2.



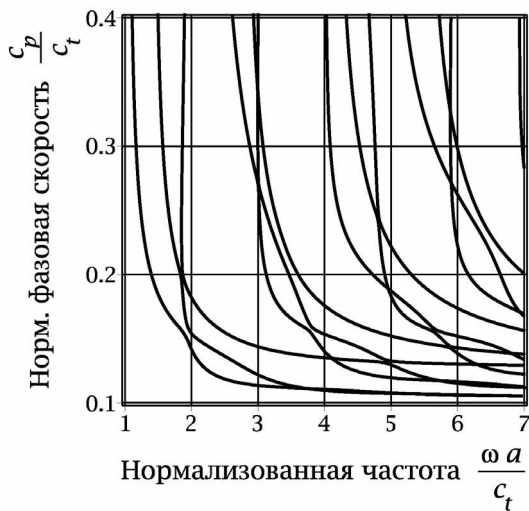


Рис. 10

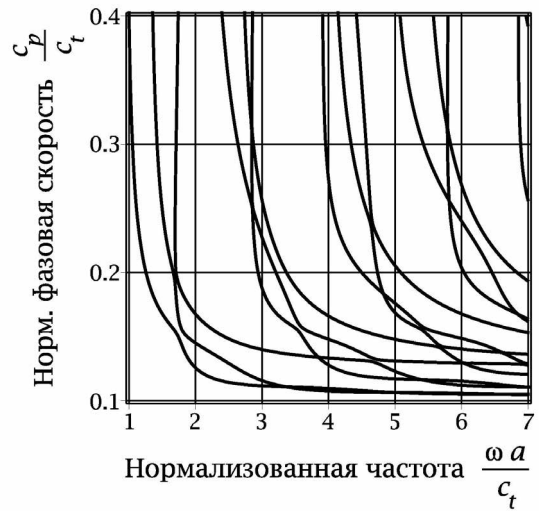


Рис. 11

Распределения групповых скоростей на рис. 12–15 соответствуют спектру на рис. 1 и графическому анализу парных мод, представленному на рис. 3, 7–9. Номера мод

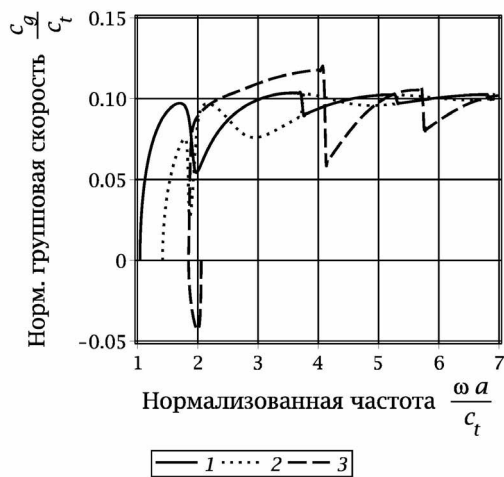


Рис. 12

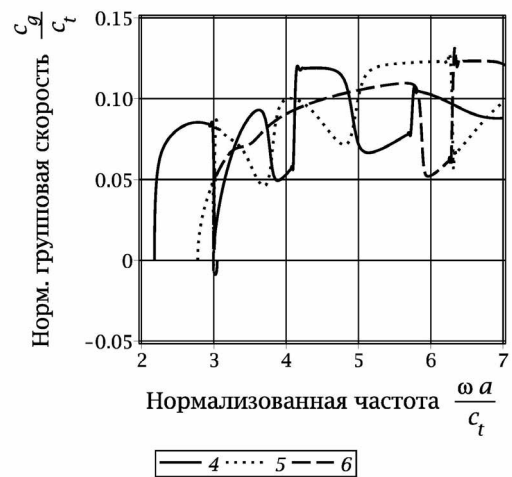


Рис. 13

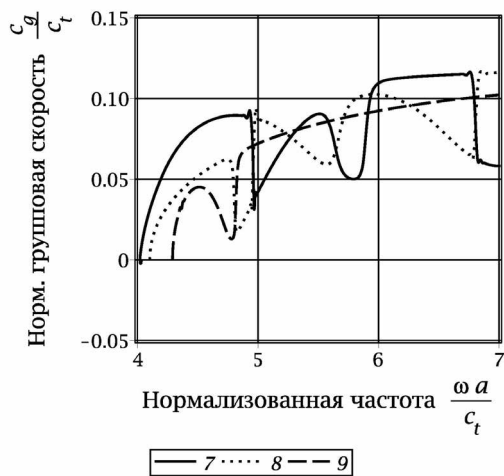


Рис. 14

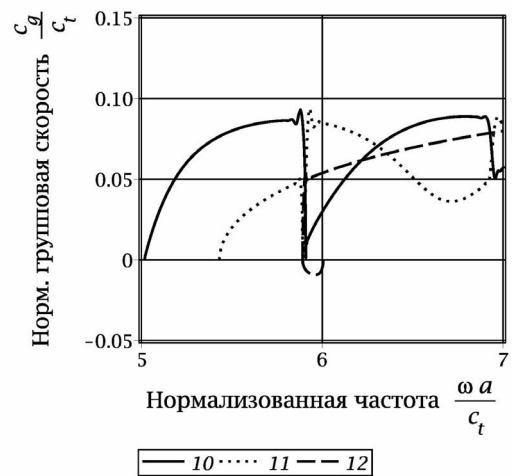


Рис. 15

отображены в сноске в нижней части рисунка. Уже отмеченная выше ярко выраженная качественная картина «обмена» групповыми скоростями нормальных распространяющихся волн, соответствующих локально сближающимся смежным модам спектра (рис. 1), на представленных рисунках получила количественную оценку.

**Выводы.** Построено общее решение системы дифференциальных уравнений модели, описывающей нормальные волны в протяженных полых цилиндрах концентрического кольцевого сечения со специальным типом граничных условий на участках секторного выреза и экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью трансверсально-изотропного материала. Получено дисперсионное уравнение, определяющее спектры указанных волн для случая жестко закрепленных цилиндрических участков граничной поверхности. Изучены эффекты влияния параметров радиальной неоднородности и угловой меры секторного выреза на топологию дисперсионных спектров, распределение фазовых и групповых скоростей распространяющихся нормальных волн. Области использования результатов представленного исследования являются технологии ультразвуковой диагностики, акустической томографии и неразрушающего контроля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adamou A.T.I. Spectral methods for modeling guided waves in elastic media / A.T.I. Adamou, R.V. Craster // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – Vol. 124, N 3. – P. 1524–1535.
2. Сыресин Д.Е. Метод расчета дисперсионных кривых, волновых полей и упругих параметров среды в скважинах с радиально-неоднородной зоной нарушения / Д.Е. Сыресин, Т.В. Жарников, И.Б. Петров // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4, № 4. – С. 167–179.
3. Syresin D.E. Dispersion properties of helical waves in radially inhomogeneous elastic media / D.E. Syresin, T.V. Zharnikov, V.V. Tyutekin. // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – Vol. 131, N 6. – P. 4263–4271.
4. Baron C. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum / C. Baron // Ultrasonic. – 2011. – Vol. 51, N 2. – P. 123–130.
5. Mirsky I. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders. Part I: Theory. Part II: Numerical Results / I. Mirsky. // J. Acoust. Soc. Am. – 1965. – Vol. 37. – P. 1016–1026.
6. Моисеенко И.А. Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132–139.
7. Моисеенко И.А. Спектры продольных волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных цилиндрах с жидкостным заполнением / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 17–28.
8. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

*Поступила в редакцию 15.09.2016 г.*

#### PROPAGATION OF NORMAL WAVES IN TRANSVERSELY ISOTROPIC RADIALLY INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDER WITH A SECTOR CUT

*I.A. Moiseyenko, Vit.V. Volchkov*

The wave motion is described on the basis of a complete system of linear dynamical equations of elasticity theory. The elastic modules and density of the cylinder material are taken as a exponentially-power function of the radial coordinate. The boundary conditions on parts of the sector cut are simulated applying an absolutely flexible non-stretchable film. The general solution of a system of differential equations of the model is constructed for an arbitrary azimuthal wave-number in the form of expansions of radial components of the solution in a uniformly and absolutely convergent matrix series on generalized ring coordinate. The dispersion relation describing the harmonic spectra of normal waves in the case of rigidly fixed of cylindrical portions the

boundary surface, is presented. The effect of radial non-homogeneity ratios and of angular measure of the sector cut on the topology of the dispersion spectrums, distribution of the phase and group velocities of normal propagating waves studied.

**Keywords:** FGMs; transversely isotropic; hollow cylinder; sector cut; wave propagation; dispersion curves.

**Моисеенко Игорь Алексеевич**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
Донецкий национальный университет, г. Донецк,  
доцент кафедры теории упругости и вычислительной математики

E-mail: mian@i.ua

Тел.: +38 (050) 0845402

**Moiseyenko Igor Alekseyevich**

Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Docent,  
Donetsk National University, Donetsk,  
Associate Professor at the Department of Elasticity  
Theory and Computational Mathematics

**Волчков Виталий Владимирович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
Донецкий национальный университет, г. Донецк,  
профессор кафедры математического анализа,  
теории функций и дифференциальных уравнений

**Volchkov Vitaliy Vladimirovich**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor,  
Donetsk National University, Donetsk,  
Professor at the Department of Mathematical Analysis,  
the Theory of Functions and Differential Equations

УДК 539.376

## ПОЛЗУЧЕСТЬ АНИЗОТРОПНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД С ВЫРАБОТКАМИ В УСЛОВИЯХ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

© 2016. Р.Н. Нескородев

В работе предложено решение задач ползучести анизотропных горных пород с протяженными горизонтальными выработками. Выработки находятся в условиях обобщенной плоской деформации. Метод решения основан на преобразовании интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к временным уравнениям закона Гука. Проведены численные исследования для выработки эллиптического сечения.

**Ключевые слова:** ползучесть, вязкоупругость, анизотропный горный массив, горизонтальная протяженная выработка.

**Введение.** Для определения напряжений и перемещений в окрестности выработки в работе [1] приведена замкнутая теория механического состояния среды, учитывающая свойство материала деформироваться во времени. Предложенный подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Основные уравнения трехмерной теории состояния среды, предложенные в упомянутой работе представлены ниже.

Дифференциальные уравнения равновесия

$$\partial_1 s_1 + \partial_2 s_6 + \partial_3 s_5 + X = 0, \quad \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2 + \partial_3 s_4 + Y = 0, \quad \partial_1 s_5 + \partial_2 s_4 + \partial_3 s_3 + Z = 0; \quad (1)$$

- уравнения связи между составляющими деформации и перемещений

$$e_1 = \partial_1 U_1, \quad e_2 = \partial_2 U_2, \quad e_3 = \partial_3 U_3, \quad e_4 = \partial_2 U_3 + \partial_3 U_2, \\ e_5 = \partial_1 U_3 + \partial_3 U_1, \quad e_6 = \partial_1 U_2 + \partial_2 U_1; \quad (2)$$

- уравнения состояния, выражающие связь между напряжениями и деформациями

$$e_m = \bar{a}_{mk} s_k, \quad \bar{a}_{mk} = a_{mk} (1 + p_{mk}^*) \quad (m, k = \overline{1, 6}); \quad (3)$$

$$s_m = \bar{A}_{mk} e_k, \quad \bar{A}_{mk} = A_{mk} (1 - r_{mk}^*) \quad (m, k = \overline{1, 6}), \quad (4)$$

где используется суммирование по повторяющимся индексам;

- граничные условия, заданные на поверхности тела

$$s_1 n_1 + s_6 n_2 + s_5 n_3 = P_1, \quad s_6 n_1 + s_2 n_2 + s_4 n_3 = P_2, \quad s_5 n_1 + s_4 n_2 + s_3 n_3 = P_3. \quad (5)$$

В работе [1] для изотропных и трансотропных горных пород алевролит и песчаник приведены упругие и реологические постоянные. На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида, предложены соотношения для построения элементов матрицы уравнений состояния (3). Приведем эти соотношения для трансотропного материала

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \frac{1}{\bar{E}_1} = \frac{1}{E_1} (1 + p_{E1}^*) = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t), \quad \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = -\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} = -\frac{\nu_1}{E_1} \left[ 1 + \frac{1}{2\nu_1} (p_{E1} - 1) \right],$$

$$\bar{a}_{33} = \frac{1}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_2} \left[ 1 + \frac{E_2}{E_1} (p_{E1} - 1) \right],$$

$$\bar{a}_{13} = \bar{a}_{31} = \bar{a}_{32} = \bar{a}_{23} = -\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = -\frac{\nu_2}{E_2} \left[ 1 + \frac{E_2}{2\nu_2 E_1} (p_{E1} - 1) \right],$$

$$\bar{a}_{44} = \bar{a}_{55} = \frac{1}{G_2}, \quad \bar{a}_{66} = \frac{1}{\bar{G}_1} = \frac{1}{G_1} \left[ 1 + \frac{3}{2(1+\nu_1)} (p_{E1} - 1) \right].$$

Здесь  $p_{E1}(t)$  – экспериментально найденная кривая ползучести [1].

Для изотропного материала имеем  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $G_1 = G_2 = G$ . Матрица уравнений состояния (3)  $\bar{a}_{mk} = a_{mk} (1 + p_{mk}^*) = a_{mk} p_{mk}(t) = \mathbf{P}(t)$  позволяет построить матрицу уравнений состояния (4)  $\bar{A}_{mk} = A_{mk} (1 - r_{mk}^*) = A_{mk} r_{mk}(t) = \mathbf{R}(t)$  по формуле, связывающей матрицы  $\mathbf{R}(t)$  и  $\mathbf{P}(t)$  [1].

В работах [1, 2] показано, что если плоскость изотропии расположена под углом  $\varphi$  к горизонту, а выработка направлена под углом  $\psi$  к плоскости изотропии и система координат  $Ox_1x_2x_3$  связана с поперечным сечением выработки, то уравнения состояния (3) и (4) будут иметь вид уравнений материала, обладающего общей анизотропией.

В настоящей работе на основе приведенных соотношений предлагается метод решения задач вязкоупругости для случая обобщенной плоской деформации анизотропного массива горных пород с протяженной выработкой эллиптического сечения.

**Обобщенная плоская деформация для горного массива с горизонтальными выработками.** Массив горных пород рассматривается как нижнее полупространство, отнесенное к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Начало системы поместим на глубине  $H$ , ось  $Ox_2$  направим вертикально вверх, а плоскость  $Ox_1x_3$  параллельна плоскости, ограничивающей полупространство. Рассматриваются параллельные протяженные выработки, пройденные в направлении оси  $Ox_3$ . На некотором расстоянии от их краев все поперечные сечения находятся в одинаковых условиях, т.е. напряжения и перемещения в каждом сечении не меняются вдоль оси  $Ox_3$  и зависят от двух координат  $x_1$  и  $x_2$ . Поэтому уравнения (2) примут вид

$$e_1 = \partial_1 U_1, \quad e_2 = \partial_2 U_2, \quad e_3 = 0, \quad e_4 = \partial_2 U_3, \quad e_5 = \partial_1 U_3, \quad e_6 = \partial_1 U_2 + \partial_2 U_1. \quad (6)$$

Существуют различные факторы, влияющие на формирование напряженного состояния массивов. В данной работе рассмотрим силы гравитации или силы тяжести горных пород. В принятой системе координат (ось  $Ox_2$  направлена вертикально вверх) объемные силы принимают вид [3]:  $X = Z = 0$ ,  $Y = -\rho g$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести, а  $\rho$  – плотность породного массива, которую будем считать постоянной величиной. Тогда уравнения равновесия (1) станут такими

$$\partial_1 s_1 + \partial_2 s_6 = 0, \quad \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2 = \rho g, \quad \partial_1 s_5 + \partial_2 s_4 = 0. \quad (7)$$

Преобразуем уравнения теории вязкоупругости, выбрав в качестве неизвестных функций вектор перемещений  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3]$ . Для этого подставим значения

напряжений из уравнений состояния (4) в уравнения равновесия (7) с учетом соотношений (6). В результате получим систему дифференциальных уравнений относительно функций перемещений

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11}U_1 + \bar{L}_{12}U_2 + \bar{L}_{13}U_3 &= 0, \quad \bar{L}_{21}U_1 + \bar{L}_{22}U_2 + \bar{L}_{23}U_3 = \rho g, \quad \bar{L}_{31}U_1 + \bar{L}_{32}U_2 + \bar{L}_{33}U_3 = 0; \quad (8) \\ \bar{L}_{11} &= \bar{A}_{11}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{16}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{66}\partial_2^2, \quad \bar{L}_{22} = \bar{A}_{66}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{26}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{22}\partial_2^2, \\ \bar{L}_{33} &= \bar{A}_{55}\partial_1^2 + 2\bar{A}_{45}\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{44}\partial_2^2, \quad \bar{L}_{12} = \bar{L}_{21} = \bar{A}_{16}\partial_1^2 + (\bar{A}_{12} + \bar{A}_{66})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{62}\partial_2^2, \quad (9) \\ \bar{L}_{13} &= \bar{L}_{31} = \bar{A}_{15}\partial_1^2 + (\bar{A}_{14} + \bar{A}_{65})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{64}\partial_2^2, \quad \bar{L}_{23} = \bar{L}_{32} = \bar{A}_{65}\partial_1^2 + (\bar{A}_{64} + \bar{A}_{25})\partial_1\partial_2 + \bar{A}_{24}\partial_2^2, \end{aligned}$$

где упругие операторы  $\bar{A}_{mk}$  представляются соотношениями (4). Дифференциальные уравнения (8) описывают поведение вязкоупругой среды в самом общем случае анизотропии в условиях обобщенной плоской деформации.

Напряженное состояние горного массива представим состоящим из: 1) начального поля смещений и напряжений в нетронутом массиве и 2) дополнительного поля смещений и напряжений, за счет появления выработки.

**Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве от действия сил собственного веса.** До проведения выработок нетронутый массив испытывает начальные напряжения, вызываемые собственным весом пород. Начальное поле напряжений в этом случае называется гравитационным. Компоненты гравитационного начального поля напряжений и перемещений определены в результате решения граничной задачи теории упругости анизотропного тела для тяжелого анизотропного полупространства бесконечной протяженности в направлении осей  $Ox_1$  и  $Ox_3$  при отсутствии усилий на границе полупространства, то есть, когда  $\sigma_2^0 = \sigma_4^0 = \sigma_6^0 = 0$  при  $x_2 = H$ . Результат интегрирования, для случая общей анизотропии представлен соотношениями [2]

$$\sigma_k^0 = -\tau_k \rho g H (1 - x_2 / H), \quad (10)$$

$$u_i^0 = -\alpha_i \rho g H \left( x_2 - \frac{x_2^2}{2H} \right). \quad (11)$$

Здесь  $\tau_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ) и  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – постоянные величины, зависящие от коэффициентов деформации.

Если выработки находятся на большой глубине, то при определении напряжений и перемещений вблизи них в формулах (10) и (11) можно пренебречь величиной  $x_2 / H$ . Кроме того, будем пренебрегать также влиянием дополнительных перемещений и напряжений, вызванных наличием выработок, на напряженное состояние вблизи границы  $x_2 = H$ .

Пусть в момент времени  $t = 0$  в горном массиве возникло поле дополнительных напряжений и перемещений, вызванное появлением в массиве выработок. Такому моменту соответствуют лишь упругие деформации. Вокруг выработок возникает упругое напряженное состояние, соответствующее мгновенному состоянию задачи вязкоупругости. Это упруго мгновенное состояние складывается из основного напряженного состояния, характеризующего нетронутый массив, и дополнительного напряженного состояния, вызванного появлением полости. Далее, при  $t > 0$ , поле

основных напряжений и перемещений остается неизменным, поскольку массив упруг. Свойства ползучести горного массива сказываются лишь на поле дополнительных напряжений и перемещений [4].

**Перемещения и напряжения в массиве с выработками.** Поля перемещений и напряжений, которые формируются за счет появления выработок, описывается функциями  $U_k^*(x_1, x_2, t)$ , являющимися результатом интегрирования однородной системы (8). Зависимость от времени этих функций проявляется через интегральные операторы  $\bar{A}_{nk}(t)$ , которые входят в уравнения состояния (4) и дифференциальные операторы (9). Напомним, что задача вязкоупругости решается как задача теории упругости в каждый конкретный момент времени. Поэтому при проведении последующих выкладок зависимость функций от времени указывать не будем.

Общее представление решения однородной системы уравнений (8) выражается через три аналитические функции  $\Phi_j(z_j)$  обобщенных комплексных переменных  $z_j = x_1 + \mu_j x_2$  и имеет вид [2]:

$$U_k^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 D_{kj} \Phi_j(z_j). \quad (12)$$

Представления для напряжений через функции  $\Phi_j(z_j)$  найдем из однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (8). Они запишутся в форме

$$\begin{aligned} s_1^* &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \Phi_1' + \mu_2^2 \Phi_2' + \mu_3^2 \lambda_3 \Phi_3'], & s_2^* &= 2 \operatorname{Re} [\Phi_1' + \Phi_2' + \lambda_3 \Phi_3'], \\ s_6^* &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_1' + \mu_2 \Phi_2' + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'], & s_4^* &= 2 \operatorname{Re} [\lambda_1 \Phi_1' + \lambda_2 \Phi_2' + \Phi_3'], \\ s_5^* &= -2 \operatorname{Re} [\lambda_1 \mu_1 \Phi_1' + \lambda_2 \mu_2 \Phi_2' + \mu_3 \Phi_3'], & s_3^* &= 2 \operatorname{Re} [P_{31} \Phi_1' + P_{32} \Phi_2' + P_{33} \Phi_3']. \end{aligned} \quad (13)$$

Плоскость  $Ox_1x_2$ , в которой определены эти функции обозначим буквой  $S$ . Функции  $\Phi_j(z_j)$  можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных  $z_j = x_{1j} + ix_{2j}$ , где

$$x_{1j} = x_1 + \alpha_j x_2, \quad x_{2j} = \beta_j x_2, \quad \mu_j = \alpha_j + i\beta_j. \quad (14)$$

Комплексные потенциалы  $\Phi_j(z_j)$  определены в областях  $S_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ), полученных из области  $S$  аффинными преобразованиями (14). Они определяются из граничных условий на контурах выработок.

**Граничные условия на контуре выработки.** Для определения напряженного состояния горного массива с неподкрепленной выработкой за счет сил гравитации нужно удовлетворить граничным условиям (5) на контуре выработки. Эти условия при отсутствии внешних сил и с учетом того, что направляющие контура выработки параллельны оси  $Ox_3$  ( $n_3 = 0$ ), имеют вид

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = 0, \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = 0, \quad n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 = 0. \quad (15)$$

Здесь  $\sigma_k = \sigma_k^0 + s_k^*$ , где  $\sigma_k^0$  – напряжения от сил гравитации (10), а  $s_k^*$  – компоненты напряжений (13), которые учитывают влияние выработки.

Подставим в (15) значения для  $s_k^*$  и  $\sigma_k^0$  из соотношений (10) и (13). После преобразований получим граничные условия для нахождения функций  $\Phi_j(z_j)$  [2]:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3] &= \rho g H [\tau_1 x_2 - \tau_6 x_1 + p_1] + c_1, \\ 2 \operatorname{Re}[\Phi_1 + \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3] &= -\rho g H [\tau_6 x_2 - \tau_2 x_1 + p_2] + c_2, \\ 2 \operatorname{Re}[\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \Phi_3] &= -\rho g H [\tau_5 x_2 - \tau_4 x_1 + p_3] + c_3, \\ p_1 &= -\frac{\tau_1}{H} \frac{x_2^2}{2} + \frac{\tau_6}{H} \int_0^s x_2 dx_1, \quad p_2 = -\frac{\tau_6}{H} \frac{x_2^2}{2} + \frac{\tau_2}{H} \int_0^s x_2 dx_1, \quad p_3 = -\frac{\tau_5}{H} \frac{x_2^2}{2} + \frac{\tau_4}{H} \int_0^s x_2 dx_1. \end{aligned} \quad (16)$$

**Массив с выработкой эллиптического сечения.** Рассмотрим массив горных пород, в котором на большой глубине пройдена выработка эллиптического сечения. Полуоси эллипса  $a$  и  $b$ . Уравнение контура в параметрической форме имеет вид  $x_1 = a \cos \theta$ ,  $x_2 = b \sin \theta$   $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Уравнения эллиптических контуров  $L_j$  в областях  $S_j$  представляются в виде

$$\begin{aligned} t_j &= x_1 + \mu_j x_2 = R_j \sigma + m_j / \sigma, \\ R_j &= (a - i\mu_j b) / 2, \quad m_j = (a + i\mu_j b) / 2, \quad \sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned} \quad (17).$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура  $L_j$ , на основании формулы (17) принимает вид

$$z_j = R_j \zeta_j + m_j / \zeta_j, \quad (\zeta_j = r_j \sigma; \quad r_j \geq 1). \quad (18)$$

Сравнение соотношений (17) и (18) показывает, что на контуре единичного круга имеет место равенство  $\zeta_j = \sigma$ . Это обстоятельство дает возможность для кругового или эллиптического контура получить точное решение задачи. Представим функцию  $\Phi_j(z_j)$  в виде

$$\Phi_j(z_j) = a_j / \zeta_j, \quad (19)$$

где переменная  $\zeta_j$  связана с  $z_j$  зависимостями (18).

Методом рядов из граничных условий (16) получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (19):

$$\begin{aligned} \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 \lambda_3 a_3 &= (-\sigma_1^0 b i + \sigma_6^0 a) / 2, \quad a_1 + a_2 + \lambda_3 a_3 = (-\sigma_2^0 a + \sigma_6^0 b i) / 2, \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + a_3 &= (\sigma_5^0 b i - \sigma_4^0 a) / 2. \end{aligned}$$

Далее напряжения и перемещения находятся по формулам

$$s_i = s_i^* + \sigma_i^0 \quad (i = \overline{1, 6}), \quad U_k = U_k^* + u_k^0 \quad (k = \overline{1, 3}),$$

где величины  $s_i^*$ ,  $\sigma_i^0$ ,  $U_k^*$  и  $u_k^0$  определяются соотношениями (13), (10), (12) и (11) соответственно.

**Численные исследования.** Проведены численные исследования распределения напряжений и перемещений в зависимости от соотношения полуосей эллиптического



сечения выработки, материала горных пород и времени действия нагрузок. Расчеты выполнены для изотропных и трансропных горных пород алевролит и песчаник, упругие и реологические постоянные которых даны в работе [1]. При вычислениях считалось, что выработка находится на глубине  $H = 1000$  м. Для изотропных материалов, а также для трансропных в случае когда  $\varphi = \psi = 0$  (плоскость изотропии параллельна дневной поверхности) в табл. 1 приведены значения напряжений  $s_\theta / (\rho g H)$  и нормальных перемещений  $U_n / м$  в тех точках контура сечения выработки, в которых они образуют наибольшую концентрацию. Для напряжений  $s_\theta$  это точки контура, соответствующие  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , а для перемещений  $U_n$  –  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ . Вычисления проводились для начального момента времени  $t = 0$ , соответствующего упругому состоянию, и для времени установившейся стабилизации процесса ползучести  $t_{st}$ . Для алевролита  $t_{st} = 600$  часов, для песчаника –  $t_{st} = 860$  [1].

Таблица 1

Материал	$t, \text{ час}$	$a / b$					
		0.75		1		1.33	
		$s_\theta / (\rho g H)$	$U_n / м$	$s_\theta / (\rho g H)$	$U_n / м$	$s_\theta / (\rho g H)$	$U_n / м$
алевролит1	0	-3,417	-0,0198	-2,75	-0,0213	-2,25	-0,0174
	600	-3,417	-0,0432	-2,75	-0,0446	-2,25	-0,0348
песчаник1	0	-3,4762	-0,0043	-2,809	-0,0046	-2,3095	-0,0038
	860	-3,4762	-0,0067	-2,809	-0,007	-2,3095	-0,0056
алевролит2	0	-3,656	-0,0241	-2,877	-0,0253	-2,4391	-0,0202
	600	-2,803	-0,0307	-2,21	-0,0318	-1,7708	-0,0250
песчаник2	0	-6,4909	-0,007	-5,078	-0,007	-4,0176	-0,0058
	860	-5,0385	-0,0092	-3,980	-0,0095	-3,2028	-0,0074

На рис. 1 и рис. 2 показаны эпюры распределения напряжений  $s_\theta / (\rho g H)$  в начальный момент времени (сплошная линия) и в момент времени  $t = t_{st}$  (штриховая линия) для трансропного материала алевролит2 в случаях, когда  $a = 1,5$  м,  $b = 2$  м (рис. 1) и  $a = 2$  м,  $b = 1,5$  м (рис. 2).

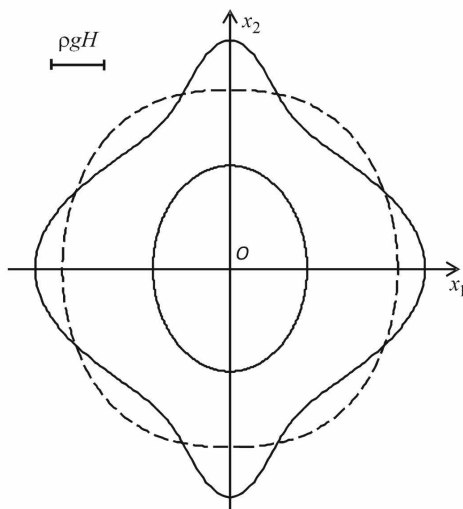


Рис. 1

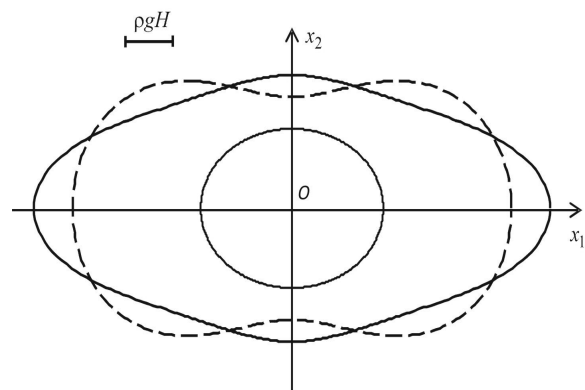


Рис. 2

Исследования показали, что с течением времени концентрация напряжений на контуре выработки уменьшается, а изменение нормальных перемещений свидетельствует о незначительном заполнении выработки горной породой.

Для материалов песчаник2 и алевролит2 на рис. 3 и рис. 4 представлены эпюры напряжений  $s_\theta / (\rho g H)$  на контуре кругового сечения выработки для случая  $\varphi = \pi / 6$ ,  $\psi = 0$ . Сплошная линия соответствует моменту времени  $t = 0$ , штриховая –  $t = t_{st}$ .

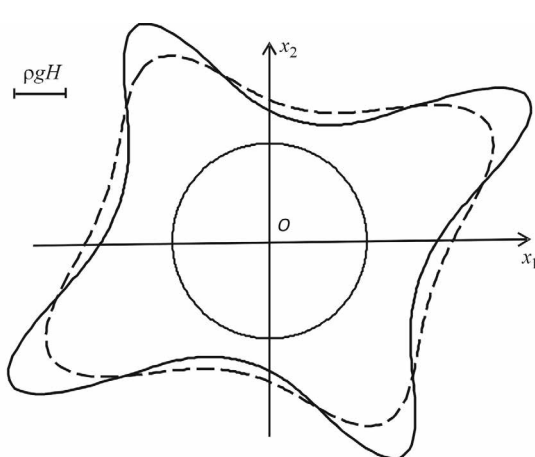


Рис. 3

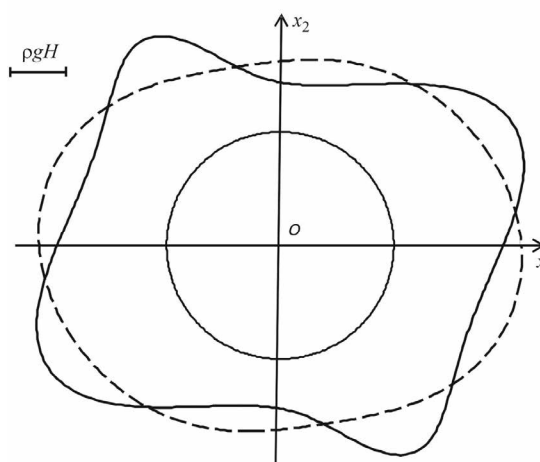


Рис. 4

В табл. 2 даны значения напряжений, вызывающих концентрацию и соответствующие углы точек контура, где они возникают для указанных материалов.

Таблица 2

Материал	$t$ , час	$\theta$ , град.	$s_\theta / (\rho g H)$
алевролит2	0	27°	-2,6243
	600	172°	-2,2712
песчаник2	0	29°	-4,0752
	860	29°	-3,0867

Исследования были также проведены для случая  $\varphi = \pi / 3$  и  $\psi = \pi / 4$ , который соответствует случаю общей анизотропии. Полученные данные показали, что с течением времени картина напряженного состояния существенно не меняется со временем.

**Выводы.** При помощи преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к временным уравнениям закона Гука в работе получено решение задач ползучести анизотропных горных пород с протяженной выработкой эллиптического сечения. Во всех исследуемых случаях наблюдается перераспределение напряженного состояния на контуре, которое приводит к уменьшению концентрации напряжений с течением времени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нескородов Р.Н. Метод преобразования интегральных уравнений состояния к временным уравнениям закона Гука / Р.Н. Нескородов // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – Вып. 3. – С. 10-21.

2. Нескородев Н.М. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
4. Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. – Алма-Ата: Наука, 1964. – 175 с.

*Поступила в редакцию 17.10.2016 г.*

#### **CREEP ANISOTROPIC ROCKS WITH EXCAVATION IN THE GENERALIZED PLANE STRAIN CONDITIONS**

***R.N. Neskoro dev***

The paper provides a solution to problems of anisotropic creep of rocks with extensive horizontal excavations. Generation are under generalized plane deformation. The method of solution is based on the transformation of integral equations of viscoelasticity of state tasks to the time the equations of Hooke's law. Numerical studies to develop an elliptical cross section.

***Keywords:*** creep, viscoelastic, anisotropic rocks, the horizontal excavation.

**Нескородев Роман Николаевич**

кандидат физико-математических наук, доцент,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
г. Донецк.  
E-mail: nromn@i.ua  
Тел.+38 (050) 284-87-08

**Neskoro dev Roman Nikolaevich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Docent,  
Donetsk national university, Donetsk

Ф И З И К А

УДК 538.11

**СПЕКТР ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОЛЯРИТОНОВ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
СТРУКТУРЫ ПОЛУПРОВОДНИК-АНТИФЕРРОДИЭЛЕКТРИК**

© 2016. *В.Д. Пойманов*

В работе рассмотрен механизм формирования поверхностных поляритонов на границе раздела электродипольноактивного антиферродиелектрика с полупроводником. Получены количественные выражения для френелевских коэффициентов отражения, сдвига Гуса-Хэншена и записаны условия полного просветления для рассматриваемой структуры.

**Ключевые слова:** поверхностные поляритоны, отрицательная рефракция, сдвиг Гуса-Хэншена, электродипольноактивный антиферродиелектрик.

**Введение.** В настоящее время наблюдается значительный рост интереса к материалам, в которых проявляется взаимосвязь магнитных и электрических свойств. Такие материалы получили название мультиферроиков. Существенным для них является то, что природа взаимодействия электрического и магнитного полей объясняется не уравнениями Максвелла, а симметричными свойствами кристаллической или магнитной структуры данного материала. Поэтому магнитоэлектрический эффект (МЭЭ) наиболее выражен в многоподрешеточных структурах, а возможность его существования определяется магнитной группой симметрии материала.

Наиболее полно мультиферроики описаны в недавнем обзоре [1], а симметричный анализ многоподрешеточных структур представлен в монографии [2]. Большое количество работ было посвящено взаимодействию спиновой подсистемы магнетика с полем электромагнитной волны (ЭМВ) [3–11]. В частности, в [3] описаны механизмы формирования поверхностных ЭМВ в таких структурах, а в [4] рассмотрен квадратичный по электромагнитному полю МЭЭ.

Возможности управления спектром пропускания ЭМВ рассматриваемой структурой становятся шире при использовании материалов с МЭЭ в качестве ячеек сверхрешетки. В таком случае можно ожидать появления таких эффектов как полное просветление и сдвиг Гуса-Хэншена (СГХ) [5] при полном внутреннем отражении. В частности – в [6, 7] было рассмотрено формирование поверхностных плазмон-поляритонов в структурах полупроводник/антиферромагнетик и показана возможность существования отрицательного СГХ в сверхрешетках.

В настоящей работе в качестве немагнитной ячейки в сверхрешетке будет рассмотрен полупроводник с характерной для него частотной зависимостью диэлектрической проницаемости. Другой ячейкой является антиферродиелектрик (АФД). В таком случае можно ожидать как появления в спектре, помимо электродипольноактивных обменных мод [8], еще и плазмонных ветвей. Целью работы будет нахождение спектра ПП и областей полного внутреннего отражения (для которых наблюдается СГХ) для трех геометрий, отличающихся взаимной ориентацией вектора антиферромагнетизма, поляризации волны и нормали к плоскости раздела сред.

**Постановка задачи.** Рассмотрим падение плоской ТМ-поляризованной волны на границу раздела полубесконечных сред, одна из которых является электродипольноактивным многоподрешеточным антиферродиелектриком (среда 1)

[7], а другая – полупроводником (среда 2). В отсутствие внешнего магнитного поля тензоры диэлектрических проницаемостей (ТДП) этих сред имеют вид:

$$\hat{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{1\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Здесь

$$\varepsilon_{1\perp}(\omega) = \varepsilon_{\perp} \cdot \left(1 - \frac{\omega_a^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{\infty} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right),$$

$\omega_p$  – плазменная частота для полупроводника, а  $\omega_0$  – частота антиферроэлектрического резонанса (АФЭР) [8]. Так как частоты обменных мод, на которых и наблюдается АФЭР, лежат выше частот колебаний магнитоактивных мод [9], то среды можно считать немагнитными ( $\mu = 1$ ), а вектор антиферромагнетизма в среде 1 направленным вдоль оси  $z$ .

**Решение задачи.** Рассмотрим вначале геометрию, в которой среда 1 изотропна в плоскости падения  $xy$ , нормаль к границе ориентирована вдоль оси  $ox$ , а ТМ-волна поляризована вдоль оси  $z$ . Из уравнений Максвелла имеем

$$[\vec{n} \times \vec{E}] = \vec{H}, \quad [\vec{n} \times \vec{H}] = -\hat{\varepsilon} \vec{E},$$

где  $\vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega}$ , следует спектр нормальных поляритонов (НП) в каждой среде:

$$k_{1\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{1\perp} \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \quad k_{2\parallel} = \sqrt{\varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \quad (1)$$

$k \equiv k_{\perp}$ . Поверхность волновых векторов в обеих средах представляет собой окружность при выполнении условий  $\varepsilon_{1\perp} > 0, \varepsilon_2 > 0$ .

В случае  $k_{1\parallel}^2 < 0, k_{2\parallel}^2 < 0$  поле будет локализовано вблизи границы раздела  $x = 0$ , соответственно чему полагаем ( $q_j = ik_{j\parallel}$ ):

$$H_z(x, y) = e^{iky} \times \begin{cases} H_1 e^{-q_1 x}, & x > 0, \\ H_2 e^{q_2 x}, & x < 0. \end{cases}$$

Условия непрерывности компонент  $H_z$  и  $E_y \sim \frac{1}{\varepsilon_y} \frac{\partial H_z}{\partial x}$  дают спектр поверхностных поляритонов (ПП):

$$\frac{q_1}{\varepsilon_{1\perp}} = -\frac{q_2}{\varepsilon_2}.$$

Подставляя сюда (1), находим:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\gamma + 1}} \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_{\varepsilon}^2)}{(\omega^2 - \omega_{-}^2)(\omega^2 - \omega_{+}^2)'}}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{\infty}, \quad \omega_{\varepsilon}^2 = \omega_0^2 + \omega_a^2, \\ \omega_{\pm}^2 &= \frac{1}{2} \left( \omega_0^2 + \frac{\gamma \omega_a^2 + \omega_p^2}{\gamma + 1} \pm \sqrt{\left( \omega_0^2 + \frac{\gamma \omega_a^2 + \omega_p^2}{\gamma + 1} \right)^2 - \frac{4\omega_0^2 \omega_p^2}{\gamma + 1}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что соответствующая кривая лежит в области  $\varepsilon_{1\perp}\varepsilon_2 < 0$ .

Как показывает анализ (2), для различных значений  $\omega_p$  частоты упорядочены следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_- < \omega_p < \omega_0 < \omega_+ < \omega_\varepsilon & \text{(для } 0 < \omega_p < \omega_0), \\ \omega_- < \omega_0 < \omega_p < \omega_+ < \omega_\varepsilon & \text{(для } \omega_0 < \omega_p < \omega_\varepsilon), \\ \omega_- < \omega_0 < \omega_\varepsilon < \omega_+ < \omega_p & \text{(для } \omega_p > \omega_\varepsilon). \end{aligned}$$

Во всех случаях имеется две поляритонные ветви – магنونная (оптическая) и плазмонная (акустическая). Последняя исчезает только при  $\omega_p \rightarrow 0$ . Магنونная ветвь при  $\omega_p > \omega_0$  начинается в точке  $k = 0$ , а при  $\omega_p < \omega_0$  имеет длинноволновую точку окончания на пересечении кривых  $k_{2\parallel}(k, \omega) = 0$  и  $\omega = \omega_0$ .

Области на  $k\omega$  диаграмме, соответствующие условиям  $k_{1\parallel}^2 < 0$ ,  $k_{2\parallel}^2 > 0$  соответствуют полному внутреннему отражению (ПВО) при падении из среды 2. Отметим, что помимо существующих всегда областей ПВО для  $\omega > \omega_0$  при выполнении условий

$$\gamma < 1, \quad \omega_p < |\sqrt{1-\gamma}\omega_0 - \sqrt{\gamma}\omega_a|,$$

и при  $\omega < \omega_0$  появляется дополнительная область ПВО, ограниченная кривыми  $k_{1\parallel}^2 = 0$ ,  $k_{2\parallel}^2 = 0$ . При этом в указанных областях существует пространственный сдвиг падающего пучка относительно точки падения (СГХ) [12]. Для данного случая представим магнитное поле в виде:

$$H_z(x, y) = e^{iky} \times \begin{cases} e^{ik_{2\parallel}x} + R \cdot e^{-ik_{2\parallel}x}, & x > 0 \\ T \cdot e^{-q_1x}, & x < 0 \end{cases}$$

Из граничных условий при  $x = 0$  следует, что френелевский коэффициент отражения имеет вид

$$R = e^{-i\varphi}, \quad \varphi = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon_2 q_1}{\varepsilon_{1\perp} k_{2\parallel}} \right).$$

Величина СГХ определяется, согласно [5, 11]

$$\Delta = \frac{d\varphi}{dk}.$$

Вычисляя производную, находим:

$$\Delta = \frac{2\omega^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_{1\perp}^2}{c^2 q_1 k_{2\parallel} ((\varepsilon_2 q_1)^2 + (\varepsilon_{1\perp} k_{2\parallel})^2)} \left( \frac{1}{\varepsilon_{1\perp}} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \quad (3)$$

Следует отметить, что величина  $\Delta$  отрицательна в полосе частот  $\omega_0 < \omega < \omega_\varepsilon$  и положительна вне ее.

Области объемных и поверхностных волн в рассматриваемой геометрии изображены на рис. 1. Объемные волны в обеих средах соответствуют темным областям. Заштрихованные области соответствуют ПВО (объемная волна в полупроводнике и поверхностная – в АФД). Восходящая прямая штриховка соответствует отрицательному СГХ, нисходящая – положительному. Область с волнистой штриховкой наоборот, соответствует поверхностной волне в полупроводнике и объемной – в АФД. Незаштрихованные области соответствуют поверхностным волнам в обеих средах, в которых сплошной линией изображен спектр ПП. Данные обозначения областей и линий относятся к рис. 1, 3, а, 3, б и 5.

Рассмотрим для данной геометрии эффект полного просветления пластины, составленной из рассмотренных выше сред. Соответствующие толщины слоев обозначим как  $d_1$  и  $d_2$ . Пусть пластина находится в вакууме. Использование граничных условий непрерывности на трех границах приводит к условию обращения в нуль коэффициента отражения, в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(Z_2 - Z_1)(Z_2 + Z_1)}{Z_1 Z_2} \sin(k_{1\parallel} d_1) \sin(k_{2\parallel} d_2) = \\ & = i \left( \left( \frac{Z_1}{Z_0} - \frac{Z_0}{Z_1} \right) \sin(k_{1\parallel} d_1) \cos(k_{2\parallel} d_2) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{Z_2}{Z_0} - \frac{Z_0}{Z_2} \right) \sin(k_{2\parallel} d_2) \cos(k_{1\parallel} d_1) \right), \quad (4) \end{aligned}$$

где  $Z_n = \frac{ck_{n\parallel}}{\omega \varepsilon_{nr}}$  – импеданс  $k$ -й среды, причем мы полагаем  $Z_0^2 > 0$ .

В зависимости от типа волн в пластине получаем два возможных случая.

1. Просветление на объемных волнах  $k_{1\parallel}^2 > 0, k_{2\parallel}^2 > 0$  (необходимым условием является  $\varepsilon_1(\omega) > 0, \varepsilon_2(\omega) > 0$ ). Уравнение (4) удовлетворяется при

а)  $Z_2 - Z_1 = 0, k_{1\parallel} d_1 + k_{2\parallel} d_2 = \pi n, n \in Z$ .

Решая систему, получаем выражение для частоты просветления:

$$\omega_l \sqrt{\frac{\varepsilon_{1\perp}(\omega_l) d_1 + \varepsilon_2(\omega_l) d_2}{\varepsilon_{1\perp}(\omega_l) + \varepsilon_2(\omega_l)}} = \pi c n, \quad n \in Z$$

Отметим, что уравнение (4) также удовлетворяется при

$$Z_2 + Z_1 = 0, \quad k_{1\parallel} d_1 - k_{2\parallel} d_2 = \pi n, \quad n \in Z.$$

Однако решение полученной системы существует при условии  $\varepsilon_1(\omega) \varepsilon_2(\omega) < 0$ , что противоречит предположению  $k_{1\parallel}^2 > 0, k_{2\parallel}^2 > 0$ .

б)  $k_{1\parallel} d_1 = \pi n_1, k_{2\parallel} d_2 = \pi n_2, n_1, n_2 \in Z$ .

В этом случае частоты просветления удовлетворяют уравнению:

$$\omega_l^2 (\varepsilon_2(\omega_l) - \varepsilon_{1\perp}(\omega_l)) = (\pi c)^2 \left( \frac{n_2^2}{d_2^2} - \frac{n_1^2}{d_1^2} \right).$$

в)  $k_1 d_1 = \pi n_1$  и  $Z_2 = Z_0$  или  $k_2 d_2 = \pi n_2$  и  $Z_1 = Z_0$ . В этом случае частоты просветления определяются из уравнений:

$$\omega_l^2 \left( \varepsilon_{1\perp}(\omega_l) - \frac{\varepsilon_2(\omega_l)}{\varepsilon_2(\omega_l) + 1} \right) = \left( \frac{\pi c n_1}{d_1} \right)^2, \quad \omega_l^2 \left( \varepsilon_2(\omega_l) - \frac{\varepsilon_{1\perp}(\omega_l)}{\varepsilon_{1\perp}(\omega_l) + 1} \right) = \left( \frac{\pi c n_2}{d_2} \right)^2$$

соответственно.

2. Просветление на ПП ( $k_{1\parallel}^2 < 0, k_{2\parallel}^2 < 0$ ) возможно только при выполнении условий:

$$q_1 / \varepsilon_{1\perp} + q_2 / \varepsilon_2 = 0, \quad q_1 d_1 = q_2 d_2. \quad (5)$$

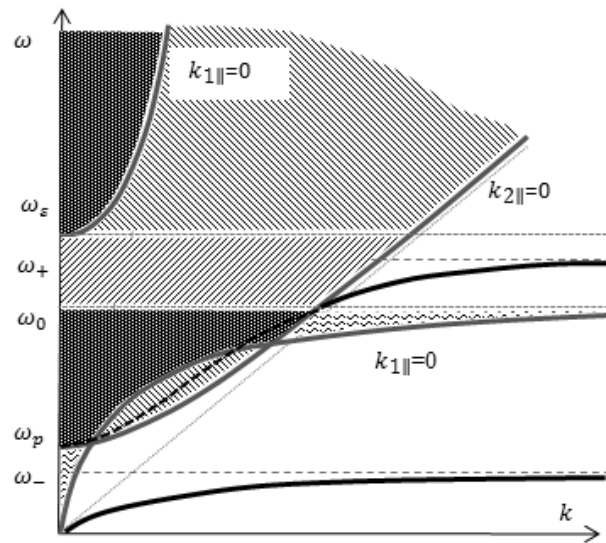


Рис. 1.

система имеет решение только в случае  $\varepsilon_1(\omega)\varepsilon_2(\omega) < 0$ . Заметим, что первое из этих условий представляет собой спектр ПП для полубесконечных сред. Из условий (5) находим уравнение для частот просветления:

$$\varepsilon_{1\perp}(\omega_l)d_1 + \varepsilon_2(\omega_l)d_2=0.$$

Отсюда

$$\omega_l^2 = \frac{1}{2} \left( \omega_0^2 + \frac{\sigma\omega_a^2 + \omega_p^2}{\sigma + 1} \pm \sqrt{\left( \omega_0^2 + \frac{\sigma\omega_a^2 + \omega_p^2}{\sigma + 1} \right)^2 - \frac{4\omega_0^2\omega_p^2}{\sigma + 1}} \right),$$

где

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{\perp}d_1}{\varepsilon_{\infty}d_2}.$$

Во всех случаях данной геометрии касательная к границе компонента волнового вектора, соответствующая полному просветлению:

$$k = \frac{\omega_l}{c \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{1\perp}(\omega_l)} + \frac{1}{\varepsilon_2(\omega_l)}}}$$

Очевидно, что условия полного просветления справедливы и для фотонного кристалла, ячейкой которого является рассмотренная двуслойная структура.

На рис. 2 изображено сечение сагиттальной плоскостью  $yz$  поверхности волновых векторов в геометрии  $\vec{k} \in yz, \vec{l}_1 \parallel \vec{n} \parallel oz$  при  $\varepsilon_1(\omega) < 0$ . Показаны направления фазовой и групповой скоростей для падающей, отраженной и преломленной волн. Кривая асимптотически приближается к прямой с наклоном  $tg \alpha_0 = |\varepsilon_1(\omega)|/\varepsilon_2$ .

Далее рассмотрим геометрию, в которой среда 1 анизотропна в плоскости падения  $yz$ , а нормаль ориентирована вдоль  $z$ . Спектр НП имеет в этом случае вид:

$$k_{1\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{1\perp} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{\varepsilon_{1\parallel}} \right)}. \quad (6)$$

Поверхность волновых векторов в среде 1 представляет собой эллипс при  $\varepsilon_{1\perp} > 0$  и гиперболу при  $\varepsilon_{1\perp} < 0$ . В последнем случае в области объемных волн на  $k\omega$ -диаграмме прошедшая волна имеет отрицательную фазовую скорость, т.е. ее волновой вектор направлен к границе раздела сред (см. рис. 2).

Спектр ПП в данной геометрии имеет тот же вид, что и в предыдущей. Подставляя сюда  $k_{1\parallel}$  из (6), находим:

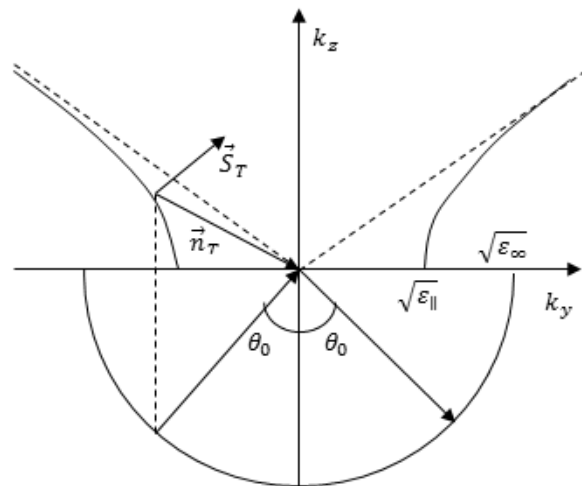


Рис.2



$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon_{1\perp}} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) / \left(\frac{1}{\varepsilon_{1\perp}\varepsilon_{1\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right)}. \quad (7)$$

Область существования соответствующих ветвей определяется условием  $\varepsilon_{1\perp}\varepsilon_2 < 0$ .

Исследуем (7) для  $\varepsilon_{1\perp} = \varepsilon_{1\parallel}$ . Подстановка выражений для  $\varepsilon_{1\perp}$ ,  $\varepsilon_2$  в (7) дает:

$$k^2 = \frac{\varepsilon_{1\perp}\varepsilon_2}{\varepsilon_{1\perp} + \varepsilon_2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2) \left( (\omega^2 - \omega_0^2) \left( \omega^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma - 1} \right) - \frac{\gamma\omega_a^2}{\gamma - 1} \omega^2 \right)}{c^2 \left( (\omega^2 - \omega_0^2) \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma + 1} \right) \left( \omega^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma - 1} \right) - \frac{\gamma^2\omega_a^2}{\gamma^2 - 1} (\omega^2)^2 \right)}. \quad (8)$$

Рассмотрим два предельных случая. В первом из них будем полагать  $\omega_p \ll \omega_0$ . В данном приближении (8) принимает вид:

$$k^2 = \frac{\varepsilon_{1\perp}\varepsilon_2}{\varepsilon_{1\perp} + \varepsilon_2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{c^2 \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma\delta + 1} \right)} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_2^2)} \cdot \frac{\left( \omega^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma\delta^2 - 1} \right)}{\left( \omega^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma\delta - 1} \right)}, \quad (9)$$

где  $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \omega_a^2$ ,  $\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \omega_a^2$  – характерные частоты верхних (магнонных) ветвей,  $\delta = \frac{\omega\varepsilon}{\omega_0} \approx 1$ . Очевидно, что при  $\gamma > 1$   $\omega_1 > \omega_2 > \omega_\varepsilon$  и наоборот.

Таким образом, при  $\gamma > 1$  имеется две поляритонные ветви, причем верхняя (магнонная), начинаясь на пересечении кривой  $k_{2\parallel}(k, \omega) = 0$  с  $\omega = \omega_0$ , имеет и коротковолновую точку окончания на пересечении  $\omega = \omega_\varepsilon$  с прямой  $k = \sqrt{\varepsilon_{1\perp}}\omega$ . При  $\gamma < 1$  данная ветвь исчезает.

Величина СГХ, как было показано ранее, определяется касательной компонентой ТДП, а потому имеет такой же вид, что и в предыдущей геометрии. В данном случае область ПВО лежит выше кривой  $k_{2\parallel}^2 = 0$  в полосе частот  $\omega_0 < \omega < \omega_\varepsilon$  и СГХ всегда отрицательный.

В другом предельном случае полагаем  $\omega_p \gg \omega_0$ . Тогда уравнение (8) переписывается в виде:

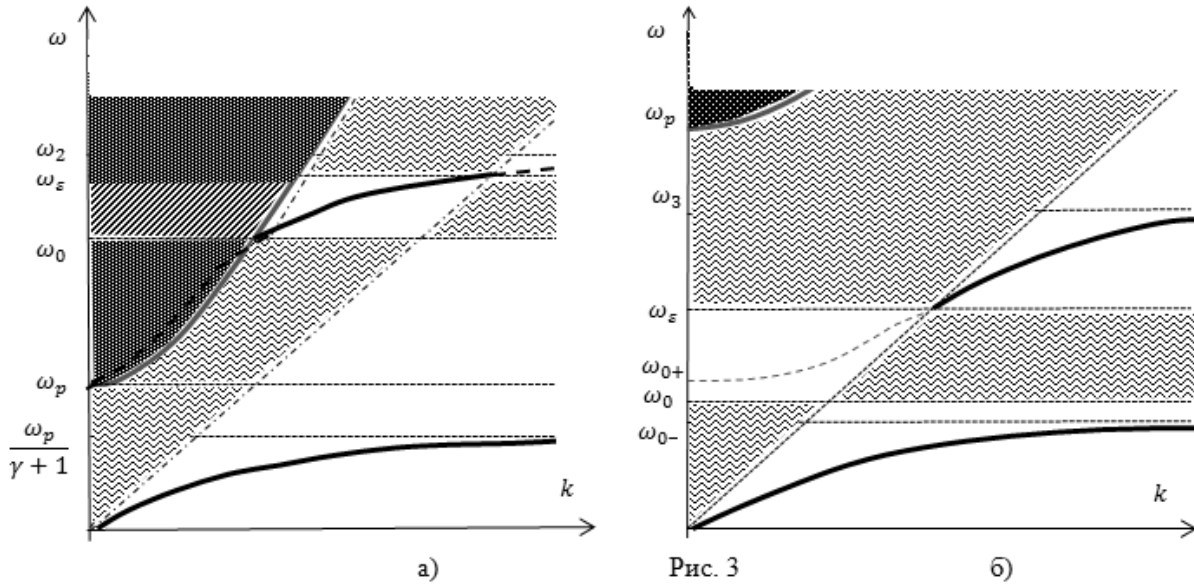
$$k^2 = \frac{\varepsilon_{1\perp}\varepsilon_2}{\varepsilon_{1\perp} + \varepsilon_2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{(\omega^2 - \omega_{0-}^2)} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_{0+}^2)}{(\omega^2 - \omega_3^2)} \cdot \frac{(\omega^2 + \omega_4^2)}{(\omega^2 + \omega_5^2)}, \quad (10)$$

где

$$\omega_{0-}^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\gamma^2\omega_0^2\omega_a^2}{\omega_p^4} \right), \quad \omega_{0+}^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{\gamma\omega_a^2}{\omega_p^2} \right), \quad \omega_3^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma\omega_a^2}{2\omega_p^2} \right),$$

$$\omega_4^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{\gamma\omega_a^2}{\omega_p^2} \right), \quad \omega_5^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{\gamma\omega_a^2}{2\omega_p^2} \right).$$

Из соотношений (7) следует, что оптическая поляритонная ветвь при  $\omega = \omega_\varepsilon$  пересекает прямую  $k = \frac{\omega}{c\sqrt{\varepsilon_{1\parallel}}}$ . Это означает, что точка их пересечения является длинноволновой точкой окончания данной ветви. На рис. 3 изображены области объемных и поверхностных волн для данной геометрии в случаях  $\omega_p \ll \omega_0$  (а) и  $\omega_p \gg \omega_0$  (б).



В данном предельном случае область ПВО может существовать только при условии  $\gamma < 1$  и лежит выше частоты  $\omega_p$  (рис. 3, б). Из (3) очевидно, что в этом случае СГХ будет всегда положительным.

Наконец, рассмотрим геометрию, в которой среда 1 анизотропна в плоскости падения  $zx$ , нормаль – по  $x$ . Спектр НП имеет вид:

$$k_{1\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k^2}{\varepsilon_{1\perp}} \right)}.$$

Поверхность волновых векторов в среде 1 представляет собой эллипс при  $\varepsilon_{1\perp} > 0$  и гиперболу при  $\varepsilon_{1\perp} < 0$ .

В последнем случае в области объемных волн на  $k\omega$  – диаграмме наблюдается отрицательная рефракция, т.к. (рис. 4) проекция вектора плотности потока энергии преломленной волны по отношению к падающей отрицательна. Отличие от предыдущей геометрии на  $k\omega$  – диаграмме состоит лишь в том, что в полосе частот  $\omega_0 < \omega < \omega_\varepsilon$  волна является объемной –  $k_{1\parallel}^2 > 0$ .

На рис. 4. изображено сечение сагиттальной плоскостью  $xz$  поверхности волновых векторов в геометрии  $\vec{k} \in zx, \vec{l}_1 \perp \vec{n} \parallel ox$  при  $\varepsilon_1(\omega) < 0$ . Показаны направления фазовой и групповой скоростей для падающей, отраженной и преломленной волн. Кривая асимптотически приближается к прямой с наклоном  $\text{tg } \alpha_0 = \varepsilon_2 / |\varepsilon_1(\omega)|$ .

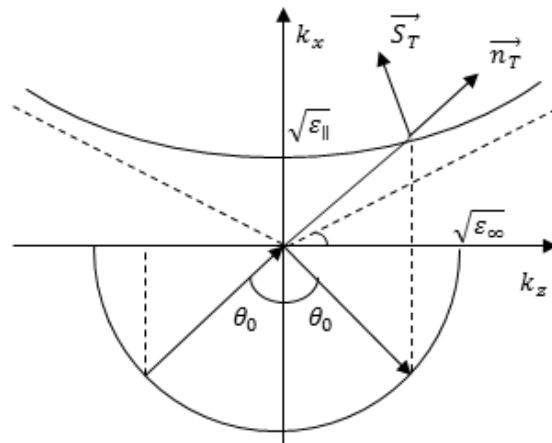


Рис.4.

Спектр НП в данной геометрии имеет вид:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\left( \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) / \left( \frac{1}{\varepsilon_{1\perp} \varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} \right)}. \quad (11)$$

Соответствующие ветви могут существовать в области  $\varepsilon_2 < 0$ , т.е., при  $\omega < \omega_p$ .

Подстановка выражений для  $\varepsilon_{1\perp}$ ,  $\varepsilon_2$  в (11) дает:

$$k^2 = \frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_{\varepsilon}^2) \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1-\gamma} \right)}{c^2 \left( (\omega^2 - \omega_0^2) \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma+1} \right) \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1-\gamma} \right) - \frac{\gamma^2 \omega_a^2}{\gamma^2 - 1} (\omega^2)^2 \right)}$$

В приближении  $\omega_p \ll \omega_0$  получаем аналогично (9):

$$k^2 = \frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_2} \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_{\varepsilon}^2) \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1-\gamma} \right)}{c^2 \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{\gamma\delta + 1} \right) \left( \omega^2 - \left( \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \omega_a^2 \right) \right) \left( \omega^2 - \frac{\omega_p^2}{1-\gamma\delta} \right)}$$

В данном случае существует только одна ветвь с полюсом  $\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{\gamma\delta+1}}$ , для которой  $\omega < \omega_p$ . В другом предельном случае  $\omega_p \gg \omega_0$  имеется уже две ветви (рис.5):

$$k^2 = \frac{\varepsilon_{\perp}\varepsilon_2}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_2} \cdot \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{(\omega^2 - \omega_{0-}^2)} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_{\varepsilon}^2)}{(\omega^2 - \omega_3^2)} \cdot \frac{(\omega^2 + \omega_6^2)}{(\omega^2 + \omega_5^2)}$$

где  $\omega_{0-}^2$ ,  $\omega_3^2$ ,  $\omega_4^2$ ,  $\omega_5^2$  были введены ранее, а  $\omega_6^2 = \frac{\omega_p^2}{\gamma-1}$ . На рис. 5 изображены области объемных и поверхностных волн для данной геометрии при  $\omega_p \gg \omega_0$ .

Условия возникновения области ПВО ниже частоты  $\omega = \omega_0$  аналогичны первой из рассмотренных геометрий. Как видно из вышеизложенных рассуждений, СГХ определяется касательной компонентой ТДП, которая в данной геометрии равна  $\varepsilon_{\parallel}$ , поэтому по аналогии с (3) можно написать:

$$\Delta = \frac{2\omega^2 \varepsilon_2^2 \varepsilon_{\parallel}^2}{c^2 q_1 k_{2\parallel} ((\varepsilon_2 q_1)^2 + (\varepsilon_{\parallel} k_{2\parallel})^2)} \left( \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right).$$

Рассматривая случай  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{1\perp}$ ,  $\gamma < 1$ , нетрудно показать, что СГХ в данной геометрии всегда положителен.

**Выводы.** В настоящей работе для трех геометрий показано, что в сверхрешетках типа антиферродиелектрик-полупроводник возможно формирование поверхностных поляритонов. Определены условия для падающей волны, при которых в данной двуслойной структуре наблюдается полное просветление. В другом случае полного внутреннего отражения определена величина сдвига Гуса-Хэншена, знак которого может быть как положительным, так и отрицательным. Показано, что наличие областей полного внутреннего отражения зависит от соотношения между диэлектрическими проницаемостями ячеек. Выяснено, что на указанной структуре возможна отрицательная рефракция, для которой найдены соответствующие области.

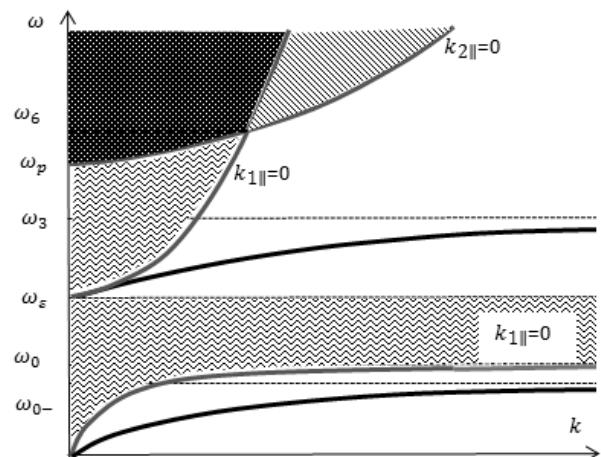


Рис.5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и мультиферройки / А.П. Пятаков, А.К. Звездин // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182, № 6. – С. 593-620
2. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков / Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин и др. – М.: Физматлит, 2001. – 560 с.
3. Кулагин Д.В. Поляритонная динамика одномерного магнитного фотонного кристалла в скрещенных магнитном и электрическом полях / Д.В. Кулагин, А.С. Савченко, С.В. Тарасенко // ЖЭТФ. – 2008. – Т. 133, вып. 5. – С. 1051-1069.
4. Савченко А.С. Поверхностная спин-волновая динамика легкоосного антиферромагнетика во внешнем электрическом поле / А.С. Савченко, С.В. Тарасенко, Т.Н. Тарасенко // ФТТ. – 2007, вып. 2, С. 267-278
5. Новый механизм усиления эффекта Гуса-Хэнхен на границе раздела прозрачных сред / А.С. Савченко, А.С. Тарасенко, С.В. Тарасенко, В.Г. Шавров // Письма в ЖЭТФ. – 2015. – Т. 2, вып.7, – С. 380-387
6. Tarkhanyan R.H. Wave refraction and backward magnon-plasmon polaritons in left-handed antiferromagnet/semiconductor superlattices / R.H. Tarkhanyan, D.G. Niarchos // JMMM. – 2007. – Vol. 312. – P. 6-15.
7. Tarkhanyan R.H. Influence of external magnetic field on magnon-plasmon polaritons in negative-index antiferromagnet-semiconductor superlattices / R.H. Tarkhanyan, D.G. Niarchos, M. Kafesaki // JMMM. – 2010. – Vol. 322. – P. 603-608.
8. Туров Е.А. Новые физические явления в магнетиках, связанные с магнитоэлектрическим и антиферроэлектрическим взаимодействием / Е.А. Туров, В.В. Николаев // Успехи физических наук. – 2005. – Т. 175, № 5. – С. 457-473
9. Криворучко В.Н. Поверхностные обменные поляритоны в  $\alpha - Fe_2O_3$  / В.Н. Криворучко, Т.Е. Примак // ФТТ. – 1991. – Т. 33, № 11. – С. 3205-3215.
10. Tarkhanyan R.H. Influence of external magnetic field on magnon-plasmon polaritons in negative-index antiferromagnet-semiconductor superlattices / R.H. Tarkhanyan, D.G. Niarchos, M. Kafesaki // JMMM. – 2010. – Vol. 322. – P. 603-608.
11. Macedo R. Spin canting induced Goos-Hanchen shifts / R. Macedo, R.L. Stamps, T. Dumelov // Optical Society of America. – 2014. – Vol. 22, No 23. – P. 28467-28478.

Поступила в редакцию 13.10.2016 г.

THE SPECTRUM OF SURFACE POLARITONS AND OPTICAL PROPERTIES  
OF STRUCTURE SEMICONDUCTOR-ANTIFERRODIELECTRIC

*V.D. Poimanov*

In this paper we consider the mechanism of formation of surface polaritons at the interface with the semiconductor – elektrodipoleaktive antiferrodielectric. The quantitative expression for the Fresnel reflection coefficients, Goos-Hanschen shift and recorded conditions of full enlightenment for the structure under consideration.

**Keywords:** surface polaritons, negative refraction, Goos-Hansen shift, elektrodipoleaktive, antiferrodielectric.

**Пойманов Владислав Дмитриевич**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), старший преподаватель кафедры  
теоретической физики и нанотехнологий,  
83001, пр. Театральный 13.  
E-mail: Vladislav.Poimanow@yandex.ru  
Тел: +38-050-9762600

**Poimanov Vladyslav Dmitrievich**

Donetsk National University, Donetsk,  
Senior lecturer at the Department of theoretical  
physics and nanotechnology,

УДК 316.3

**О НОВОЙ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПАРАДИГМЕ**

© 2016. В.В. Румянцев

В рамках поиска пути возрождения Донецкого региона и формирования программы последующего долгосрочного его развития поставлена в общих чертах проблема формулирования соответствующей научно-технологической парадигмы

**Ключевые слова:** научно-технологическая парадигма, технологический уклад, иерархия интеллектуальных систем, нанотехнологии.

**Введение.** В связи с необходимостью восстановления Донецкого региона и формированием программы последующего долгосрочного его развития встала проблема формулирования соответствующей научно-технологической парадигмы. При этом надо иметь в виду, что из-за нашего социально-экономического отставания в настоящее время придется осуществить быстрый переход с четвертого (а местами даже третьего) на спаренный пятый-шестой технологический уклад. Такая трансформация экономики предполагает существенное изменение кадровой структуры производства. В частности, это означает, что в обозримом будущем исчезнет такой слой, как рабочие – они будут заменены на операторов, наладчиков, программистов роботизированных комплексов. Соответствующая трансформация произойдет и с инженерно-техническим составом предприятий. Уже сегодня менеджмент в своей деятельности должен быть сориентирован на проектный подход. Грядущие изменения ведут к экологизации производства и постепенному уходу Человека из сферы производственных процессов в сферу управления этими процессами. Это предполагает масштабную трансформацию всех уровней образования (начиная со школьного), системы подготовки и, что особенно важно, переподготовки кадров. Переход к шестому технологическому укладу под силу только «умному» государству, которое на всех уровнях управления должно определиться с главными направлениями развития, срочно сформировать особую программу подготовки ситуативных харизматических менеджеров-лидеров (сегодня их явно не хватает, а ведь скоро они будут крайне нужны).

В связи с этим возникает необходимость переоценки нашего сегодняшнего научно-технического состояния. Приходится констатировать – наука, работающая на удовлетворение нужд потребительского общества, не сможет обеспечить технологический прорыв. Мы нуждаемся в новой идеологической парадигме, в рамках которой необходимо сформулировать Сверхзадачу, способную указать вектор развития региона и обеспечить проведение научно-технической трансформации.

**Нужна Сверхзадача!** Сегодня в глобализованном мире в повестке дня – формирование новой социально-экономической фазы. Суть ее в том, что она существенным образом опирается на инфраструктуру – коммуникации (транспорт, связь), энергетику, финансы, ЖКХ. Отметим, что ограничения в развитии этой фазы никак не снять в рамках существующей системы отношений собственности... К сожалению, ответы на вопросы, касающиеся идентификации субъекта идущих социальных преобразований пока слабо просматриваются и в философии, и даже в футурологии. Имеются, правда, модели (сценарии) развития, рассуждения об «обществе спектакля» (Ги Дебор [1]) или о «новых кочевниках» (Жак Аттали [2]: всемогущество денег – самый справедливый порядок правления), но ведь – они («кочевники»), в основном, потребители (утилизаторы), а вот, кто субъект-созидатель – вопрос открытый...

Кстати, о периодизации фаз социального развития... С тех пор, как человек выделился из животного мира, он научился использовать элементы окружающей реальности (естественные и искусственные материалы) и начал создавать Техносферу. Развитие человеческого общества протекало неравномерно (История – эстафета народов!). Время-от-времени осваивались новые источники энергии и появлялись новые технологии, которые оказывали существенное влияние на зарождение нового цивилизационного уклада. Так в результате неолитической революции и рождения регулярного сельского хозяйства возникают первые классовые общества, государственные образования. Первая фаза социального развития сформировалась на базе сельскохозяйственного блока отраслей, переход к следующей (индустриальной) фазе произошел в результате промышленной революции (в социально-политической сфере этот переход в разных странах осуществлялся через буржуазные революции), базовым здесь являлся блок промышленных отраслей. Последующая фаза должна базироваться (как сказано выше) на блоке инфраструктурных отраслей... Это не великая новость, данную фазу предсказывали под названиями: «третья волна» (Элвин Тоффлер [3]), «постиндустриальная эра», «информационное общество» (Дэниел Белл [4]), «общество знаний» и т.д. Появление нового «информационного» состояния общества сегодня особенно остро ощущается в беспрецедентной манипуляции массовым сознанием через СМИ и интернет...

Следующая за «постиндустриальной» будет формироваться фаза, базирующаяся на социально-гуманитарном блоке отраслей экономики (образование, наука, культура, здравоохранение и т.п.) – «когнитивное общество» (Сергей Переслегин [5]). Дальнейший процесс социально-экономической трансформации неизбежен, поскольку в какой-то период неминуемо «на повестке дня» возникнет вопрос в связи с ограничениями, вызванными несовершенством самой природы человеческой (в том числе, его физических и психологических возможностей). Может быть в примитивной форме «предчувствие» этой фазы содержится в идее коммунизма...

Нужно заметить, что формирование каждой фазы происходило вокруг определенного (ключевого) пакета технологий, в результате соответствующей научно-технической революции, смене научных парадигм. Конечно, в рамках любой фазы социально-экономического развития можно выделить и более мелкие научно-технологические скачки... проблема состоит в том, чтобы найти именно ключевой для социальной трансформации набор технологий.

Говоря о технологических аспектах, нужно помнить, что никакие трансформации сами собой не происходят – нужен субъект. Поэтому на переломе эпох в литературе и в философии всегда поднималась проблема формирования Нового человека (через Сверхзадачу!). Сегодня (для потребительского общества) этот вопрос особенно актуален (и в то же время все еще недостаточно прояснен). В качестве примеров Сверхзадач можно привести такие великие проекты, как Покорение Арктики, Индустриализация, Освоение Целины, Атомный и Космический проекты, БАМ...

С точки зрения формирования новой парадигмы развития интересен проект роботизации «Россия 2045» [6]. Возможно, этот проект сможет стать одной из точек роста и формирования новой Сверхзадачи... Однако, прежде всего, надо определить – в каком же состоянии находится современное общество, разбудить его, приобщить людей к созидательной деятельности.

**Иерархия систем и развитие интеллекта.** Обсуждение вопросов проектного развития общества, управляемой эволюции социальных систем в настоящее время часто связывают с рассмотрением направлений совершенствования человеческого сознания – вплоть до перенесения его в киберорганизмы (см., в частности, проект

«Россия 2045», проекты в рамках американского агентства DARPA [7]). И первый круг проблем, и второй – связаны с изучением тенденций развития интеллекта и интеллектуальных систем, формулированием общих принципов их описания. Последнее требует хотя бы в общих чертах представить возможные варианты эволюции таких систем, в том числе наиболее сложного класса – с участием (не опосредованно, а непосредственно) человека. К сожалению, последовательная и полная теория систем такого уровня к настоящему времени не создана. Тем не менее, в рамках общей теории систем существует весьма перспективное направление, рассматривающее сложные системы как иерархические многоуровневые структуры.

Существует необходимость разработки такого подхода, который бы позволил с единых позиций представить целостную схему развития сложных систем, в том числе интеллектуальных, и связанных с ними высокоуровневых форм и методов получения, хранения, анализа и трансляции информации (что принято называть общим термином «искусственный интеллект» (ИИ), см., например, [8]). В качестве образца и «экспериментально» реализованного варианта развития сложных информационных систем можно выбрать, например, корпоративную сеть бизнес-структур или даже эволюцию природы, животного мира и человеческого общества. Нужно выделить основные причины возникновения иерархических структур, механизмы увеличения сложности и уровни координации в этих системах, проанализировать движущие силы их развития. Такой подход открывает возможность рассматривать особенности эволюции систем с участием человека и делать прогнозы их развития, строить соответствующие модели, анализировать роль интеллекта в эволюционных процессах.

Последнее позволит более детально изучать возможные типы интеллекта и, в частности, широкого класса систем с участием «искусственного интеллекта». ИИ, который, по большому счету, представляет собой интеллектуальную систему принятия решений, тесно связан с проблематикой, имеющей непосредственное отношение к системам управления. Причем неважно в какой форме ИИ реализуется – «в железе», био- или социальной структуре... Скорее всего, оптимальная форма реализации – смешанная... что-то вроде реализуемых сегодня распределенных вычислений. И необязательно одна часть будет "знать", что делает другая часть такого "распределенного мозга".

Закономерен вопрос, возможно ли, решая частные задачи в рамках проблематики, связанной с совершенствованием ИИ, подойти к пониманию и воссозданию человеческого сознания (и «перенесению» его в неорганический носитель)? Является ли то, что названо «искусственным интеллектом», – интеллектом? На первый взгляд – парадоксальный вопрос (при том, что имеется соответствующее научное направление, в рамках которого работают многочисленные лаборатории и институты). И все же, что такое «искусственный интеллект»? Ясно, что он – произведен от «естественного», а все ли понятно с естественным (человеческим) интеллектом? И как быть (в процессе искусственного воспроизводства) с такими человеческими качествами, как этические, эстетические, религиозные и, наконец, индивидуальные (в том числе, генетически обусловленные) и социальные (здесь надо бы вспомнить «эффект Маугли»).

Моделирование функций отдельных органов живых организмов – возможно, но даже простейший организм не сводится к совокупности слагающих его членов. Одна из важнейших функций живой системы – способность «опережающего отражения» изменений внешней среды, в которой находится данный организм. Иными словами, на той или иной ступени иерархии сложности живой организм, являясь открытой системой, моделирует состояние внешней среды, с которой он связан мириадами связей – каналов информации. Проблема в том, что «искусственный» организм – это

тоже модельная система, в которой неминуемо учтены лишь некоторые («существенные» для создателя) стороны «естественного» организма. То есть он сам является лишь моделью и орудием человека, которое, как любой инструмент, расширяет (качественно и количественно) спектр человеческих чувственных возможностей и способностей реагировать (пассивно или активно) на изменение среды обитания.

Более того, говоря об «интеллекте», никак не обойти понятия «личность» (но это социально обусловленное качество) и «целеполагание». Способность ставить цели, актуализировать и формулировать проблему, выбирать соответствующие методы ее решения и строить модели (частно-научные и математические) – это тоже сугубо человеческое качество. Говоря о «целях», никак не обойти такие социально обусловленные понятия, как «потребности», «интересы», «мотивация» и т. п. Конечно, социальные функции и связи тоже можно моделировать. Однако любая модель не абстрактна, а конкретна и направлена на решение соответствующей проблемы.

Таким образом, на сегодня «искусственный интеллект» – это также модель, имеющая отношение, прежде всего, к системам управления, построенная для решения определенного круга задач, тесно связанных с проблемами вычислимости и алгоритмизации (см., например, работу Р. Пенроуза [9]), которые пока имеют весьма отдаленное отношение к вопросам перенесения сознания в «искусственные организмы». Тем не менее, трансформация телекоммуникационных (а не только компьютерных) технологий – важнейшая компонента преобразования современного общества.

**Нанотехнологии.** Одним из важных элементов пакета современных технологий являются нанотехнологии. Это такие, используемые в производственных процессах технологии, которые позволяют создавать материалы, устройства и технические системы, функционирование которых определяется наноструктурой (см., например, [10, 11]). Нанотехнологии открывают возможность контролируемого манипулирования отдельными атомами и молекулами с целью создания нанометровых объектов и наноструктурированных материалов, представляющих интерес для технологических применений, а также их диагностики. Заметим, что нанотехнологии качественно отличаются от традиционных технологий, поскольку на наномасштабах привычные макроскопические технологии обращения с материей часто неприменимы, а микроскопические явления (взаимодействие отдельных атомов, молекул и их агрегатов), пренебрежимо слабые на привычных масштабах, становятся намного значительнее. В отличие от традиционных технологий, нанотехнологии характеризуются повышенной наукоемкостью и затратностью, а также междисциплинарностью научных оснований – самая очевидная связь их прослеживается с физикой, химией, биологией. В частности, в современной медицине родилось направление, основанное на использовании уникальных свойств наноматериалов и нанообъектов для отслеживания, конструирования и изменения биологических систем человека на молекулярном уровне. Использование в нанотехнологиях передовых научных достижений позволяет относить их к высоким технологиям. Получение объектов наноскопического масштаба происходит в рамках своеобразного производства – нанопроизводства, в котором реализуется одна из стратегий:

- стратегия top-down (нисходящая) – наносистемы создаются на основе или в объемном материале (например, в электронике – в классических технологиях интегральных схем на основе кремния),
- стратегия bottom-up (восходящая) – наносистемы создаются из элементарных атомно-молекулярных блоков путем их сборки (или самосборки) в сложные структуры (реализуется, например, в биологических структурах).

За последние два десятилетия нанотехнологии превратились из символа научной перспективы в индустриальное стратегическое направление [12], которое в ближайшем



будущем определит лидеров экономического роста. Перспективность данного направления подтверждают миллиардные средства, выделяемые в мире на нанотехнологии уже сегодня.

**Выводы.** Мы лишь вскользь коснулись проблематики, связанной с формулированием новой научно-технологической парадигмы. Ясно, что рассмотренные вопросы не предполагают немедленного получения ответа, но при решении текущих задач восстановления социально-экономической инфраструктуры Донецкого региона они могут служить ориентиром при формировании стратегии его научно-технологического развития. Надо иметь в виду, что эта цель лежит в сфере высоких информационных, био- и нанотехнологий, которые тесно связаны с созданием донецкого инновационного наукоемкого кластера, формированием территории опережающего развития. Параллельно с организацией современной производственной структуры придется решать большой (и во многом абсолютно новый) комплекс социальных и гуманитарных задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дебор Г. Общество спектакля: [Текст] / Г. Дебор. – М.: Логос, 1999. – 224 с.
2. Attali J. Millennium: winners and losers in the coming world order: [Текст] / J. Attali. New York: Random House, 1991. – 132 p.
3. Тоффлер Э. Третья волна: [Текст] / Э. Тоффлер. – М.: АСТ, 2004. – 781 с.
4. Bell D. The coming of post-industrial society: A venture of social forecasting: [Текст] / D. Bell. - New York: Basic Books, 1973 – 508 p.
5. Переслегин С. Самоучитель игры на мировой шахматной доске: [Текст] / С. Переслегин. – М.: АСТ, СПб, 2005. – 619 с.
6. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.2045.ru>
7. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.darpa.mil/>
8. Гаврилов А.В. Искусственный интеллект и будущее цивилизации // Современные научные исследования и инновации. – 2015. – № 5. – [Электронный ресурс]. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2015/05/50092>.
9. Penrose R. The Emperor's New Mind, with a new Preface from the Author: [Текст] / R. Penrose. – Oxford: Oxford University Press, 1999. – 602 p.
10. Наноматериалы и нанотехнологии / Ж.И. Алферов, А.Л. Асеев, С.В. Гапонов и др. // Микросистемная техника. – 2003. – № 8. – С. 3-13.
11. Запрягаев С.А. Нанотехнологии на основе углеродосодержащих материалов / С.А. Запрягаев // ИнВесиРегмон. – 2006. – № 4. – С. 45-54.
12. Балабанов В.Н. Нанотехнологии. Наука будущего: [Текст] / В.Н. Балабанов. – М.: Эксмо, 2009. – 256 с.

*Поступила в редакцию 28.09.2016 г.*

#### ABOUT NEW SCIENTIFIC-TECHNOLOGICAL PARADIGM

*V.V. Rumyantsev*

In the search the way of the revival of the Donetsk region and the formation of long-term follow-up programme of development set out in General terms the problem of formulating relevant scientific and technological paradigm

**Keywords:** scientific-technological paradigm, technological structure, hierarchy of intelligent systems, nanotechnology

#### **Румянцев Владимир Васильевич**

Доктор физико-математических наук, профессор  
ГУ «Донецкий физико-технический институт им.  
А.А. Галкина», г. Донецк  
83144, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72  
E-mail: [rumyants@teor.fti.ac.donetsk.ua](mailto:rumyants@teor.fti.ac.donetsk.ua)  
Тел: +380 95 793 11 35

#### **Rumyantsev Vladimir Vasilyevich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full  
Professor  
Donetsk Institute for Physics and Engineering named  
after A.A. Galkin  
Donetsk, 83114, R. Luxembourg Str., 72

И Н Ф О Р М А Т И К А , В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н А Я  
Т Е Х Н И К А И У П Р А В Л Е Н И Е

УДК 004.67

ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ.  
ЭЛЕМЕНТНАЯ БАЗА

© 2016. В.В. Данилов, Т.В. Белик, А.П. Ефимович, И.А. Третьяков

В данной работе проведен анализ известных явлений физической оптики, потенциально пригодных для создания элементной базы оптических вычислителей, в частности, неуправляемых устройств ввода информации в оптические вычислители (модуляторы). Показано, что носителем информации в оптических информационных технологиях является электромагнитное поле. Предлагается описание явления дифракции, с целью выяснения влияния пространства на прохождение электромагнитной волны.

*Ключевые слова:* электромагнитное поле; модуляция; квазиплоская волна; транспарант.

**Введение.** Оптические информационные технологии (ОИТ), как научно-техническое направление, сформировались в конце прошлого столетия. Они находят применение в различных областях науки и техники, причем число их конкретных приложений непрерывно увеличивается [1–3].

Особое значение оптические информационные технологии приобретают в связи с бурным развитием средств связи, систем искусственного интеллекта, робототехники, оптической вычислительной техники [4–7].

Известно, что наибольшую сложность представляет обработка данных, имеющих матричную структуру. Алгоритмы обработки таких данных, как правило, характеризуются естественным параллелизмом, в то время как ЭВМ производит последовательную обработку. Это приводит во многих случаях к недопустимым затратам машинного времени. К задачам подобного типа относятся, в первую очередь, задачи обработки изображений.

Одним из возможных подходов к созданию высокопроизводительных комплексов с параллельной обработкой данных является использование света (электромагнитных колебаний оптического диапазона) в качестве носителя информации вместо электрического сигнала. Электромагнитные колебания оптического диапазона по сравнению с электрическими, обладают большим числом степеней свободы, которые могут быть использованы для передачи и преобразования информации.

**Электромагнитное поле как носитель информации.** Под оптическим сигналом будем понимать колебательный процесс электромагнитного поля оптического диапазона (электромагнитные волны), несущего определенную информацию. Возбужденные в электромагнитном поле волны в пространстве передаются от одной точки к другой (волновой процесс) и характеризуется напряженностью электрического и магнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  могут изменяться во времени по любому закону, например, гармоническому, тогда:

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{a}(x, y, z) \cos[\omega t + \varphi(x, y, z)], \quad (1)$$

где  $\vec{a}(x, y, z)$  – амплитуда напряженности в точке пространства с координатами  $(x, y, z)$ ;

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T ,$$

где  $\omega$  – частота колебаний,  $T$  – период колебаний. Если  $\omega$  постоянна, то волна является монохроматической.

Аргумент косинуса в выражении (1) – фаза колебаний, где  $\varphi(x, y, z)$  – начальная фаза в точке с координатами  $(x, y, z)$ . Если в точке пространства, например, с координатами  $x = y = z = 0$ , начальную фазу принять равной нулю, то  $\varphi(x, y, z)$  – характеризует разность фаз напряженности электрического поля в точке  $(x, y, z)$  и в точке  $x = y = z = 0$ . Если  $\omega = const$  и  $\varphi(x, y, z)$ , принято считать, что электромагнитная волна когерентна. Описывая её, будем использовать только напряженность электрического поля.

**Плоская и сферическая монохроматические волны.** В плоской волне амплитуда  $a_0$ , точнее амплитуда напряженности электрического поля, не зависит от координат, а фаза изменяется линейно в направлении распространения волны. Плоская волна с линейной поляризацией может быть представлена в виде:

$$E(x, y, z, t) = a_0 \cos(\omega t - kz) , \quad (2)$$

где  $k = 2\pi / \lambda$  – волновое число. Если  $\omega$  характеризует частоту колебаний напряженности поля во времени, то волновое число, частоту изменения напряженности поля в пространстве. Длина волны  $\lambda$  связана с периодом  $T$  соотношением  $\lambda = cT$ , где  $c$  – скорость света. Если электромагнитная волна распространяется в среде, имеющей показатель преломления  $n$ , не равный единице, то  $\lambda = \lambda_0 / n$ , где  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме (в воздухе). Согласно (2) следует, что поверхность равных фаз (фронт волны) представляет собой плоскость  $kz = const$ , перпендикулярную к оси  $z$ .

В сферической волне фронтом волны является сфера. Амплитуда убывает обратно пропорционально расстоянию от источника. Поэтому

$$E(x, y, z) = \frac{a'_0}{|r|} \cos(\omega t - k|r|) ,$$

где  $\frac{a'_0}{|r|} = a(x, y, z)$ ,  $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – постоянная величина.

Не вызывает сомнения, что в более сложных типах волн, пространственное распределение амплитуды  $a(x, y, z)$  и фазы  $\varphi(x, y, z)$  сложнее, чем в рассмотренных случаях. Для их описания используется комплексная форма представления. Известно [2], что  $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ , тогда перепишем (1) в виде:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \{ \vec{a}(x, y, z) e^{-i[\omega t + \varphi(x, y, z)]} \} ,$$

где  $\text{Re}$  – действительная часть комплексной величины. Тогда

$$E(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{-i[\omega t + \varphi(x, y, z)]} = A(x, y, z) e^{-i\omega t} ,$$

отсюда видно

$$A(x, y, z) = a(x, y, z) e^{-i\varphi(x, y, z)} . \quad (3)$$

В (3)  $A(x, y, z)$  – комплексная амплитуда [8–10], которая, в отличие от амплитуды  $a(x, y, z)$  описывает распределение амплитуд и фаз в разных точках волны и является важнейшей характеристикой монохроматической волны. Множитель  $e^{-i\omega t}$  обычно опускается и вводится на последнем этапе вычислений. Электромагнитные волны оптического диапазона далее будем представлять в форме (3), а комплексные амплитуды плоской и сферической волн будем представлять, в виде:

$$A = a_0 e^{ikz}, \quad A = \frac{a'_0}{|r|} a_0 e^{ik|r|}.$$

Таким образом, носителем информации в оптических информационных технологиях является электромагнитное поле. Перенос информации осуществляется электромагнитными волнами. Основными параметрами электромагнитной волны оптического диапазона, куда может быть внесена информация, являются амплитуда, фаза, частота и поляризация.

**Модуляция.** Модуляция электромагнитных волн оптического диапазона – это изменение по некоторому заданному закону их амплитуды, частоты, фазы или поляризации. Плоская волна, распространяющаяся по оси  $z$ , не ограничена по координатам  $(x, y)$ . В реальных условиях всегда имеются волны ограниченной апертуры. Поэтому волну, образующуюся, например, после преобразования пучка лазера с помощью расширителя и имеющую в сечении радиус  $R$ , будем считать не плоской, а квазиплоской [11–13]. Такая волна имеет плоский волновой фронт. Амплитуда волны постоянна в пределах ограниченной области. Вне этой области амплитуда равна нулю. Квазиплоскую волну с апертурой, превышающей размеры освещаемого объекта, считают плоской волной [13].

Пусть транспарант, представляющий собой пластинку с неизменной толщиной, но переменной прозрачностью (рис. 1), освещен плоской волной. Амплитуда волны, в соответствии с прозрачностью отдельных участков транспаранта, изменяется. Пусть  $t(x, y)$  – функция пропускания транспаранта. В этом случае, за транспарантом, в точке  $z \approx 0$  превращается в волну с комплексной амплитудой  $at(x, y)$ . Электромагнитная волна оптического диапазона, прошедшая через такой амплитудный транспарант, несет информацию, записанную на транспаранте, в виде *модуляции амплитуды* в плоскости  $(x, y)$ .

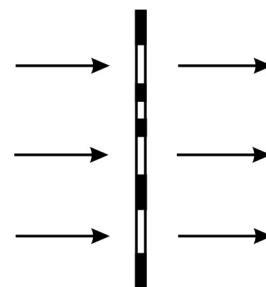


Рис. 1

*Модуляция фазы* реализуется транспарантом в виде прозрачной пластинки с постоянной прозрачностью, но с изменяющейся толщиной или с переменным показателем преломления (рис. 2). Если функцию, описывающую толщину пластинки  $l$  (максимальное значение которой равно  $l_{\max}$ ), можно представить в виде  $l(x, y)$ , то в предположении, что на транспарант падает плоская волна с амплитудой  $a$ , выделим две плоскости перпендикулярные оси  $z$ , одна на расстоянии  $z = 0$ , другую на расстоянии  $z = l_{\max}$ . Изменение фазы волны происходит на расстоянии  $l_{\max}$  в зависимости от  $(x, y)$  как в пластинке, так и в воздухе. Следовательно:

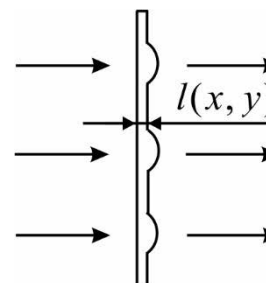


Рис. 2

$$\Delta\varphi(x, y) = knl(x, y) + k[l_{\max} - l(x, y)] = k(n-1)l(x, y) + kl_{\max},$$

где  $n$  – показатель преломления среды;  $l_{\max} - l(x, y)$  – путь в воздухе.

Тогда комплексная амплитуда прошедшей волны будет пропорциональна:

$$ae^{ikl_{\max}} e^{ik(n-1)l(x,y)}$$

Множителем  $e^{ikl_{\max}}$  определяется изменение фазы, не зависящее от  $(x, y)$ . Общий фазовый сдвиг не имеет существенного значения, поэтому пропускание транспаранта при модуляции фазы охарактеризуем множителем  $t_{\varphi}(x, y)$  :

$$t_{\varphi}(x, y) = e^{ik(n-1)l(x,y)}$$

Если показатель преломления  $n = n(x, y)$  и величина  $l(x, y) = l_{\max}$ , то комплексная амплитуда прошедшей через пластинку волны приобретает множитель  $e^{[ikn(x,y)l_{\max}]}$ .

Рассмотрим, общий случай. Модуляция осуществлена транспарантом в плоскости  $(x, y)$  как по амплитуде, так и по фазе (рис. 3). В этом случае, процесс сопровождается преобразованием  $ae^{i\varphi} \rightarrow ae^{i\varphi}t(x,y)t_{\varphi}(x,y)$ .

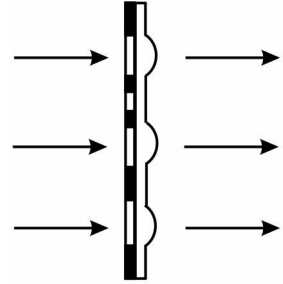


Рис. 3

*Модуляция поляризации* световой волны может быть произведена, например, с помощью пленки из магнитооптического материала, структура намагниченности которой переменная. Пленка играет роль поляризатора, поворачивающего по-разному вектор напряженности электрического поля в разных участках проходящей волны. Таким образом, волной переносится информация, содержащаяся в пленке в виде модуляции намагниченности. За пленкой обычно всегда помещается анализатор. Это устройство, выделяет лишь одну компоненту электрического поля. В результате, модуляция поляризации практически сводится к модуляции амплитуды.

Из изложенного ясно, что модуляция амплитуды и модуляция фазы – это операции умножения. Модуляция амплитуды сводится к умножению комплексной исходной волны на функцию пропускания  $t(x,y)$  амплитудного модулятора, а модуляция фазы – к умножению на фазовый множитель  $e^{[i\Delta\varphi(x,y)]}$  определяемый свойствами фазового модулятора.

Воздействие различных модуляторов на электромагнитную волну - результат модуляции комплексной амплитуды в определенной области (плоскости), находящейся непосредственно за модулятором.

В случае амплитудного модулятора амплитуда прошедшей волны  $at(x, y)$  фактически описывает тень транспаранта. Однако по мере удаления от транспаранта тень становится менее резкой, более расплывчатой. Протяженность области резкой тени зависит от длины волны  $\lambda$  и линейного размера  $l_{\min}$  минимальной неоднородности транспаранта. Если плоскость наблюдения сместить на расстояние, превышающее  $l_{\min}^2 / \lambda = z_T$ , то изображение будет смазанным за счет расходимости пучка света. Явление это обусловлено дифракцией световой волны [8, 9].

Предлагается приближенное описание явления дифракции, с целью выяснения влияния пространства, ограниченного двумя параллельными плоскостями, на прохождение электромагнитной волны. Принцип Гюйгенса [13]: «... каждая точка волны рассматривается как элементарный источник вторичной световой волны...».

Пусть геометрия опыта содержит (рис. 4), две плоскости, перпендикулярные к оси  $z$ . Точка  $P_{01}$ , левой плоскости, находится непосредственно за транспарантом

( $z=0$ ), точка  $P_1$  – на расстоянии  $L$ , большем, чем  $z_T$ ;  $x_0, y_0$  и  $x, y$  – координаты точек левой и правой плоскостей.

Комплексная амплитуда в точке  $P_1$  с координатами  $x_1, y_1$ , обусловленная сферической волной, выходящей из точки  $P_{01}$  с координатами  $x_0, y_0$ , равна

$$A_{11} = \frac{a'_0(P_{01})}{|r|} e^{ik|r|},$$

где  $a'_0(P_{01})$  – величина характеризующая амплитуду выходящей волны, пропорциональная комплексной амплитуде  $A_0$  в точке  $x_0, y_0$ ,  $a'_0(P_{01}) = cA_0(P_{01})$ . В соответствии с рис. 4

$$|r| = \sqrt{L^2 + (x_1 - x_{10})^2 + (y_1 - y_{10})^2}. \quad (4)$$

Предположим, что  $L$  много больше размеров рассматриваемой области в плоскостях  $x_0, y_0$  и  $x_1, y_1$ , и преобразуем (4):

$$|r| = L \sqrt{1 + \frac{(x_1 - x_{10})^2}{L^2} + \frac{(y_1 - y_{10})^2}{L^2}} \approx L + (1/2L)[(x_1 - x_{10})^2 + (y_1 - y_{10})^2].$$

После разложения в ряд Тейлора, оставлены первые члены, т.е. принято параксиальное приближение. Согласно этому, амплитуда  $A_{11}$  может быть представлена в виде:

$$A_{11} = cA_0(P_{01})L \exp ikL \exp \{ik(2L)^{-1}[(x_1 - x_{10})^2 + (y_1 - y_{10})^2]\}.$$

Суммирование амплитуд всех волн, приходящих в точку  $P_1$  от всех точек области  $x_0, y_0$  приводит к следующему выражению:

$$A(P_1) = \int_{x_0} \int_{y_0} (1/L)cA_0(x_0, y_0) e^{ikL} e^{i(k/2L)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]} dx_0 dy_0.$$

Полученное выражение справедливо для любой точки плоскости наблюдения, поэтому можно координаты  $x_1, y_1$  точки  $P_1$  заменить на координаты  $x, y$ , определяющие положение произвольной точки. Постоянная  $c$  определяется при более строгом решении задачи дифракции и  $c = 1/(i\lambda)$  [13].

Таким образом, комплексная амплитуда световой волны в плоскости  $x, y$ , расположенной на расстоянии  $L$  от исходной плоскости будет равна

$$A(x, y, L) = e^{ikL} / (i\lambda L) \int_x \int_y A_0(x_0, y_0) e^{ik/(2L)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]} dx_0 dy_0. \quad (5)$$

Полученное выражение практически совпадает с известным в физической оптике, интегралом Френеля–Кирхгофа [2, 13].

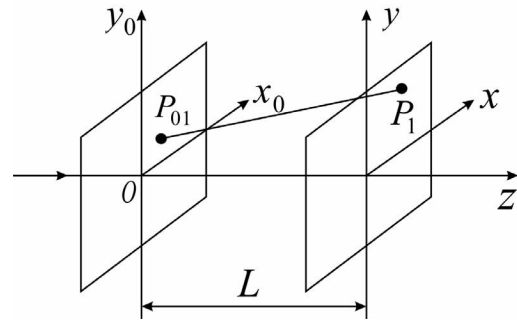


Рис. 4. Дифракция в зоне Френеля

Амплитуда  $A(x, y, L)$  является результатом интегрального преобразования амплитуды  $A_0(x_0, y_0)$ . Выражение (5) можно записать в следующем виде:

$$A(x, y, L) = \frac{e^{ikL}}{i\lambda L} e^{i\frac{k}{2L}(x^2+y^2)} \int_{x_0} \int_{y_0} A_0(x_0, y_0) e^{i\frac{k}{2L}(x_0^2+y_0^2)} e^{-i(k/L)(xx_0+yy_0)} dx_0 dy_0. \quad (6)$$

Интеграл в этой формуле определяет так называемое *преобразование Френеля* [2, 13]. В общем виде преобразование Френеля записывается в виде:

$$\Phi\{f(x_0, y_0)\} = \int_{x_0} \int_{y_0} f(x_0, y_0) e^{i\alpha(x_0^2+y_0^2)} e^{-i2\pi(\xi x_0+\eta y_0)} dx_0 dy_0, \quad (7)$$

где  $\alpha, \xi, \eta$  – параметры преобразования,  $\Phi$ -оператор. Из сопоставления (6) и (7) следует, что в рассматриваемом случае параметры преобразования равны

$$\alpha = k / (2L) = \pi / (\lambda L), \quad \xi = x / (\lambda L), \quad \eta = y / (\lambda L).$$

Связь комплексной амплитуды  $A(x, y, L)$  с преобразованием Френеля  $A_0(x_0, y_0)$  запишем в следующем виде:  $A(x, y, L) = C_\Phi \Phi\{A_0(x_0, y_0)\}$ . Отсюда:

$$C_\Phi = [e^{ikL} / (i\lambda L)] \exp[i\frac{k}{2L}(x^2 + y^2)]. \quad (8)$$

Множитель  $C_\Phi$  состоит из трех сомножителей. Один из них –  $(1/(\lambda L))$  – определяет уменьшение амплитуды волны с расстоянием. Другой сомножитель  $\exp(ikL) / i = \exp(-i\pi / 2) \exp(ikL) = \exp[i(kL - \pi / 2)]$  характеризует общее изменение фазы, постоянное для всех точек плоскости наблюдения. Третий сомножитель, зависящий от координат  $x, y$ , является фактически фазовым множителем расходящейся сферической волны.

Если на амплитудный транспарант (рис. 1)  $t(x_0, y_0)$  падает плоская волна с амплитудой  $a_0$ , то амплитуда волны за плоскостью транспаранта описывается выражением  $A_0(x_0, y_0) = a_0 t(x_0, y_0)$ . Тогда  $\Phi\{A_0(x_0, y_0)\} = a_0 \Phi\{t(x_0, y_0)\}$ , т.е. распределение комплексной амплитуды, согласно (8), пропорционально преобразованию Френеля функции пропускания транспаранта.

Преобразование Френеля переходит в преобразование Фурье, если квадратичный фазовый множитель под знаком интеграла (7) можно приближенно принять равным единице в пределах апертуры транспаранта, т.е. должно выполняться приближение Фраунгофера [13], которое допустимо при условии:

$$L \gg (k / 2)(x_0^2 + y_0^2).$$

В области Фраунгофера комплексная амплитуда  $A(x, y, L)$  равна

$$A(x, y, L) = C_\Phi F\{A_0(x_0, y_0)\}.$$

Таким образом, слой пространства реализует модуляцию комплексной амплитуды электромагнитной волны, в форме интегральных преобразований Френеля или Фурье.

**Выводы.** Быстродействие оптических систем обработки информации определяется временем прохождения лазерного пучка (электромагнитной волны оптического диапазона) структуры вычислителя от входа к выходу. Носителем

информации в оптических информационных технологиях является электромагнитное поле. Перенос информации осуществляется электромагнитными волнами. Основными параметрами электромагнитной волны оптического диапазона, куда может быть внесена информация, являются амплитуда, фаза, частота и поляризация.

Модуляция амплитуды и модуляция фазы – это операции умножения. Модуляция амплитуды сводится к умножению комплексной исходной волны на функцию пропускания  $t(x,y)$  амплитудного модулятора, а модуляция фазы – к умножению на фазовый множитель  $e^{[i\Delta\varphi(x,y)]}$  определяемый свойствами фазового модулятора.

Пространство между двумя параллельными плоскостями, расположенных перпендикулярно оптической оси системы (слой пространства) реализует модуляцию комплексной амплитуды электромагнитной волны, в форме интегральных преобразований Френеля или Фурье.

Модуляторы оптических информационных технологий – предмет рассмотрения авторов в дальнейшем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Престон К. Когерентные оптические вычислительные машины. Пер. с англ. / К. Престон. – М.: Мир, 1974. – 400 с.
2. Акаев А.А. Когерентные оптические вычислительные машины / А.А. Акаев, С.А. Майоров. – Л.: Машиностроение, 1977. – 440 с.
3. Данилов В.В. Физические основы создания оптических процессоров обработки радиосигналов / В.В. Данилов // Радиотехника: Всеукр. научн.-техн. сб. – 2001. – № 120. – С. 140–148.
4. Рудякова А.Н. Оптоэлектронный акустооптический цифроаналоговый преобразователь / А.Н. Рудякова, А.Ю. Липинский, В.В. Данилов // Регистрация, хранение и обработка данных. – 2007. – Т. 9, № 4. – С. 119–131.
5. Рудякова А.Н. Разрядно-цифровое кодирование в акустооптической среде / А.Н. Рудякова, А.Ю. Липинский, В.В. Данилов // Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник «Радиотехника». – 2008. – № 113. – С. 145–151.
6. Липинский А.Ю. Оптоэлектронные акустооптические устройства обработки дискретной информации / А.Ю. Липинский, А.Н. Рудякова, В.В. Данилов. // Вестник государственного университета информационно-коммуникационных технологий. – 2007. – Т. 5, № 4. – С. 51–59.
7. Lipinskii A.Y. Acousto-optic binary coding based on space – time integration and its application to ultrafast high-resolution digital-analog conversion / A.Y. Lipinskii, A.N. Rudiakova, V.V. Danilov // IEEE Technology Letters. – 2008. – Vol. 20, N 24. – P. 2087–2089.
8. Ярив А. Введение в оптическую электронику / А. Ярив. – М.: Высш. школа, 1983. – 398 с.
9. Ярив А. Квантовая электроника / А. Ярив. – М.: Сов. радио, 1980. – 488 с.
10. Литвиненко О. Н. Основы радиооптики / О.Н. Литвиненко. – Киев: Техника, 1974. – 206 с.
11. Липинский А.Ю. Моделирование процесса динамического изменения архитектуры оптоэлектронной вычислительной акустооптической среды. / А.Ю. Липинский, В.В. Данилов, А.Н. Рудякова // Радиотехника: Всеукр. научн.-техн. сб. – 2013. – № 172. – С. 147–153.
12. Данилов В.В. Исследование физической реализуемости структурных элементов акустооптических устройств / В.В. Данилов, С.В. Иванов // Вестник Донецкого университета. Серия А: Естественные науки. – 2003. – № 1. – С. 214–223.
13. Калитеевский Н. И. Волновая оптика / Н.И. Калитеевский. – М.: Высш. школа, 1995. – 463 с.

*Поступила в редакцию 18.10.2016 г.*

### OPTICAL INFORMATION TECHNOLOGIES. ELEMENTAL BASE

*V.V. Danilov, T.V. Belik, A.P. Yefymovych, I.A. Tretyakov*

In this paper the analysis of the known phenomena of physical optics potentially suitable for creation of element base of optical calculators, in particular, of uncontrollable data input devices in optical calculators



(modulators) is carried out. It is shown that the data carrier in optical information technologies is the electromagnetic field. The description of the phenomenon of diffraction, for the purpose of clarification of influence of space on passing of an electromagnetic wave is offered.

**Keywords:** electromagnetic field; modulation; quasi-wave; transparency.

**Данилов Владимир Васильевич**

доктор технических наук, профессор,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), заведующий кафедрой радиофизики и  
инфокоммуникационных технологий.  
E-mail: ut5iv@mail.ru

**Danilov Vladimir**

Doctor of Engineering Sciences, Full Professor,  
Donetsk National University, Donetsk,  
Head of the Department of Radio Physics and  
Information and Communication Technologies

**Белик Татьяна Владимировна**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), старший преподаватель.  
E-mail: tblom@mail.ru

**Belik Tatyana**

Donetsk National University, Donetsk,  
Senior Lecturer

**Ефимович Андрей Павлович**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), ассистент.  
E-mail: yefymovych@gmail.com

**Yefymovych Andrii**

Donetsk National University, Donetsk,  
Assistant Lecturer

**Третьяков Игорь Александрович**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), ассистент.  
E-mail: es75i@mail.ru

**Tretyakov Igor**

Donetsk National University, Donetsk,  
Assistant Lecturer

Контактный тел.: +38 066 605 67 62

УДК 681.5.015

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА РЕКТИФИКАЦИОННОЙ КОЛОННЫ ВОЗДУХОРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

© 2016. В.К. Толстых, К.А. Пшеничный

---

Предложена упрощённая модель конвективных процессов теплопереноса для теплообменников с противоточными теплоносителями, содержащая модельный коэффициент теплообмена между теплоносителями. Поставлена и решена задача идентификации модельного коэффициента по данным промышленного теплообменника ректификационной колонны Енакиевского металлургического завода.

*Ключевые слова:* идентификация; конвективный теплоперенос; теплообменник.

---

**Постановка задачи.** В различных производствах, таких как металлургия, химия, медицина энергетика и других, присутствуют теплообменные аппараты, которые в значительной степени определяют работу основных объектов-потребителей теплоносителей. Правильный выбор, настройка режимов работы теплообменных аппаратов может существенно снизить производственные затраты и повысить качество конечной продукции. Поэтому вопросы моделирования и управления работой теплообменников является актуальной задачей.

Теплообменные аппараты бывают разных типов: пластинчатые; труба в трубе; регенераторы; прямоточные и противоточные и другие. Для различных типов и конкретных конструктивных исполнений теплообменников существуют различные математические модели описания тепловых и гидродинамических процессов, протекающих в них [1–3]. В большинстве случаев теплообменные аппараты поставляются на действующие предприятия как составные части какого-либо большого участка производства. При этом теплообменники поставляются в закрытом, неразборном виде, без описаний их внутренних конструктивных особенностей. Очевидно, что это создаёт существенные проблемы при решении задач оптимизации производственных процессов, использующих такие теплообменные аппараты.

Для решения подобных проблем в настоящей работе предлагается приблизительное моделирование процессов теплопереноса в теплообменниках на основе общей информации об их внутреннем исполнении. Очевидно, что такие модели будут содержать значительные погрешности и допущения, которые можно в определённой степени компенсировать некоторыми настраиваемыми модельными параметрами, т.е. находить их адекватные значения из решения задач идентификации.

В данной работе рассматривается противоточный теплообменник для ректификационной колонны воздуходелительной установки. На рис. 1 приведена часть технологической схемы ректификации на Енакиевском металлургическом заводе. Воздух (сплошная жирная линия) проходит основной теплообменник Е3118, после которого поступает в нижнюю ректификационную колонну Т3211. После процесса разделения воздуха из верхней колонны Т3212 отбирается некоторое количество жидкого кислорода (пунктирная линия) и посредством управляемого насоса Р3568 подаётся в основной теплообменник Е3118 для противоточного охлаждения воздуха.

Для качественной работы ректификационной колонны в любое время суток и года, экономии энергоресурсов и обеспечения сохранности оборудования в случае

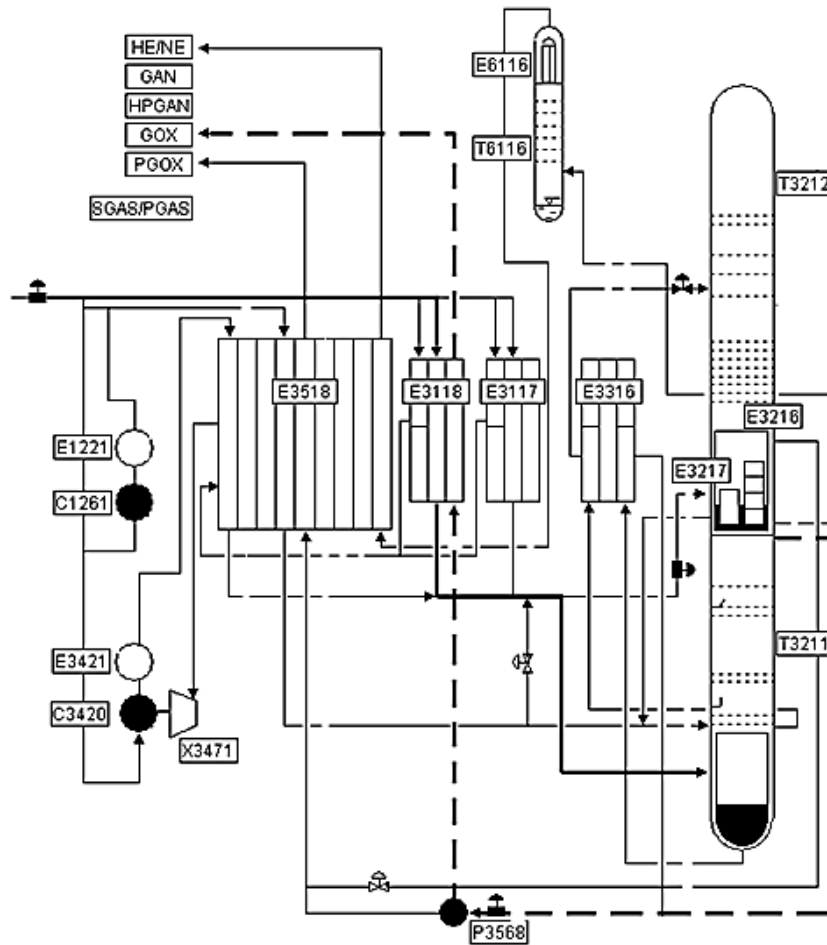


Рис. 1. Схема воздухоразделительной установки.

непредвиденных сбоев, необходимо адекватное управление теплообменником для удержания воздушного потока в колонну при номинальной температуре.

Для этого необходимо иметь достоверную математическую модель тепловых и гидродинамических процессов «типичного» промышленного противоточного теплообменного аппарата. Поскольку в разных воздухоразделительных установках присутствуют разные теплообменники, то учесть заранее их внутренние особенности невозможно, и полученная нами общая математическая модель, очевидно, потребует дальнейшей идентификации для конкретной воздухоразделительной установки.

**Моделирование конвективного теплопереноса в противоточном теплообменнике.** Рассмотрим теплообменник, в котором прямым потоком является воздух (1), а обратным – кислород (2). Одномерные конвективные тепловые процессы для обеих сред теплообменника можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{c_{p1}\rho_1} K(T_2 - T_1), \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - v_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{1}{c_{p2}\rho_2} K(T_1 - T_2), \end{cases} \quad (1)$$

где  $T_1(\tau, x)$  и  $T_2(\tau, x)$  – температуры первого и второго теплоносителя (соответственно – воздух и кислород), движущихся со скоростями  $v_1(\tau, x)$  и  $v_2(\tau, x)$ ,  $K$  – модельный коэффициент теплообмена между теплоносителями, включающий в себя как физический коэффициент теплопередачи, так и внутренние геометрические особенности теплообменника,  $\tau \in [0, \theta]$  – время,  $x \in [x_a, x_b]$  – пространственная координата,  $c_p$ ,  $\rho(T)$  – удельные теплоемкость при постоянном давлении и плотность теплоносителей.

Граничные условия для системы (1) имеют вид

$$T_1(\tau, x_a) = T_{1a}(\tau), \quad T_2(\tau, x_b) = T_{2b}(\tau). \quad (2)$$

Поскольку распределение температур в начальный момент, как правило, неизвестно, то зададим в качестве начального приближения линейное изменение температуры вдоль теплообменника при заданных граничных значениях:

$$\begin{aligned} T_1(0, x) &= T_1(0, x_a) - [T_1(0, x_a) - T_1(0, x_b)] \frac{x - x_a}{x_b - x_a}, \\ T_2(0, x) &= T_2(0, x_b) - [T_2(0, x_b) - T_2(0, x_a)] \frac{x - x_b}{x_a - x_b}. \end{aligned} \quad (3)$$

Такое приближение будет приводить к искусственным переходным тепловым процессам в начале расчётов до некоторого момента  $\tau_0 \in (0, \theta]$ . После  $\tau_0$  начальные условия уже не будут влиять на дальнейшие расчёты, и полученное распределение температур можно будет считать новым начальным условием для дальнейших расчетов

Для определения  $\tau_0$  будем задавать стационарные граничные условия как тепловые, так и гидродинамические. Момент  $\tau_0$  будет определяться как момент стабилизации искусственных переходных тепловых процессов.

Поскольку плотность теплоносителей существенно зависит от температуры [3], то и скорость течений теплоносителей будет различной по длине теплообменника. Волновыми процессами в промышленных теплообменниках пренебрегают из-за их быстротечности. Поэтому гидродинамические течения теплоносителей будем принимать стационарными для каждого расчётного временного слоя  $\tau^j \in [0, \theta]$ . Тогда из уравнения неразрывности  $\text{div}(\rho v) = 0$  получаем уравнения для расчёта скоростей течений теплоносителей:

$$\begin{aligned} \rho_1^j(T) v_1^j(x) &= C_1^j, \\ \rho_2^j(T) v_2^j(x) &= C_2^j, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C_1^j$ ,  $C_2^j$  – набор констант, которые определяются через известную скорость на границах потоков:  $C_1^j = \rho_{1a}^j v_{1a}^j$ ,  $C_2^j = \rho_{2b}^j v_{2b}^j$ . Плотность и температура вещества связаны уравнением состояния. В нашей постановке задачи использовалось уравнение Менделеева-Клапейрона для моля вещества:  $P V_\mu = R T$ ,  $\rho = m_\mu / V_\mu$ , где  $m_\mu$  – молярная масса,  $V_\mu$  – молярный объем.

Таким образом, уравнения (1)–(4) образуют математическую модель для расчёта тепловых процессов рассматриваемой принципиальной схемы противоточного теплообменника.

**Конечно-разностные аппроксимации.** Для численного решения системы уравнений (1) проводилась конечно-разностная аппроксимация каждого уравнения на одной и той же равномерной сетке по схемам типа «уголок» [4]. Причем для прямого хода теплоносителя – это будет левый уголок с  $x_{i-1}, x_i$ , а для обратного потока теплоносителя эта же схема приобретает вид правого уголка с  $x_i, x_{i+1}$ .

Данная аппроксимация дифференциальных уравнений (1) приводит к следующим алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j}{\Delta \tau} + v_{1,i}^j \frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i-1}^{j+1}}{\Delta x} = \frac{1}{c_{p1} \rho_{1,i}^j} K (T_{2,i}^j - T_{1,i}^j), \\ \frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{\Delta \tau} - v_{2,i}^j \frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i-1}^{j+1}}{\Delta x} = \frac{1}{c_{p2} \rho_{2,i}^j} K (T_{1,i}^j - T_{2,i}^j). \end{cases}$$

Откуда можно найти

$$\begin{cases} T_{1,i}^{j+1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} T_{1,i-1}^{j+1} + \frac{1}{\gamma+1} T_{1,i}^j + \frac{\Delta \tau}{1+\gamma} \frac{1}{c_{p1} \rho_{1,i}^j} K (T_{2,i}^j - T_{1,i}^j), \\ T_{2,i}^{j+1} = \frac{\gamma}{\gamma+1} T_{2,i+1}^{j+1} + \frac{1}{\gamma+1} T_{2,i}^j + \frac{\Delta \tau}{1+\gamma} \frac{1}{c_{p2} \rho_{2,i}^j} K (T_{1,i}^j - T_{2,i}^j) \end{cases} \quad (5)$$

при условии устойчивости:

$$\gamma = \frac{v_{\max} \tau}{h} \leq 1,$$

где  $v_{\max} = \max_{\tau, x} (v_1, v_2)$ . Расчёт решения для первой среды проводился слева-направо, а

для второй – справа-налево на каждом временном слое  $\tau^j$ .

**Формулировка задачи идентификации.** Математическая модель (1)–(4) содержит в уравнении (1) неизвестный коэффициент  $K$ . В нашем случае – это модельный, а не физический коэффициент, включающий в себя погрешности всех допущений модели: неизвестность точного значения физического коэффициента теплопередачи, неопределённость геометрии теплообменника, приближённое гидродинамическое моделирование и т.д. Очевидно, что коэффициент  $K$  не поддаётся непосредственному измерению и для каждой конкретной установки может быть найден только с использованием оптимизационных методов идентификации [5,6] на основе экспериментальных данных, например, по результатам измерений температуры потоков.

Удобнее проводить идентификацию при установившейся работе теплообменника. В этом случае задача идентификации будет формулироваться следующим образом. Необходимо найти коэффициент  $K$  модели (1)–(4) доставляющий минимум функционалу:

$$J(K) = \int_{x_a}^{x_b} [T_1(\tau_0, x) - T_e(\tau_0, x)]^2 dx \rightarrow \min, \quad (6)$$

где  $J(K)$  – критерий качества идентификации, который в нашем случае представляет собой неявную одномерную функцию модельного коэффициента теплообмена  $K$ ,  $T_e$  – экспериментально наблюдаемая температура воздуха в теплообменнике. Коэффициент  $K$ , найденный из условия минимума  $J$ , будет содержать в себе все погрешности математической модели (1)–(4) таким образом, чтобы температура, рассчитываемая в дальнейшем по этой модели, была максимально приближена к реальной рабочей температуре теплообменника.

Функционал (6) можно упростить с учётом того, что рассматриваем установившиеся процессы, а сам коэффициент  $K$  одинаков по всей длине теплообменника. Здесь расхождение модельной и реальной температур можно контролировать только на выходе  $x_b$  охлаждённого воздуха из теплообменника. В этом случае критерий качества идентификации принимает вид:

$$J(K) = [T_{1b}(\tau_0) - T_e(\tau_0)]^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

Для решения задач идентификации (6), (7) могут применяться различные методы одномерной минимизации. Будем использовать метод золотого сечения.

Итак, имеем  $J(K): [K_a, K_b] \rightarrow R$ . Отрезок  $[K_a, K_b]$  делится в пропорции золотого сечения, то есть выбираются две точки  $K_1, K_2$  из условия:

$$\begin{aligned} K_1 &\approx K_a + 0,4(K_b - K_a), \\ K_2 &\approx K_a + 0,6(K_b - K_a). \end{aligned} \quad (8)$$

Далее в этих точках оцениваются значения критерия качества. Если  $J(K_1) \leq J(K_2)$ , тогда принимают  $K_b \leftarrow K_2$  иначе  $K_a \leftarrow K_1$  и все расчёты повторяют заново до уменьшения длины отрезка  $[K_a, K_b]$  до желаемых минимальных размеров. После чего определяется решение задачи (7) как  $K = (K_b + K_a) / 2$ .

**Идентификация.** Расчёты проводились на данных промышленного теплообменника кислородного цеха Енакиевского металлургического завода. Длина теплообменного аппарата  $L = 10$  м. Приближения для начальных условий температуры рассчитывались по (3) при  $T_1(0, x_b) = 315,15$  К,  $T_2(0, x_a) = 303$  К. Температура на границах теплообменника задавалась постоянной и равной  $T_1(\tau, x_a) = 315,15$  К,  $T_2(\tau, x_b) = 90,2$  К. Давления в потоках принимались  $p_1 = 5 \times 10^6$  Па,  $p_2 = 2,4 \times 10^6$  Па. Граничные скорости потоков  $v_1(\tau, x_a) = 76$  м/с,  $v_2(\tau, x_b) = 79$  м/с. Расчетная сетка задавалась с ячейками по пространству  $\Delta x = 1$  м и шагами по времени  $\Delta \tau = 0,01$  с.

Как показали расчёты, изначально небольшие переходные процессы стабилизировались к моменту  $\tau_0 \approx 20$  с. После этого времени нестационарность процессов, вносимая приближительными начальными условиями (3), исчезала. Система переходила в установившееся состояние. Других источников нестационарности в рассматриваемом примере не было. Полученное время стабилизации потоков совпадает

со временем переходных тепловых процессов теплообменного аппарата Енакиевского металлургического завода.

Для идентификации по методу золотого сечения задавался начальный отрезок  $[K_a, K_b] = [100 \times 10^3, 500 \times 10^3]$ . При этом критерий качества идентификации на границах отрезка составил:  $J(K_a) = 69$ ,  $J(K_b) = 32$ . Была задана точность идентификации в виде конечного отрезка  $[K_a, K_b] = 1 \times 10^3$ .

Заданная точность была достигнута за 12 итераций. Найдено оптимальное значение модельного коэффициента  $K = 198 \times 10^3$ . При этом, значение критерия качества идентификации составило  $J(K) = 0,00126$  что на четыре порядка меньше начальных приближений.

На рис. 2 представлены распределения температур в теплообменнике для найденного коэффициента теплообмена. Здесь расхождение модельной температуры и экспериментально наблюдаемой температуры на выходе из теплообменника составило  $|T_{1b}(\tau_0) - T_e(\tau_0)| = 0,04$  К.

Результаты свидетельствуют о хорошем теплообмене обеих теплоносителей, обеспечивающем высокую точность модельной температуре воздуха на выходе из теплообменника.

**Выводы.** Из приведенных результатов моделирования следует, что упрощенная математическая модель противоточного теплообменника (1)–(4) даёт физически обоснованные распределения температур при моделировании установившихся процессов тепломассопереносов на реальных объектах. Модельный коэффициент теплообмена  $K$ , включающий в себя физический коэффициент теплопередачи, внутренние геометрические особенности теплообменника и другие физические допущения модели позволяет существенно упростить математическое моделирование тепловых процессов. Идентифицированный для каждого конкретного теплообменника коэффициент  $K$  позволяет отказаться от необходимости детального описания внутреннего строения теплообменников, что и не всегда возможно в силу закрытости архитектуры существующих аппаратов.

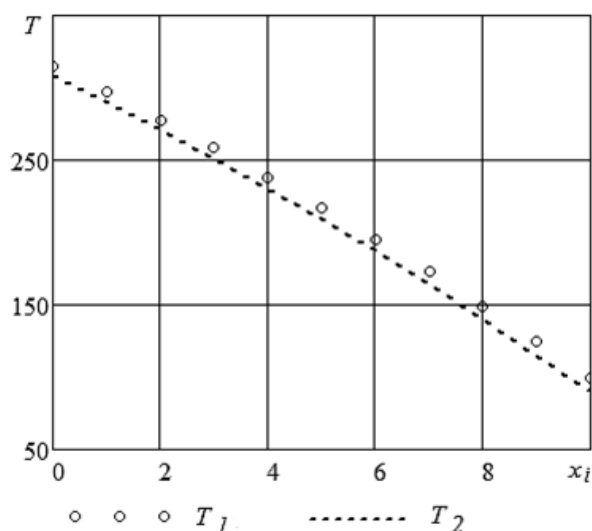


Рис. 2. Распределение температур в теплообменнике в воздухе  $T_1$  и в кислороде  $T_2$  для идентифицированного коэффициента  $K$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кафаров В.В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: учеб. пособие для вузов / В.В. Кафаров, М.Б. Глебов. – М.: Высш. шк., 1991. – 440 с.
2. Лебедев П.Д. Теплообменные, сушильные и холодильные установки. Учебник для студентов технических вузов / П. Д. Лебедев. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Энергия, 1972. 319 с.
3. Банных О.П. Основные конструкции и тепловой расчет теплообменников: Учебное пособие / О.П. Банных. – СПб: СПбНИУ ИТМО, 2012. – 42 с.
4. Девятков Б.Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления / Б.Н. Девятков. – Новосибирск: Наука, 1964. – 324 с.

5. Девятов Б.Н. Теория и методы анализа управляемых распределенных процессов / Б.Н. Девятов, Н.Д. Демиденко. – Новосибирск: Наука, 1983. – 310 с.
6. Ландау Л.Д. Теоретическая физика гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
8. Толстых В.К. Идентификация теплофизических параметров в виде полиномов, зависящих от температуры / В.К. Толстых, Ф.В. Недопекин, В.Е. Бодряга // Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика. – 2009. – № 1. – С. 193-199.
9. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов / В.К. Толстых. – Инженерно-физический журнал. – 2003. – Т. 76, № 2. – С. 424-427.
10. Васильев Ф. П. Методы оптимизации: В 2-х кн. Новое изд., перераб. и доп. / Ф.П. Васильев – М : МЦНМО, 2011. – Кн. 2. – 433 с.
11. Tolstykh V.K. Optimality Conditions and Algorithms for Direct Optimizing the Partial Differential Equations / V.K. Tolstykh // Engineering: Scientific Research Publishing. – 2012. – Vol. 4, No 7. – P. 390-393.
12. Tolstykh V. K. Optimization for Systems Governed by Partial Differential Equations / V.K. Tolstykh // The Electronic International Journal "Advanced Modeling and Optimization". – 2012. – Vol. 14, No 3. – P. 703-716.

*Поступила в редакцию 25.10.2016 г.*

#### IDENTIFICATION OF HEAT EXCHANGER MODEL FOR AIR SEPARATION PLANT IN RECTIFICATION COLUMN

*V. K. Tolstykh, K.A. Pshenichnyi*

Was offered of simplified model of convective heat transfer processes for heat exchangers with counterflow heat transfer fluids containing the model of heat transfer coefficient between the heat carriers. Posed and solved the problem of identification of the model coefficient of the heat exchanger according to the industrial distillation column Yenakiyevo Metallurgical Plant.

**Keywords:** identification, convective heat, heat exchanger.

**Толстых Виктор Константинович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), кафедра компьютерных технологий.  
E-mail: mail@tolstykh.com  
Тел.: 0660518245

**Tolstykh Victor K.**

Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Full Professor,  
Donetsk National University,  
department of computer technology

**Пшеничный Кирилл Анатольевич**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), аспирант кафедры компьютерных  
технологий.  
E-mail: kirill\_pch@mail.ru.  
Тел.: 0950331974

**Pshenichnyi Kirill A.**

Donetsk National University,  
Postgraduate at the department of computer technology



## Х И М И Ч Е С К И Е   Н А У К И

УДК 541.6:620.193.4

### СВОЙСТВА ЭПОКСИДНО-КРЕМНЕЗЕМНЫХ КОМПОЗИТОВ АМИННОГО ОТВЕРЖДЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ

© 2016. *Р.И. Лыга, В.М. Михальчук, Д.В. Гуртовой*

Получены прозрачные композиционные материалы на основе эпоксидной смолы EPONEX 1510, отвердителя аминного типа, тетраэтоксисилана и 3-аминопропилтриэтоксисилана. Золь-гель методом *in situ* сформированы частицы кремнеземного наполнителя, содержание которых в композитах составляло от 0,5 до 3 масс. %. Установлено, что при таких концентрациях наполнитель практически не влияет на устойчивость полученных материалов к термоокислительной деградации. Тем не менее, тонкие покрытия на основе таких композитов на поверхности алюминиевого сплава Д16 обладают высокими антикоррозионными характеристиками: эффективность антикоррозионной защиты сплава покрытием, сформированным на закрытой поверхности, составляет более 98 %.

**Ключевые слова:** композиты; аминное отверждение; эпоксидная смола; золь-гель метод; тетраэтоксисилан; 3-аминопропилтриэтоксисилан; термоокислительная деградация; антикоррозионные свойства.

**Введение.** Эпоксидные полимеры обладают нехарактерным для других материалов комплексом теплофизических, диэлектрических, адгезионных и других показателей. Эти свойства в сочетании с технологически удобным агрегатным состоянием эпоксидных композиций обуславливают их широкое использование в промышленности, строительстве, сельском хозяйстве и т.д. Одним из самых распространенных способов получения полимеров на основе эпоксидных смол является аминное отверждение [1, 2], которое можно проводить как при комнатной температуре (в качестве отвердителя применяются алифатические ди- и полиамины), так и с использованием нагревания (ароматические ди- и полиамины) [3, 4].

Тем не менее, в настоящее время ведется активный поиск новых полимерных композиционных материалов, которые бы по своим свойствам и эксплуатационным характеристикам отвечали бы самым современным требованиям развития науки и техники. Перспективным направлением в полимерном материаловедении является получение нанокомпозитов, характеризующихся улучшенными свойствами. Такие композиционные материалы состоят из органической (полимерной) компоненты и неорганической фазы, которую можно вводить механически в виде нанопорошков, или формировать из различных прекурсоров *in situ*, в том числе, с использованием золь-гель процесса [5–8]. Современный золь-гель метод – это способ получения многокомпонентных систем высокой степени однородности. Он дает возможность контролировать размер наночастиц в процессе их синтеза, способствует равномерному распределению частиц внутри полимерной матрицы, а также уменьшению количества дефектов полимерной сетки, которые возникают при введении наполнителей [7].

Золь-гель метод получения полимер-неорганических композитов показал свою перспективность благодаря широким возможностям варьирования условий синтеза, структуры, а, следовательно, и конечных свойств получаемых материалов. Сочетание такого подхода с аминным отверждением эпоксидной полимерной матрицы позволяет создавать композиционные материалы различного назначения (клеи, покрытия и др.)

[9]. В частности, эпоксидно-кремнеземные композиты применяют в качестве защитных покрытий для алюминиевых сплавов, используемых в авиа- и судостроении. Однако до сих пор не проведены комплексные исследования, направленные на получение и изучение различных свойств композитов аминного отверждения на основе циклоалифатических эпоксидных смол.

Целью данной работы было получение золь-гель методом и изучение прозрачных стеклообразных эпоксидно-кремнеземных композитов аминного отверждения, а также оценка защитных свойств тонких покрытий на их основе.

**Экспериментальная часть.** Полимерную составляющую эпоксидного полимера и композитов получали на основе олигомера – диглицидилового эфира дициклогексилпропана (смола EPONEX 1510, ЭЧ = 20,04 %,  $\rho = 1,14 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ ) и стехиометрического количества аминного отвердителя (полиоксипропилен)триамина (Jeffamine T403, АЧ = 7,9 %).

Кремнеземную составляющую композитов формировали путём гидролитической поликонденсации тетраэтоксисилана (ТЭОС,  $\rho = 0,933 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ ,  $n_D^{20} = 1,38$ ) и 3-аминопропилтриэтоксисилана (АПТЭС, АЧ = 9,1 %) в присутствии водного раствора азотной кислоты в среде органического растворителя – ацетона. После формирования золя кремнеземных частиц в систему вводили эпоксидную смолу и удаляли из реакционной среды летучие компоненты.

Образцы полимера и композитов получали отверждением композиции в течение 3 суток при комнатной температуре с дополнительной термообработкой (в течение 3 часов при 120 °С). Они представляли собой плёнки толщиной 200 мкм и тонкие (10 мкм) покрытия на поверхности алюминиевого сплава Д16. Концентрацию кремнеземного наполнителя ( $\omega(\text{SiO}_2)$ ) в композитах определяли расчетным методом, исходя из количества введенных в систему ТЭОС и АПТЭС. Образцы содержали от 0,5 до 3 масс. %  $\text{SiO}_2$ .

Температуры стеклования полимера и композитов определяли методом термомеханического анализа при помощи автоматической лабораторной установки, состоящей из термокриокамеры ТК-500, программированного регулятора температуры БТП-78, электронной измерительной системы М-217 и двухкоординатного самопишущего потенциометра. Измерения проводили на плёночных образцах (25×6×0,2 мм) при постоянно действующей растягивающей нагрузке. Скорость нагревания составляла 4 °С·мин<sup>-1</sup>.

Микроскопические исследования проводили с использованием сканирующего электронного микроскопа серии JSM-6390LV (JEOL Ltd., Япония) на сколах блочных образцов композитов, напыленных углеродом, а также с использованием микроскопов МБС-2 и BIOLAM ЛОМО.

Электрохимические измерения проводились с использованием потенциостата ПИ-50-1, программатора ПР-8 и трехэлектродной ячейки, оснащенной платиновым электродом, хлорсеребряным электродом сравнения и рабочим электродом – непокрытой алюминиевой пластинкой или с нанесенным на нее тонким композиционным покрытием. Рабочая площадь поверхности пластинки сплава Д16 составляла 1 см<sup>2</sup>. Все измерения были проведены в 5 %-ном водном растворе хлорида натрия при комнатной температуре. Перед потенциодинамическими измерениями рабочий раствор продували аргоном в течение 30 минут с целью удаления кислорода воздуха. В это же время электроды выдержали в рабочем растворе с разомкнутой электрической цепью для достижения постоянства потенциала. Потенциодинамические кривые регистрировали с постоянной скоростью развертки 2 мВ·с<sup>-1</sup>, начиная от потенциала разомкнутой цепи. Значения плотности тока коррозии ( $I_{\text{corr}}$ ) соответствуют

участкам поляризационных кривых, для которых разность потенциалов между катодной и анодной частями составляет 50 мВ. Антикоррозионное сопротивление ( $R_{\text{согг}}$ ) было рассчитано с использованием уравнения:  $R_{\text{согг}} = 50 \text{ мВ} / 2 \cdot I_{\text{согг}}$ .

Значения потенциалов питтинговой коррозии ( $E_{\text{pit}}$ ) определяли, используя критерий, исходя из которого питтинговая коррозия происходит в момент, когда анодная плотность тока образца достигает  $3 \cdot 10^{-5} \text{ А} \cdot \text{см}^{-2}$  [10]. Эффективность антикоррозионной защиты ( $\eta$ , %) алюминиевого сплава полученными гибридными покрытиями была рассчитана по уравнению:  $\eta = (1 - I_{\text{согг}}/I_{\text{согг}}^0) \cdot 100$  [11], где  $I_{\text{согг}}$  и  $I_{\text{согг}}^0$  – соответственно плотности тока коррозии электрода с полимерным покрытием и рабочего электрода без покрытия.

Электрохимическая оценка антикоррозионных свойств покрытий проведена при трех-четырёхкратном повторении потенциодинамических измерений.

Дериватографические исследования проводили на дериватографе Q-1500D системы Paulik–Paulik–Erdely в динамическом режиме в диапазоне температур 20–850 °С при скорости нагревания  $10 \text{ }^\circ\text{С} \cdot \text{мин}^{-1}$  в среде кислорода воздуха.

Процесс окисления пленочных образцов композитов изучали газовольмометрическим методом при 180 °С и давлении кислорода 0,1 МПа.

**Анализ результатов.** Золь-гель метод позволяет получать прозрачные полимерные системы на всех стадиях синтеза. Так композиционные материалы аминного отверждения, полученные на основе диглицидилового эфира дициклогексилпропана, тетраэтоксисилана и 3-аминопропилтриэтоксисилана, имеют достаточно высокие оптические характеристики: коэффициент светопропускания при длине волны 540 нм пленочных образцов толщиной 200 мкм, содержащие от 0,5 до 3 масс. % силоксановой (кремнеземной) составляющей (в пересчете на  $\text{SiO}_2$ ), составляет 96–99 %. Синтезированные композиты при комнатной температуре находятся в стеклообразном состоянии: температуры стеклования образцов составляют 46–55 °С.

Во время синтеза композиционных материалов с использованием золь-гель метода в результате совместной гидролитической поликонденсации тетраэтоксисилана и 3-аминопропилтриэтоксисилана в объеме полимерной матрицы образуются полисилоксановые частицы формы, близкой к сферической. Это было подтверждено ранее проведенными исследованиями с помощью сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) и энергодисперсионного элементного анализа [12]. Установлено, что размер таких частиц составляет более 90–230 нм (рис. 1).

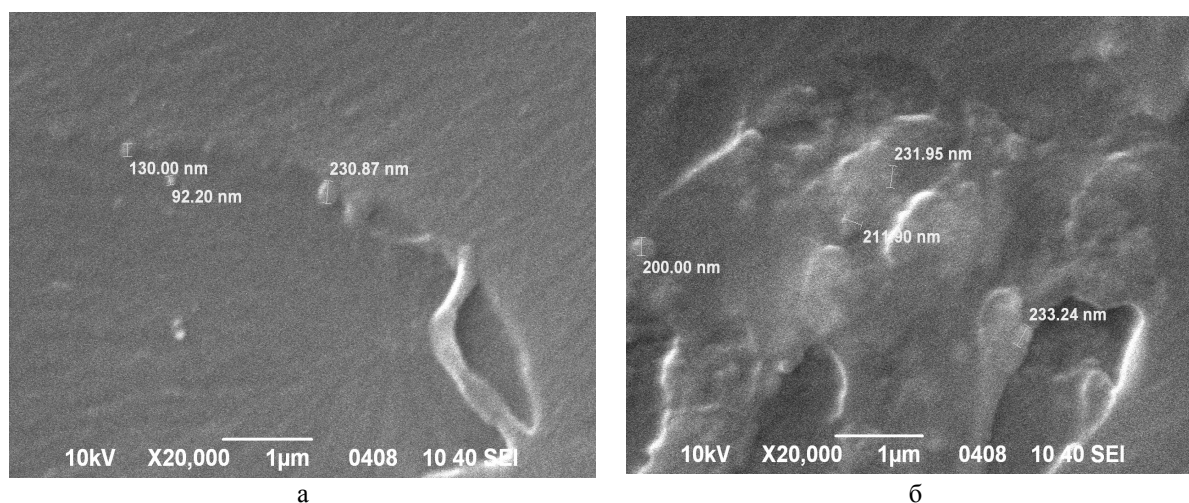


Рис. 1. Микрофотографии СЭМ сколов образцов: а) композит при содержании кремнеземных частиц 1 масс. %; б) композит при содержании кремнеземных частиц 3 масс. %. Увеличение в 20 000 раз

При расчете количеств исходных реагентов для получения композиционных материалов были учтены аминогруппы в структуре 3-аминопропилтриэтоксисилана, поскольку частицы такого кремнеземного наполнителя продолжают формироваться при добавлении смолы и способны встраиваться в эпоксидную матрицу по механизму аминного отверждения [13].

Для полученных эпоксидно-кремнеземных композитов проведено исследование их термоокислительной деградации. Термогравиметрические измерения показали, что использование кремнеземного наполнителя в изученном диапазоне концентраций снижает температуру 10 %-ной потери массы образцов (табл. 1), соответственно, композиционные материалы быстрее теряют массу, чем исходный немодифицированный эпоксидный полимер аминного отверждения. Однако введение наполнителя несколько повышает температуру максимальной скорости термоокислительной деградации композитов, что особо заметно при минимальном количестве SiO<sub>2</sub> (табл. 1).

Термогравиметрический анализ пленочных образцов полимера и композитов был также проведен в изотермических условиях. Установлено, что в первые часы термообработки происходит резкая потеря массы композитов (от 1 до 3 %) при 140 °С, связанная с испарением влаги и присутствующих низкомолекулярных летучих компонентов из объема образцов. По завершении этого периода потеря массы значительно замедляется и связана уже с процессами разрушения, происходящими в полимерной матрице. При этом использование наполнителя сокращает время жизни композитов ( $\tau_{10}$  – время, за которое полимер теряет 10 % своей массы) (табл. 1), но это является следствием большей потери массы образцов на первых часах термообработки. Полученные результаты дают основание предположить, что композиты, по сравнению с немодифицированным эпокси-аминным полимером, содержат большее количество низкомолекулярных компонентов, не подшитых к полимерной матрице. Уже по завершении начального периода старения масса композитов теряется примерно с такой же скоростью ( $7,1 \cdot 10^{-8} \text{ г} \cdot \text{с}^{-1}$ ), как и масса полимера без наполнителя.

При изучении влияния наполнителя на скорость развившегося процесса высокотемпературного окисления эпоксидно-кремнеземных композитов (180 °С) установлено, что максимальная скорость окисления ( $W_{\max}$ ) композитов меньше, хотя и в незначительной степени, чем  $W_{\max}$  немодифицированного полимера (рис. 2).

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о том, что, в целом, использование кремнеземного наполнителя в изученном диапазоне концентраций или не влияет на устойчивость эпокси-аминного полимера к термоокислительной деградации, или в некоторых случаях ее повышает.

Таблица 1  
Температура 10%-ной потери массы ( $T_{10}$ ), температура максимальной потери массы ( $T_{\max}$ ) и время жизни ( $\tau_{10}$ ) композитов аминного отверждения

$\omega$ (SiO <sub>2</sub> ), масс. %	$T_{10}$ , °С	$T_{\max}$ , °С	$\tau_{10}$ , час
0	266	279	87
0,5	262	299	78
1,5	261	290	68
2,25	257	294	76
3	258	286	66

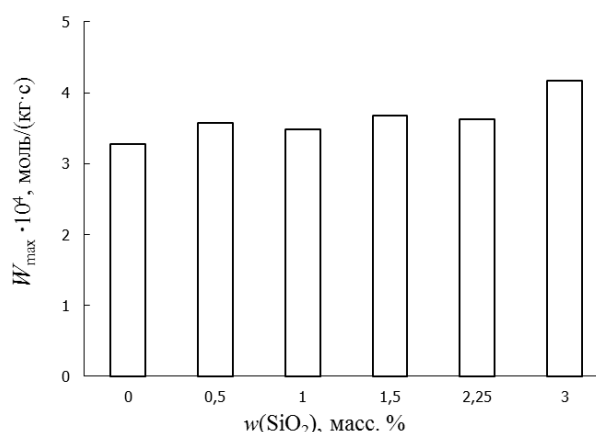


Рис. 2. Зависимость максимальной скорости окисления композитов ( $W_{\max}$ ) аминного отверждения от содержания кремнеземного наполнителя

Антикоррозионные свойства тонких органико-неорганических покрытий на поверхности алюминиевого сплава Д16 оценивали по данным потенциодинамических измерений в 5 %-ном водном растворе NaCl. Для такого исследования формирование покрытий проводили при их доотверждении в течение 1 часа при 120 °С как на открытой, так и на закрытой поверхностях.

Из поляризационных кривых, представленных на рис. 3, получены электрохимические характеристики покрытых алюминиевых пластин (табл. 2). Установлено, что изученные пленочные композитные покрытия, сформированные на открытой поверхности, увеличивают значения потенциала питтинговой коррозии ( $E_{pit}$ ) субстрата (потенциал принимает более положительные значения).

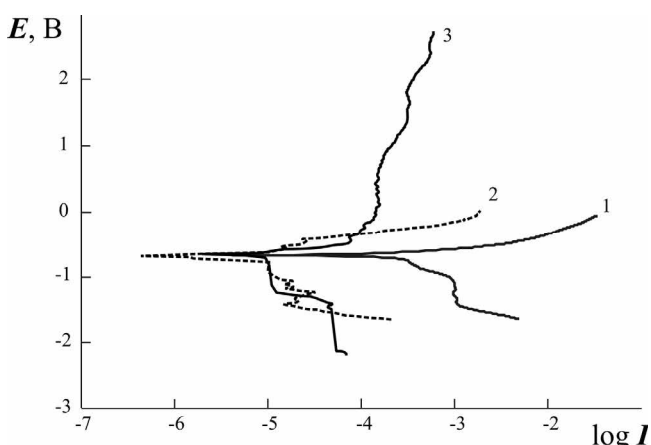


Рис. 3. Потенциодинамические кривые алюминиевого сплава Д16 (1), на который нанесено композиционное покрытие с содержанием наполнителя 2,25 масс. % (2, 3). Покрытие сформировано на открытой (3) и закрытой (2) поверхностях

Таблица 2

Электрохимические характеристики покрытий аминного отверждения на основе EPONEX 1510, ТЭОС и АПТЭС на поверхности пластин алюминиевого сплава Д16 в 5 %-ном водном растворе хлорида натрия

Образец	$E_{согг}$ , мВ	$E_{pit}$ , мВ	$R_{согг}$ , кОм·см <sup>2</sup>	$I_{согг}$ , А·см <sup>-2</sup>	$\eta$ , %
непокр. Д16	-660	-650	0,25	$1,00 \cdot 10^{-4}$	–
открытая поверхность					
0,5	-710	-626	3,78	$6,61 \cdot 10^{-6}$	93,4
1,5	-632	-589	2,94	$8,51 \cdot 10^{-6}$	91,5
2,25	-666	-581	4,06	$6,17 \cdot 10^{-6}$	93,8
3	-541	-496	2,50	$1,00 \cdot 10^{-5}$	90,0
закрытая поверхность					
0,5	-650	-630	3,53	$7,08 \cdot 10^{-6}$	92,9
1,5	-607	-377	3,147	$7,94 \cdot 10^{-6}$	92,1
2,25	-670	-390	15,77	$1,58 \cdot 10^{-6}$	98,4
3	-662	-576	3,614	$6,92 \cdot 10^{-6}$	93,1

Использование эпоксидно-кремнеземных покрытий повышает антикоррозионное сопротивление рабочего электрода от 0,25 кОм·см<sup>2</sup> до 2,50 – 4,06 кОм·см<sup>2</sup> (табл. 2). В результате плотность тока коррозии при содержании кремнеземного наполнителя в покрытии 0,5–3 масс. % составляет  $1,00 \cdot 10^{-5}$  –  $6,17 \cdot 10^{-6}$  А·см<sup>-2</sup> по сравнению с плотностью тока коррозии сплава без покрытия  $1,00 \cdot 10^{-4}$  А·см<sup>-2</sup>. Рассчитанная эффективность антикоррозионной защиты алюминиевого сплава Д16 эпоксидно-кремнеземными покрытиями аминного отверждения, содержащих 0,5–3 масс. % наполнителя, равна 90,0–93,8 %. На рис. 4 приведены микрофотографии образцов алюминиевого сплава без покрытия и пластин, покрытых эпоксидно-кремнеземным композитом с содержанием наполнителя 1,5 масс. % (отвержденным на открытой поверхности). Вследствие локальной точечной коррозии на поверхности чистого алюминия развиваются множественные очаги коррозии (рис. 4). При использовании композиционных покрытий разрушение субстрата наблюдается в меньшей степени, что проявляется в меньшем количестве дефектов поверхности металла (рис. 4).

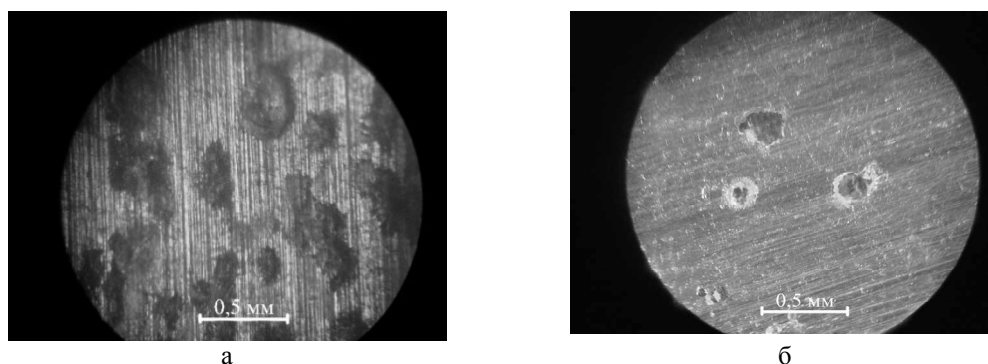


Рис. 4. Микрофотографии поверхности: а) непокрытого алюминиевого сплава Д16; б) с эпоксидно-кремнеземным покрытием, доотвержденным на открытой поверхности. Содержание наполнителя составляет 1,5 масс. %

С целью снижения вероятности протекания карбонизации аминного отвердителя, которой подвержено большинство алифатических аминов [14], формирование тонкого композиционного покрытия было проведено без его контакта с воздухом (между металлической подложкой и стеклянной пластинкой). Установлено, что при таком способе отверждения композитов антикоррозионные электрохимические характеристики почти не изменяются. Только при содержании кремнеземного наполнителя 2,25 масс. % они несколько улучшаются: антикоррозионная сопротивленность составляет  $15,8 \text{ кОм}\cdot\text{см}^2$ , благодаря чему плотность тока коррозии равна  $1,58 \cdot 10^{-6} \text{ А}\cdot\text{см}^{-2}$  (табл. 2).

Что касается других электрохимических характеристик композиционных покрытий, полученных на закрытой поверхности: значения потенциала питтинговой коррозии алюминиевого сплава с нанесенным на него композиционным покрытием более положительные (при некоторых концентрациях наполнителя составляют -390, -377 мВ). Большая разница в значениях между  $E_{\text{согг}}$  и  $E_{\text{pit}}$  для покрытых пластин дополнительно указывает на меньшую восприимчивость образцов к коррозии (табл. 2).

Вид полученных поляризационных кривых (рис. 3, кривые 1 и 3), соответствующих металлическому образцу без покрытия и образцу с нанесенным композиционным покрытием заметно отличаются друг от друга. Кривая 3 имеет область пассивации плотности тока коррозии. Это означает, что полученное покрытие действительно создает физический барьер для воды и коррозионных агентов (хлорид-ионов), то есть блокирует электрохимический процесс.

Рассчитана эффективность антикоррозионной защиты сплава Д16 композиционным покрытием: при содержании кремнеземного наполнителя 2,25 масс. % в композите она составляет 98,4 %. Учитывая то, что нанесенные эпоксидно-кремнеземные композиты представляют собой тонкие пленочные покрытия толщиной  $10 \pm 1 \text{ мкм}$  и получены однократной обработкой металлической поверхности, приведенные выше количественные электрохимические данные свидетельствуют о высоких антикоррозионных свойствах покрытий на поверхности алюминиевого сплава Д16.

**Выводы.** Получены стеклообразные эпоксидно-кремнеземные композиты аминного отверждения на основе циклоалифатической эпоксидной смолы – диглицидилового эфира дициклогексилпропана, тетраэтоксисилана и 3-аминопропилтриэтоксисилана с использованием золь-гель технологии. Установлено, что размер частиц кремнеземного наполнителя в таких композиционных материалах составляет 90–230 нм и более. При введении наполнителя и увеличении его концентрации от 0,5 до 3 масс. % устойчивость эпокси-аминных композитов к

термоокислительной деградации практически не изменяется: скорость потери массы при изотермическом старении остается на уровне скорости потери массы немодифицированного полимера, а максимальная скорость высокотемпературного окисления композитов несколько ниже, чем для исходного полимера. Электрохимическая оценка антикоррозионных свойств тонких полимерных покрытий на поверхности алюминиевого сплава Д16 показала, что защитные свойства композитов зависят от содержания наполнителя и условий формирования покрытия (на открытой или закрытой поверхности). Композитные покрытия создают эффективный физический барьер для воды и коррозионных агентов. При содержании наполнителя 2,25 масс. % рассчитанная эффективность антикоррозионной защиты сплава Д16 покрытием, сформированным на закрытой поверхности, составляет более 98 %.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sustainable lignin-based epoxy resins cured with aromatic and aliphatic amine curing agents: Curing kinetics and thermal properties / F. Ferdosian, Zh. Yuan, M. Anderson, Ch. Xu // *Thermochimica Acta*. – 2015. – Vol. 618. – P. 48–55.
2. Yamasaki H. Temperature dependence of isothermal curing reaction of epoxy resin studied by modulated differential scanning calorimetry and infrared spectroscopy / H. Yamasaki, Sh. Morita // *Journal of Molecular Structure*. – 2016. – Vol. 1124. – P. 249–255.
3. Полоз А. Ю. Особенности экзотермической реакции отверждения износостойких эпоксидных композиций полиаминами / А. Ю. Полоз, С. Г. Липицкий, С. Н. Кущенко // *Вопросы химии и химтехнологии*. – 2014. – Т. 36, № 1. – С. 61–66.
4. The curing kinetics and thermal properties of epoxy resins cured by aromatic diamine with hetero-cyclic side chain structure / X. Xiong, R. Ren, S. Liu [et al.] // *Thermochimica Acta*. – 2014. – Vol. 595. – P. 22–27.
5. Characterization and mechanical properties of epoxy resin reinforced with TiO<sub>2</sub> nanoparticles / L. Merad, B. Benyoucef, M. J. M. Abadie, J. P. Charles // *Experimental Techniques*. – 2014. – Vol. 38, No 1. – P. 59–66.
6. Shilova O. A. Synthesis and structure features of composite silicate and hybrid TEOS-derived thin films doped by inorganic and organic additives / O. A. Shilova // *Journal of Sol-Gel Science and Technology*. – 2013. – Vol. 68, N 3. – P. 387–410.
7. Золь-гель технология микро- и нанокompозитов / В. А. Мошников, Ю. М. Таиров, Т. В. Хамова, О. А. Шилова. – С-Пб.: Лань, 2013. – 304 с.
8. Леонова Н. Г. Динамічні механічні властивості й структура епоксидно-полісилоксанових композитів катіонної полімерізації / Н. Г. Леонова, В. М. Михальчук, О. О. Бровко // *Полімерний журнал*. – 2014. Т. 36, № 1. – С. 15–22.
9. Afzal A. A comprehensive study of the bicontinuous epoxy-silica hybrid polymers: I. Synthesis, characterization and glass transition / A. Afzal, H. M. Siddiqi // *Polymer*. – 2011. – Vol. 52. – P. 1345–1355.
10. Inhibition of Pitting Corrosion on Aluminum Alloy 2024-T3: Effect of Soluble Chromate Additions vs Chromate Conversion Coating / G. O. Ilevbare, J. R. Scully, J. Yuan, R. G. Kelly // *Corrosion*. – 2000. – Vol. 56. – P. 227–242.
11. Tavandashti H. P. Corrosion protection evaluation of silica/epoxy hybrid nanocomposite coatings to AA2024 / H. P. Tavandashti, С. Санджаки, Т. Shahrabi // *Progress in organic coatings*. – 2009. – Vol. 65, N 2. – P. 182–186.
12. Особенности формирования и свойства эпоксидно-кремнеземных композитов аминного отверждения / Р. И. Лыга, В. М. Михальчук, Д. В. Гуртовой [и др.] // *Вестник Новгородского государственного университета. Сер.: Физико-математические науки*. – 2015. – № 6 (89). – С. 16–23.
13. Gross S. Sol-gel derived silica-based organic-inorganic hybrid materials as “composite precursors” for the synthesis of highly homogeneous nanostructured mixed oxides: an overview / S. Gross, K. Miller // *Journal of Sol-Gel Science and Technology*. – 2011. – Vol. 60, N 3. – P. 283–298.
14. Войтович В. А. Клеи и герметики, применяемые в производстве строительных материалов / В. А. Войтович // *Клеи. Герметики. Технологии*. – 2004. – № 5. – С. 34–37.

*Поступила в редакцию 20.10.2016 г.*

**THE PROPERTIES OF EPOXY-SILICA COMPOSITES OF AMINE CURING, OBTAINED VIA SOL-GEL METHOD**

***R.I. Lyga, V.M. Mikhal'chuk, D.V. Gurtovoj***

Were prepared the transparent composite materials based on epoxy resin EPONEX 1510, curing agent of amine type, tetraethoxysilane and 3-aminopropyltriethoxysilane. Via sol-gel method in situ were formed silica filler particles at their content in the composites from 0.5 to 3.0 wt. %. It was founded that the filler at these concentrations does not affect the stability of obtained materials to thermal-oxidative degradation. However, thin coatings based on such composites on the aluminum alloy D16 surface has the high corrosion characteristics: efficiency of corrosion protection of alloy by coating formed on the closed surface is more than 98 %.

**Keywords:** composites; amine curing; epoxy resin; sol-gel method; tetraethoxysilane; 3-aminopropyltriethoxysilane; thermal-oxidative degradation; corrosive properties.

**Лыга Рита Ивановна**

кандидат химических наук,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), химический факультет,  
83001, ул. Университетская, 24,  
E-mail: lygarita@mail.ru  
Тел: (062) 302-07-93

**Lyga Rita Ivanovna**

Candidate of Chemical Sciences,  
Donetsk National University, Donetsk

**Михальчук Владимир Михайлович**

доктор химических наук, профессор,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), химический факультет,  
83001, ул. Университетская, 24  
E-mail: volodymyr@mykhalchuk.com  
Тел: (062) 302-07-17

**Mikhal'chuk Vladimir Mihaylovich**

Doctor of Chemical Sciences, Full Professor  
Donetsk National University, Donetsk

**Гуртовой Дмитрий Валерьевич**

Донецкое областное клиническое территориальное  
медицинское объединение (г. Донецк),  
пр. Ильича, 14-и  
E-mail: gurtovoj@gmail.com  
Тел: (062) 302-07-93

**Gurtovoj Dmitriy Valerevich**

Donetsk Regional Clinical Territorial Medical  
Association, Donetsk



УДК 541.183/544.144.2

## КВАНТОВОХИМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ДОДЕЦИЛСУЛЬФАТА НАТРИЯ С НИЗШИМИ СПИРТАМИ

© 2016. Р.А. Макарова, С.Л. Хилько

Полуэмпирическим квантовохимическим методом РМЗ показана возможность образования молекулярных комплексов между додецилсульфатом натрия (ДСН) и низшими спиртами (метиловый, этиловый и n-пропиловый). Рассчитаны энергетические характеристики, структура и параметры водородных связей в молекулярных комплексах  $(ДСН)_n \cdot (РОН)_m$  ( $n = 1, m = 1-5$ ). Получено хорошее согласование результатов квантовохимических расчетов колебательных спектров комплексов с экспериментальными ИК-спектрами.

**Ключевые слова:** додецилсульфат натрия; низшие спирты; молекулярные комплексы; водородная связь; квантовохимический расчет; метод РМЗ.

**Введение.** Для регулирования процессов на межфазных границах обычно используют смеси поверхностно-активных веществ (ПАВ) [1, 2]. Усиление эффективности действия основного ПАВ возможно при использовании вспомогательных ПАВ (*co-surfactants* или *соПАВ*), в качестве которых могут быть использованы различные низкомолекулярные вещества, такие как спирты, диолы, кислоты [3, 4]. Например, известно применение низших спиртов в микроэмульсиях, где спирты используют в качестве *соПАВ* [5]. Смеси ПАВ с низшими спиртами применяют для увеличения смачиваемости гидрофобных поверхностей (например, политетрафторэтилена) [6]. Добавки спиртов изменяют степень ионизации и степень связывания противоионов ионогенных ПАВ [5, 7, 8]. Кроме того, полярные органические соединения заметно влияют на агрегацию и мицеллообразование ионогенных ПАВ в водных растворах [5, 9–12].

В смесях ПАВ часто наблюдается неидеальное поведение, проявляющееся в более резких изменениях физико-химических свойств (поверхностное натяжение, электропроводность, мицеллообразование и др.), чем можно было бы ожидать, исходя из свойств составляющих эти смеси индивидуальных компонентов. Известно [1, 2, 13, 14], что такое неидеальное поведение системы может быть связано с синергизмом или антагонизмом действия смесей ПАВ разной природы. Это свойство смесей ПАВ или ПАВ и *соПАВ* представляет не только теоретический интерес, но и может быть широко использовано в технологиях, поскольку именно смеси ПАВ являются более эффективными регуляторами свойств дисперсных систем и протекающих в них процессов.

Неидеальное поведение в смесях ПАВ или ПАВ и *соПАВ* связано, прежде всего, с особенностями формирования поверхностного слоя на границе раздела фаз, которое определяется природой ПАВ, возможностью взаимодействий между молекулами ПАВ в поверхностном слое и между слоем ПАВ и растворителем. Формирование поверхностного слоя в водноспиртовых растворах ПАВ определяется особенностями адсорбционного поведения молекул ПАВ и спирта, а также возможностью межмолекулярных взаимодействий между ПАВ, спиртом и водой.

Целью данной работы была оценка вероятности образования молекулярных комплексов между анионным ПАВ додецилсульфатом натрия (ДСН) и низшими спиртами (*соПАВ*) методом квантовохимического моделирования.

**Экспериментальная часть.** Квантовохимический расчёт комплексов различного состава,  $(\text{ДСН})_n \cdot (\text{РОН})_m$  ( $n = 1, m = 1-5$ ), был выполнен методом РМЗ в пакете программ МОРАС [15]. Геометрию изученных соединений оптимизировали с помощью метода Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP) для газовой фазы с использованием формализма ограниченного метода Хартри-Фока (RHF) [16, 17]. Принадлежность структур истинным минимумам поверхности потенциальной энергии (ППЭ) подтверждали вибрационным анализом по отсутствию отрицательных частот в колебательном спектре [18, 19]. Результаты расчёта колебательных спектров оптимизированных молекул свидетельствовали об их устойчивости: все колебательные моды были положительными, т.е. мнимые (отрицательные) частоты в расчетных ИК-спектрах отсутствовали.

Экспериментальные ИК-спектры смесей ДСН и спиртов записывали в четыреххлористом углероде с использованием разборных кювет толщиной 10 мм. Спектры в области поглощения ОН-колебания спирта записывали при концентрациях, исключаящих процесс самоассоциации спирта ( $C \sim 0,005$  моль/л).

В работе использовали додецилсульфат натрия со степенью чистоты выше 99 % (SigmaUltra, Sigma-Aldrich) без дополнительной очистки. Были изучены водные растворы ДСН с добавками метанола, этанола и *n*-пропанола (марки «хч»).

Динамику снижения поверхностного натяжения растворов ДСН ( $\gamma$ , мН/м) измеряли на тензиометре Lauda PVS 1 методом кольца Дю Нуи. Были получены экспериментальные зависимости изменения поверхностного натяжения водных растворов ДСН и их смесей со спиртами от концентрации спирта,  $\gamma = f(C_{\text{СП}})$  в присутствии 0,01 М NaCl. Концентрации спиртов в растворах варьировали в диапазоне 0,5–10,0 об. %.

**Результаты и их обсуждение.** Закономерности формирования адсорбционных слоев алкилсульфатов натрия в присутствии спиртов рассмотрены в работах [20–23]. Специфическое действие нормальных спиртов с различной длиной цепи на кинетику адсорбции алкилсульфатов натрия на границе раздела жидкость-газ заключается в том, что при добавлении спиртов  $C_{10}-C_{16}$  поверхностное натяжение растворов ДСН понижается быстрее и в большей степени, чем при добавлении низших спиртов  $C_1 - C_4$ . В работе [24] было показано, что адсорбция додецилсульфата натрия из водноспиртовых растворов на границе с воздухом уменьшается по мере увеличения концентрации спирта, что обусловлено конкурентной адсорбцией между молекулами додецилсульфата натрия и спиртов.

Приведенные на рис. 1 зависимости изменения равновесного поверхностного натяжения для растворов спиртов в воде и водноспиртовых растворов додецилсульфата натрия на границе раздела с воздухом показывают, что с увеличением концентрации *n*-пропанола величина поверхностного натяжения снижается в большей степени по сравнению с этанолом.

Квантовохимические методы позволяют моделировать межмолекулярные

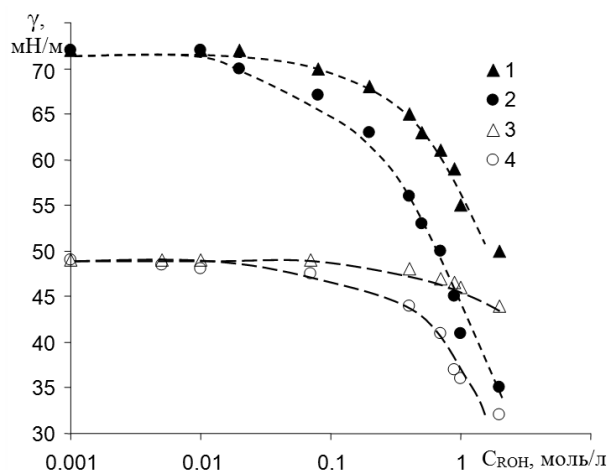


Рис. 1. Изменение равновесного поверхностного натяжения водных растворов спиртов (1 – этанол, 2 – *n*-пропанол) и водноспиртовых растворов 1,0 мМ додецилсульфата натрия (3 – этанол, 4 – *n*-пропанол) в присутствии 0,01 М NaCl

взаимодействия в поверхностных слоях ПАВ [25], а также взаимодействия между ПАВ и растворителем и, тем самым, прогнозировать регулируемую способность смесей ПАВ или ПАВ и *co*ПАВ на границах раздела фаз.

В данной работе рассмотрена возможность межмолекулярных взаимодействий между компонентами в водноспиртовых растворах додецилсульфата натрия. Проанализированы особенности образования водородной связи между атомами кислорода сульфогруппы ДСН и атомами водорода низших спиртов (РОН) для случая, когда заряд макроаниона ( $C_{12}H_{25}SO_4^-$ ) блокирован присутствием фонового электролита NaCl ( $C_{NaCl} = 0,01$  моль/л). Такое условие соответствует состоянию додецилсульфата натрия в растворах, при котором этот ПАВ проявляет высокую эффективность действия [26]. Это связано с тем, что добавка NaCl может приводить к блокированию заряда на макроанионе ПАВ за счет образования контактных ионных пар  $C_{12}H_{25}SO_4^-Na^+$ . Для ионных ПАВ характерен барьерный (недиффузионный) механизм адсорбции на границе раздела жидкость-газ, который обусловлен существованием вблизи границы раздела фаз энергетического адсорбционного барьера, включающего в себя электростатические и неэлектростатические взаимодействия между молекулами ПАВ. Уменьшение заряда поверхностного слоя (например, за счет введения сильных электролитов) приводит к уменьшению электростатической составляющей адсорбционного барьера поверхностного слоя и позволяет выйти на поверхность дополнительному количеству ПАВ, что приводит к снижению равновесного поверхностного натяжения между фазами [26].

Полуэмпирический метод РМЗ наиболее приемлем для расчета комплексов с водородными связями из широко применяемых полуэмпирических методов [15]. При квантовохимических расчетах додецилсульфат натрия задавали как соединение  $C_{12}H_{25}SO_4-Na$ , имитируя образование контактной ионной пары  $C_{12}H_{25}SO_4^-Na^+$ . В этом случае корректно проводить оптимизацию структур с межмолекулярной водородной связью, а именно, когда молекулы в них не заряжены.

Энтальпию реакции образования комплексов  $(ДСН)_n \cdot (РОН)_m$ ,  $\Delta(\Delta H)$ , рассчитывали, используя выражение:

$$\Delta(\Delta H) = \Delta H[(ДСН)_n \times (РОН)_m] - n\Delta H(ДСН) - m\Delta H(РОН),$$

где  $\Delta H[(ДСН)_n \times (РОН)_m]$ ,  $\Delta H(ДСН)$  и  $\Delta H(РОН)$  – теплоты образования комплекса и составляющих его индивидуальных компонентов.

Для всех структур была проведена полная оптимизация геометрии. При расчете геометрических параметров ( $R$  – длина Н-связи,  $O \dots H$ ; угол  $O \dots H-O$  между водородной связью и ОН-группой спирта) использовали следующие критерии наличия водородных связей между молекулами спирта и ДСН [27]:

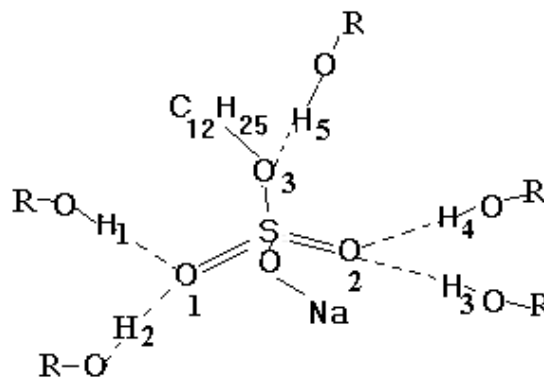
$$R_{H \dots O} < 2.6 \text{ \AA} \quad \text{и} \quad \angle O \dots H-O > 150^\circ$$

Была рассмотрена возможность образования комплексов  $(ДСН)_n \cdot (РОН)_m$  различного состава при варьировании количества молекул спирта на одну молекулу ДСН от 1 до 5.

На рис. 2 показана схема обозначения атомов кислорода сульфогруппы ДСН и водорода РОН, участвующих в образовании Н-связей, в комплексах  $(ДСН)_n \cdot (РОН)_m$ .

В таблице, в качестве примера, приведены термодинамические характеристики процесса комплексообразования, а также геометрические параметры образующихся водородных связей комплексов состава 1:1 и 1:5.

Как следует из данных таблицы, для комплексов ДСН:РОН состава 1:1 величины длин водородных связей и углы  $O\cdots H-O$  соответствуют критериям наличия Н-связи (3). и практически не зависят от вида спирта. Энергетические характеристики ( $-\Delta H$ ,  $-\Delta(\Delta H)$  и  $-\Delta E$ ) комплексов 1:5 заметно возрастают в ряду  $CH_3OH \rightarrow C_2H_5OH \rightarrow C_3H_7OH$ . Это может быть связано с повышением протон-донорной способности в этом ряду, обусловленным увеличением положитель-


 Рис. 2. Схема комплекса ДСН×(РОН)<sub>5</sub>

Таблица

Теплоты образования ( $-\Delta H$ , ккал/моль), энтальпии реакций образования комплексов ( $-\Delta(\Delta H)$ , ккал/моль), средняя энергия водородной связи ( $-\Delta E$ , ккал/моль), длины Н-связи ( $R_{H\cdots O}$ , Å) и углы ( $O\cdots H-O$ , град) в молекулярных комплексах  $(ДСН)_n \cdot (РОН)_m$

РОН	m	$-\Delta H$	$-\Delta(\Delta H)$	$-\Delta E$	$R_{H\cdots O}$	$\angle (O\cdots H-O)$
CH <sub>3</sub> OH	1	413,36	9,57	9,57	1,76	167,36
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	1	418,44	9,68	9,68	1,76	167,84
C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> OH	1	423,73	9,62	9,62	1,76	168,06
CH <sub>3</sub> OH	5	646,67	34,80	6,96	1,80 (H1...O1) 1,80 (H2...O1) 1,79 (H3...O2) 1,79 (H4...O2) 1,81 (H5...O3)	172,40 (O1...H1-O) 175,57 (O1...H2-O) 176,60 (O2...H3-O) 166,44 (O2...H4-O) 163,87 (O3...H5-O)
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	5	683,35	43,90	8,78	1,80 (H1...O1) 1,80 (H2...O1) 1,79 (H3...O2) 1,79 (H4...O2) 2,51 (H5...O3)	173,80 (O1...H1-O) 175,37(O1...H2-O) 162,80 (O2...H3-O) 175,77(O2...H4-O) 159,63(O3...H5-O)
C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> OH	5	711,52	45,26	9,05	1,80 (H1...O1) 1,79 (H2...O1) 1,80 (H3...O2) 2,57 (H4...O2) 1,82 (H5...O3)	173,62 (O1...H1-O) 161,24 (O1...H2-O) 171,38 (O2...H3-O) 161,89 (O2...H4-O) 171,15(O3...H5-O)
H <sub>2</sub> O	5	656,11	37,43	7,49	1,79 (H1...O1) 1,79 (H2...O1) 1,80 (H3...O2) 1,80 (H4...O2) 1,80 (H5...O3)	167,61 (O1...H1-O) 167,38 (O1...H2-O) 159,29 (O2...H3-O) 161,92 (O2...H4-O) 172,66 (O3...H5-O)

ного заряда на атоме водорода ( $\delta^+$ ): 0,181, 0,183 и 0,184, соответственно (рис. 3, величины получены при расчёте методом РМЗ).

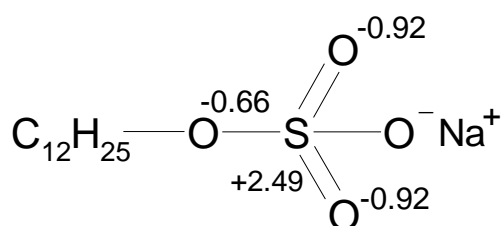


Рис. 3. Величины зарядов на атомах додецилсульфата натрия, низших спиртов и воды

-0.309	+0.181
CH <sub>3</sub> - O - H	
-0.312	+0.183
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> - O - H	
-0.311	+0.184
C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> - O - H	
-0.358	+0.179
H - O - H	

Приведенные в таблице энергетические и геометрические параметры для комплексов ДСН –  $\text{H}_2\text{O}$  состава 1:5 сопоставимы с таковыми для комплексов ДСН –  $\text{CH}_3\text{OH}$  такого же состава, что свидетельствует о равновероятности их образования. Однако энергетические параметры образования комплексов ДСН с этанолом и *n*-пропанолом значительно выше, чем для комплексов ДСН – вода. Это свидетельствует о том, что вероятность образования комплексов с этими спиртами выше по сравнению с комплексами с водой.

На рис. 4 приведена структура комплекса  $(\text{ДСН}) \cdot (\text{C}_2\text{H}_5\text{OH})_5$  с оптимизированной геометрией.

Возможность образования комплексов между додецилсульфатом натрия и низшими спиртами была подтверждена данными теоретических и экспериментальных ИК-спектров (рис. 5). Теоретический ИК-спектр получен в пакете программ МОРАС как суммарное изображение рассчитанных ИК-спектров *n*-пропанола и комплекса ДСН $\times$ ( $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$ )<sub>5</sub>. Расчёты колебательных спектров оптимизированных комплексов ДСН – спирт показали отсутствие мнимых (отрицательных) частот.

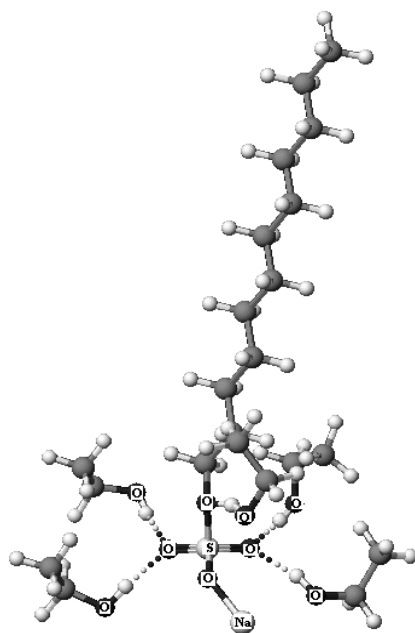


Рис. 4. Оптимизированная структура комплекса ДСН $\times$ ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ )<sub>5</sub>

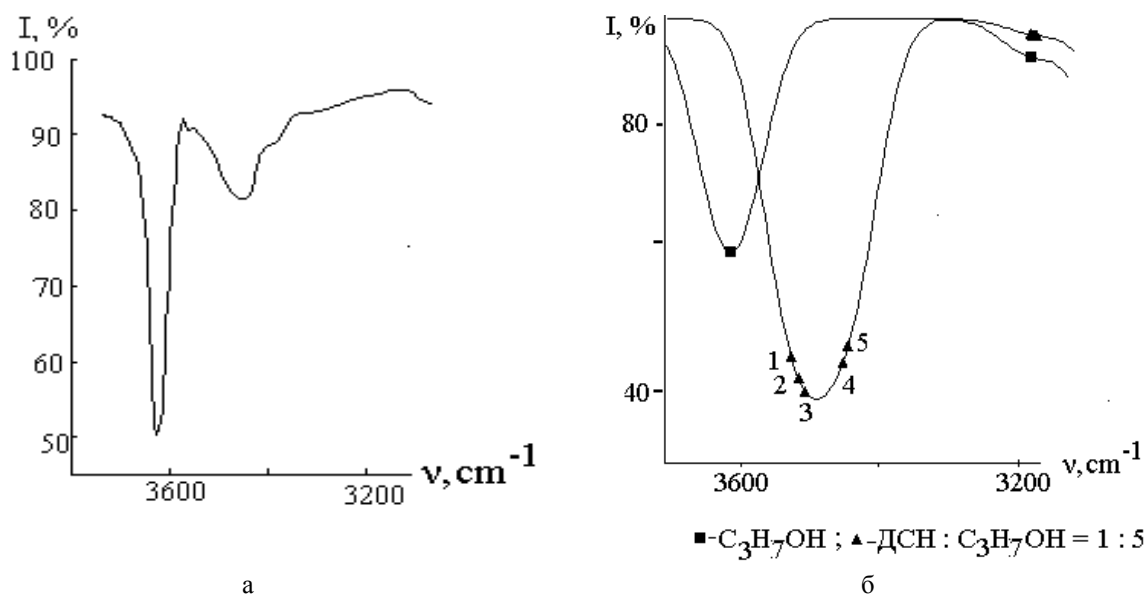


Рис. 5. Экспериментальный ИК-спектр системы ДСН – *n*-пропанол (а) и теоретические ИК-спектры *n*-пропанола и комплекса ДСН $\times$ ( $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$ )<sub>5</sub> (б).

Как следует из рис. 5, а, в результате комплексообразования в экспериментальном ИК-спектре системы ДСН – *n*- $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$  регистрируется полоса поглощения, расположенная в более низкочастотной области по сравнению с полосой поглощения ОН-колебания самого *n*-пропилового спирта при  $3637 \text{ cm}^{-1}$ . Несимметричный характер этой полосы поглощения ( $\nu = 3460 \text{ cm}^{-1}$ ) может быть связан с образованием смеси комплексов различного состава.

Хорошо известно, что рассчитанные гармонические частоты, как правило, выше, чем соответствующие экспериментальные величины [28]. Теоретические спектры приведены на рис. 5, б с учетом масштабирующего коэффициента 0,9314 (отношение частот ОН-колебаний *n*-пропанола в экспериментальном и теоретическом спектрах), что позволяет проводить их сравнение с экспериментальным спектром. В теоретическом ИК-спектре комплекса (ДСН)<sub>n</sub>·(С<sub>3</sub>Н<sub>7</sub>ОН)<sub>5</sub> полосы поглощения валентных колебаний ОН-групп существенно смещены в низкочастотную область по сравнению с полосой поглощения спирта. Как видно на рис. 5, б, полоса поглощения комплекса является результирующей пяти полос поглощения. Так, основной вклад в полосу поглощения при 3555 см<sup>-1</sup> (1) вносит колебание водородной связи О<sub>1</sub>···Н<sub>1</sub>-О (см. обозначения атомов на рис. 2) (86,5 %), 3546 см<sup>-1</sup> (2) – О<sub>2</sub>···Н<sub>3</sub>-О (48 %) и О<sub>2</sub>···Н<sub>4</sub>-О (38,9 %), 3536 см<sup>-1</sup> (3) – О<sub>2</sub>···Н<sub>4</sub>-О (54,1 %) и О<sub>2</sub>···Н<sub>3</sub>-О (45,5 %), 3486 см<sup>-1</sup> (4) – О<sub>3</sub>···Н<sub>5</sub>-О (76,0 %) и О<sub>1</sub>···Н<sub>2</sub>-О (22,9 %), 3479 см<sup>-1</sup> (5) – О<sub>1</sub>···Н<sub>2</sub>-О (75,7 %) и О<sub>3</sub>···Н<sub>5</sub>-О (23,5 %).

Средняя энергия водородных связей в комплексах (ДСН)<sub>n</sub>·(РОН)<sub>m</sub> лежит в диапазоне (-ΔE) = 7,0 ÷ 10,8 ккал/моль. Согласно предложенной в работе [29] классификации различают слабую (-ΔE = 0,5 ÷ 4 ккал/моль), среднюю (-ΔE = 4 ÷ 15 ккал/моль) и сильную (-ΔE = 15 ÷ 60 ккал/моль) водородную связь (где ΔE – энергия Н-связи). Полученные в работе расчетные данные позволяют считать водородные связи в комплексах (ДСН)<sub>n</sub>·(РОН)<sub>m</sub> средними по силе. Довольно высокие значения энергии Н-связи в комплексах ДСН с РОН обусловлены величинами зарядов на атомах кислорода сульфогруппы ДСН, участвующих в ее образовании, которые значительно выше, чем величины зарядов на атомах низших спиртов и воды (рис. 3).

Возможность образования более прочных водородных связей между молекулами додецилсульфата натрия и низшими спиртами, чем между ДСН и водой, может вносить свой вклад в формирование поверхностного слоя из молекул ДСН и спирта и, тем самым, определять особенности поведения ПАВ и соПАВ на границе раздела фаз.

**Выводы.** Квантово-химическим методом РМЗ показана возможность образования комплексов между молекулами додецилсульфата натрия и низшими спиртами (метиловый, этиловый и *n*-пропиловый). Рассчитаны энергетические характеристики и структура молекулярных комплексов (ДСН)<sub>n</sub>·(РОН)<sub>m</sub> (n = 1, m = 1-5).

Рассчитаны параметры водородных связей в молекулярных комплексах (ДСН)<sub>n</sub>·(РОН)<sub>m</sub> (n = 1, m = 1-5). Средняя энергия водородных связей находится в диапазоне 7,0 ÷ 10,8 ккал/моль, длина водородной связи 1,76 ÷ 2,57 Å. Водородные связи в комплексах (ДСН)<sub>n</sub>·(РОН)<sub>m</sub> являются средними по силе.

Показано, что для метанола энергия водородных связей в комплексах с ДСН сопоставима с водой. Энергетические параметры образования комплексов ДСН с этанолом и *n*-пропанолом значительно выше, чем для комплексов ДСН – вода.

Получено хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими ИК-спектрами комплексов, образованных додецилсульфатом натрия и низшими спиртами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rosen M.J. Surfactants and interfacial phenomena / M.J. Rosen. – N.Y.: J. Willey & Sons, 2004. – 435 p.
2. Иванова Н.И. О проявлении синергизма в бинарной смеси неионогенного и катионного поверхностно-активных веществ / Н.И. Иванова, И.Л. Волчкова, Е.Д. Щукин // Коллоид. журн. – 1996. – Т. 58, № 2. – С. 188-202.
3. Williams J.M. High internal phase water-in-oil emulsions: influence of surfactants and cosurfactants on emulsion stability and foam quality / J.M. Williams // Langmuir. – 1991. – Vol. 7, No 7. – P. 1370-1377.

4. Cosurfactant and cosolvent effects on surfactant self-assembly in supercritical carbon dioxide / N. Chennamsetty, H. Bock, L.F. Scanu et al. // *J. Chem. Phys.* – 2005. – Vol. 122. – P. 094710-094716.
5. Zana R. Aqueous surfactant-alcohol systems: A review / R. Zana // *Adv. Colloid Interface Sci.* – 1995. – Vol. 57. – P. 1-64.
6. Zdziennicka A. Adsorption of mixtures of sodium dodecyl sulphate and propanol at water–air and polytetrafluoroethylene–water interfaces / A. Zdziennicka, B. Jańczuk, W. Wójcik // *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects.* – 2004. – Vol. 249. – P. 73-77.
7. Effect of alcohol on the properties of micellar systems: I. Critical micellization concentration, micelle molecular weight and ionization degree, and solubility of alcohols in micellar solutions / R. Zana, S. Yiv, C. Strazielle, P. Lianos // *J. Colloid Interface Sci.* – 1981. – Vol. 80. – P. 208-223.
8. Effect of alcohols on the micellar properties in aqueous solution of alkyltrimethylammonium bromides / D. Attwood, V. Mosquera, J. Rodriguez et al. // *Colloid Polymer Sci.* – 1994. – Vol. 272. – P. 584-591.
9. The effect of medium chain length alcohols on the micellar properties of sodium dodecyl sulfate in sodium chloride solutions / G.M. Førland, J. Samseth, H. Høiland, K. Mortensen // *J. Colloid Interface Sci.* – 1994. – Vol. 164. – P. 163-167.
10. Сторож Г.Ф. Исследование мицеллообразования в спирто-водных растворах олеата натрия / Г.Ф. Сторож, А.И. Юрженко // *Коллоид. журн.* – 1962. – Т. 24, № 1. – С. 80-83.
11. Бовкун О.П. Определение критических концентраций мицеллообразования водных растворов мыл с добавлением диоксана, метилового спирта и этиленгликоля / О.П. Бовкун, З.Н. Маркина, Т.С. Гракова // *Коллоид. журн.* – 1970. – Т. 32, № 3. – С. 327-332.
12. Wüstneck R.. Interfacial tension of gelatin/sodium dodecylsulphate solutions against air, toluene, and diethylphthalate / R. Wüstneck, R. Miller, R. Wustneck // *Colloids Surf.* – 1990. – Vol. 47. – P. 15-26.
13. Механизм синергического действия бромида тетрадецилтриметиламмония и карбоксиметилхитина, образующих комплексы ПАВ–полиэлектролит, на поверхностное натяжение их смешанных водных растворов / В.Г. Бабак, М.А. Анчиполовский, Г.А. Вихорева и др. // *Коллоид. журн.* – 1996. – Т. 58, № 2. – С. 155-162.
14. Ринодо М. ПАВ–полиэлектролитные комплексы на основе производных хитина / М. Ринодо, Н.Р. Кильдеева, В.Г. Бабак // *Рос. хим. журн.* – 2008. – Т. 52, № 1. – С. 84-90.
15. Stewart J.J.P. Optimization of Parameters for Semiempirical Methods. I. Method // *J.Comput.Chem.* – 1989. – № 10 (2). – P. 209-220.
16. Stewart J.J.P. Optimization of Parameters for Semiempirical Methods. II. Applications / J.J.P. Stewart // *J. Comput. Chem.* – 1989. – No 10 (2). – P. 221-264.
17. Кларк Т. Компьютерная химия. Практическое руководство по расчетам структуры и энергии молекулы / Т. Кларк. – М.: Мир. 1990. – 383 с.
18. Wang B. Molecular orbital models of benzene, biphenyl and the oligophenylenes / B. Wang, H. Hou, Y. Gu // *Chem. Phys.* – 1999. – Vol. 243. – P. 27-34.
19. Experimental and theoretical studies on vibrational spectra of 4-(2-furanylmethyleneamino)antipyrene, 4-benzylideneaminoantipyrene and 4-cinnamylideneaminoantipyrene / Yu-Xi Sun, Qing-Li Hao, Zong-Xue et al. // *Spectrochimica Acta. Part A.* – 2009. – Vol. 73. – P. 892–901.
20. Файнерман В.Б. Влияние добавок электролитов и неэлектролитов на кинетику понижения поверхностного натяжения растворов алкилсульфатов натрия / В.Б. Файнерман, С.В. Лылык // *Коллоид. журн.* – 1982. – Т. 44, № 6. – С. 1141-1149.
21. Файнерман В.Б. Кинетика формирования адсорбционных слоев на границе раздела жидкость-газ / В.Б. Файнерман // *Журн. физич. химии.* – 1990. – Т. 64, № 6. – С. 1611-1121.
22. Fainerman V.B. Dynamics and Phase Transition in Adsorbed Monolayers of Sodium Dodecyl Sulfate/Dodecanol Mixtures / V.B. Fainerman, D. Vollhardt, G. Emrich // *J. Phys. Chem. B.* – 2001. – Vol. 105. – P. 4324-4330.
23. Докукина Е.С. Влияние добавок спиртов на кинетику адсорбции додецилсульфата натрия на границе раздела жидкость-газ / Е.С. Докукина, А.А. Трапезников // *Коллоид. журн.* – 1976. – Т. 38, № 4. – С. 675-679.
24. Влияние низших спиртов на адсорбционные характеристики растворов додецилсульфата натрия на границе раздела жидкость-газ / А.И. Ковтун, С.Л. Хилько, С.А. Жолоб, В.И. Рыбаченко // *Коллоид. журн.* – 2010. – Т. 72, № 3. – С. 380-386.
25. Thermodynamics of 2D Cluster Formation of Odd n-Alcohols at the Air/Water Interface / Yu. B. Vysotsky, V. S. Bryantsev, V. B. Fainerman, et al. // *J. Phys. Chem. B.* – 2002. – Vol. 106. – P. 11285-11294.
26. Файнерман В.Б. Кинетика формирования адсорбционных слоев на границе раздела раствор – воздух / В.Б. Файнерман // *Успехи химии.* – 1985. – Т. 54, № 10. – С. 1613-1631.

27. Каплан И.Г. Введение в теорию межмолекулярных взаимодействий / И.Г. Каплан. – М.: Наука, 1982. – 312 с.
28. Karabacak M. An experimental and theoretical study of molecular structure and vibrational spectra of 2-Chloronicotinic acid by density functional theory and ab initio / M. Karabacak, M. Çınar, M. Kurt // J. Mol. Struc. – 2008. – Vol. 885. – P. 28-35.
29. Grabowski S.J. Hydrogen bonding strength – measures based on geometric and topological parameters / S.J. Grabowski // J. Phys. Org. Chem. – 2004. – Vol. 17. – P. 18-31.

Поступила в редакцию 06.07.2016 г.

#### QUANTUM CHEMICAL MODELING OF INTERACTIONS SODIUM DODECYL SULFATE WITH A LOWER ALCOHOL

*R.A. Makarova, S.L. Khil'ko*

The possibility of formation of molecular complexes between sodium dodecyl sulfate (SDS) and lower alcohols (methyl, ethyl and n-propyl) by semiempirical quantum-chemical PM3 method. Were calculated power characteristics, the structure and parameters of the hydrogen bonds in the molecular complexes (SDS) $\cdot$ n $\cdot$ (ROH) $\cdot$ m (n = 1, m = 1-5). Were received a good agreement between the results of quantum chemical calculations of vibrational spectra of complexes with the experimental IR spectra.

**Keywords:** sodium dodecyl sulfate; lower alcohols; molecular complexes; hydrogen bond; quantum chemical calculations; PM3 method.

**Макарова Раиса Александровна**

кандидат химических наук,  
ГУ «Институт физико-органической химии  
и углехимии им. Л.М. Литвиненко»,  
г. Донецк, 83114, ул. Р. Люксембург, 70.  
E-mail: makarova.ra@yandex.ru

**Makarova Raisa Alexandrovna**

Candidate of Chemical Sciences,  
State Institution "Institute of Physical Organic and  
Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko",  
Donetsk, 83114, Rosa Luxemburg str., 70.

**Хилько Светлана Леонидовна**

кандидат химических наук, старший научный  
сотрудник,  
ГУ «Институт физико-органической химии и  
углехимии им. Л.М. Литвиненко», г. Донецк.  
E-mail: sv-hilko@yandex.ru,  
Тел.: +38 066 75 79 462

**Khil'ko Svetlana Leonidovna**

Candidate of Chemical Sciences, Senior Research  
Officer,  
State Institution "Institute of Physical Organic and  
Coal Chemistry named after L.M. Litvinenko",  
Donetsk, 83114, Rosa Luxemburg str., 70.



УДК 547:54.052 + 54.057

## АМИДИРОВАНИЕ ЯНТАРНОГО АНГИДРИДА АЛИФАТИЧЕСКИМИ АЛКИЛАМИНАМИ И СУЛЬФАНИЛАМИДОМ

© 2016. Т.Г. Тюрина, Т.В. Крюк, Д.Ю. Нестеренко

Изучены продукты реакции янтарного ангидрида с N-этиламин, N-пропиламин и сульфаниламидом. Методами потенциометрического титрования и протонного магнитного резонанса установлено, что при амидировании янтарного ангидрида алифатическими аминами образуется смесь полуамида и циклического амида. В реакции с сульфаниламидом циклический амид не образуется, для получения полуамида целесообразно проведение процесса при 90 °С.

**Ключевые слова:** амидирование; янтарный ангидрид; N-этиламин; N-пропиламин; сульфаниламид; потенциометрическое титрование; <sup>1</sup>H ЯМР.

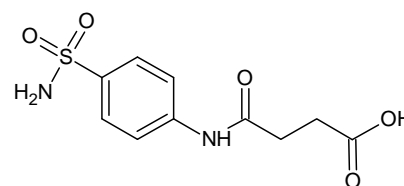
**Введение.** В настоящее время физиологически активные полимеры, используемые в качестве носителей лекарственных препаратов и других биологически активных веществ, являются предметом исследования многих специалистов. К таким полимерным носителям относится группа сополимеров на основе малеинового ангидрида (МА) (например, с винилацетатом, N-винилпирролидоном, стиролом и др.), в полной мере отвечающие всем требованиям фармакологии и медицины [1, 2]. В качестве лекарственных форм, прививаемых к полимерным матрицам, широко используют препараты, содержащие аминогруппу [3], которая, собственно, и является активным центром для модификации звена малеинового ангидрида в сополимерах.

В связи с актуальностью данной тематики на сегодняшний день имеется большое количество публикаций по модификации сополимеров на основе малеинового ангидрида аминокислотами биологически активными веществами [4–6], однако общей методики проведения такой реакции нет даже для простейших аминов: температура, время реакции, соотношение «звено ангидрида : амин» в работах разных авторов изменяются в широких пределах, для проведения реакции используются различные растворители, реакцию проводят как в присутствии катализатора, так и без него.

В качестве модели звена малеинового ангидрида можно рассматривать молекулу янтарного ангидрида (ЯА). Общей методики получения сукцинамидов также нет, например, продукт взаимодействия сульфаниламида (лекарственного препарата стрептоцида) с янтарным ангидридом – 4-{3-карбокси-пропиониламино}-бензол-1-сульфонамид – получают как путем непосредственного их смешения в соотношении 1 : 1 в среде этанола в присутствии катализатора триэтиламина [7], так и по реакциям с участием производных ЯА или сульфаниламида: в результате взаимодействия сукцинилсульфанил хлорида с аммиаком в присутствии разбавленной соляной кислоты при температуре 0 °С [8] или при нагревании сульфатаизола с избытком ЯА в среде этанола с последующей выдержкой в течение длительного времени при комнатной температуре [9].

В связи с вышеизложенным целью представленной работы являлся подбор методики амидирования янтарного ангидрида как низкомолекулярного аналога звена МА первичными алифатическими аминами и сульфаниламидом и анализ полученных продуктов.

**Экспериментальная часть.** Амидирование ЯА проводили при соотношении исходных реагентов 1 : 1 по реакции (1), продуктом которой должен быть полуамид янтарной кислоты:



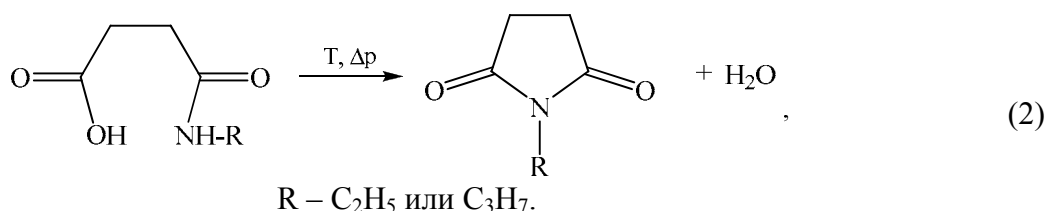


Таблица

Молярная масса и состав продуктов амидирования янтарного ангидрида

Условия проведения реакции			Средняя молярная масса продукта, г/моль		Соотношение полуамида к сукцинамиду в продуктах амидирования, моль / моль
Амин	температура, °С	время, ч	отгон растворителя		
			при $T_{\text{кип}}$	без нагревания	
N-этиламин	25	20	–	253,7	1 : 0,85
	60	1	227,8	227,5	1 : 0,65
		5	–	249,1	–
N-пропил-амин	60	1	323,7	–	1 : 1,15
		5	–	241,7	–
Сульфанил-амид	60	1	140,3	–	–
		1	234,9	–	–
	90	3	–	–	–
		4	–	262,3	–
		4,5	–	269,0	–
		5	–	267,9	–
		6	–	262,5	–
10	–	248,4	–		

Как видно из данных таблицы, значения молярной массы продуктов реакции янтарного ангидрида с N-этил- и N-пропиламином (254–228 и 324–242 г/моль) значительно превышают молярную массу соответствующих полуамидов (145,2 и 159,2 г/моль). Это указывает на то, что выделенный продукт реакции не является индивидуальным полуамидом (ПА), а может содержать примесь циклического амида (ЦА), который не определяется при потенциометрическом титровании. Действительно, удаление растворителя и остатка амина из системы при повышенной температуре (температуре кипения растворителей) или при пониженном давлении будет способствовать образованию наряду с полуамидом циклического амида по схеме (2):



На основе данных рН-метрии был произведён расчет мольной доли циклического амида ( $v_{\text{ЦА}}$ ) в продуктах реакции по формуле:

$$v_{\text{ЦА}} = (M_{\text{ПР}} - M_{\text{ПА}}) / M_{\text{ЦА}},$$

где  $M_{\text{ПР}}$  – молярная масса продукта синтеза, г/моль;  $M_{\text{ПА}}$  – молярная масса полуамида, г/моль;  $M_{\text{ЦА}}$  – молярная масса циклического амида, г/моль.

Расчет соотношения полуамида и циклического амида в продуктах реакции показал, что на 1 моль ПА приходится от 0,65 до 0,85 ЦА в случае реакции с N-этиламином и от 0,59 до 1,15 моль – в реакции с N-пропиламином (таблица).

Результаты потенциометрического титрования продуктов модификации янтарного ангидрида алкиламинами, полностью согласуются с данными, полученными с использованием спектроскопии ПМР. На рис. 2 приведен (в качестве примера) спектр  $^1\text{H}$  ЯМР продукта синтеза ЯА с N-этиламином. Сигналы продуктов реакции в спектре хорошо разделены и могут быть использованы для описания химической структуры соединений, входящих в состав продуктов амидирования, а также их количественного содержания.

Так, в спектре  $^1\text{H}$  ЯМР продукта реакции амидирования ЯА N-этиламиноном присутствуют два триплетных сигнала ( $1, 1'$ ) с максимумами при 0,97 и 1,11 м. д. и два квадруплета ( $2, 2'$ ) с максимумами при 3,01 и 2,78 м. д. Интегральные интенсивности сигналов  $1$  и  $2, 1'$  и  $2'$  соотносятся как 3 : 2, что позволяет отнести сигналы  $1$  и  $1'$  к метильным группам ( $-\text{CH}_3$ ), а сигналы  $2$  и  $2'$  – к метиленовым группам, связанным с гетероатомом ( $-\text{CH}_2-\text{N}$ ). Для продукта реакции амидирования ЯА N-пропиламиноном дополнительно проявляются два мультиплета группы  $\text{C}-\text{CH}_2-\text{C}$  в пропильном радикале в области 1,5-1,7 м. д. (максимумы этих сигналов находятся при 1,52 и 1,69 м. д.). В спектрах обоих продуктов также присутствуют два дублета (сигналы  $3, 3'$  на рис. 2) группы  $-\text{CH}_2-\text{CH}_2-$  янтарной кислоты и один синглет (сигнал  $4$  на рис. 2) при 7,9 м. д., принадлежащий группе  $-\text{NH}-$  полуамида.

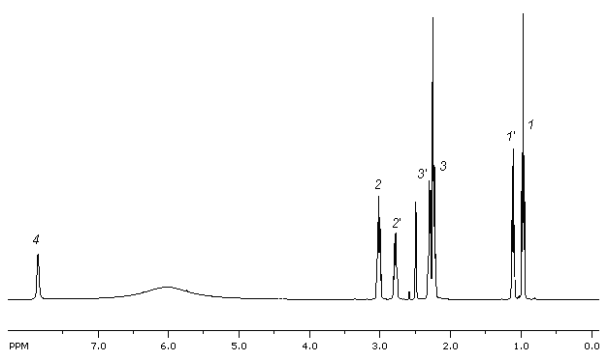


Рис. 2. Спектр  $^1\text{H}$  ЯМР продукта реакции амидирования янтарного ангидрида N-этиламиноном при 60 °С, 1 ч

На рис. 3 приведен двумерный  $^1\text{H}$  COSY ЯМР-спектр продукта синтеза ЯА с N-этиламиноном, который позволяет соотнести сигналы протонов различных групп, используя соответствующие кросс-пики.

Как видно из рис. 3, в двумерном спектре четко проявляются связи между отдельными группами в продуктах модификации ЯА N-этиламиноном, а именно: сигнал  $1$  ( $\delta = 0,97$  м. д.), принадлежащий метильной группе, имеет кросс-пик с сигналом  $2$  (метиленовая группа,  $\delta = 3,01$  м. д.), а он, в свою очередь, – с сигналом  $3$  (вторичная аминогруппа,  $\delta = 7,85$  м. д.); в совокупности эти сигналы принадлежат группе  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{NH}-$  в полуамиде. Сигналы  $1'$  и  $2'$  с центрами при 1,11 и 2,78 м. д., непосредственно связанные между собой, относятся к группе  $\text{CH}_3\text{CH}_2-$  циклического сукцинимид. Отдельно стоящий при 2,4 м. д. сигнал  $4$ , не имеющей прямого взаимодействия с другими протонами, принадлежит группе  $-\text{CH}_2-\text{CH}_2-$  янтарной кислоты. Таким образом, спектроскопия ЯМР однозначно подтверждает, что при амидировании янтарного ангидрида N-этил- и N-пропиламиноном при выбранных нами условиях синтеза образуются два продукта: полуамид и циклический амид.

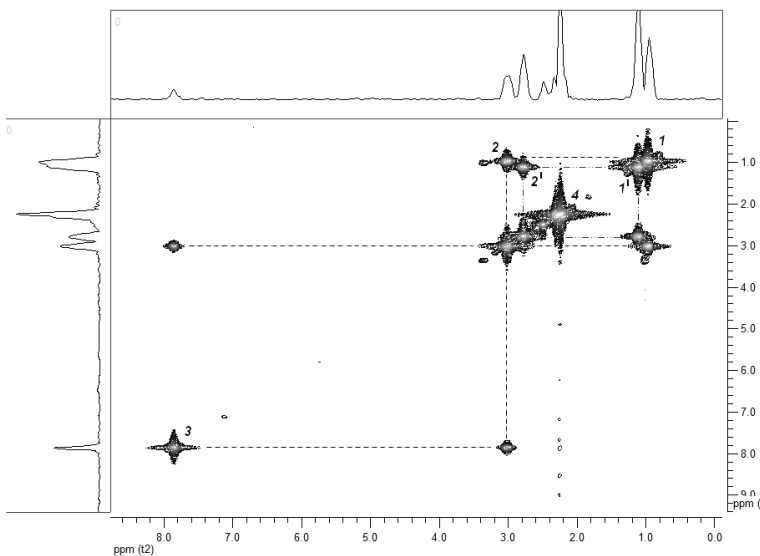


Рис. 3. Двумерный  $^1\text{H}$  COSY ЯМР-спектр продукта реакции амидирования янтарного ангидрида N-этиламиноном при 60 °С, 1 ч

Анализ интегральных интенсивностей сигналов  $^1\text{H}$  ЯМР алкильных групп продуктов реакции модификации янтарного ангидрида также позволил определить количественный состав этих образцов. Так, для продукта амидирования с участием N-этиламина (полученного при 60 °С, 1 ч) соотношение сигналов  $\text{CH}_3-$  групп

составило 1 : 0,66, сигналов  $-\text{CH}_2-$  групп – 1 : 0,64. Для продукта амидирования с участием N-пропиламина (полученного при 60 °С, 1 ч) соотношение сигналов  $\text{CH}_3-$  групп составило 1 : 1,75, сигналов  $-\text{CH}_2-$  групп – 1 : 1,9 и 1 : 2,2. Эти результаты хорошо согласуются с данными потенциометрии по количественному содержанию ПА и ЦА в продуктах реакции.

Для проверки предположения, что циклический амид образуется в результате отгонки растворителя при высокой температуре и разрежении, сравнили характеристики продуктов реакции с участием ЯА и N-этиламина при температуре 25 и 60 °С, при этом хлороформ из системы удаляли при комнатной температуре в вакууме водоструйного насоса. Как видно из данных, представленных в таблице, продукты, полученные при 60 °С (1 ч), вне зависимости от условий отгонки растворителя, имеют одинаковую молярную массу, и, соответственно, одинаковое мольное соотношение полуамида и циклического амида (1 : 0,65). Реакцию при 25 °С проводили более продолжительное время (20 ч), получили продукт с более высоким содержанием ЦА: 0,85 моль на 1 моль ПА. Дальнейшее нагревание этого продукта в течение 1 ч при 60 °С приводит к некоторому снижению содержания ЦА, до 0,7 моль ЦА : 1 моль ПА. Если увеличить продолжительность реакции амидирования ЯА N-этиламино до 5 ч при 60 °С, то наблюдается небольшое повышение количества циклического амида: до 0,7 моль на 1 моль ПА. При амидировании N-пропиламино в течение 5 ч количество ЦА в составе конечного продукта снижается до 0,59 моль на 1 моль ПА (таблица).

Таким образом, при амидировании янтарного ангидрида алифатическими аминами в среде хлороформа при температуре 60 °С образуется смесь полуамида и циклического амида, при этом для N-пропиламина увеличение продолжительности реакции повышает содержание полуамида в смеси: соотношение ПА : ЦА после 1 ч составляет 1 : 1,15 моль/моль, после 5 ч – 1 : 0,59 моль/моль, для N-этиламина соотношение ПА : ЦА не зависит от времени синтеза и составляет 1 : (0,67 ± 0,03) моль/моль; условия удаления растворителя мало влияют на ход процесса.

Взаимодействие ЯА с сульфаниламидом при выбранных нами условиях (эквимольное соотношение реагентов, растворитель 1,4-диоксан, температура 60 °С, время 1 ч) приводит, как и ожидалось, к образованию 4-{3-карбокси-пропиониламино}-бензол-1-сульфонамида.

Сигналы в спектре  $^1\text{H}$  ЯМР (рис. 4) и их положение полностью согласуются с литературными данными [3] для данного вещества: мультиплеты при 2,50-2,65 м. д. (4H,  $-\text{CH}_2-\text{CH}_2-$ ) и 7,63-7,79 м. д. (4H, Ar-H), синглеты с максимумами при 7,24 м. д. (2H,  $-\text{NH}_2$ ), 10,2 м. д. (1H,  $>\text{NH}$ ) и широкий пик с максимумом при 12,1 м. д. (1H,  $-\text{COOH}$ ).

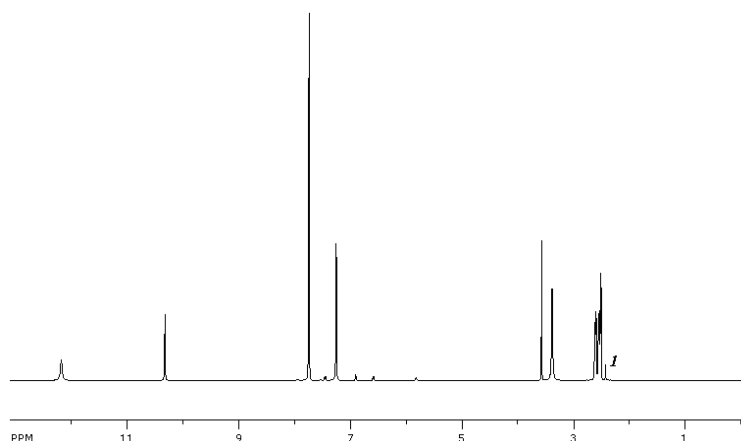


Рис. 4. Спектр  $^1\text{H}$  ЯМР продукта реакции амидирования янтарного ангидрида сульфаниламидом при 90 °С, 5 ч

В отличие от продуктов реакции ЯА с высокоактивными и низкокипящими низшими алифатическими аминами, рассчитанные на основе данных рН-метрии значения молярной массы продуктов амидирования янтарного ангидрида сульфаниламидом (таблица) значительно меньше, чем молярная масса 1 моля 4-{3-

карбоксо-пропиониламино}-бензол-1-сульфонамида (272,2 г/моль). Такой результат возможен, если образования циклического амида не происходит, но в растворе остается некоторое количество не прореагировавшей янтарной кислоты. Это предположение подтверждают  $^1\text{H}$  ЯМР спектры полученных как при 60 °С, так и при 90 °С продуктов амидирования, в которых четко проявляется синглет с максимумом при 2,42 м. д., принадлежащий янтарной кислоте (сигнал 1 на рис. 4).

Количество не вступившей в реакцию с амином янтарной кислоты ( $v_{\text{ЯК}}$ , мольные доли) рассчитывали по формуле:

$$v_{\text{ЯК}} = (M_{\text{ПАС}} - M_{\text{ПР}}) / M_{\text{СА}},$$

где  $M_{\text{ПР}}$  – молярная масса продукта синтеза, г/моль;  $M_{\text{ПАС}}$  – молярная масса полуамида ЯК и сульфаниаида, г/моль;  $M_{\text{СА}}$  – молярная масса сульфаниаида, г/моль.

В продукте амидирования, полученном при 60 °С за 1 ч, содержится 0,77 мольных долей ЯК. Повышение температуры реакции амидирования до 90 °С при той же продолжительности реакции уменьшает количество янтарной кислоты в 3,5 раза – до 0,22 мольных доли. Таким образом, изменение температуры синтеза существенно влияет на ход процесса. При этом состав конечных продуктов (при 90 °С) экстремально зависит от времени реакции: увеличение его вначале приводит к росту выхода полуамида ЯК, после 4,5 ч он составляет 98 %, дальнейшее увеличение продолжительности процесса приводит к разложению полуамида и накоплению янтарной кислоты (рис. 5).

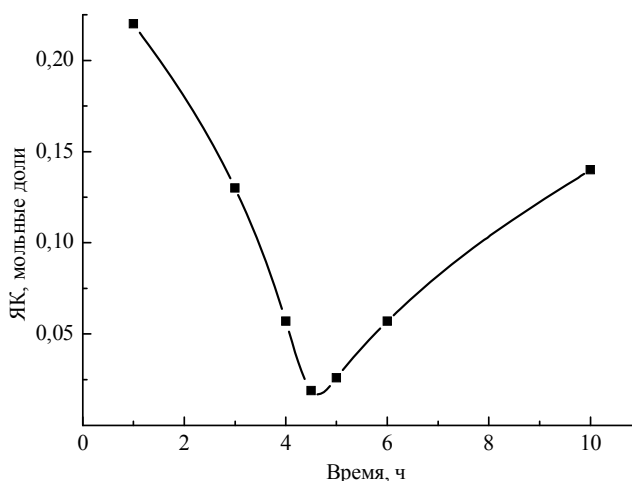


Рис. 5. Количество янтарной кислоты, не прореагировавшей с сульфаниаидом при 90 °С, при различной продолжительности реакции амидирования

Таким образом, оптимальное время получения полуамида в реакции ЯА с сульфаниаидом при 90 °С составляет 4,5 ч.

Выбранные условия реакции будут использованы в дальнейшем при модификации аминами физиологически активных полимеров на основе малеинового ангидрида.

**Выводы.** С использованием N-этиламина, N-пропиламина, сульфаниаида синтезированы соответствующие сукцинамида. Состав полученных образцов изучен методами потенциометрического титрования и протонного магнитного резонанса. Установлено, что продуктом реакции янтарного ангидрида с алифатическими аминами является смесь полуамида и циклического амида. В случае реакции с сульфаниаидом циклический амид не образуется.

Показано, что при амидировании N-этиламиноном при температуре 60 °С соотношение полуамида и циклического амида в смеси не зависит от продолжительности синтеза в пределах 1-5 ч и составляет 1 : (0,67 ± 0,03) моль/моль; при амидировании N-пропиламиноном увеличение времени реакции способствует накоплению полуамида. При амидировании сульфаниаидом реакцию целесообразно проводить при 90 °С в течение 4,5 ч (выход полуамида 98 %). Условия удаления растворителя мало влияют на состав конечных продуктов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Handbook of Polymers for Pharmaceutical Technologies / Editors: V. K. Thakur, M. K. Thakur – Vol. 2. – Salem: Scrivener Publishing LLC, 2015. – 490 p.
2. The styrene–maleic acid copolymer: a versatile tool in membrane research / J. M. Dörr, S. Scheidelaar, M. C. Koorengevel [et al.] // European Biophysics Journal. – 2016. – Vol. 45, No. 1. – P. 3-21.
3. Vilara G. Polymers and Drug Delivery Systems / G. Vilara, J. Tulla-Puechea, F. Albericio // Current Drug Delivery. – 2012. – Vol. 9, No. 4. – P. 1-28.
4. Biomedical applications of maleic anhydride copolymers / I. Popescu, D. M. Suflet, I. M. Pelin, G. Ch. Chițanu // Revue Roumaine de Chimie. – 2011. – Vol. 56, No. 3. – P. 173-188.
5. Maleic Anhydride Copolymers – A Versatile Platform for Molecular Biosurface Engineering / T. Pompe, S. Zschoche, N. Herold [et al.] // Biomacromolecules. – 2003. – Vol. 4, No. 4. – P. 1072-1079.
6. Covalent Polymer-Drug Conjugates / C. Elvira, A. Gallardo, J. San Roman, A. Cifuentes // Molecules. – 2005. – Vol. 10. – P. 114-125.
7. Al-Sehemi A. G. M. Structural Study and Biological valuation of Some Novel 1,2,4-Triazole, Thiazole, and Bisthiazole Derivatives Bearing Sulfonamide Moiety / A. G. M. Al-Sehemi // Phosphorus, Sulfur and Silicon and the Related Elements. – 2009. – Vol. 84, No. 8. – P. 1991-2003.
8. Picard C. W. The Preparation of N<sup>4</sup>-Carboxyacetyl-sulphonamides. Part I. Reactions of Succinimidobenzene-sulphonyl Chloride and Succinylsulphanilyl Chloride / C. W. Picard, E. Reid, D. E. Seymour // Journal of Chemical Society. – 1946. – P. 751-753.
9. Moore M. L. Dicarboxylic Acid Derivatives of Sulfonamides / M. L. Moore, S. Ch. Miller // Journal of American Chemical Society. – 1942. – Vol. 64, No. 7. – P. 1572–1576.

Поступила в редакцию 30.09.2016 г.

**AMIDATION OF SUCCINIC ANHYDRIDE  
BY ALIPHATIC ALKYLAMINES AND A SULFANILAMIDE**

*T.G. Tyurina, T.V. Kryuk, D.Yu. Nesterenko*

The products of reaction between succinic anhydride and N-ethylamine, N-propylamine and sulfanilamide were studied. By potentiometric titration and NMR spectroscopy methods it was established that mixtures of semiamide and cyclic amide were formed at the amidation of succinic anhydride with aliphatic amines. In the reaction with sulfanilamide cyclic amide was not formed, for semiamide obtaining it is advisable to carry out the process at 90 °C.

**Keywords:** amidation; succinic anhydride; N-ethylamine; N-propylamine; sulfanilamide; potentiometric titration; <sup>1</sup>H NMR.

**Тюрина Татьяна Григорьевна**

доктор химических наук,  
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк  
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 70  
E-mail: t\_tjurina@mail.ru

**Tyurina Tatyana**

Doctor of Chemical Sciences,  
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

**Крюк Татьяна Владленовна**

кандидат химических наук, старший научный сотрудник,  
ГУ «Институт физико-органической химии и углехимии им. Л. М. Литвиненко», г. Донецк  
E-mail: ktvl2010@mail.ru

**Kryuk Tatyana**

Candidate of Chemical Sciences, Senior Research Officer,  
State institution «L.M. Litvinenko Institute of Physical Organic and Coal Chemistry», Donetsk

**Нестеренко Денис Юрьевич**

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» (г. Донецк), химический факультет, магистрант.  
E-mail: d.nesterenko1995@gmail.com  
Тел. для контактов: +380(66)202-20-39

**Nesterenko Denis**

Donetsk national University, undergraduate student at the Department of Chemistry

## БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 595.44

### ПАУКИ (ARANEI) МЕЗОФИТНОГО ЛУГА В ЗОНЕ ВЛИЯНИЯ ВЫСОКОВОЛЬТНОЙ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

© 2016. *Е.В. Прокопенко*

Исследован видовой состав и структура населения пауков (Aranei) на мезофитном лугу под линией электропередачи высокого напряжения в окрестностях с. Ирлява Ужгородского района Закарпатской области (Украина). Показано незначительное снижение видового богатства и более заметное – численности хортобионтных пауков под токонесущими проводами.

*Ключевые слова:* пауки, линия электропередачи, фауна, структура населения пауков.

**Введение.** Все источники электромагнитного поля (ЭМП), как правило, являются причиной возникновения комплексного электромагнитного излучения, которое оказывает воздействие на живые организмы в зоне его влияния. Значительные отклонения ЭМП от естественного уровня в большую или меньшую сторону выходят за границы оптимума жизнедеятельности живых организмов и являются стрессовым фактором [1].

Изучению воздействия ЭМП на членистоногих посвящен целый ряд полевых исследований [1–10]. Однако работы по воздействию ЭМП на сообщества пауков значительно более редки и фрагментарны [11–13].

Ответные реакции биообъектов на воздействие ЭМП значительно различаются в зависимости от систематического положения и физиологического состояния организма, а также от окружающих условий (структура растительности, погодные условия, напряжение ЭМП) [1]. Для сообществ хортобионтных пауков в луговых экосистемах Карпат были получены неожиданные результаты. Численность пауков увеличивалась по мере приближения к линии электропередачи и возрастания напряжения [11]. Между тем отпугивающий эффект ЭМП отмечался для различных таксонов членистоногих [1, 6, 8, 12]. С другой стороны, было показано, что герпетобионтные членистоногие предпочитают зону с определенным уровнем плотности потока энергии, сосредоточиваясь в ней из соседних зон с большими или меньшими значениями [14].

Таким образом, наличие противоречивых данных об эффекте электромагнитного поля на сообщества членистоногих обусловили актуальность нашего исследования. Целью работы было изучить таксономический состав, структуру населения и динамику численности и видового богатства хортобионтных пауков в зоне влияния высоковольтной линии электропередачи.

**Материал и методы.** Материалом для настоящей работы послужили сборы пауков, проведенные в окрестностях с. Ирлява Ужгородского района Закарпатской области в периоды 28.08–01.09.2012 г. и 02.05–04.08.2013 г. Материал был собран В.Г. Рошко и В.В. Рошко (Ужгородский национальный университет), за что автор выражает свою искреннюю благодарность. Исследуемый участок представляет собой мезофитный сенокосный луг, который периодически используется как пастбище. Это вторичное послелесное сообщество (150–200 лет назад здесь был дубовый лес). Летний флористический аспект составляет 47–62 вида покрытосеменных растений. Участок находится в зоне действия электромагнитного поля ЛЭП напряжением 750 кВ.



Методом сбора было кошение травостоя энтомологическим сачком. Каждая проба составляла 100 взмахов. Учеты осуществлялись на пяти пробных площадках, расположенных на все большем удалении от линии электропередачи: 1) под проводами в месте их наибольшего провисания; 2) на расстоянии 50 м; 3) 100 м; 4) 150 м; 5) 200 м. Последняя пробная площадка рассматривалась как контрольная, поскольку напряжение ЭМП на ней не превышало фоновые значения. В 2012 г. на каждой пробной площадке было взято по 5 проб, в 2013 г. – по 10 проб (по 3 в мае и июне, по 2 – в июле и августе). Всего было взято 75 проб, собрано 6607 экземпляров пауков.

В ходе оценки видового богатства учитывались только виды, представленные половозрелыми особями. При определении структуры доминирования использовали шкалу Тишлера [15], где E – эудоминант ( $\geq 10\%$  собранных экземпляров), D – доминант ( $\geq 5\%$ ), SD – субдоминант ( $\geq 2\%$ ), R – рецедент ( $\geq 1\%$ ), SR – субрецедент ( $< 1\%$ ). Дендрограмма сходства аранеокомплексов исследованных пробных площадок была построена в пакете Statistica 6.0.

**Результаты и обсуждение.** В результате проведенных исследований был собран 41 вид пауков из 14 семейств (табл. 1). Наибольшим количеством видов характеризуются семейства Thomisidae (10 видов), Araneidae (9 видов), Linyphiidae и Salticidae (по 4 вида). Род *Xysticus* C. L. Koch, 1835 демонстрирует максимальное видовое богатство – 6 видов.

Таблица 1

Видовой состав и относительная численность (%) пауков

Вид	Пробная площадка				
	0 м	50 м	100 м	150 м	200 м
1	2	3	4	5	6
<i>Phylloneta impressa</i> (L. Koch, 1881)	0,9	0,4	0,4	0,5	0,8
Theridiidae gen. sp., juv	1,1	0,4	0,4	0,2	0,6
<i>Agyneta rurestris</i> (C. L. Koch, 1836)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1
<i>Erigonoplus globipes</i> (L. Koch, 1872)	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
<i>Hylyphantes nigrinus</i> (Simon, 1881)	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3
<i>Nematogmus sanguinolentus</i> (Walckenaer, 1841)	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
Linyphiidae gen. sp., juv	0,1	0,3	0,1	0,0	0,0
<i>Agalenatea redii</i> (Scopoli, 1763)	1,8	1,6	1,5	0,2	1,0
<i>Araneus diadematus</i> Clerck, 1757	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
<i>Araneus quadratus</i> Clerck, 1757	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1
<i>Araneus</i> sp., juv	9,9	10,5	5,4	7,2	7,1
<i>Argiope bruennichi</i> (Scopoli, 1772)	0,4	1,4	1,1	0,8	0,3
<i>Argiope bruennichi</i> , juv	0,1	0,1	0,6	0,4	0,5
<i>Hypsosinga pygmaea</i> (Sundevall, 1831)	0,4	0,4	0,3	0,3	0,6
<i>Hypsosinga sanguinea</i> (C. L. Koch, 1844)	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1
<i>Mangora acalypha</i> (Walckenaer, 1802)	0,7	0,3	0,4	0,3	0,6
<i>Mangora acalypha</i> , juv	3,6	4,4	3,8	14,4	4,7
<i>Neoscona adianta</i> (Walckenaer, 1802)	0,2	0,0	0,1	0,0	0,1
<i>Singa hamata</i> (Clerck, 1757)	0,2	0,2	0,4	0,1	0,2
<i>Singa</i> ( <i>Hypsosinga</i> ) sp., juv	2,4	1,8	6,0	7,8	6,9
<i>Alopecosa pulverulenta</i> (Clerck, 1757)	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0
Lycosidae gen. sp., juv	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4
<i>Pisaura mirabilis</i> (Clerck, 1757)	0,0	0,2	0,1	0,1	0,1
<i>Pisaura</i> sp., juv	4,5	4,0	4,9	1,2	1,6
<i>Hahnina nava</i> (Blackwall, 1841)	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
<i>Dictyna arundinacea</i> (Linnaeus, 1758)	0,1	0,3	0,2	0,0	0,3
<i>Dictyna latens</i> (Fabricius, 1775)	0,2	0,0	0,3	0,3	0,0

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6
<i>Dictyna</i> sp., juv	1,5	1,1	0,4	0,4	0,5
<i>Oxyopes ramosus</i> (Martini et Goeze, 1778)	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
<i>Oxyopes</i> sp., juv	1,9	0,9	0,4	0,7	1,2
<i>Cheiracanthium erraticum</i> (Walckenaer, 1802)	0,0	0,1	0,1	0,0	0,1
<i>Cheiracanthium punctorium</i> (Villers, 1789)	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
<i>Cheiracanthium</i> sp., juv	1,2	1,0	0,7	1,1	1,6
<i>Clubiona diversa</i> O. Pickard-Cambridge, 1862	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
<i>Clubiona</i> sp., juv	0,4	0,0	0,5	0,2	0,3
<i>Micrommata virescens</i> (Clerck, 1757)	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0
<i>Micrommata</i> sp., juv	0,7	0,5	0,4	0,2	0,1
<i>Philodromus cespitum</i> (Walckenaer, 1802)	0,1	0,0	0,0	0,0	0,1
<i>Philodromus</i> sp., juv	1,0	0,8	0,6	0,8	0,3
<i>Thanatus formicinus</i> (Clerck, 1758)	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
<i>Thanatus</i> sp., juv	0,5	0,0	0,2	0,6	0,4
<i>Tibellus oblongus</i> (Walckenaer, 1802)	0,3	0,3	0,5	0,2	0,3
<i>Tibellus</i> sp., juv	4,7	6,1	8,2	7,3	6,9
<i>Ebrechtella tricuspидata</i> (Fabricius, 1775)	0,5	0,6	0,1	0,0	0,0
<i>Ebrechtella</i> sp., juv	2,4	1,9	0,5	0,2	0,7
<i>Misumena vatia</i> (Clerck, 1757)	1,0	1,2	0,3	0,1	1,2
<i>Misumena</i> sp., juv	6,2	3,9	2,7	2,8	3,8
<i>Synema</i> sp., juv	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
<i>Thomisus onustus</i> Walckenaer, 1805	1,8	1,6	1,5	0,5	0,3
<i>Thomisus onustus</i> , juv	1,3	1,9	0,6	0,8	0,5
<i>Tmarus piger</i> (Walckenaer, 1802)	0,8	0,3	0,2	0,0	0,1
<i>Tmarus piger</i> , juv	1,5	0,5	0,0	0,5	0,3
<i>Xysticus acerbus</i> Thorell, 1872	0,1	0,0	0,1	0,1	0,0
<i>Xysticus bifasciatus</i> (C. L. Koch, 1837)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1
<i>Xysticus cristatus</i> (Clerck, 1758)	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1
<i>Xysticus kochi</i> Thorell, 1872	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0
<i>Xysticus striatipes</i> L. Koch, 1870	1,1	1,6	1,6	2,0	2,6
<i>Xysticus ulmi</i> (Hahn, 1831)	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1
<i>Xysticus</i> sp., juv	18,6	23,2	28,2	19,2	19,6
<i>Evarcha arcuata</i> (Clerck, 1757)	6,0	6,8	6,1	5,5	6,2
<i>Evarcha</i> sp., juv	10,6	12,0	11,3	11,0	12,8
<i>Heliophanus flavipes</i> (Hahn, 1832)	0,6	0,2	0,8	1,5	1,1
<i>Heliophanus</i> sp., juv	7,2	5,3	6,4	9,0	12,0
<i>Sibianor aurocinctus</i> (Ohlert, 1865)	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
<i>Synageles hilarulus</i> (C. L. Koch, 1846)	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0
Salticidae gen. sp., juv	0,5	0,6	0,4	0,3	0,4
Всего экз.	1026	1236	1225	1647	1473
Индекс Шеннона	3,02	2,85	2,73	2,69	2,81
Индекс Пиелу	0,72	0,68	0,65	0,64	0,67

Примечание: juv – ювенильные особи

Полученные данные свидетельствуют, что хроническое электромагнитное загрязнение не привело к существенному обеднению аранеофауны. На пробных площадках, наиболее близких к ЛЭП (под проводами и в 50 м от линии) наблюдалось некоторое снижение видового богатства пауков – отмечено 24 и 23 вида, соответственно (рис. 1). Максимальное число видов зарегистрировано в 100 м от ЛЭП (29 видов). На контрольном участке было найдено 25 видов.

Численность хортобионтных пауков нелинейно снижалась по мере приближения к ЛЭП и демонстрировала максимальные значения на расстоянии 150 м от нее и

минимальные – непосредственно под проводами (различия максимума и минимума достигали 1,6 раз) (рис. 1). Не отмечено ни одного вида пауков (за исключением единичных находок), который бы избегал пробных площадок, наиболее приближенных к ЛЭП (0–50 м).

На всех исследованных пробных площадках наиболее многочисленными были пауки-крабы *Thomisidae* (от 26,6 до 37,4 % собранных особей), пауки-кругопряды *Araneidae* (19,6–31,7 %) и пауки-скакунчики *Salticidae* (от 24,8 до 32,5 %) (табл. 2).

Каких-либо явных трендов изменения численности на разных расстояниях от ЛЭП эти семейства не демонстрировали. Достаточно стабильной была и суммарная относительная численность тенетных и "бродячих" пауков, слабо различаясь между пробными площадками. Тенетники составляли от 21,8 до 33,3 % собранных особей, активные и засадные охотники – от 66,7 до 78,2 %.

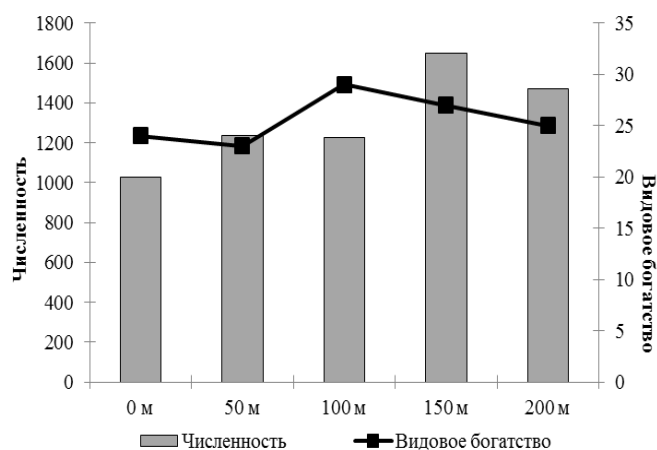


Рис. 1. Численность и видовое богатство пауков исследованных участков

Таблица 2

Относительная численность семейств пауков (%)

Семейство	0 м	50 м	100 м	150 м	200 м
Theridiidae	1,9	0,8	0,8	0,7	1,4
Araneidae	19,8	21,2	19,6	31,7	22,1
Linyphiidae	0,4	0,5	0,3	0,2	0,3
Hahniidae	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
Dictynidae	1,8	1,5	1,0	0,7	0,8
<b>Всего тенетников</b>	<b>23,8</b>	<b>24,0</b>	<b>21,8</b>	<b>33,3</b>	<b>24,6</b>
Lycosidae	0,2	0,1	0,3	0,2	0,4
Pisauridae	4,5	4,1	5,0	1,3	1,6
Oxyopidae	1,9	0,9	0,4	0,7	1,2
Miturgidae	1,2	1,1	0,8	1,2	1,7
Clubionidae	0,4	0,0	0,6	0,2	0,3
Sparassidae	0,7	0,5	0,5	0,2	0,1
Philodromidae	6,5	7,2	9,5	9,0	8,1
Thomisidae	35,8	37,4	36,0	26,6	29,5
Salticidae	25,0	24,8	25,1	27,3	32,5
<b>Всего бродячих форм</b>	<b>76,2</b>	<b>76,0</b>	<b>78,2</b>	<b>66,7</b>	<b>75,4</b>

Соотношение численностей половозрелых и ювенильных особей на исследованных пробных площадках варьировало в пределах от 0,15 (150 м) до 0,23 (50 м), не проявляя выраженной тенденции в зависимости от расстояния до ЛЭП.

В группу эудоминантов и доминантов на исследованных пробных площадках входило от 6 до 8 видов. Эудоминантами везде выступали ювенильные *Xysticus* sp. (от 18,6 до 28,2 %) и *Evarcha* sp. (от 10,6 до 12,8 %). На расстоянии 50 м к двум упомянутым эудоминантам добавлялись ювенильные *Araneus* sp. (10,5 %), а на расстоянии 150 м – ювенильные особи *Mangora acalypha* (14,4 %).

С увеличением численности пауков на пробных площадках, удаленных от ЛЭП (150 и 200 м), росла и суммарная доля эу- и доминантов в структуре населения и

уменьшалась доля рецедентов и субрецедентов. Под токонесущими проводами доминирующие виды составляли 58,5 %, а редкие – 23,9 %. На расстоянии 150 м от ЛЭП эти показатели равнялись 81,4 и 13,8 %, соответственно. Описанную тенденцию отражали индексы разнообразия и выравненности – максимальные значения они принимали непосредственно под ЛЭП, минимальные – на расстоянии 150 м от линии (табл. 1). Ранее было показано, что воздействие ЭМП на аранеокомплексы приводит к трансформации структуры доминирования – возрастанию суммарной относительной численности эу- и доминантов, уменьшению доли редких видов [11]. На примере педобионтов было продемонстрировано, что с увеличением напряженности поля индексы Шеннона, Симпсона и Пиелу снижали свои значения [7, 16]. В рассматриваемом случае наибольшее разнообразие и выравненность, как и суммарная относительная численность редких видов, были характерны для пробной площадки с максимально выраженным воздействием ЭМП.

Наибольшим сходством аранеокомплексов характеризуются пробные площадки в непосредственной близости от ЛЭП – под проводами и на расстоянии 50 м (рис. 2). К ним примыкает аранеокомплекс площадки в 100 м. Судя по конфигурации дендрограммы, воздействие поля на аранеокомплексы нивелируется уже на расстоянии 150 м – эта пробная площадка наиболее сходна с контролем по видовому составу и распределению численностей пауков.

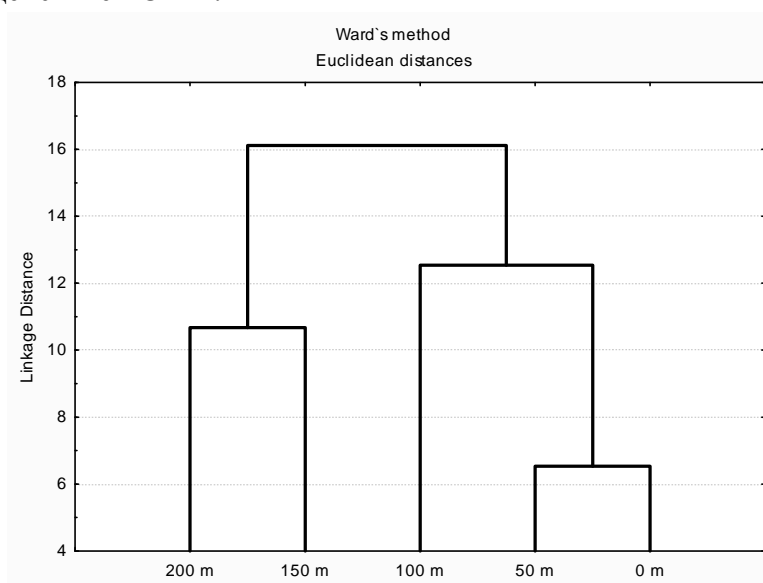


Рис. 2. Дендрограмма сходства сообществ пауков исследованных участков

**Выводы.** Таким образом, воздействие электромагнитного поля ЛЭП приводит к некоторому снижению видового богатства и более заметному – численности хортобионтных пауков. Соотношения относительной численности отдельных видов, семейств и жизненных форм пауков не демонстрируют значимых различий на исследованных пробных площадках. Максимальным видовым разнообразием и выравненностью населения пауков, оцененным с помощью индексов Шеннона и Пиелу, характеризуется участок непосредственно под токонесущими проводами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еськов Е.К. Воздействие искусственно генерируемых электромагнитных полей на биологические объекты [Текст] / Е.К. Еськов, В.А. Тобоев // Вестник Чувашского ун-та. – 2008. – № 2. – С. 28-36.
2. Еськов Е.К. Динамика плотности населения серых кузнечиков под высоковольтными линиями электропередачи [Текст] / Е.К. Еськов, В.В. Сергеечкин // Экология. – 1985. – № 5. – С. 87-89.
3. Kron A.A. Response of some groups of Arthropoda to electromagnetic field effect of high-voltage power transmission lines [Text] / A.A. Kron, O.I. Voloshyn, V.H. Roshko // Landscape Architecture and Spatial Planning as the Basic Element in the Protection of Native Species. – Tuczno (Poland), 2007. – P. 108-113.
4. Symochko L. Influence of electromagnetic field on the functioning of microbial soil cenosis [Text] / L. Symochko, V. Roshko // Modern Problems of Microbiology and Biotechnology: Book of abstracts. – Odesa: Astroprint, 2007. – P. 25.

5. Загальний характер впливу електромагнітного поля ліній електропередач високої напруги на ґрунтових кліщів (Arachnida, Acarina) [Текст] / А.А. Крон, О.І. Волошин, В.В. Меламуд, В.Г. Рошко // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Біологія. – 2008. – Вип. 23. – С. 174-179.
6. Еськов Е.К. Фауна просек высоковольтных линий электропередач [Текст] / Е.К. Еськов, В.А. Карев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 127-132.
7. Рошко В.Г. Реакції окремих груп педобіонтів на хронічний електромагнітний стрес [Текст] / В.Г. Рошко, А.А. Крон // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Біологія. – 2010. – Вип. 29. – С. 65-74.
8. Гордеева М.А. Воздействие электромагнитных полей линий электропередач на герпетобионтов [Текст] / М.А. Гордеева, Н.Г. Ильминских // Биология. Экология. Естествознание. Науки о Земле. – 2012. – № 2. – С. 31-39.
9. Рошко В.Г. Загальні реакції хортобіонтних членистоногих (Arthropoda) на хронічний електромагнітний стрес [Текст] / В.Г. Рошко, О.Ю. Мателешко, В.В. Рошко // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Біологія. – 2012. – Вип. 33. – С. 36-42.
10. Крон А.А. Влияние электромагнитного поля линий электропередач высокого напряжения на пространственное распределение насекомых [Текст] / А.А. Крон, В.Г. Рошко // Труды Ставропольского отделения Русского энтомологического общества. Вып. 4. Материалы Международной научно-практической конференции. – Ставрополь: АГРУС, 2008. – С. 208-211.
11. Крон Н.Н. Угрупповання павуків (Aranei) в умовах хронічного електромагнітного стресу / Н.Н. Крон, В.Г. Рошко, С.М. Жуковец [Текст] // Сучасні проблеми ентомології. Тез. доп. Ентомологічн. наук. конф., присвяч. 60-й річниці Українського ентом. тов-ва (Умань, 12-15 жовтня 2010 р.). – Київ: Колоб'іг, 2010. – С. 28-29.
12. Рошко В.В. Загальні реакції угруповань хортобіонтних павуків (Arachnida: Aranei) на хронічний електромагнітний стрес [Текст] / В.В. Рошко, О.В. Прокопенко, В.Г. Рошко // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Біологія. – 2012. – Вип. 32. – С. 45-49.
13. Prokopenko E.V. A case study of the herb-dwelling spider assemblages (Aranei) in a meadow under the power transmission lines in Ukrainian Carpathians [Text] / E.V. Prokopenko // Vestnik Zoologii. – 2015. – Vol. 49, Iss. 1. – P. 87-94.
14. Гордеева М.А. Пространственное распределение герпетобионтов на градиенте электромагнитного фактора [Текст] / М.А. Гордеева // Аграрный вестник Урала. – 2013. – № 1 (107). – С. 21-24.
15. Engelmann H.D. Zur Dominanzklassifizierung von Bodenartropoden [Text] / H.D. Engelmann // Pedobiologia. – 1978. – 18, Hf. 5/6. – S. 378-380.
16. Угрупповання дощових черв'яків (Oligochaeta, Lumbricidae) в умовах хронічного електромагнітного стресу [Текст] / А.А. Крон, В.Г. Рошко, Р.П. Власенко, І.П. Онищук // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Біологія. – 2010. – Вип. 27. – С. 13-17.

*Поступила в редакцію 19.10.2016 г.*

#### **SPIDERS (ARANEI) OF MESOPHYTIC MEADOW IN THE ZONE OF INFLUENCE OF HIGH POWER LINES**

***E.V. Prokopenko***

Species composition and structure of the spider population (Aranei) on mesophytic meadow under the high voltage power line near Irlыava village (Uzhgorod district, Transcarpathian region, Ukraine) are investigated. A slight decrease in species richness and more visible decrease in the number of spiders under the power wires are shown.

**Keywords:** spiders, power line, fauna, spider population structure.

**Прокопенко Елена Васильевна**

кандидат биологических наук, доцент,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
(г. Донецк), доцент кафедры зоологии и экологии.  
E-mail: helen\_procop@mail.ru  
Тел: (066) 008-57-27

**Prokopenko Elena Vasilievna**

Candidate of Biological Sciences, Docent,  
Donetsk National University (Donetsk), Associate  
Professor at the Department of Zoology and Ecology.

УДК 612.821.3

## ПСИХОФИЗИОЛОГИЧЕСКИЙ БАЗИС УСПЕШНОСТИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОК

© 2016. В.А. Романенко, Д.А. Кочура

В результате изучения психофизиологического статуса у 85 студенток установлен широкий спектр показателей (49), связанных положительно с успешностью их обучения. Со стороны темпераментальных свойств – это повышенные уровни интеллектуальной активности, адаптивности, интравертированности, нейротизма и тревожности. На нейродинамическом уровне успешность обучения определяется повышенной общемозговой лабильностью, высокой активацией слухового и зрительного анализатора и доминированием процессов возбуждения. Успешных студенток отличают повышенная скорость адаптации зрительного анализатора, и наоборот – пониженные пороги зрительного и слухового анализаторов, что позволяет им быстрее перерабатывать информацию. У них выше интеллект, объем зрительной и слуховой памяти, а также параметры внимания, оперативного мышления и умственной работоспособности. В интегральном виде успешность обучения определяют взаимосвязанные между собой темпераментальные свойства, общесистемные и частные свойства мозга и интеллектуальные способности.

**Ключевые слова:** успешность обучения; темпераментальные свойства; механизмы нейропсиходинамики; сенсорные системы; интеллект.

**Введение.** Повышение эффективности вузовской подготовки специалистов предполагает не только решение социально-экономических проблем Высшей школы, но и изучение влияния генетических факторов на учебный процесс. Решение этой проблемы связано со знанием индивидуально-типологических особенностей человека на всех уровнях его биологической организации – личностном, сенсорном, нейро- и психодинамическом. Взаимоотношения между этими уровнями неоднозначны и в разной степени обуславливают эффективность адаптации индивида к природным и социальным факторам внешней среды, в том числе к профессиональной, спортивной и учебной деятельности [1–3].

В связи с этим **цель** исследований заключалась в определении прогностической ценности показателей психофизиологического статуса, детерминирующих успешность обучения студенток.

**Материал и методы исследований.** Для достижения цели исследований у 85 студенток естественно-научного факультета регистрировали широкий спектр показателей, отражающий их личностные и темпераментальные свойства, функциональное состояние механизмов нейро-, психодинамики и чувствительности сенсорных систем. Уровни генетической тревожности, экстравертированности, нейротизма, психической активности и адаптивности определяли по опросникам Спилберга, Айзенка и Басса-Дарки [4].

Показатели чувствительности зрительного анализатора регистрировали с помощью адаптометра. Абсолютные и терминальные пороги ощущений в слуховом анализаторе измеряли посредством аудиометра. Для этого использовали метод минимальных изменений при частоте звука 500 и 1000 Гц. Скорость сенсомоторных реакций определяли на хронорефлексомере "Центр". Регистрировали акустико-моторные реакции на пороговый звук (ЛП АМР<sub>пор</sub>) и звук интенсивностью 40 дБ (ЛП АМР<sub>40</sub>) частотой 1000 Гц. Реакцию на красный свет (ЛП ЗМР) и время различения красного и зеленого света (ЛП ЗМР<sub>1,2</sub>) определяли на том же приборе. О силе возбуждения в корковом отделе слухового анализатора судили по соотношению латентных периодов акустико-моторной реакции на звук частотой 1000 Гц пороговой интенсивности и интенсивностью 40 дБ (ЛП АМР<sub>пор</sub> / ЛП АМР<sub>40</sub>). Лабильность

процессов возбуждения и торможения определяли посредством воспроизведения на кинематометре угловых величин  $20^\circ$  и  $70^\circ$ . Учитывали соотношение между интенсивностью торможения / возбуждения до и после противоположного процесса. О выносливости нервной системы судили по величине снижения максимального теппинга за 90 с (%). Уровень фоновой активированности ЦНС и скорость генерации возбуждения определяли по значениям оптимального и максимального 10-секундного теппинга, а также разницы ( $\Delta$ ) между ними. Общемозговую лабильность оценивали посредством определения критической частоты световых мельканий (КЧСМ).

Показатели психодинамической сферы – интеллекта, памяти, внимания и умственной работоспособности определяли по соответствующим пробам и тестам. В частности, интеллект оценивали по тесту Бентона; объем слуховой памяти – по Джекобсу и тесту «Запоминание десяти слов»; объем внимания – по тесту «Расстановка чисел»; устойчивость – по пробам Ландольта и «Перепутанные линии»; переключение – по Шульте-Платонову; умственную работоспособность – по Крепелину [4].

Фактический материал обрабатывали посредством стандартного пакета программ «Statistica». Для оценки достоверности различий между группами использовали t-критерий Стьюдента и непараметрический критерий Манна-Уитни. При интерпретации ранговых корреляций в расчет принимали достоверные коэффициенты с прогностической ценностью  $r \geq 0,3$ .

**Результаты исследования и их обсуждение.** Проблема определения психофизиологических детерминант успешности обучения студентов априори предполагает разработку интегрального показателя (критерия) этой успешности.

В качестве такого критерия использовали ранг успешности, рассчитанный методом полного парного сравнения [5]. Ранжирование студенток производили в порядке убывания успешности их обучения. Связи между рангом и показателями психофизиологического статуса устанавливали посредством рангового коэффициента Спирмена, учитывающего любые формы зависимости [6]. В результате этого анализа установлен достаточно обширный спектр корреляций между критерием и показателями психофизиологического статуса. Количество этих связей ( $0,37 \leq r \leq 0,53$ ) с темпераментальными свойствами достигает одиннадцати. С рангом положительно связаны психомоторная, коммуникативная, общая психическая активность, экстравертированность и агрессивность. Интеллектуальная активность, адаптивность, нейротизм, тревожность и уровень притязаний коррелируют с рангом отрицательно: студентки с этими темпераментальными свойствами занимают первые места в табели о рангах (табл. 1).

Таблица 1  
Связь показателя успешности обучения студенток с темпераментальными и личностными свойствами

Показатели		Коэффициенты корреляции	Показатели	Коэффициенты корреляции
Активность, баллы	Психомоторная	44	Интроверсия, баллы	-56
	Интеллектуальная	-51	Нейротизм, баллы	-51
	Коммуникативная	47	Тревожность, баллы	-47
	Общая	40	Агрессивность, баллы	37
Адаптивность, баллы		-49	Уровень притязаний, ед.	
Экстраверсия, баллы		53		

Наиболее успешные студентки превосходят остальных по интеллектуальной активности (19,2 %), адаптивности (12,4 %), интровертированности (55 %), нейротизму (45,8 %), тревожности (25,5 %), уровню притязаний (140 %), и уступают им по психомоторной, коммуникативной, общей психической активности, экстравертированности и агрессивности (табл. 2).

Таблица 2

Темпераментальные свойства у успешных (1) и неуспешных (2) студенток

Показатели		Группа 1	Группа 2	$\Delta$	$\Delta$ , %
Актив- ность, баллы	Психомоторная	85,0±1,22	100,5±1,89	<b>15,5</b>	<b>18,2</b>
	Интеллектуальная	99,0±1,94	80,0±2,08	<b>-19,0</b>	<b>-19,2</b>
	Коммуникативная	85,0±2,56	100,3±3,13	<b>15,3</b>	<b>18,0</b>
	Общая	253,0±2,48	280,0±3,85	<b>27,0</b>	<b>10,7</b>
Адаптивность, баллы		193,0±2,45	169,1±2,30	<b>-23,9</b>	<b>-12,4</b>
Экстраверсия, баллы		6,9±0,29	14,0±0,53	<b>7,1</b>	<b>102,9</b>
Интроверсия, баллы		12,9±0,57	5,8±0,63	<b>-7,1</b>	<b>-55,0</b>
Нейротизм, баллы		13,1±0,29	7,1±0,41	<b>-6,0</b>	<b>-45,8</b>
Тревожность, баллы		55,0±0,98	41,0±0,81	<b>-14,0</b>	<b>-25,5</b>
Агрессивность, баллы		16,4±0,45	24,2±0,77	<b>7,8</b>	<b>47,6</b>
Уровень притязаний, баллы		1,5±0,12	-0,6±0,01	<b>-2,1</b>	<b>-140</b>

Следовательно, такие темпераментальные свойства как интеллектуальная активность, адаптивность, интровертированность, нейротизм, тревожность, уровень притязаний способствуют обучению студенток. Повышенная психомоторная, коммуникативная, общая психическая активность, экстравертированность и агрессивность оказывают отрицательное влияние на процесс обучения. Темпераментальные свойства имеют определенный нейродинамический и сенсорный базис. Показатели этого базиса связаны с рангом успешности неодинаково: во-первых – их больше (13,8 %) у успешных девушек, а во-вторых – уровень связей у них выше в среднем на 29 % (табл. 3).

Таблица 3

Корреляции показателей функционального состояния нервной и сенсорных систем с рангом успешности обучения у студенток с полярными ее уровнями

Показатели	Ранг успешности		
	Высокий	Низкий	
Лабильность возбуждения, ус. ед.	31	32	
Лабильность торможения, ус. ед.	31	30	
Критическая частота световых мельканий, Гц.	70	31	
Теппинг оптимальный за 10 с., уд.	40	-	
Теппинг максимальный за 10 с., уд.	37	-	
Разница ( $\Delta$ ) максимального и оптимального теппинга, %	44	31	
Снижение частоты теппинга за 90 с., %	35	-	
Латентный период зрительно-моторной реакции, мс.	-62	-33	
Латентный период зрительно-моторной реакции различения, мс.	-61	-30	
ЛП акустико-моторной реакции на пороговый раздражитель, мс.	-45	-32	
Латентный период акустико-моторной реакции на звук 40 Дб, мс.	-44	-	
Соотношение ЛП $AMP_{пор}$ /ЛП $AMP_{40}$ , ус. ед.	-52	-	
Реакция на движущийся объект, мс.	-66	-32	
Острота зрения, ус. ед.	30	30	
Световая чувствительность при пониженной освещенности, с	-60	-38	
Скорость достижения остроты зрения при пониженном освещении, с	10 %	-40	-32
	20 %	-35	-30
	30 %	-55	-35
	40 %	-57	-40
Скорость темновой адаптации при различной освещенности, количество строк	17,48 асб.	48	31
	1,1 асб.	32	34
	0,44 асб.	50	39
	0,22 асб.	47	38



Продолжение табл. 3

Абсолютные слуховые пороги на звуки различной частоты, Дб	500 Гц.	-44	-31
	1000 Гц.	-45	-33
Терминальные слуховые пороги на звуки различной частоты, Дб	500 Гц.	39	35
	1000 Гц.	33	31
Время переносимости звука различной частоты на уровне терминальных порогов, с.	500 Гц.	-50	-36
	1000 Гц.	-35	-30

Очевидно, успешная учебная деятельность студенток обеспечивается более широким спектром механизмов нейродинамики и сенсорики. Сходный характер этих зависимостей позволяет считать, что в качестве нейродинамических и сенсорных предпосылок успешности обучения выступают одни и те же нервные и сенсорные механизмы. На нейродинамическом уровне успешность обучения определяется лабильностью возбуждения/торможения, общемозговой лабильностью, выносливостью и фоновой активацией нервной системы, скоростью генерации возбуждения, соотношением возбуждательных и тормозных процессов (табл. 4).

Таблица 4

Функциональное состояние нервной и сенсорных систем у успешных и неуспешных студенток

Показатели		Успешные	Неуспешные	$\Delta$	$\Delta, \%$
Критическая частота световых мельканий, Гц		47,1±0,64	38,9±0,57	<b>-8,2</b>	<b>-17,4</b>
ЛП ЗМР, мс.		185,0±2,50	210,0±2,11	<b>25,0</b>	<b>13,5</b>
ЛП ЗМР <sub>1-2</sub> , мс.		283,0±4,13	320,0±5,01	<b>37,0</b>	<b>13,1</b>
ЛП АМР <sub>пор</sub> , мс.		208,0±3,11	225,0±2,80	<b>17,0</b>	<b>8,2</b>
ЛП АМР <sub>40</sub> , мс.		170,0±4,03	199,0±2,30	<b>29,0</b>	<b>17,1</b>
ЛП АМР <sub>пор</sub> /ЛП АМР <sub>40</sub> , ус. ед.		1,2±0,01	1,1±0,02	<b>-0,1</b>	<b>-8,3</b>
Реакция на движущийся объект, мс.		-68,4±3,80	86,4±3,45	<b>154,8</b>	<b>226,3</b>
Световая чувствительность при пониженной освещенности, с		12,9±0,78	18,5±0,83	<b>5,6</b>	<b>43,4</b>
Скорость достижения остроты зрения при пониженном освещении, с	10 %	3,4±0,10	4,6±0,13	<b>1,2</b>	<b>35,3</b>
	20 %	3,3±0,10	4,7±0,16	<b>1,4</b>	<b>42,4</b>
	30 %	10,0±0,39	14,4±0,63	<b>4,4</b>	<b>44,0</b>
	40 %	17,9±0,64	25,8±0,69	<b>7,9</b>	<b>44,1</b>
Скорость темновой адаптации при различной освещенности, количество строк	17,48 асб.	7,0±0,11	5,0±0,09	<b>-2,0</b>	<b>-28,6</b>
	1,1 асб.	5,5±0,12	4,0±0,11	<b>-1,5</b>	<b>-27,3</b>
	0,44 асб.	4,1±0,08	3,0±0,07	<b>-1,1</b>	<b>-26,8</b>
	0,22 асб.	3,2±0,06	2,2±0,05	<b>-1,0</b>	<b>-31,3</b>
Абсолютные слуховые пороги на звуки различной частоты, Дб	500 Гц.	13,5±0,44	17,6±0,35	<b>4,1</b>	<b>30,4</b>
	1000 Гц.	10,1±0,13	14,4±0,15	<b>4,3</b>	<b>42,6</b>

При общности механизмов адаптации успешных студенток отличает повышенная общемозговая лабильность (17,4 %), лучшая реакция на простой (13,5 %) и сложный стимулы (13,1 %). Судя по соотношению ЛП АМР<sub>пор</sub>/ЛП АМР<sub>40</sub> у них выше исходный уровень активации слухового анализатора (8,3 %), что позволяет быстрее реагировать на звуки минимальной (8,2 %) и оптимальной интенсивности (17,1 %). У успешных студенток доминируют процессы возбуждения, в то время как у неуспешных – торможения (табл. 4).

Со стороны анализаторных систем различия затрагивают как пороговые, так и временные показатели чувствительности. Успешные студентки быстрее обнаруживают зрительные образы при пониженной освещенности (43,4 %). У них выше скорость темновой адаптации (в среднем – на 41,5 %). Зрительный анализатор обладает лучшей адаптивностью, что позволяет различать большее количество строк при различной освещенности (в среднем – на 28,5 %). Абсолютные пороги слуха на звуки различной

частоты у них также понижены (36,5 %). Повышенные адаптивные возможности сенсорных систем позволяют успешным студенткам быстрее перерабатывать поступающую информацию, что является неременным условием обучения [7].

Зависимости между чувствительностью анализаторов и свойствами нервной системы вполне удачно экстраполируются на механизмы психодинамики успешных/неуспешных студенток. Корреляции критерия с показателями психодинамики выше (на 33,4 %) у успешных в обучении девушек (табл. 5).

Таблица 5

Связи показателей психодинамических свойств с рангом успешности обучения у студенток с полярными её уровнями

Показатели		Ранг успешности	
		Высокий	Низкий
Интеллект (IQ), баллы		-63	-37
Объем слуховой памяти	по "Запоминанию десяти слов", %	-51	-40
	по Джекобсу, ед	-44	-30
Объем образной зрительной памяти, %		-51	-37
Объем внимания по "Расстановке чисел", %		-57	-40
Устойчивость внимания	по пробе Ландольта, %	-61	-49
	по "Перепутанным линиям", с	67	37
Переключение внимания по Шульте-Платонову, с		65	45
Умственная работоспособность, ед.		-71	-38

Они превосходят менее успешных по интеллекту (на 21,9 %), объемам зрительной и слуховой памяти (18,6 %) и свойствам внимания: объем у них выше на 8,1 %, устойчивость – на 18,6 %, переключение – на 19,0 %. Уровень оперативного мышления и умственной работоспособности также повышен (30,2 % и 8,4 %) (табл. 6).

Таблица 6

Психодинамические свойства у успешных (1) и неуспешных (2) в обучении студенток

Показатели		Группа 1	Группа 2	$\Delta$	$\Delta$ , %
Интеллект (IQ), баллы		149,8 $\pm$ 2,95	117,0 $\pm$ 2,13	<b>-32,8</b>	<b>-21,9</b>
Объем слуховой памяти на слова, %		81,3 $\pm$ 2,95	66,7 $\pm$ 2,40	<b>-14,6</b>	<b>-18,0</b>
Объем зрительной памяти, %		83,4 $\pm$ 3,13	67,5 $\pm$ 2,87	<b>-15,9</b>	<b>-19,1</b>
Объем внимания по "Расстановке чисел", %		96,6 $\pm$ 1,13	88,8 $\pm$ 2,00	<b>-7,8</b>	<b>-8,1</b>
Устойчивость внимания	Ландольта, %	140,9 $\pm$ 2,51	111,0 $\pm$ 3,11	<b>-29,9</b>	<b>-21,2</b>
	"Перепутанные линии", с	237,3 $\pm$ 3,01	275,0 $\pm$ 4,12	<b>37,7</b>	<b>15,9</b>
Переключение внимания, с		205,8 $\pm$ 4,17	245,0 $\pm$ 5,09	<b>39,2</b>	<b>19,0</b>
Умственная работоспособность, ед.		95,0 $\pm$ 1,54	87,0 $\pm$ 2,03	<b>-8,0</b>	<b>-8,4</b>
Время решения оперативных задач, с		11,6 $\pm$ 0,68	15,1 $\pm$ 0,40	<b>3,5</b>	<b>30,2</b>

Абсолютные значения этих показателей и характер связей между ними позволяет заключить, что успешность обучения связана с интеллектом, способностью запоминать определенные объемы зрительной и слуховой информации, устойчивостью, переключением и объемом внимания, а также умственной работоспособностью. С повышением уровня этих психодинамических свойств успешность обучения повышается.

С успешностью обучения связаны темпераментальные (n = 11), нейродинамические (n = 13), психодинамические свойства (n = 9) и показатели сенситивности анализаторов (n = 16). В общем их число достигает 9 показателей (табл. 1, 3, 5). Большинство из них коррелирует с критерием успешности на среднем уровне. Очевидно, такой широкий спектр переменных с одинаковой информативностью не

может использоваться в качестве прогностических показателей. Поэтому для уменьшения их количества и определения удельной значимости для прогнозирования успешности обучения студенток был использован факторный анализ с ортогональным вращением [8].

В результате этого анализа было выделено четыре фактора, описывающих 69 % общей дисперсии выборки. Первый фактор определяют темпераментальные свойства. Их весовые нагрузки колеблются от 0,91 для уровня притязаний до 0,83 для общей психической активности. Вклад этого фактора в успешность обучения составляет 23 %. Второй фактор имеет высокие положительные нагрузки для показателей возбуждения (0,73), торможения (0,81), соотношения этих процессов (0,82), общемозговой лабильности (0,90) и выносливости нервной системы (0,94). Это позволяет обозначить данную совокупность признаков как фактор общесистемных свойств мозга. Его вклад в общую дисперсию выборки равен 18 %. В структуре третьего фактора доминируют показатели, отражающие фоновую активность корковых отделов сенсорных систем, т.е. частные свойства нервной системы, которые определяют успешность обучения студенток на 16 %. В четвертом факторе наиболее значимыми переменными являются рейтинг успешности обучения (0,87), коэффициент интеллекта (-0,80) и интеллектуальной активности (-0,81), свойства памяти (-0,79), внимания (-0,84), оперативность мышления (0,75) и умственная работоспособность (0,80). Структура связей позволяет отождествить этот фактор с интеллектуальными способностями, значимость которых для успешности обучения составляет 12 %.

Результаты собственных исследований и их сопоставление с литературными данными позволяют сформулировать определенные выводы.

#### **Выводы.**

1. Психофизиологический базис, отражающий успешность обучения студенток, включает широкий спектр темпераментальных нейро- и психодинамических свойств личности.

2. Темпераментальные свойства – интеллектуальная активность, адаптивность, интровертированность, нейротизм и тревожность, – способствуют обучению студенток. Повышенные уровни психомоторной, коммуникативной, общей психической активности, экстравертированности и агрессивности оказывают отрицательное влияние на процесс их обучения.

3. На нейродинамическом уровне успешность обучения определяется повышенной общемозговой лабильностью, активацией корковых отделов зрительного и слухового анализаторов, а также доминированием процессов возбуждения над торможением.

4. Со стороны механизмов психодинамики детерминантами успешности являются интеллект, способность студенток запоминать определенные объемы зрительной и слуховой информации, усойчивость, переключение, объем внимания, а также оперативное мышление и умственная работоспособность.

5. В интегральном виде успешность обучения студенток определяют в порядке иерархии четыре фактора: 1) темпераментальные свойства; 2) общесистемные свойства; 3) частные свойства нервной системы; 4) интеллектуальные способности. Очевидно, что при прогнозировании успешности обучения необходимо учитывать прогностические показатели, отражающие различные стороны индивидуальности. Включать те или иные из них в математическую модель следует с учетом их факторной информативности и весовых коэффициентов переменных.

Перспективы дальнейших изысканий в этом направлении связаны с изучением электрической активности мозга человека.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочура Д.А. Індивідуальні особливості вербальної та образної пам'яті студенток / Д.А. Кочура // Зб. тез Всеукр. наук.-метод. конф. „Сучасні стратегії та технології підготовки фахівців у вищій школі”. – Донецьк: ДонНУ, 2012. – С. 471-476.
2. Кочура Д.А. Нейродинамические корреляты различных типов репродукции следов памяти / Д.А. Кочура, В.А. Романенко // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 3. – С. 82-89.
3. Крапивницкая Т.А. Прогностическая значимость исследований индивидуально-личностных особенностей пилотов гражданской авиации / Т.А. Крапивницкая // Физиология человека. – 2007. – Т. 33, № 1. – С. 97-100.
4. Елисеев О.П. Практикум по психологии личности / О.П. Елисеев. – СПб.: Питер, 2006. – 512с.
5. Левада Е.В. Психофизиологические детерминанты успешности обучения студентов / Е.В. Левада, В.А. Романенко // Проблеми вікової фізіології: мат. Всеукр. наук.-практ. конф. / за ред. проф. Коцана І.Я., Макаренко М.В. – Луцьк: РВВ ВДУ „Вежа”, 2005. – С.70-73.
6. Лакин Г.Ф. Биометрия / Г.Ф. Лакин. – М.: Высшая школа, 1973. – 343с.
7. Чайченко Г.М. Психофізіологічний рейтинг як показник навчання школярів і студентів / Г.М. Чайченко // Наук.-метод. Зб. „Проблеми освіти”. – К.: ІЗММ, 2002. – вiт.5. – С. 94-98.
8. Романенко В.А. Математическое моделирование готовности к деятельности / В.А. Романенко // Моделирование в биомедфизике. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2002. – 202 с.

*Поступила в редакцию 03.05.2016 г.*

## THE PSYCHOPHYSIOLOGICAL BASIS OF STUDENTS LEARNING SUCCESS

*V.A. Romanenko D.A., Kochura*

As a result of studying the psychophysiological status of the 85 students, there are installed a wide range of indicators (49), associated positively with the success of their learning. Temperamental properties of these include elevated levels of intelligent activity, the adaptability of interventionist, neuroticism and anxiety. From the temperamental properties these include increased level of intellectual activity, adaptability, introversion, neuroticism and anxiety. On the neurodynamical level learning success is determined by increased cerebral lability, high activation of the auditory and the visual analyzer and the domination of excitation processes. Successful students have a high rate of visual analyzer adaptation and reduced sensitivity thresholds, which allows them to process the information faster. They have a higher intelligence, as well as the volume of visual and auditory memory, the parameters of attention, operational thinking and mental performance. In general, learning success is determined temperamental properties, systemwide properties, private properties of the brain, and intellectual abilities, interconnected among themselves.

**Keywords:** the success of learning; temperamental characteristics; the mechanisms of neuro-psychodynamics; sensory systems; intelligence.

### **Романенко Валерий Александрович**

доктор биологических наук, профессор,  
профессор кафедры физиологии человека и  
животных ГОУ ВПО «Донецкий национальный  
университет», г. Донецк,  
ул. Щорса, 46, биол. факультет, 83055.  
E-mail: [va.romanenko@mail.ru](mailto:va.romanenko@mail.ru)  
Тел: 8-063-91-13-593, 8-050-02-305-77

### **Romanenko Valerij Aleksandrovich**

Doctor of Biological Sciences, Full Professor,  
Professor at the Department of Human and Animal,  
Donetsk National University, Donetsk

### **Кочура Дарья Анатольевна**

кандидат биологических наук, ассистент кафедры  
человека и животных ГОУ ВПО «Донецкий  
национальный университет», г. Донецк,  
ул. Щорса, 46, биол. факультет, 83055.  
E-mail: [d.a.kochura@rambler.ru](mailto:d.a.kochura@rambler.ru)  
Тел.: 8-063-192-193-1, 8-099-10-78-666

### **Kochura Dar'ja Anatol'evna**

candidate of biological sciences,  
Lecturer at the department of human and animal,  
Donetsk National University, Donetsk

УДК 595.423; 574.34

**ПАНЦИРНЫЕ КЛЕЩИ И СОПУТСТВУЮЩИЕ ПОЧВООБИТАТЕЛИ БАЛКИ  
КЛИМУШАНСКОЙ БООПТРЗ «ХОМУТОВСКАЯ СТЕПЬ – МЕОТИДА»**

© 2016. Н.Н. Ярошенко

В результате проведенных мониторинговых исследований в балке Климушанской заповедника «Хомутовская степь – Меотида» в мае 2016 г. в трех экотопах (тальвег, северный и южный склоны балки) определено 99 видов панцирных клещей, относящиеся к 65 родам и 40 семействам со средней плотностью населения 28 012 экз./м<sup>2</sup>. Орибатида составили 59,99 % (2 101 экз.) от общего числа учтенных почвообитателей (3 502 экз.), плотность – 46 692 экз./м<sup>2</sup>. Доминировали 3 вида: *Sphaerochthonius dilutus* Serg. – 5,78 %, преобладал на северном склоне – 18,84 %, часто встречаемый в тальвеге – 4,32%, редкий на южном склоне балки – 0,44 %, от общего количества имагинальных форм орибатид; *Microppia minus* (Paoli) – 26,38 %, доминировал в тальвеге, на северном и южном склонах балки – 15,28 – 15,65 – 41,68 %, соответственно; *Discoppia cylindrica* (Perez-Inigo) – 10,15 %, многочисленный на южном склоне – 18,26 % и тальвеге – 6,15 %, малочисленный на северном склоне балки – 1,16 %. Максимум видового состава орибатид отмечен в тальвеге (62), минимум – на южном (50) склоне балки. Численность имагинальных форм панцирных клещей в зависимости от экспозиции экотопа значительно изменялась, максимальной она была на южном склоне – 679 экз. (27 160 экз./м<sup>2</sup>) и в тальвеге – 602 экз. (24 080 экз./м<sup>2</sup>), минимальной на северном склоне балки – 345 экз. (13 800 экз./м<sup>2</sup>). Максимум преимагинальных форм (личинки и нимфы) орибатид отмечен в тальвеге – 200 экз. (8 000 экз./м<sup>2</sup>), минимум – на северном склоне балки – 156 экз. (6 240 экз./м<sup>2</sup>). Сопутствующие почвообитатели в трех экотопах составили 40,01 % (1 401 экз., плотность – 18 680 экз./м<sup>2</sup>) с максимумом в тальвеге – 658 экз. (26 320 экз./м<sup>2</sup>) и минимумом – на северном склоне – 334 экз. (13 360 экз./м<sup>2</sup>). Из них доминировали гамазовые клещи и коллемболы.

**Ключевые слова:** панцирные клещи; орибатида; вид; плотность; гамазовые клещи; коллемболы.

**Введение.** Почвенные членистоногие, в том числе панцирные клещи-орибатида (Acariiformes, Oribatei) принимают активное участие в почвообразовательных процессах и круговороте веществ в природе. Они заселяют все типы почв и растительной подстилки. Доминирующие группы членистоногих, такие как панцирные клещи и другие акариформные клещи, гамазовые клещи и коллемболы способствуют поддержанию гомеостаза в структуре экотопов. Панцирные клещи играют огромную роль в жизни биогеоценозов, пропуская через себя до 2 % энергии, поступающей в почву в виде органических остатков. В разных природных зонах биомасса панцирных клещей оценивается в пределах 0,1–13 г/м<sup>2</sup> живого веса. Их численность достигает сотни тысяч на 1 м<sup>2</sup> почвы, биомасса – до 15 % от всего живого населения [5].

Заповедник «Хомутовская степь» находится в Новоазовском районе, его площадь – 1 030,4 га (рис. 1). Основан Постановлением Мариупольского окрисполкома от 24.08.1926 г. и постановлением Совета Министров УРСР № 1118 от 22.07.1961 г. с целью сохранения целинной степи. Постановлением Совета Министров ДНР № 10-55 от 03.06.2015 г. в целях реализации республиканской политики в области охраны окружающей среды создана биосферная особо охраняемая территория республиканского значения (БООПТЗ) «Хомутовская степь – Меотида».

В Донбассе проводится ряд мониторинговых исследований по фауне, биотопическому распределению, численности, обилию, сезонной и суточной активности панцирных клещей в естественных и антропогенно нарушенных землях [9, 10]. В заповеднике «Хомутовская степь» в 1969–1971, 1995 гг. были проведены эколого-фаунистические исследования панцирных клещей на определенных участках заповедника [8, 10]. Е.В. Гордеева [4] провела фундаментальные исследования по

изучению роли панцирных клещей в сукцессионных процессах на абсолютно заповедном участке «Хомутовской степи». На современном этапе нами предпринята попытка проведения мониторинговых исследований панцирных клещей и сопутствующих почвенных обитателей в условиях различных экотопов заповедника.

В связи с этим, цель нашего исследования – установить основные экологические характеристики населения панцирных клещей в целинной заповедной степи, такие как видовое богатство, численность, обилие отдельных видов, общность видового состава орибатид северного, южного склонов и тальвега балки Климушанской БООПТРЗ «Хомутовская степь – Меотида».

**Материал и методика исследования.** Почвенные пробы собраны в мае 2016 г. в тальвеге, на северном и южном склонах балки Климушанской БООПТРЗ «Хомутовская степь – Меотида». Почвенные образцы брали объемом 250 см<sup>3</sup> (5x5x10 см) в 10-кратной повторности. Камеральную обработку собранного материала проводили в лаборатории акарологии кафедры зоологии и экологии ДонНУ по общепринятой методике Е.М. Булановой-Захваткиной [2] и М.С. Гилярова [3]. Пересчет панцирных клещей и сопутствующих почвообитателей проводили на 1 повторность. Среднюю плотность почвенного населения определяли по методике К.К. Фасулати [7]. Индекс доминирования по обилию, выраженный в процентах, применяли при сравнении количественных характеристик панцирных клещей и сопутствующих почвообитателей исследуемых экотопов (свыше 5 % – доминирующий, от 2 до 5 % – часто встречаемый, менее 2 % – редкий вид) [1].

**Результаты и обсуждение.** Территория заповедной целинной степи представляет собой участок волнистой Приазовской равнины, которая снижается к реке Грузкой Еланчик, к левому берегу которой примыкает балка Климушанская с более крутыми склонами по отношению тальвега балки (рис. 1).

Почвы – обыкновенные черноземы, характеризующиеся большой глубиной гумусового горизонта, малым содержанием гумуса и повышенной карбонатностью. Растительность заповедной степи представляет собой южный вариант разнотравно-типчаково-ковыльных степей с преобладанием ковылей, типчаков и разнотравья [6]. Северный склон балки представляет собой петрофитный вариант целинной степи с преобладанием корневищных злаков.

В мае при температуре воздуха +15 °С и влажности почвы 21,95 % в 10 пробах учтено минимальное количество почвенного населения – 835 экз. со средней плотностью населения 33 400 экз./м<sup>2</sup>, что в 1,7–1,4 раза меньше, чем в тальвеге и на южном склоне балки, соответственно. Панцирные клещи, как доминирующая группа, составили 69,00 % от общего количества учтенных педобионтов – 501 экз., плотность – 20 040 экз./м<sup>2</sup>. Взрослых форм орибатид учтено 345 экз. (68,76 %), плотность –



Рис. 1. Карта-схема заповедника «Хомутовская степь»

13 800 экз./м<sup>2</sup>, что в 1,7–1,9 раза меньше, чем в тальвеге и на южном склоне балки. Преимагинальные фазы (личинки и нимфы) орибатид, успешно перенесшие зимнюю диапаузу и придающие стабильность популяции исследуемого экотопа, по численности занимают второе место после тальвега балки – 156 экз. (31,14 %), плотность – 6 240 экз./м<sup>2</sup>. Видовой спектр панцирных клещей занимает второе место после тальвега балки, и представлен 55 видами, относящиеся к 42 родам и 24 семействам. Доминировали 2 вида: *Sphaerochthonius dilutus* – 18,84 %, часто встречаемый в тальвеге и редкий на южном склоне балки; *Micropopia minus* – 15,65 %, доминирующий вид в трех исследуемых экотопах. К часто встречаемым отнесены 11 и к редким – 42 вида. Из них 18 видов обнаружены только на северном склоне балки (в тальвеге и на южном склоне не обнаружены), что обусловлено экспозицией экотопа и микроэдафическими условиями обитания. Отмечено 11 видов орибатид, способных принимать участие в цикле развития ленточных червей из сем. Anoplocephalidae, паразитирующих в теле диких и домашних животных (таблица).

Таблица

Панцирные клещи и сопутствующие почвообитатели балки Климушанской БООПТРЗ  
«Хомутовская степь – Меотида» (май 2016 г.)

Вид	Северный склон	Тальвег балки	Южный склон	Всего
1	2	3	4	5
<i>Sphaerochthonius dilutus</i> Serg.	65/18,84	26/4,32	3/0,44	94/5,78
<i>Hypochthoniella minutissima</i> (Berl.)	–	4/0,66	22/3,24	26/1,59
<i>Cosmochthonius lanatus</i> Mich.	1/0,29	1/0,17	–	2/0,12
<i>Cosmochthonius ponticus</i> Gordeeva	–	5/0,83	2/0,29	7/0,43
<i>Phylozetes emmae</i> Berl.	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Phylozetes osithchnjukovi</i> Gordeeva	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Brachychthonius berlesei</i> Will.	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Brachychthonius immaculatus</i> Forssl.	4/1,16	3/0,49	4/0,60	11/0,68
<i>Brachychthonius cricoides</i> Weis-Fogh	4/1,16	–	–	4/0,25
<i>Liochthonius alpestris</i> (Forssl.)	–	1/0,17	6/0,88	7/0,43
<i>Liochthonius horridus</i> (Selln.)	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Perlohmannia coiffaiti</i> Grandjean	–	15/2,49	–	15/0,92
<i>Perlohmannia dissimilis</i> (Hewitt)	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Epilohmannia cylindrica</i> (Berl.)	1/0,29	1/0,17	–	2/0,12
<i>Epilohmannia inexpectata</i> Schuster	–	–	2/0,29	2/0,12
<i>Nothrus biciliatus</i> Koch	1/0,29	1/0,17	–	2/0,12
<i>Camisia horrida</i> (Hermann)	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Trhypochthonius tectorum</i> (Berl.)	–	2/0,33	1/0,15	3/0,18
<i>Hermanniella punctulata</i> Berl.	–	6/1,00	–	6/0,37
<i>Liodes theleproctus</i> (Herm.)	14/4,05	13/2,16	–	27/1,66
<i>Platyliodes scaliger</i> (C.L.Koch)	1/0,29	12/1,99	–	13/0,80
<i>Gymnodamaeus bicostatus</i> Koch	6/1,17	–	–	6/0,37
<i>Gymnodamaeus austriacus</i> Will.	7/2,03	4/0,66	–	11/0,68
<i>Licnodamaeus undulatus</i> (Paoli)	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Licnoliodes andrei</i> Grandjean	–	–	20/2,95	20/1,23
<i>Metabelba papillipes</i> (Nic.)	2/0,58	2/0,33	–	4/0,25
<i>Metabelba pulverulenta</i> (Koch)	–	1/0,17	1/0,15	2/0,12
<i>Belba dubinini</i> B.-Z.	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Fosseremaes laciniatus</i> (Berl.)	14/4,05	35/5,81	1/0,15	50/3,08
<i>Eremulus flagellifer</i> Berl.	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Ctenobelba pilosella</i> Jeleva	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Ctenobelba translamellata</i> Jordan.	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Zetorchestes micronychus</i> (Berl.)	2/0,58	1/0,17	–	3/0,18

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5
<i>Microzetorches emeryi</i> (Coggi)	1/0,29	1/0,17	21/3,09	23/1,41
<i>Liacarus brevilamellatus</i> Mih.	–	4/0,66	5/0,73	9/0,55
<i>Liacarus lencoranicus</i> D. Kriv.	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Liacarus vombi</i> (Dalenius)	6/1,74	–	–	6/0,37
<i>Xenillus tegeocranus</i> (Herm.) *	–	4/0,66	–	4/0,25
<i>Birsteinus clavatus</i> D. Kriv.	–	1/0,17	4/0,60	5/0,31
<i>Dorycranosus punctulatus</i> (Mih.)	1/0,29	1/0,17	–	2/0,12
<i>Dorycranosus splendens</i> (Coggi)	–	2/0,33	–	2/0,12
<i>Dorycranosus moraviacus</i> (Will.)	–	–	5/0,73	5/0,31
<i>Cultroribula confinis</i> Berl.	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Carabodes reticulatus</i> Berl.	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Austracarabodes insifer</i> (Sellnick)	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Tectocephus velatus</i> Mich.*	3/0,87	2/0,33	2/0,29	7/0,43
<i>Dolicheremaeus georgii</i> B.-Z.	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Suctobelbella latirostris</i> (Forssl.)	3/0,87	24/3,99	20/2,95	47/2,89
<i>Suctobelbella alloenasuta</i> Moritz	5/1,45	9/1,50	17/2,50	31/1,91
<i>Suctobelbella subtrigona</i> (Oudms.)	3/0,87	4/0,66	5/0,73	12/0,74
<i>Multioppia glabra</i> Mih.	7/2,03	9/1,50	20/2,95	36/2,21
<i>Oppiella nova</i> (Oudms.)	1/0,29	–	1/0,15	2/0,12
<i>Lauroppia burovsii</i> (Mich.)	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Lauroppia maritima</i> (Will.)	1/0,29	7/1,16	–	8/0,50
<i>Discoppia cylindrica</i> (Perez-Inigo)	4/1,16	37/6,15	124/18,26	165/10,15
<i>Oppia kryvolutskyi</i> Kul.	11/3,19	6/1,00	2/0,29	19/1,17
<i>Ramusella clavipectinata</i> Mich.	16/4,64	28/4,65	14/2,06	58/3,57
<i>Ramusella michelcici</i> (Perez-Inigo)	1/0,29	5/0,83	2/0,29	8/0,50
<i>Medioppia obsoleta</i> (Paoli)	–	3/0,49	–	3/0,18
<i>Microppia minus</i> (Paoli)	54/15,65	92/15,28	283/41,68	429/26,38
<i>Microppia minutissima</i> (Selln.)	–	–	2/0,29	2/0,12
<i>Cymbaeremaeus cymba</i> (Nic.)	4/1,16	–	–	4/0,25
<i>Micreremus brevipes</i> (Mich.)	2/0,58	–	–	2/0,12
<i>Ameronothrus sp.</i>	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Passalozetes africanus</i> Gr.	–	5/0,83	–	5/0,31
<i>Scutovertex minutus</i> (Koch) *	2/0,58	–	–	2/0,12
<i>Oribatula tibialis</i> Mich.	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Zygoribatula exarata</i> Berl.	15/4,35	–	–	15/0,92
<i>Zygoribatula terricola ucrainica</i> Iord.	4/1,16	–	–	4/0,25
<i>Zygoribatula frisiae</i> (Oudms.)	13/3,77	9/1,50	5/0,73	27/1,66
<i>Zygoribatula exilis</i> (Nic.)	–	29/4,82	–	29/1,78
<i>Simkinia tianschanica</i> D. Kriv.	–	–	10/1,47	10/0,62
<i>Hemileius lanceolatus</i> Bajartogtoh et Aoki	–	–	8/1,18	8/0,50
<i>Scheloribates latipes</i> (Koch)*	6/1,74	22/3,65	2/0,20	30/1,85
<i>Scheloribates laevigatus</i> (Koch)	7/2,03	–	1/0,15	8/0,50
<i>Scheloribates semidesertus</i> B.-Z. et Machmud.	2/0,58	10/1,66	8/1,18	20/1,23
<i>Peloribates europaeus</i> Will.*	15/4,35	–	–	15/0,92
<i>Peloribates pilosus</i> Hammer	–	28/4,65	–	28/1,72
<i>Protoribates capucinus</i> Berl.	6/1,74	10/1,66	4/0,60	20/1,23
<i>Protoribates glaber</i> Mich.	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Protoribates badensis</i> Selln.	–	1/0,17	–	1/0,06
<i>Protoribates monodactylus</i> (Haller)	10/2,89	10/1,66	17/2,50	37/2,28
<i>Protoribates lagenula</i> (Berl.)	–	–	4/0,60	4/0,25
<i>Trichoribates novus</i> (Selln.)*	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Ceratozetes mediocris</i> Berl.*	1/0,29	7/1,16	–	8/0,50
<i>Ceratozetes minutissimus</i> Will.	–	37/6,15	5/0,73	42/2,58
<i>Ceratozetes gracilis</i> (Mich.)*	–	–	5/0,73	5/0,31



Продолжение таблицы

1	2	3	4	5
<i>Ceratozetella selnicki</i> (Rajski)*	3/0,87	14/2,32	–	17/1,05
<i>Ceratozetella helenae</i> Pavl.	–	2/0,33	2/0,29	4/0,25
<i>Punctoribates zachvatkini</i> Schald.	–	5/0,83	–	5/0,31
<i>Tectoribates ornatus</i> (Schuster)	1/0,29	1/0,17	–	2/0,12
<i>Achipteria nitens</i> (Nic.)	–	22/3,65	3/0,44	25/1,54
<i>Achipteria coleoprata</i> (L.)*	–	–	1/0,15	1/0,06
<i>Galumna lanceata</i> Oudms.	2/0,58	3/0,49	1/0,15	6/0,37
<i>Galumna elimata</i> (Koch)	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Pilogalumna allifera</i> (Oudms.)	3/0,87	5/0,83	2/0,29	10/0,62
<i>Euphthiracarus cribrarius</i> (Berl.)	–	3/0,49	4/0,60	7/0,43
<i>Phthiracarus piger</i> (Scopoli)	1/0,29	–	–	1/0,06
<i>Phthiracarus anonytum</i> Grandjean	–	–	2/0,29	2/0,12
Всего панцирных клещей (имаго), экз.	345	602	679	1 626
Количество проб	10	10	10	30
Количество на 1 пробу, экз.	34,5	60,2	67,9	54,2
Плотность, экз./м <sup>2</sup>	13 800	24 080	27 160	21 680
Количество видов	55	62	50	99
Доминирующих	2	4	2	3
Часто встречаемых	11	10	8	6
Редких	42	48	40	90
Процентное отношение к общему числу панцирных клещей	68,86	75,06	85,09	77,39
Количество преимагинальных фаз (личинки, нимфы) орибатид	156	200	119	475
Количество проб	10	10	10	30
Количество на 1 пробу, экз.	15,6	20,0	11,9	15,83
Плотность, экз./м <sup>2</sup>	6 240	8 000	4 760	6 332
Процентное отношение к общему числу панцирных клещей	31,14	24,94	14,91	22,61
Всего панцирных клещей, экз.	501	802	798	2 101
Количество проб	10	10	10	30
Количество на 1 пробу, экз.	50,1	80,2	79,8	70,03
Плотность, экз./м <sup>2</sup>	20 040	32 080	31 920	28 012
Процентное отношение к общему числу почвообитателей	60,00	54,93	66/11	-
Класс Nematoda	1/0,30	–	–	1/0,07
Класс Oligochaeta	–	3/0,46	1/0,24	4/0,29
Класс Arachnida. Отр. Aranei	1/0,30	–	–	1/0,07
Отр. Pseudoscorpiones	5/1,50	–	1/0,24	6/0,43
Класс Arachnida. Отр. Parasitiformes Надсем. Gamasoidea	55/16,46	74/11,25	72/17,60	201/14,35
Отр. Acariformes. Надсем. Acaroidea	12/3,59	30/4,56	14/3,42	56/4,00
Гипопусы	–	4/0,61	4/0,99	8/0,57
Семейство Trombiculidae	5/1,50	6/0,91	15/3,67	26/1,85
Прочие сем. отр. Acariformes	118/35,33	219/33,28	130/31,78	467/33,33
Надкласс Murgipoda. Класс Symphyla	1/0,30	2/0,30	3/0,73	6/0,43
Класс Geophila. <i>Geophilus longicornis</i>	–	2/0,30	2/0,49	4/0,29
Класс Diplopoda. Отр. Julida	2/0,60	–	4/0,99	6/0,43
Отр. Polixena. <i>Polixena lagurus</i>	–	7/1,06	11/2,69	18/1,28
Класс Insecta. Отр. Diplura	1/0,30	1/0,15	–	2/0,14
Класс Insecta. Отр. Podura	119/35,63	176/26,75	147/35,94	442/31,55
Отр. Psocoptera	–	9/1,37	–	9/0,64
Отр. Thysanoptera	2/0,60	1/0,15	–	3/0,21
Отр. Homoptera. Подотр. Aphidinea	3/0,89	97/14,74	–	100/7,14
Отр. Hymenoptera. Надсем. Formicoidea	2/0,60	4/0,61	–	6/0,43

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5
Надсем. Ichneumonoidea	1/0,30	12/1,82	–	13/0,93
Отр. Coleoptera	1/0,30	3/0,46	–	4/0,29
Личинки насекомых	5/1,50	8/1,22	5/1,22	18/1,28
Всего других почвообитателей, экз.	334	658	409	1 401
Количество проб	10	10	10	30
Количество на 1 пробу, экз.	33,4	65,8	40,9	46,7
Плотность, экз./м <sup>2</sup>	13 360	26 320	16 360	18 680
Процентное отношение к общему числу почвообитателей	40,00	45,07	33,89	40,01
Всего почвенного населения, экз.	835	1 460	1 207	3 502
Количество проб	10	10	10	30
Количество на 1 пробу, экз.	83,5	146,0	120,7	116,73
Плотность, экз./м <sup>2</sup>	33 400	58 400	48 280	46 692

Примечания:

- \* – виды, принимающие участие в цикле развития ленточных червей из сем. Anoplocephalidae;
- в числителе – количество особей, в знаменателе – индекс доминирования в процентах.

Из 55 обнаруженных видов орибатид выявлены 13 видов, самки которых содержали от 1 до 6 яиц (*Brachychthonius immaculatus* – 2 самки по 1 яйцу; *Nothrus biciliatus* – 1 самка, 6 яиц; *Dolicheremaeus georgii* – 1 самка, 1 яйцо; *Tectocephus velatus* – 1 самка, 1 яйцо; *Zygoribatula terricola ucrainica*, *Z. frisiae* – 2 самки по 6 яиц; *Schelorbates latipes* – 2 самки по 4 яйца; *S. laevigatus* – 3 самки по 6 яиц; *Peloribates europaeus* – 5 самок по 4 яйца, 2 самки по 2 яйца и 1 самка – 3 яйца; *Protoribates monodactylus* – 1 самка, 2 яйца; *Ceratozetella selnicki* – 2 самки по 2 и 4 яйца; *Trichoribates novus*, *Tectoribates ornatus* – 1 самка по 2 яйца). Весенняя продуктивность самок способствует сохранению стабильности популяции орибатид в исследуемом экотопе.

Сопутствующих геобионтов на северном склоне балки в 10 пробах обнаружено 17 таксономических групп – 334 экз. (40,00 %), плотность – 13 360 экз./м<sup>2</sup>. Среди них преобладали гамазовые клещи – 16,46 %, сборная группа акариформных клещей – 35,33 %, коллемболы – 35,63 %, которые доминировали в трех исследуемых экотопах. Остальные представители (почвенные нематоды, олигохеты, пауки, ложноскорпионы, краснотелковые клещи, симфины, кивсяки, двухвостки, трипсы, муравьи, тли, жуки, личинки насекомых) отнесены к редко встречаемым. На северной экспозиции сопутствующих обитателей отмечено минимальное количество – в 1,7–1,4 раза меньше, чем на дне и южном склоне балки, соответственно, что обусловлено небольшими эдафическими отличиями исследуемых экотопов при невысоком колебании видового состава и обилия орибатид и сопутствующих обитателей почвы.

В тальвеге балки Климушанской при температуре воздуха +15 °С и влажности почвы 31,58 % в 10 пробах учтено максимальное количество почвенного населения – 1 460 экз. со средней плотностью 58 400 экз./м<sup>2</sup>. Из них панцирные клещи составили максимальное количество – 802 экз. (54,93 %), плотность – 32 080 экз./м<sup>2</sup>. Имаго орибатид составили 75,06 % (602 экз., плотность – 24 080 экз./м<sup>2</sup>), преимагинальные фазы – 24,94 % от общего количества учтенных панцирных клещей со средней плотностью 32 080 экз./м<sup>2</sup>. Всего панцирных клещей (802 экз.) учтено в 1,6–1,01 раза больше по сравнению с северной и южной экспозициями, их имагинальные формы (602 экз.) в 1,7 раза больше, чем на северном склоне и в 1,13 раза меньше, чем на южном склоне, преимагинальные фазы (личинки и нимфы орибатид) (200 экз.) в 1,28–1,68 раза больше, чем на северном и южном склонах балки. Высокие показатели колебания численности панцирных клещей отображают небольшую разницу в их обилии и характерны для овражно-балочного рельефа целинных степей Донбасса [11].

Видовой состав орибатид на дне балки (62 вида) в 1,13 (55 видов) – 1,24 (50 видов) раза выше по сравнению с северной и южной экспозициями балки. Увеличение обилия и видового богатства панцирных клещей обусловлено более мощной растительной подстилкой, сохраняющей влагу поверхностного слоя почвы, чем создаются более благоприятные условия для обитания, развития видового спектра орибатид, в том числе и для сопутствующих почвенных обитателей. На дне балки обнаружено 12 видов панцирных клещей, которые не встречались на склонах балки; на северном склоне – 18 видов, которые не обнаружены на дне и южном склоне; на южном склоне – 16 видов, которые не отмечены на дне и северном склоне балки, что подтверждает различие условий обитания в исследуемых экотопах балки Климущанской.

На дне балки обнаружено 62 вида панцирных клещей, относящихся к 49 родам, 32 семействам. Доминировали 4 вида: *Fosseremaeus laciniatus* – 5,81 %, часто встречаемый на северном и редкий на южном склонах балки; *Microppia minus* – 15,28 %, доминировал в трех экотопах балки; *Discoppia cylindrica* – 6,15 %, преобладал на южном склоне, редкий на северном склоне; *Ceratozetes minutissimus* – редкий на южном склоне, не обнаружен на северном склоне. Часто встречались 10 и редко – 48 видов (см. таблицу). Как видно, доминирующие виды в исследуемых экотопах балки, по количеству доминантов, обилию проявляли себя по-разному. В одном экотопе они были единичны, либо не встречались, в другом часто встречались или доминировали, что, вероятно, зависит от биологических особенностей каждого вида, наличия пищевого субстрата и свойственных виду эдафических микроусловий обитания. Репродуктивных самок найдено 17 видов, содержащих в теле от 1 до 6 яиц: *Nothrus biciliatus* – 1 самка, 1 яйцо; *Trypochthonius tectorum* – 1 самка, 6 яиц; *Metabelba papillipes* – 1 самка, 4 яйца; *Fosseremaeus laciniatus* – 10 самок по 1 яйцу, 1 самка, 4 яйца, 1 самка, 2 яйца; *Zetorchestes micronychus* – 1 самка, 4 яйца; *Tectocephus velatus* – 1 самка, 2 яйца; *Zygoribatula exilis* – 4 самки по 1-2 яйца; *Z. frisiae* – 2 самки по 6 яиц; *Scheloribates latipes* – 6 самок по 4; 2 самки по 6 яиц; *Peloribates pilosus* – 4 самки по 6 яиц, 5 самок по 4 яйца, 2 самки по 2 яйца; *Protoribates monodactylus* – 2, 2, 2 самки по 2, 3, 4 яйца, соответственно; *Ceratozetes minutissimus* – 11 самок по 1 яйцу; *Ceratozetella sellniski*, *C. helenae* – 2 самки по 2 яйца; *Punctoribates zachvatkini* – 1 самка, 3 яйца; *Tectoribates ornatus* – 1 самка, 2 яйца; *Euphthiracarus cribrarius* – 2 самки по 2 яйца. На дне балки количество видов самок с яйцами увеличилось в 1,3 раза по сравнению с северным склоном, что обусловлено наличием более мощной травянистой подстилки, сохраняющей влагу верхнего горизонта почвенного покрова, необходимую для развития панцирных клещей.

В тальвеге балки на момент исследования обнаружено 18 таксономических групп сопутствующих почвообитателей – 658 экз. (45,07 %), плотность – 26 320 экз./м<sup>2</sup>, что в 1,97 раза больше, чем на северном склоне. Это, по-видимому, обусловлено наличием более мощной растительной подстилки и меньшей инсоляцией поверхностного слоя почвы. К доминирующим отнесены гамазовые клещи – 11,25 %, группа акариформных клещей – 33,28 %, коллемболы – 26,75 % и тля прикорневая – 14,74 % (единична на северном склоне, не обнаружена на южном склоне балки). Высокая численность прикорневой тли связана, очевидно, с мощной дерниной на дне балки, обуславливающей благоприятные условия для цикла развития данной группы насекомых. Часто встречались акароидные клещи в трех исследуемых экотопах балки. Остальные представители (олигохеты, гипопусы, краснотелковые клещи, симфилы, геофилы, поликсена лагурус, двухвостки, сеноеды, трипсы, муравьи, наездники, жуки, личинки насекомых) были в мае 2016 г. малочисленны, очевидно их цикл развития приурочен к более поздним срокам теплого периода года.

На южном склоне с преобладанием коневещно-злаковых растений и мощной дерниной в мае в 10 пробах учтено 1 207 экз., плотность – 48 280 экз./м<sup>2</sup>, что в 1,4 раза больше, чем на северном склоне и в 1,2 раза меньше по сравнению с тальвегом балки. В мае месяце отмечена небольшая разница в количественных характеристиках почвенного населения в поверхностном десятисантиметровом слое почвы целинной степи, где микроусловия обитания в эдафоне постоянно изменяются в зависимости от условий окружающей среды. Следует отметить, что панцирные клещи в почвенном зооценозе являются преобладающей группой членистоногих. В мае на южном склоне балки они составили 66,11 % (798 экз., плотность – 31 920 экз./м<sup>2</sup>) от общего числа учтенных почвообитателей. Взрослые формы (имаго) составили 85,09 % (679 экз., плотность – 27 160 экз./м<sup>2</sup>) от общего числа орибатид, что в 1,1–1,9 раза больше, чем в тальвеге и на северном склоне балки. Численность преимагинальных фаз орибатид была минимальной – 14,91 % (119 экз., плотность – 798 экз./м<sup>2</sup>), их численность в исследуемых экотопах в весенний период незначительно варьирует. По количеству видов больших изменений не наблюдается (55 – северный склон, 62 – тальвег, 50 – южный склон). Для южного склона характерны 16 видов, которые не встречались на северном склоне и в тальвеге балки. Из 50 видов орибатид на южном склоне, как и на северном склоне, доминировали по 2 вида: *Micropoppia minus* – 41,68 %, многочисленный вид для трех исследуемых экотопов; *Discoppia cylindrica* – 18,26 %, доминант тальвега и единичен на северном склоне балки. Часто встречались 8 и редко 40 видов (см. таблицу). Сопутствующие почвообитатели (13 таксономических групп) составили 33,89 % (409 экз., плотность – 16 360 экз./м<sup>2</sup>), что в 1,6 раза меньше, чем в тальвеге и в 1,2 больше, чем на северном склоне балки. Количественные характеристики почвенного зооценоза четко отражают различия условий обитания исследуемых экотопов в исследуемой целинной степи. Преобладали гамазовые клещи – 17,60 %, прочие семейства акариформных клещей – 31,75 %, коллемболы – 35,94 %. Часто встречались акароидные, краснотелковые клещи и диплоподы. Остальные представители (олигохеты, ложноскорпионы, гипопусы, симфилы, геофилы, кивсяки, личинки насекомых) были малочисленны (см. таблицу).

**Выводы.** Подводя итог исследований панцирных клещей и сопутствующих почвообитателей в условиях балки Климушанской, следует отметить общую высокую плотность почвенного населения – 46 692 экз./м<sup>2</sup> (в 30 пробах отмечено 3 502 экз.). Панцирные клещи составили 59,99 % (2 101 экз.) от общего количества почвенного населения со средней плотностью 28 012 экз./м<sup>2</sup>, что характерно для целинных степей [11]. Имагинальные формы орибатид характеризуются большим обилием – 77,39 % (1 626 экз., плотность – 21 680 экз./м<sup>2</sup>), преимагинальные фазы (личинки и нимфы орибатид) хорошо перенесли отрицательные температуры в зимний период и составили 22,61 % (475 экз., плотность – 6 332 экз./м<sup>2</sup>), их в 3,4 раза меньше, чем имаго. Превращение преимагинальных фаз во взрослые формы несомненно влияют на обилие панцирных клещей в поверхностном 10-сантиметровом слое почвы в весенний период.

В целом для трех экотопов балки Климушанской определено 99 видов панцирных клещей, относящихся к 65 родам и 40 семействам. В цикле развития ленточных червей из сем. Anoplocerphalidae могут принимать участие 11 видов орибатид. В целом для балки отмечены 3 доминирующих вида: *Sphaerocthonis dilutus* Serg. – 5,78 % (94 экз.), доминировал на северном склоне, часто встречался в тальвеге, редкий на южном склоне балки; *Micropoppia minus* (Paoli) – 26,38 % (429 экз.), доминировал в трех экотопах, но с высокой численностью на южном склоне балки (41,68 % – 283 экз.), что в 5,2–3,1 раза меньше, чем на северном и южном склонах; *Discoppia cylindrica* (Perez-Inigo) – 10,15 % (165 экз.), преобладал в тальвеге и на южном склоне, редко встречался на северном

склоне балки. Часто встречались 6 и редко – 90 видов. Высокая численность, обилие, богатый видовой спектр орибатид являются индикационными факторами необходимых эдафических условий пригодных для непрерывного размножения и развития панцирных клещей и сопутствующих почвенных обитателей, подавляющее большинство которых тесно связаны с подземной корневой системой разнообразной растительности целинной разнотравно-типчаково-ковыльной «Хомутовской степи».

Сопутствующих почвообитателей в 30 пробах учтено 1 401 экз. (40,01 %), плотность – 18 680 экз./м<sup>2</sup>, отмечено 22 таксономических группы, принимающих участие в формировании почвенного зооценоза целинной степи. В трех исследуемых экотопах преобладали свободноживущие гамазовые клещи – 14,35 %, сборная группа акариформных клещей – 33,33 %, коллемболы – 31,55 % и прикорневая тля – 7,14 %. Часто встречались акароидные клещи. Остальные представители (почвенные нематоды, олигохеты, пауки, ложноскорпионы, гипопусы, краснотелковые клещи, симфили, геофилы, *Polyxena lagurus*, кивсяки, двухвостки, сеноеды, трипсы, муравьи, наездники, жуки, личинки насекомых) были малочисленны (см. таблицу).

Максимальная степень фаунистического сходства исследуемых сообществ панцирных клещей отмечена между северным склоном и тальвегом балки – 60 %, между южным склоном и тальвегом – 57 %, минимальная – между северным и южным склонами балки – 44 %. Тальвег балки в фаунистическом аспекте орибатид является определенной преградой для некоторых видов орибатид, и в тоже время рефугиумом для видов обитающих только на дне балки, где эдафические условия более благоприятные для жизнедеятельности и развития орибатид и сопутствующих обитателей почвы. На дне балки скапливается травянистая растительная подстилка, по сравнению со склонами, сохраняющая влагу поверхностного слоя почвы и другие микроусловия для почвенного населения. В целом целинная степь заповедника обладает большим потенциалом сохранения почвенного населения в различных экотопах, влияющего на постоянно изменяющиеся сукцессионные процессы, имеющие большое значение в почвообразовании.

На территории заповедника «Хомутовская степь» 15 августа 2016 г. в 10<sup>30</sup> утра возник пожар (человеческий фактор), сгорел травостой на площади около 100 га. В балке Климушанской растительный покров выгорел примерно на 80–90 %. Известно, что низинные пожары выжигают напочвенный растительный покров. В жаркий период года выгорает и поверхностный слой почвенного покрова, особенно страдают почвообитатели поверхностного 5–10-сантиметрового слоя почвы. Восстановление естественного биоценоза после систематических пожаров занимает целые десятилетия и более. В пожарах гибнут мелкие беспозвоночные животные, птицы и гнезда птиц с кладкой яиц и птенцами, рептилии и мелкие млекопитающие, выгорает растительность и травянистая подстилка, исчезают редкие растительные сообщества, меняются условия обитания для микроартропод, формируется другая мезофауна. Учитывая это, в заповеднике необходимо исследовать причины возникновения степных пожаров, выявлять их закономерности, исследовать закономерности преобразования послепожарных степных экосистем в ходе сукцессионного процесса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев В.Н. Термины и понятия, необходимые при количественном изучении популяции эктопаразитов и нидиколов [Текст] / В.Н. Беклемишев // Зоол. журн. – 1961. – Т. 40, вып. 2. – С. 143–158.
2. Буланова-Захваткина Е.М. Сбор и исследование панцирных клещей [Текст] / Е.М. Буланова-Захваткина. – Москва: Изд-во АН СССР, 1952. – 29 с.
3. Гиляров М.С. Зоологический метод диагностики почв [Текст] / М.С. Гиляров. – Москва: Наука, 1975. – 491 с.

4. Гордеева Е.В. Изменения структуры комплексов панцирных клещей при сукцессионных изменениях степных фитоценозов [Текст] / Е.В. Гордеева // Исследования почв и почвенных режимов в степных биогеоценозах Приазовья : сб. науч. работ. – Пушино, 1977. – С. 79-98.
5. Кривоуццкий Д.А. Роль панцирных клещей в биогеоценозах [Текст] / Д.А. Кривоуццкий // Зоол. журн. – 1976. – Т. 55, вып. 2. – С. 226-236.
6. Осичнюк В.В. Зміни рослинності Хомутовського степу за 40 років [Текст] / В.В. Осичнюк // Укр. бот. журн. – 1966. – Т. 23, № 4. – С. 11.
7. Фасулати К.К. Полевое изучение наземных беспозвоночных [Текст] / К.К. Фасулати. – Москва : Высш. шк., 1971. – 424 с.
8. Штирц А.Д. Структура и динамика населения панцирных клещей (Acariformes, Oribatei) заповедника «Хомутовская степь» Донецкой области [Текст] / А.Д. Штирц // Изв. Харьков. энт. общ-ва. – 1999. – Т. VII, вып. 2. – С. 79-91.
9. Штирц А.Д. Структура и динамика населения панцирных клещей заповедных степей юго-востока Украины [Текст] / А.Д. Штирц, Н.Н. Ярошенко. – Донецк : Норд, 2003. – 269 с.
10. Ярошенко Н.Н. Панцирные клещи (Acariformes, Oribatei) целинной степи Приазовья [Текст] / Н.Н. Ярошенко // Вестн. зоол. – 1975. – № 4. – С. 63-67.
11. Ярошенко Н.Н. Оribатидные клещи (Acariformes, Oribatei) естественных экосистем Украины [Текст]: монография / Н.Н. Ярошенко. – Донецк: ДонГУ, 2000. – 313 с.

Поступила в редакцию 17.10.2016 г.

#### ORIBATID MITES AND RELATED SOIL MICROARTHROPODS OF GULCH «KLIMUSHANSKAYA» RESERVE «KHOMUTOVSKAYA STEPPE – MEOTIDA»

*N.N. Yarosenko*

99 species of oribatid mites from to 65 genera and 40 families were registered in the «Klimushanskaya» gulch in «Khomutovskaya Steppe – Meotida» reserve in May 2016. Three ecotopes (bottom, the northern and southern slopes of the gulch) were investigated. An average population density was 28012 ind./m<sup>2</sup>. The oribatid mite relative number was 59.99 % (2 101 ind.). 3 502 ind. of the soil microarthropods were collected (total density – 46 692 ind./m<sup>2</sup>). 3 species were dominant. *Sphaerochthonius dilutus* Serg. (5.78 % of the total number of imaginal oribatid forms) prevailed on the northern slope – 18.84 %, was often in the bottom – 4.32 %, was rare on the southern slope of the gulch – 0.44 %. *Microppia minus* (Paoli) (26.38 %) dominated in the bottom, on the northern and southern slopes of the gulch – 15.28 – 15.65 – 41.68 %, respectively. *Discoppia cylindrica* (Perez-Inigo) (10.15 %) was abundant on the southern slope – 18.26 % and bottom – 6.15 % and was rare of the gulch on the northern slope – 1.16 %. The maximal species diversity of the oribatid was marked in the bottom (62 species). The minimum species diversity was marked on the south slope of the gulch (50 species). The number of imaginal forms of the oribatid mites changed significantly depending on the exposure of the ecotope. The maximum of this parameter was marked on the southern slope – 679 ind. (27 160 ind./m<sup>2</sup>) and in the bottom – 602 ind. (24 080 ind./m<sup>2</sup>), the minimum was registered on the northern slope of the gulch – 345 ind. (13 800 ind./m<sup>2</sup>). Maximal density of immature forms (larvae and nymphs) of the oribatid mites was marked in the bottom – 200 ind. (8 000 ind./m<sup>2</sup>), the minimum of this parameter was registered on the northern slope of the gulch – 156 ind. (6 240 ind./m<sup>2</sup>). Other soil microarthropods density in three ecotopes reached to 40.01 % (1 401 ind., density – 18 680 ind./m<sup>2</sup>) with maximum in the bottom – 658 ind. (26 320 ind./m<sup>2</sup>) and minimum on the northern slope – 334 ind. (13 360 ind./m<sup>2</sup>). Gamasid mites and springtails was dominants.

**Keywords:** oribatid mites; species; density; gamasid mites; springtails.

**Ярошенко Николай Николаевич**

доктор биологических наук, профессор,  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
(г. Донецк), заведующий кафедрой зоологии  
и экологии,  
ул. Университетская, 24, 83001, г. Донецк.  
E-mail: eco-1999@mail.ru  
Тел.: (066) 0323631

**Yaroshenko Nikolay Nikolaevich**

Doctor of Biological Science, Professor,  
Donetsk National University (Donetsk), Head of the  
Department of Zoology and Ecology

*Научное издание*

**Вестник Донецкого национального университета.  
Серия А: Естественные науки**

**2016. – № 4**

Редактор: *Е.В. Алтухов*  
Технический редактор: *М.В. Фоменко*

Свидетельство о государственной регистрации № 362 от 18.01.2016 г.

---

Адрес редакции:  
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,  
ул. Университетская, 24,  
283001, г. Донецк  
Тел: (062) 302-92-56, 302-92-93  
E-mail: [vestnikdonnu\\_a@mail.ru](mailto:vestnikdonnu_a@mail.ru)  
URL: <http://donnu.ru/vestnikA>

---

Подписано в печать 28.11.2016 г.  
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.  
Печать – цифровая. Усл. печ. л. 15,4.  
Тираж 100 экз. Заказ. № 16-Дек268

ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»  
83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24  
Свидетельство о внесении субъекта издательской деятельности  
в Государственный реестр  
серия ДК № 1854 от 24.06.2004 г.