

---

---

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Калоеров С. А., Мироненко А. Б., Петренко О. А.</i> Аналитические решения задач вязкоупругости для изотропных пластинок с использованием принципа Вольтерра.....	7
<i>Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С.</i> Определение параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии.....	26
<i>Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А.</i> Определение перемещений берегов трех коллинеарных трещин в рамках модели Леонова-Панасюка .....	36
<i>Говоруха В. Б.</i> Расчет зоны взаимного перекрытия берегов межфазной трещины в кусочно-однородных пьезокерамических телах .....	45
<i>Сенченков И. К., Червинко О. П., Оксенчук Н. Д.</i> Термомеханическое импульсное нагружение диска с учетом влияния фазового состава материала на неупругие характеристики .....	51
<i>Жук Я. А., Оксенчук Н. Д., Доля Е. В.</i> Упрочнение цилиндра при импульсном тепловом нагружении с учетом мартенситных превращений .....	58
<i>Кирилюк В. С.</i> Точные решения задач термоэластостатики для пьезоэлектрического материала с внутренней круговой трещиной .....	64
<i>Левчук О. И.</i> Контактное взаимодействие электроупругого полупространства с вогнутым осесимметричным жестким штампом ....	73
<i>Хома И. Ю., Дашко О. Г.</i> Исследование напряженного состояния трансверсально изотропной пластины с эллиптическим отверстием при заданных сдвигающих усилиях .....	81
<i>Кипнис Л. А., Хазин Г. А., Полищук Т. В., Кипнис А. Л.</i> О предельном равновесии кусочно-однородного тела с межфазными трещинами в угловой точке при сжатии .....	91
<i>Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В.</i> Разветвление трещины нормального отрыва в угловой точке границы раздела сред .....	101

<i>Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б.</i> Принцип Сен-Венана в задачах для многосвязной полуплоскости с загруженной прямолинейной границей.....	112
<i>Исрафилов Р. М., Савельева Е. В.</i> Приведенные коэффициенты Пуассона в направлении, перпендикулярном плоскости трехслойной пластины с ортотропным наполнителем .....	121
<i>Фоменко М. В.</i> Колебания трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах и скользящего контакта слоев.....	130
<i>Шалдырван В. А., Ержаков Г. В.</i> Равномерное вращение трансформной пластины .....	142

---

---

З М І С Т

<i>Калоеров С. О., Мироненко А. Б., Петренко О. О.</i> Аналітичні розв'язки задач в'язкоупружності для ізотропних пластинок з використанням принципу Вольтерра .....	7
<i>Голуб В. П., Кобзар Ю. М., Рагуліна В. С.</i> Визначення параметрів ядер спадковості ізотропних нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану .....	26
<i>Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О.</i> Визначення переміщень берегів трьох колінарних тріщин у межах моделі Леонова-Панасюка .....	36
<i>Говоруха В. Б.</i> Розрахунок зони взаємного перекриття берегів міжфазної тріщини в кусково-однорідних п'езокерамічних тілах .....	45
<i>Сенченков І. К., Червінко О. П., Оксенчук Н. Д.</i> Термомеханічне імпульсне навантаження диска із врахуванням впливу фазового складу матеріалу на непружні характеристики .....	51
<i>Жук А. Я., Оксенчук Н. Д., Доля Е. В.</i> Упрочнение цилиндра при імпульсному тепловому нагріванні з урахуванням мартенситних превращень .....	58
<i>Кирилюк В. С.</i> Точні розв'язки задач термоелектропружності для п'езоелектричного матеріалу з внутрішньою круговою тріщиною .....	64
<i>Левчук О. І.</i> Контактна взаємодія електропружного півпростору з вигнутим осесиметричним жорстким штампом .....	73
<i>Хома І. Ю., Дашко О. Г.</i> Дослідження напруженого стану трансверсально ізотропної пластини з еліптичним отвором при заданих зсувних зусиллях .....	81
<i>Кіпніс Л. А., Хазін Г. А., Поліщук Т. В., Кіпніс О. Л.</i> Про граничну рівновагу кусково-однорідного тіла з міжфазними тріщинами в кутовій точці при стиску .....	91
<i>Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В.</i> Розгалуження тріщини нормального відриву у кутовій точці межі поділу середовищ .....	101

<i>Калоєров С. О., Авдюшина О. В., Міроненко А. Б.</i> Принцип Сен-Венану в задачах для багатозв'язної півплощини з завантаженою прямолінійною границею .....	112
<i>Ісрафілов Р. М., Савельєва К. В.</i> Пиведені коефіцієнтии Пуасона в напрямку, перпендикулярному площині тришарової пластини з ортотропним заповнювачем .....	121
<i>Фоменко М. В.</i> Коливання тришарових пластин у випадку змішаних граничних умов на торцях і ковзного контакту шарів .....	130
<i>Шалдирван В. А., Єржаков Г. В.</i> Рівномірне обертання транс-тропної пластини.....	142

**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

*Scientific journal*  
№ 5 (51)

Founded in 1970  
Donetsk 2012

---

**CONTENTS**

<i>Kaloerov S.A., Mironenko A.B., Petrenko O.A.</i> Analytical solutions for the problems of viscoelastic isotropic plates using the principle of Volterra .....	7
<i>Golub V. P., Kobzar' Yu. M., Ragulina V. S.</i> Hereditary kernel parameters determination of isotropic nonlinear viscoelastic materials under the complex stress state .....	26
<i>Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chornoivan Y. O.</i> Determining of three collinear cracks opening displacement using the strip-yield model .....	36
<i>Govorukha V. B.</i> Estimation of the interpenetration zone for the open model of the interface crack between two piezoelectric materials	45
<i>Senchenkov I. K., Chervinko O. P., Oksenchuk N. D.</i> Pulse thermomechanical loading of the disk with the influence of the phase state of the material on inelastic characteristics.....	51
<i>Zhuk Y. A., Oksenchuk N. D., Dolja E. V.</i> Hardening of the cylinder under a pulse heat irradiation with the influence a martensite transformation .....	58
<i>Kirilyuk V. S.</i> Exact solutions of thermoelectroelasticity problems for a piezoelectric material with the inner circular crack .....	64
<i>Levchuk O. I.</i> Contact interaction of the electroelastic halfspace with concave axesymmetric rigid punch .....	73
<i>Khoma I. Yu., Dashko O. G.</i> A stress-state analysis for a transversely isotropic plate with an elliptical hole subjected to the shearing forces .....	81
<i>Kipnis L. A., Khazin G. A., Polishchuk T. V., Kipnis A. L.</i> On the limit equilibrium of the piece-homogeneous body with interfacial cracks at the corner point under the compression .....	91
<i>Dudyk M. V., Dikhtiarenko Yu. V.</i> Branching of a mode I crack at an angular point of an interface.....	101

<i>Kaloerov S. A., Avdyushina E. V., Mironenko A. B.</i> The Saint-Venant's principle in the problem for multiply half-plane with loaded rectilinear boundary .....	112
<i>Israfilov R. M., Savelieva K.V.</i> Resulted Poisson rations in direction perpendicular to the plane of the three- layer plate with an orthotropic filler .....	121
<i>Fomenko M.V.</i> Vibrations of three-layer plates with mixed-boundary conditions at their ends and sliding contact of layers .....	130
<i>Shaldyrvan V.A., Erzhakov G.V.</i> Uniform rotation of transtropic plate .....	142

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,  
А. Б. МИРОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук,  
О. А. ПЕТРЕНКО

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА ВОЛЬТЕРРА

*Даны точные аналитические решения ряда задач теории упругости и термоупругости для вязкоупругих изотропных пластинок. С использованием принципа Вольтерра дано исследование их напряженного состояния во времени.*

*Ключевые слова:* принцип Вольтерра, изотропная пластинка, вязкоупругость, пластинка с отверстием, круговое кольцо.

Возникающие под действием внешних сил и температурных полей напряжения и деформации в вязкоупругих телах со временем меняют свои значения. Для определения значений этих величин в любой момент времени после приложения внешнего воздействия часто используется принцип Вольтерра. По этому принципу для определения значений напряжений и деформаций в упругом теле в любой момент времени необходимо в выражениях для этих величин упругие постоянные материала заменять операторными выражениями и найти результат действия операторов для соответствующего момента времени.

К настоящему времени разработаны различные приложения принципа Вольтерра к решению задач теории упругости и термоупругости [3 – 8, 11]. Но в каждый раз возникает необходимость оценки получаемых тем или другим подходом результатов на достоверность. И здесь большую помощь исследователям могут оказать точные решения задач с использованием принципа Вольтерра. В данной статье такие точные аналитические решения даны для ряда задач теории упругости и термоупругости в случае изотропных пластинок и непосредственное применение к ним принципа Вольтерра.

**1. Основные соотношения теории упругости и термоупругости для изотропных пластинок.** Рассмотрим находящуюся под действием внешних сил и температурных полей конечную изотропную пластинку, занимающую область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ). Как частный, когда контур  $L_0$  уходит полностью в бесконечность, будем рассматривать случай бесконечной пластинки с отверстиями. В последнем случае будем считать, что на бесконечности заданы напряжения  $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy}^\infty$  и угол поворота всей пластинки как целого  $\varepsilon^\infty$ , а также условия на температуру – либо она на бесконечности ограничена, либо задан однородный тепловой поток плотности  $q$ , направ-

ленный под произвольным углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ .

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемой пластинки при учете действия температурных полей сводится к решению двух задач: задачи теплопроводности, а затем задачи термоупругости. Если же температурное поле не действует, то необходимо решать только задачу теории упругости.

*Решение задачи теплопроводности.* Решение стационарной задачи теплопроводности для изотропной пластинки сводится к нахождению функции комплексного переменного  $F(z)$  из соответствующих граничных условий. Если эта функция определена, то температура вычисляется по формуле [1, 2]

$$T(x, y) = T_H + T^*(x, y) + 2 \operatorname{Re} F(z), \quad (1.1)$$

где  $T_H$  – начальная температура в пластинке, при которой в ней отсутствуют напряжения и деформации;

$$T^*(x, y) = \frac{q}{k} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \quad (1.2)$$

функция распределения температуры в сплошной пластинке от действия однородного потока тепла;  $k$  – коэффициент теплопроводности для материала пластинки;  $F(z)$  – аналитическая функция комплексного переменного, причем в общем случае многосвязной области

$$F(z) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R \delta_r \ln(z - z_r^0) + F_0(z); \quad (1.3)$$

$c_0$  – постоянная, равная нулю в случае конечной области и определяемая из граничных условий, когда область бесконечна;

$$D_l = -q_l/4\pi k, \quad \delta_r = -q_r^0/4\pi k; \quad (1.4)$$

$q_l$  – суммарный поток тепла через контур  $L_l$  в пластинку;  $z_l$  – аффикс произвольной точки внутри контура  $L_l$ ;  $q_r^0$  – мощность сосредоточенного источника тепла, действующего в точке  $z_r^0$ ;  $F_0(z)$  – функция, голоморфная в рассматриваемой многосвязной области  $S$ , включая точки действия сосредоточенных источников тепла, а в случае бесконечной области и точку  $z = \infty$ . При этом для бесконечной области имеет место равенство

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l + \sum_{r=1}^R \delta_r = 0, \quad (1.5)$$

следующее из ограниченности возмущенной температуры в точке  $z = \infty$ .

Комплексный потенциал на границе области удовлетворяет определенным условиям, например, если на контуре  $L_l$  задана температура  $T_l$ , то

$$2 \operatorname{Re} F(z) = T_l - T^* - T_H \quad (1.6)$$

*Решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния.* Определение напряженно-деформированного состояния изотропной пластинки сводится к нахождению функций комплексного переменного  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  из соответствующих граничных условий. Если эти функции найдены, то напряжения и перемещения вычисляются по формулам [1, 2, 10]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z), \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]; \quad (1.7)$$

$$u + iv = \frac{1}{2\mu} \left[ \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \beta \int F(z) dz \right] + (u^* + iv^*) + i\varepsilon z + u_0 + iv_0, \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \beta = \frac{2\alpha_T E}{1+\nu}; \\ u^*(x, y) &= \frac{q\alpha_T}{k} \left( \frac{x^2 - y^2}{2} \cos \alpha + xy \sin \alpha \right), \\ v^*(x, y) &= \frac{q\alpha_T}{k} \left( \frac{y^2 - x^2}{2} \sin \alpha + xy \cos \alpha \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $i\varepsilon z + u_0 + iv_0$  – жесткое перемещение пластинки, как целого.

В общем случае многосвязной области функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma_1 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_l z + B_{Ml} + B_{Tl}) \ln(z - z_l) + \\ &+ \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_r^0 z + B_{Mr}^0 + B_{Tr}^0) \ln(z - z_r^0) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma_2 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (-\varkappa \bar{B}_{Ml} + \bar{B}_{Tl}) \ln(z - z_l) + \\ &+ \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (-\varkappa \bar{B}_{Mr}^0 + \bar{B}_{Tr}^0) \ln(z - z_r^0) + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (1.10)$$

в котором  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  – постоянные, равные нулю в случае конечной области и определяемые выражениями

$$\Gamma_1 = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} + i \frac{2\mu\varepsilon^\infty}{1+\varkappa}, \quad \Gamma_2 = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + i\tau_{xy}^\infty$$

в случае бесконечной области;

$$A_l = -\frac{\alpha_T E D_l}{2}, \quad B_{Ml} = -\frac{X_l + iY_l}{2\pi(1+\alpha)}, \quad B_{Tl} = \frac{\alpha_T E}{2}(z_l D_l - c_{l1})$$

$$A_r^0 = -\frac{\alpha_T E D_r^0}{2}, \quad B_{Mr}^0 = -\frac{X_r^0 + iY_r^0}{2\pi(1+\alpha)}, \quad B_{Tr}^0 = -\frac{\alpha_T E}{2} z_r^0 D_r^0$$

$X_l, Y_l$  – компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к контуру отверстия  $L_l$ ;  $z_l$  – аффикс произвольной точки внутри этого контура;  $X_r^0, Y_r^0$  – компоненты сосредоточенной силы во внутренней точке  $z_r^0$  пластинки;  $c_{l1}$  – вычет функции  $F(z)$  в точке  $z_l$ ;  $\varphi_0(z), \psi_0(z)$  – функции, голоморфные в многосвязной области  $S$ , включая точки приложения сосредоточенных сил и источников тепла, а в случае бесконечной области и точку  $z = \infty$ .

Для определения комплексных потенциалов в случае первой или второй основных задач теории упругости граничные условия имеют вид

$$s_l \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = \beta_l \int_0^s F(t) dt + f(t). \quad (1.11)$$

При этом, в случае первой основной задачи

$$s_l = -1, \quad \beta_l = 0, \quad f(t) = \pm i \int_0^s (X_n + iY_n) ds, \quad (1.12)$$

$X_n, Y_n$  – проекции внешних сил на контуре  $L_l$ , верхний знак принимается для внешнего контура области, нижний – для контуров отверстий. Для второй основной задачи

$$s_l = \alpha, \quad \beta_l = -\beta, \quad f(t) = 2\mu(u_* - u^* + i(v_* - v^*)),$$

где  $u_*, v_*$  – заданные на границе перемещения.

**2. Использование принципа Вольтера для исследования вязкоупругого состояния тел.** Используя указанные соотношения, найдем точные аналитические решения ряда задач и применим к этим решениям принцип Вольтера, т.е. заменим в них коэффициент Пуассона и модуль Юнга соответствующими операторными выражениями, которые позволяют учитывать изменение упругих постоянных во времени. Коэффициент Пуассона и модуль Юнга через операторы Работнова Ю.Н. записываются в виде

$$v^* = v^0 \left(1 + \delta_v \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_v)\right), \quad (2.1)$$

$$E^* = E^0 \left(1 - \delta_E \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_E - \delta_E)\right), \quad (2.2)$$

где  $v^0, E^0$  – мгновенно-упругие значения соответствующих упругих величин;  $\alpha, \beta, \delta$  – реологические постоянные, связанные с изменением

соответствующих упругих постоянных. При этом действие оператора Работнова  $\mathcal{E}_\rho^*(-\tau)$  на единицу находится по формуле [11]

$$\mathcal{E}_\rho^*(-\tau) \cdot 1 = \frac{1}{\tau} \left[ 1 - e^{-\tau[(1-\rho)t]^{1-\rho}} \right]. \quad (2.3)$$

Но в силу принятой в мировой литературе концепции постоянства модуля объемной деформации

$$K = E/(3 - 6\nu) \quad (2.4)$$

можно выразить коэффициент Пуассона через модуль Юнга и наоборот [4, 5]

$$E = 3K(1 - 2\nu), \quad \nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{6K} E. \quad (2.5)$$

Таким образом выражения напряжений будут содержать только одну изменяющуюся во времени упругую постоянную  $\nu$  или  $E$ . При этом, если операторное выражение для одного из них известно, то можно найти операторное выражение для второго. Например, зная операторное выражение коэффициента Пуассона  $\nu$ , для модуля Юнга  $E$  находим

$$E^* = 3K \left[ 1 - 2\nu^0 \left( 1 + \delta_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu) \right) \right], \quad (2.6)$$

из которого следует, что

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{3K^0} \left[ 1 + \delta_E \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_E) \right], \quad (2.7)$$

где  $\beta_E = \beta - \frac{2\nu_0\delta}{1-2\nu_0}$ ,  $\delta_E = \frac{2\nu_0\delta}{1-2\nu_0}$ .

**3. Решения задач для кругового диска.** Рассмотрим круглую изотропную пластинку радиуса  $R$  (рис. 1), находящуюся под действием равномерно растягивающих усилий интенсивности  $p$  по внешнему контуру  $L_0$  или постоянной температуры  $T_0$  на этом контуре. В этом случае голоморфные в круге функции можно представить рядами Тейлора, и комплексные потенциалы примут вид

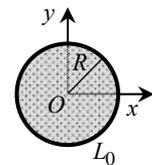


Рис. 1

$$\begin{aligned} F(z) = F_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \\ \psi(z) = \psi_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае растяжения диска без учета температуры функция  $F(z)$  равна нулю, проекции усилий по контуру на оси координат  $X_n = p \cos nx = p \frac{dy}{ds}$ ,  $Y_n = p \cos ny = -p \frac{dx}{ds}$ . Учитывая, что на контуре диска

$t = Re^{i\theta} = R\sigma$ , и применяя метод рядов, из граничных условий (1.11) найдем

$$a_1 = p/2, \quad b_1 = a_n = b_n = 0 \quad (n \geq 2).$$

Для функций и напряжений получим

$$\varphi(z) = \frac{p}{2}z, \quad \psi(z) = 0; \quad \sigma_x = \sigma_y = p, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.2)$$

Как видно, напряжения не зависят от упругих постоянных, и по принципу Вольтерра они во времени не изменяются.

Пусть теперь внешние силы отсутствуют, и на контуре диска поддерживается отличная от нуля постоянная температура  $T_0$ . В этом случае из условий (1.6), (1.11) методом рядов найдем [9]

$$c_0 = \frac{T_0}{2}, \quad a_1 = \frac{\beta_0 T_0}{2(s_0 - 1)}, \quad c_1 = b_1 = c_n = a_n = b_n = 0 \quad (n \geq 2). \quad (3.3)$$

Тогда функции будут такими:

$$F(z) = \frac{T_0}{2}, \quad \varphi(z) = \frac{\beta_0 T_0}{2(s_0 - 1)}z, \quad \psi(z) = 0,$$

а для напряжений найдем

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\beta_0 T_0}{s_0 - 1}, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.4)$$

Для неподкрепленного контура  $s_0 = -1$ ,  $\beta_0 = 0$ , поэтому

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Ясно, что равные нулю напряжения не зависят от упругих постоянных и по принципу Вольтерра они во времени не изменяются. Для жестко подкрепленного контура  $s_0 = \alpha$ ,  $\beta_0 = -\beta$  и, следовательно,

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\beta T_0}{\alpha - 1} = -\frac{\alpha_T E T_0}{1 - \nu}, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.5)$$

Используя (2.5), напряжения можно записать через  $E$  или через  $\nu$ :

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{6K\alpha_T T_0}{1 + \frac{3K}{E}} \quad (3.6)$$

или

$$\sigma_x = \sigma_y = -3\alpha_T K T_0 \left( 2 - \frac{1}{1 - \nu} \right). \quad (3.7)$$

Исследуем изменения во времени. Заменив постоянные  $\nu$  и  $1/E$  в

формулах (3.6) и (3.7) их временными операторами (2.1), (2.7), найдем

$$\sigma_x = \sigma_y = -3K^0 \alpha_T T_0 \left[ 1 - \frac{\delta_E}{2} \mathcal{E}_\alpha^* \left( -\beta_E - \frac{\delta_E}{2} \right) \right]; \quad (3.8)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -3\alpha_T K^0 T_0 \left( 2 - \frac{1}{1-v^0} \left[ 1 + \frac{v^0 \delta_v}{1-v^0} \mathcal{E}_\alpha^* \left( -\beta_v + \frac{v^0 \delta_v}{1-v^0} \right) \right] \right), \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{E}_\alpha^*$  – оператор вида (2.3).

Таким образом, при нахождении значений напряжений в некоторый момент времени можно пользоваться либо формулой (3.8), либо (3.9).

Были проведены численные исследования изменения напряжений в зависимости от времени для пластинки из алюминия или меди. Теплофизические и реологические постоянные этих материалов приведены в

Таблица 1

Материал	Постоянные							
	$E, \text{ МПа}$	$K, \text{ МПа}$	$\nu$	$\alpha_T \cdot 10^{-5}, \text{ К}^{-1}$	$k, \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$	$\alpha_\nu, \text{ с}^{-0,5}$	$\beta_\nu \cdot 10^3, \text{ с}^{-0,5}$	$\delta_\nu \cdot 10^3, \text{ с}^{-0,5}$
Алюм.	71000	47333	0,25	2,38	0,2095	0,5	6,65	6,15
Медь	123000	128125	0,34	1,65	0,3840	0,5	9,20	6,65

табл. 1 [12]. При вычислении напряжений использовались формулы (3.8) и (3.9), т.е. через модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Как и следовало ожидать они приводят к одинаковым числовым результатам. Поэтому при исследованиях напряженно-деформированного состояния нет необходимости получать выражения напряжений через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  одновременно. Достаточно лишь через один из них.

В табл. 2 даны значения напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  в точках (во всех точках диска напряжения одинаковы) с точностью до  $\{T_0\}$  как множителя. Здесь и далее  $\{ \}$  обозначают значение температуры в  $K$ . Как видно из данных табл. 2, напряжения в диске с подкрепленным контуром при действии температуры с течением времени изменяются. Приблизительно через 200 час в пластинке устанавливается стационарное состояние, после которого значения напряжений практически не изменяются. Но значительные изменения напряжений происходят лишь в начальный период загрузки, в течение первых 50 час. При переходе в стационарное состояние значения напряжений претерпевают значительные изменения, так для алюминия они изменяются на 44%,

Таблица 2

$t, \text{ час.}$	Материал	
	Алюминий	Медь
0	-2,2530	-3,0750
10	-2,7112	-4,0586
20	-2,8321	-4,2894
30	-2,9060	-4,4225
40	-2,9579	-4,5119
50	-2,9967	-4,5767
60	-3,0277	-4,6258
70	-3,0528	-4,6444
80	-3,0733	-4,6954
90	-3,0906	-4,7208
100	-3,1054	-4,7419
200	-3,2372	-4,8948
400	-3,2372	-4,8948

для меди – на 51%.

**4. Решения задач для пластинки с круговым отверстием.** Рассмотрим бесконечную изотропную пластинку с круговым отверстием (рис. 2), находящуюся под действием температурного поля и внешних усилий. Обозначим радиус отверстия и его контур через  $R$  и  $L_1$ . В этом случае голоморфные вне круга комплексные потенциалы можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням  $z$ :

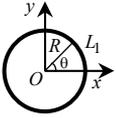


Рис. 2

$$F(z) = F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{1n}}{z^n}, \quad \varphi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1n}}{z^n}, \quad \psi_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{1n}}{z^n}. \quad (4.1)$$

Пусть температурные воздействия отсутствуют, на бесконечности  $\sigma_x^\infty = p$ ,  $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \varepsilon^\infty = 0$ . В этом случае функция  $F(z)$  равна нулю, а для функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  имеют место выражения

$$\varphi(z) = \Gamma_1 z + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \Gamma_2 z + \psi_0(z), \quad (4.2)$$

где  $\Gamma_1 = p/4$ ,  $\Gamma_2 = -p/2$ . Подставляя функции (4.2) в граничные условия (1.11), учитывая, что на контуре отверстия  $t = R e^{i\theta} = R\sigma$ , и применяя метод рядов, найдем

$$a_{11} = -\frac{R^2}{2s_1} p, \quad b_{11} = \frac{(s_1 - 1) R^2}{4} p, \quad b_{13} = -\frac{R^4}{2s_1} p, \\ a_{12} = a_{13} = b_{12} = a_{1n} = b_{1n} = 0 \quad n \geq 4.$$

Тогда для функций будем иметь

$$\varphi(z) = \frac{p}{4} z - \frac{p R^2}{2s_1} \frac{1}{z}, \quad \psi(z) = -\frac{p}{2} z + \frac{p(s_1 - 1) R^2}{4} \frac{1}{z} - \frac{p R^4}{2s_1} \frac{1}{z^3}, \quad (4.3)$$

а для напряжений в точках контура, где  $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $\theta$  – центральный угол, получим

$$\sigma_x + \sigma_y = p \left[ 1 + \frac{2}{s_1} \cos 2\theta \right], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p \left[ -\frac{2}{s_1} (\cos \theta - i \sin \theta)(\cos 3\theta - i \sin 3\theta) - 1 - \right. \\ \left. - \frac{s_1 - 1}{2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + \frac{3}{s_1} (\cos 4\theta - i \sin 4\theta) \right]. \quad (4.4)$$

Если контур отверстия не подкреплён (задача Кирша), то  $s_1 = -1$ ,

$$\sigma_x + \sigma_y = p[1 - 2 \cos 2\theta], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p[2(\cos \theta - i \sin \theta)(\cos 3\theta - i \sin 3\theta) - 1 -$$

$$+(\cos 2\theta - i \sin 2\theta) - 3(\cos 4\theta - i \sin 4\theta)]. \quad (4.5)$$

Видно, что формулы для напряжений не содержат упругих постоянных и по принципу Вольтера эти величины не меняются со временем.

Если контур отверстия жестко подкреплён, то  $s_1 = \alpha$ , из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= p \left[ 1 + \frac{2}{\alpha} \cos 2\theta \right], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= p \left[ -\frac{2}{\alpha} (\cos \theta - i \sin \theta) (\cos 3\theta - i \sin 3\theta) - 1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha - 1}{2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + \frac{3}{\alpha} (\cos 4\theta - i \sin 4\theta) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для точки  $\theta = 0$  из (4.6) получаем

$$\sigma_x + \sigma_y = p \left[ 1 + \frac{2}{\alpha} \right], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha - 1}{2} - 1 \right] \quad (4.7)$$

или

$$\sigma_x = \frac{p}{2} \left[ 2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{2} \right], \quad \sigma_y = \frac{p}{2} \left[ \frac{3}{\alpha} - \frac{\alpha - 1}{2} \right], \quad \tau_{xy} = 0. \quad (4.8)$$

Учитывая, что  $\alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ , для напряжений (4.8) получим

$$\sigma_x = p \left[ \frac{2}{3 - \nu} + \frac{1}{1 + \nu} \right], \quad \sigma_y = p \left[ -1 + \frac{6}{3 - \nu} - \frac{1}{1 + \nu} \right]; \quad (4.9)$$

$$\sigma_x = p \left[ 3 - \frac{6}{3 - \nu} - \frac{1}{1 + \nu} \right], \quad \sigma_y = p \left[ -2 + \frac{6}{3 - \nu} + \frac{1}{1 + \nu} \right]. \quad (4.10)$$

Заменяя в формулах для  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  коэффициент Пуассона  $\nu$  временным оператором (2.1) и расшифровав операторные функции, получим выражения напряжений для любого момента времени:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{1 + \nu^0} \left[ 1 - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{2p}{3 - \nu^0} \left[ 1 + \frac{\nu^0 \delta_\nu}{3 - \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu + \frac{\nu^0 \delta_\nu}{3 - \nu^0} \right) \right], \\ \sigma_y &= -p - \frac{p}{1 + \nu^0} \left[ 1 - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] - \\ &\quad + \frac{6}{3 - \nu^0} \left[ 1 + \frac{\nu^0 \delta_\nu}{3 - \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu + \frac{\nu^0 \delta_\nu}{3 - \nu^0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В табл. 3 для пластинки с круговым отверстием в зависимости от

Таблица 3

$t$ , час.	Алюминий		Медь	
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
0	1,5273	0,3818	1,4981	0,5094
10	1,4831	0,5902	1,4609	0,7704
20	1,4761	0,6349	1,4580	0,8133
30	1,4730	0,6596	1,4572	0,8341
40	1,4712	0,6756	1,4571	0,8464
50	1,4702	0,6869	1,4572	0,8543
60	1,4695	0,6952	1,4573	0,8597
70	1,4691	0,7016	1,4575	0,8635
80	1,4688	0,7043	1,4577	0,8663
90	1,4686	0,7066	1,4578	0,8685
100	1,4685	0,7084	1,4580	0,8701
200	1,4685	0,7106	1,4590	0,8775
400	1,4689	0,7106	1,4590	0,8775

времени с точностью нагрузки  $p$  приведены значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в точке, соответствующей центральному углу  $\theta = 0$ . Приблизительно через 200 час в пластинке устанавливается стационарное состояние. Но значительные изменения напряжений происходят лишь в начальный период загрузки, в первые 30 час. При переходе в стационарное состояние значения напряжений претерпевают изменения, так  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  для пластинки, изготовленной из алюминия изменяются на 4% и 86%, а для пластинки из меди — на 3% и 72%.

Пусть теперь пластинка с круговым отверстием находится под действием однородного потока тепла плотности  $q$ , направленного по оси  $Ox$ , т. е. поток тепла направлен под углом  $\alpha = 0$ . На контуре отверстия  $L_1$  задана температура  $T_1$ . Учитывая, что в этом случае  $T^* = qx/k$ , подставляя функцию  $F(z)$  в виде (4.1) в граничное условие (1.6) и применяя метод рядов, получаем [1, 2]

$$c_{10} = \frac{T_1}{2}, \quad c_{11} = -\frac{qR^2}{2k}, \quad c_{1n} = 0 \quad (n > 1).$$

Тогда

$$\int F(z) dz = c_{10}z + c_{11} \ln z, \quad B_{T1} = \frac{\alpha_T q R^2 E}{4k}.$$

Поэтому комплексные потенциалы (1.10) имеют вид

$$\varphi(z) = B_{T1} \ln z + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = B_{T1} \ln z + \psi_0(z). \quad (4.12)$$

Подставив функции (4.12) в условие (1.11), методом рядов найдем

$$b_{11} = -\beta_1 c_{10} R^2, \quad b_{12} = -B_{T1} R^2, \quad a_{11} = a_{12} = a_{1n} = b_{1n} = 0 \quad (n \geq 3).$$

Функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  будут такими:

$$\varphi(z) = B_{T1} \ln z, \quad \psi(z) = B_{T1} \ln z + \frac{b_{11}}{z} + \frac{b_{12}}{z^2},$$

а для напряжений найдем

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{B_{T1}}{R} \cos \theta,$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[ \frac{B_{T1}}{R} (\cos \theta - i \sin \theta) - \frac{\beta_1 T_1}{2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) + 2 \left( \frac{B_{T1}}{R} - \mu R \right) (\cos 3\theta - i \sin 3\theta) \right]. \quad (4.13)$$

Если контур отверстия не подкреплён, то  $s_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 0$ , и для напряжений в точке  $\theta = 0$  будем иметь

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{B_{T1}}{R}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[ 3 \frac{B_{T1}}{R} - 2\mu R \right]. \quad (4.14)$$

Решив полученную систему, найдем

$$\sigma_x = 2\mu R - \frac{B_{T1}}{R}, \quad \sigma_y = \frac{5B_{T1}}{R} - 2\mu R, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (4.15)$$

Заменив в последнем выражении упругие постоянные  $E$  и  $\nu$  их временными операторами и расшифровав операторные функции, для напряжений получим выражения напряжений для любого момента времени:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 3RK^0 \left[ 1 - 2\nu^0 \left( 1 + \delta_\nu \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_\nu) \right) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{1 + \nu^0} \left[ 1 - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \mathcal{E}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] - \frac{\alpha_T q}{4k} \right\}, \\ \sigma_y &= 3RK^0 \left[ 1 - 2\nu_0 \left( 1 + \delta_\nu \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_\nu) \right) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{5\alpha_T q}{4k} - \frac{1}{1 + \nu^0} \left[ 1 - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \mathcal{E}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В табл. 4 для пластинки с круговым неподкрепленным отверстием в зависимости от времени с точностью до множителя  $q$  как множителя приведены значения напряжений  $\sigma_y$  в точке, соответствующей центральному углу  $\theta = 0$ . Приблизительно через 200 час в пластинке устанавливается стационарное состояние. Но значительные изменения напряжений происходят лишь в первые 30–40 час. При переходе в стационарное состояние значения напряжений  $\sigma_s$  изменяются, так для пластинки изготовленной из алюминия эти изменения составляют 10%, а для пластинки из меди – 18%.

Если же контур отверстия жестко подкреплён, то  $s_1 = \alpha$ ,  $\beta_1 = -\beta$ , и для напряжений в точке  $\theta = 0$  из (4.13) будем иметь

$t$ , час.	Материал	
	Алюм.	Медь
0	8,0659	5,2852
10	7,6102	4,5949
20	7,5225	4,4920
30	7,4770	4,4446
40	7,4490	4,4180
50	7,4303	4,4016
60	7,4171	4,3908
70	7,4075	4,3834
80	7,4002	4,3782
90	7,3947	4,3744
100	7,3903	4,3716
200	7,3902	4,3631
400	7,3902	4,3621

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{B_{T1}}{R}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[ 3 \frac{B_{T1}}{R} + \frac{\beta T_1}{2} - 2\mu R \right]. \quad (4.17)$$

Учитывая, что  $B_{T1} = \alpha_T q R^2 E / 4k$ ,  $\mu = E/2(1 + \nu)$  и  $\beta = 2\alpha_T E / (1 + \nu)$  из (4.17) для  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= RE \left( \frac{R - \alpha_T T_1}{R} \frac{1}{1 + \nu} - \frac{\alpha_T q}{4k} \right), \\ \sigma_y &= RE \left( \frac{5\alpha_T q}{4k} - \frac{R - \alpha_T T_1}{R} \frac{1}{1 + \nu} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Заменив здесь упруги постоянные  $E$  и  $\nu$  их временными операторами и расшифровав операторные функции, для напряжений получим выражения напряжений для любого момента времени:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 3RK^0 \left[ 1 - 2\nu^0 \left( 1 + \delta_\nu \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_\nu) \right) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{R - \alpha_T T_1}{R(1 + \nu^0)} \left[ 1 - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] - \frac{\alpha_T q}{4k} \right\}, \\ \sigma_y &= 3RK^0 \left[ 1 - 2\nu_0 \left( 1 + \delta_\nu \mathfrak{D}_\alpha^* (-\beta_\nu) \right) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{5\alpha_T q}{4k} - \frac{R - \alpha_T T_1}{R(1 + \nu^0)} \left[ 1 - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В табл. 5 для пластинки с жестко подкрепленным отверстием в зависимости от времени с точностью до множителя  $q$  приведены значения

Таблица 5

$t$ , час.	Алюминий		Медь	
	$\sigma_n$	$\sigma_s$	$\sigma_n$	$\sigma_s$
0	6,4527	1,6132	3,9441	1,3410
10	2,5389	2,4937	-0,4565	2,0282
20	1,7992	2,6826	-1,0602	2,1411
30	1,4148	2,7869	-1,3299	2,1960
40	1,1773	2,8546	-1,4778	2,2282
50	1,0171	2,9021	-1,5678	2,2490
60	0,9029	2,9373	-1,6264	2,2632
70	0,8183	2,9643	-1,6663	2,2733
80	0,7538	2,9854	-1,6944	2,2808
90	0,7036	3,0024	-1,7148	2,2864
100	0,6639	3,0163	-1,7299	2,2908
200	0,5044	3,0775	-1,7864	2,3103
400	0,4585	3,0998	-1,7859	2,3099

напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  в точке, соответствующей центральному углу  $\theta = 0$ . Приблизительно через 200 час в пластинке устанавливается стационарное состояние. При переходе в стационарное состояние значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  претерпевают значительные изменения. Так для пластинки изготовленной из алюминия эти изменения составляют 93% и 92%, а для пластинки из меди — 145% и 72%.

**5. Задача для кругового кольца.** Рассмотрим отнесенное к декартовой системе координат круговое кольцо с центром в начале координат, ограниченное концентрическими окружностями, внешним  $L_0$ , внутрен-

ним  $L_1$  (рис. 3). Радиусы окружностей обозначим через  $R_0$  и  $R_1$  ( $R_1 < R_0$ ). В общем случае функции, голоморфные в кольце, представим рядами Лорана

$$F_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad \varphi_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n. \quad (5.1)$$

Если температурное поле в кольце отсутствует, на контурах кольца действуют равномерно распределенные давления интенсивностей  $p_0$ ,  $p_1$  (задача Ламе), то для функций получаются выражения [10]

$$\varphi(z) = -\frac{p_0 R_0^2 - p_1 R_1^2}{R_0^2 - R_1^2} \frac{z}{2}, \quad \psi(z) = \frac{R_0^2 R_1^2 (p_0 - p_1)}{R_0^2 - R_1^2} \frac{1}{z}. \quad (5.2)$$

Как видно, комплексные потенциалы не зависят от упругих постоянных материала кольца, а следовательно и напряжения не зависят от постоянных упругости и по принципу Вольтера не изменяются во времени.

Пусть теперь при отсутствии температурного поля внешний контур свободен или жестко подкреплён, а внутренний находится под действием равномерного давления интенсивности  $p_1$ . Тогда граничные условия имеют вид

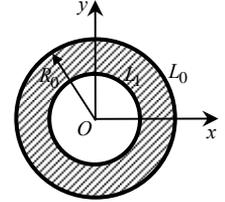


Рис. 3

$$\begin{aligned} s_0 \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} &= 0 \text{ на } L_0, \\ \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= -p_1 t \text{ на } L_1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

На контурах  $L_l$  ( $l = 0, 1$ )  $t = R_l \sigma$ . Учитывая это, подставляя функции (5.1) в граничные условия (5.3) и применяя метод рядов, получаем

$$\begin{aligned} s_0 R_0^{2n} a_n + (n-2) R_0^2 \bar{a}_{-n+2} - \bar{b}_{-n} &= 0, \\ R_1^{2n} a_n - (n-2) R_1^2 \bar{a}_{-n+2} + \bar{b}_{-n} &= -\delta_n^1 R_1^{2n} p_1. \end{aligned}$$

Решая эту систему, найдем

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{R_1^2 p_1}{(s_0 - 1) R_0^2 + 2R_1^2}, \quad b_{-1} = -\frac{(s_0 - 1) R_1^2 R_1^2 p_1}{(s_0 - 1) R_0^2 + 2R_1^2}; \\ a_{-1} = b_1 = a_n = b_{-n} = a_{-n} = b_n &= 0 \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Тогда

$$\varphi(z) = -\frac{R_1^2 p_1}{(s_0 - 1) R_0^2 + 2R_1^2} z, \quad \psi(z) = -\frac{(s_0 - 1) R_0^2 R_1^2 p_1}{(s_0 - 1) R_0^2 + 2R_1^2} \frac{1}{z}. \quad (5.5)$$

Легко найти напряжения. Например,

$$\sigma_n + \sigma_s = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z) = -\frac{4R_1^2 p_1}{(s_0 - 1) R_0^2 + 2R_1^2}.$$

Учитывая, что на внутреннем контуре  $\sigma_n = -p_1$ , для точек этого контура имеем

$$\sigma_s = p_1 - \frac{4R_1^2 p_1}{(s_0 - 1)R_0^2 + 2R_1^2}.$$

Если внешний контур не подкреплён (частный случай задачи Ламе), то нужно принять  $s_0 = -1$ , и тогда напряжения не зависят от упругих постоянных и по принципу Вольтерра не изменяются во времени. Если же он жёстко подкреплён, то  $s_0 = \alpha = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ , и для  $\sigma_s$  имеем

$$\sigma_s = p_1 - \frac{2R_1^2 p_1}{\left(\frac{2}{1 + \nu} - 1\right)R_0^2 + R_1^2}. \quad (5.6)$$

После замены в (5.6) коэффициента Пуассона его временным оператором (2.1) получим

$$\sigma_s = p_1 - \frac{2R_1^2 p_1}{\frac{1}{1 + \nu_0} \left( 1 - \nu_0 - \frac{2\nu_0 \delta_*}{1 + \nu_0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_* - \frac{\nu_0 \delta_*}{1 + \nu_0} \right) \right) R_0^2 + R_1^2}.$$

В табл. 6 для точек внешнего контура кольца с точностью до приложенной нагрузки  $p_1$  в зависимости от времени приведены значения напряжений  $\sigma_s$  для различных отношений радиусов кольца  $R_1/R_0$ . Как следует из табл. 6, приблизительно через 200 час в кольце устанавливается стационарное состояние. При переходе в стационарное состояние значения напряжений претерпевают значительные изменения. На изменение напряжений как в начальном состоянии, так и во времени, существенно

Таблица 6

$t$ , час.	$R_1/R_0$					
	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
	Алюминий			Медь		
0	0,9672	0,4118	-0,1489	0,9602	0,3266	-0,2437
10	0,9554	0,2735	-0,2978	0,9384	0,1149	-0,4401
20	0,9521	0,2398	-0,3304	0,9335	0,0750	-0,4720
30	0,9502	0,2209	-0,3480	0,9310	0,0560	-0,4867
40	0,9490	0,2088	-0,3591	0,9295	0,0452	-0,4949
50	0,9481	0,2005	-0,3667	0,9286	0,0386	-0,4999
60	0,9475	0,1944	-0,3721	0,9280	0,0342	-0,5032
70	0,9470	0,1898	-0,3762	0,9276	0,0311	-0,5055
80	0,9466	0,1863	-0,3793	0,9273	0,0290	-0,5071
90	0,9463	0,1836	-0,3818	0,9270	0,0275	-0,5082
100	0,9461	0,1814	-0,3837	0,9269	0,0263	-0,5091
200	0,9448	0,1695	-0,3941	0,9263	0,0220	-0,5123
400	0,9448	0,1695	-0,3941	0,9263	0,0220	-0,5123

влияет и отношение радиусов  $R_1/R_0$  кольца: с увеличением отношения  $R_1/R_0$  увеличивается изменение напряжений во времени. Так, в случае кольца из алюминия для  $R_1/R_0$ , равных 0,1; 0,5; 0,9, изменения напряжений при переходе в стационарное состояние составляют соответственно около 2,3%, 59%, 110%. Для медного кольца эти же изменения составляют 3,5%, 93%, 165%.

Пусть теперь на контурах кольца  $L_l$  заданы значения температуры  $T_l$ , а внешние усилия отсутствуют. В этом случае для функций имеем выражения

$$\begin{aligned} F(z) &= D_1 \ln z + F_0(z), \quad \varphi(z) = (A_1 z + B_{T1}) \ln z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= B_{T1} \ln z + \psi_0(z). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Удовлетворяя условиям (1.6), получаем [9]

$$D_1 = \frac{T_0 - T_1}{2(\ln R_0 - \ln R_1)}, \quad c_0 = \frac{T_1 \ln R_0 - T_0 \ln R_1}{2(\ln R_0 - \ln R_1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int F(z) dz &= D_1 z \ln z + (c_0 - D_1) z, \\ c_{-1} &= 0, \quad A_1 = -\frac{\alpha_T E D_1}{2}, \quad B_{T1} = 0; \\ \varphi(z) &= A_1 z \ln z + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Подставляя функции (5.8) в граничные условия (1.11), методом рядов найдем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{R_0 A_{10} - R_1 A_{11}}{(s_0 - 1) R_0^2 - (s_1 - 1) R_1^2}, \\ b_{-1} &= \frac{(s_1 - 1) R_0 R_1^2 A_{10} - (s_0 - 1) R_1 R_0^2 A_{11}}{(s_0 - 1) R_0^2 - (s_1 - 1) R_1^2}; \\ a_{-1} &= b_1 = a_n = b_{-n} = a_{-n} = b_n = 0 \quad (n \geq 2), \\ A_{1l} &= (1 - s_l) A_1 R_l \ln R_l + A_1 R_l + \beta_l R_l (D_1 \ln R_l + c_0 - D_1). \\ \varphi(z) &= A_1 z \ln z + a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для напряжений получим

$$\begin{aligned} \sigma_n + \sigma_s &= 4 \left[ A_1 \left( \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1 \right) + a_1 \right], \\ \sigma_s - \sigma_n + 2i\tau_{ns} &= 2 \left[ A_1 - \frac{b_{-1}}{R^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В частном случае, если на контурах кольца температура одинакова,

т. е.  $T_0 = T_1 = T$ , то [9]

$$D_1 = 0, \quad c_0 = \frac{T}{2}; \quad A_1 = 0, \quad B_{T_1} = 0;$$

$$a_1 = \frac{R_0^2 \beta_0 - R_1^2 \beta_1}{(s_0 - 1)R_0^2 - (s_1 - 1)R_1^2} c_0,$$

$$b_{-1} = \frac{(s_1 - 1)\beta_0 - (s_0 - 1)\beta_1}{(s_0 - 1)R_0^2 - (s_1 - 1)R_1^2} R_0^2 R_1^2 c_0; \quad (5.11)$$

$$F(z) = c_0, \quad \varphi(z) = a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}; \quad (5.12)$$

$$\sigma_n + \sigma_s = 4a_1, \quad \sigma_s - \sigma_n + 2i\tau_{ns} = -\frac{2b_{-1}}{R^2}, \quad \tau_{ns} = 0. \quad (5.13)$$

Если оба контура кольца не подкреплены, то  $s_0 = s_1 = -1$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 0$  и на основе (5.13) получаем

$$\sigma_n = \sigma_s = 0 \quad (5.14)$$

Видно, что формулы для напряжений не содержат упругих постоянных и по принципу Вольтерра не меняются со временем.

Если оба контура кольца жестко подкреплены, то  $s_0 = s_1 = \varkappa$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = -\beta$  и из выражений (5.13) получаем

$$\sigma_n = \sigma_s = -\beta T / (\varkappa - 1). \quad (5.15)$$

Учитывая, что  $\beta = 2\alpha_T E / (1 + \nu)$ ,  $\varkappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ , для напряжений получаем

$$\sigma_n = \sigma_s = -\frac{2\alpha_T E T}{1 - \nu^2}.$$

После замены модуля Юнга по формуле (2.2) найдем

$$\sigma_n = \sigma_s = -\frac{6\alpha_T K T}{1 - \nu} \left( \frac{3}{1 + \nu} - 2 \right). \quad (5.16)$$

Заменяя коэффициент Пуассона в выражении (5.16) на его временной оператор (2.1), для напряжений получаем

$$\sigma_n = \sigma_s = -\frac{3\alpha_T K^0 T \nu^0 \delta_\nu}{1 - \nu^{02}} \left[ \frac{1 - \nu^0}{2\nu^0 \delta_\nu} + 3 \frac{\nu^0 - 1}{1 + \nu^0} \mathfrak{D}_\alpha^* \left( -\beta_\nu - \frac{\nu^0 \delta_\nu}{1 + \nu^0} \right) \right] -$$

$$-\frac{v_0 + 1}{1 - v_0} \mathfrak{E}_\alpha^* \left( -\beta_v + \frac{\delta_v v_0}{1 - v_0} \right) \Big]. \quad (5.17)$$

В табл. 7 для кольца в зависимости от времени приведены значения напряжений с точностью до  $\{T\}$  как множителя. Через 800 час в кольце устанавливается стационарное состояние. Значительные изменения напряжений происходят лишь в начальный период теплового действия, в течение первых 50 час. При переходе в стационарное состояние значения напряжений претерпевают значительные изменения. Так, изменение  $\sigma_n$  ( $\sigma_s$ ) для алюминия составляют 45%, для меди – 60%.

Пусть теперь на неподкрепленных контурах кольца  $L_l$  действуют разные значения температуры  $T_l$ . В этом случае

Таблица 7

$t$ , час.	Алюминий	Медь
	$\sigma_n$ ( $\sigma_n$ )	( $\sigma_n$ )
0	-2,2531	-3,0743
10	-2,7155	-4,0576
20	-2,8377	-4,2883
30	-2,9124	-4,4214
40	-2,9649	-4,5107
50	-3,0046	-4,5755
60	-3,0357	-4,6246
70	-3,0610	-4,6632
80	-3,0819	-4,6942
90	-3,0995	-4,7195
100	-3,0995	-4,7406
200	-3,1936	-4,8410
400	-3,2369	-4,8844
600	-3,2487	-4,8934
800	-3,2550	-4,8968
1000	-3,2551	-4,8970

$$\begin{aligned} s_0 = s_1 = -1, \quad \beta_0 = \beta_1 = 0, \quad A_{1l} = 2A_1 R_l \ln R_l + A_1 R_l, \\ a_1 = -\frac{A_1}{2} \frac{R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) - R_1^2 (2 \ln R_1 + 1)}{R_0^2 - R_1^2}, \\ b_{-1} = 2R_0^2 R_1^2 A_1 \frac{\ln R_0 - \ln R_1}{R_0^2 - R_1^2}; \\ \varphi(z) = A_1 z \ln z - \frac{R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) - R_1^2 (2 \ln R_1 + 1)}{R_0^2 - R_1^2} \frac{A_1}{2} z, \\ \psi(z) = 2R_0^2 R_1^2 A_1 \frac{\ln R_0 - \ln R_1}{R_0^2 - R_1^2} \frac{1}{z}; \end{aligned} \quad (5.18)$$

Так как контуры кольца не подкреплены, то  $\sigma_n = 0$ , а для  $\sigma_s$  на основе (5.10) получим

$$\sigma_s = \frac{\alpha_T E (T_1 - T_0)}{\ln R_0 - \ln R_1} \left[ \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{R_0^2 (2 \ln R_0 + 3) - R_1^2 (2 \ln R_1 + 3)}{2(R_0^2 - R_1^2)} \right]. \quad (5.19)$$

Заменив в формулах для  $\sigma_s$  (5.19) модуль Юнга  $E$  временным оператором (2.6) и расшифровав операторные функции, получим

$$\sigma_s = \frac{3\alpha_T K^0 (T_1 - T_0)}{\ln R_0 - \ln R_1} \left[ \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \right.$$

$$-\frac{R_0^2(2\ln R_0 + 3) - R_1^2(2\ln R_1 + 3)}{2(R_0^2 - R_1^2)} \left[ 1 - 2\nu^0 (1 + \delta_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu)) \right]. \quad (5.20)$$

В табл. 8 для различных отношений радиусов кольца  $R_1/R_0$  с точностью до разности температур  $[T_0 - T_1]$  в зависимости от времени приведены значения напряжений  $\sigma_s$ . Как следует из табл. 8, приблизительно

Таблица 8

$t$ , час.	$R_1/R_0$					
	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
	Алюминий			Медь		
0	-0,3499	-0,6557	-0,8152	-1,68	-1,4715	-0,9792
10	-0,3479	-0,6520	-0,8107	-1,77	-1,5512	-1,0504
20	-0,3480	-0,6523	-0,8108	-1,79	-1,5671	-1,0429
30	-0,3481	-0,6526	-0,8111	-1,80	-1,5756	-1,0485
40	-0,3483	-0,6529	-0,8115	-1,80	-1,5809	-1,0520
50	-0,3484	-0,6532	-0,8118	-1,80	-1,5845	-1,0544
60	-0,3485	-0,6534	-0,8122	-1,81	-1,5871	-1,0562
70	-0,3487	-0,6536	-0,8125	-1,81	-1,5891	-1,0575
80	-0,3488	-0,6538	-0,8127	-1,81	-1,5906	-1,0585
90	-0,3489	-0,6540	-0,8130	-1,81	-1,5918	-1,0592
100	-0,3490	-0,6551	-0,8132	-1,82	-1,5927	-1,0599
200	-0,3495	-0,6557	-0,8145	-1,82	-1,5965	-1,0624
400	-0,3499	-0,6559	-0,8153	-1,82	-1,5976	-1,0631
600	-0,3500	-0,6559	-0,8155	-1,82	-1,5978	-1,0632
800	-0,3500	-0,6560	-0,8156	-1,82	-1,5978	-1,0632

через 600 час в кольце устанавливается стационарное состояние. При переходе в стационарное состояние значения напряжений претерпевают значительные изменения. На изменение напряжений во времени радиус внутреннего контура  $R_1$  не влияет. Для всех отношений радиусов изменение напряжений во времени остается постоянным. Так для алюминия  $\sigma_s$  всегда изменяется на 1,5%, а для меди – на 8,5%.

**РЕЗЮМЕ.** Наведено точні аналітичні розв'язки ряду задач теорії пружності та термопружності для в'язкопружних ізотропних пластинок. З використанням принципу Вольтерра дано дослідження їх напруженого стану в залежності від часу.

**Ключові слова:** принцип Вольтерра, ізотропна пластинка, в'язкопружність, пластинка з отвором, кругове кільце.

**SUMMARY.** Exact analytical solutions of some problems of the theory of elasticity and thermoelasticity for isotropic viscoelastic plates are given. Using the principle of Volterra study are given their state of stress over time.

**Keywords:** Volterra principle, isotropic plate, viscoelasticity, plate with hole, circular ring.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.
2. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.
3. Калоеров С. А., Коломиец М. А. Определение вязкоупругого состояния анизотропной пластинки с жесткими включениями // Мат. методы и физ.-мех. попя. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 202–211.
4. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 88–98.
5. Калоеров С. А., Мироненко А. Б. Исследование вязкоупругого и термовязкоупругого состояния пластинки с включениями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А, Природ. науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 70–84.
6. Калоеров С. А., Паршикова О. А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки Теорет. и прикладная механика. – 2011. – № 2(48). – С. 51–70
7. Калоеров С. А., Петренко О. А. Исследование термовязкоупругого состояния кусочно-однородной анизотропной пластины // Пробл. обчисл. мех. міцн. констр. – 2012. – Вип. 19. – С. 135–145.
8. Калоеров С. А., Шипоша Ю. С. Вязкоупругий изгиб многосвязных изотропных плит Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А, Природ. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 58–65.
9. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
11. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.
12. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 384 с.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 15.10.2012*

УДК 539.376

В. П. ГОЛУБ, д-р техн. наук,  
Ю. М. КОБЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук,  
В. С. РАГУЛИНА

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ИЗОТРОПНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

*Сформулированы зависимости между ядрами ползучести, задающими скалярные свойства изотропной нелинейно-вязкоупругой среды при сложном напряженном состоянии, и ядрами продольной и поперечной ползучести, полученными при одноосном растяжении. В качестве модели среды использована нелинейная модель вязкоупругости Работнова. Обобщение модели на сложное напряженное состояние выполнено на основе тензорно-линейной связи и пропорциональности девиаторов. Экспериментально апробирована задача расчета деформаций ползучести при чистом кручении по механическим характеристикам, найденным по результатам испытаний на одноосное растяжение.*

*Ключевые слова:* нелинейная вязкоупругость, изотропные материалы, ядра наследственности, сложное напряженное состояние, тензорно-линейная связь, одномерная модель Работнова, скалярные вязкоупругие свойства, продольная ползучесть, поперечная ползучесть.

В определяющие уравнения линейной и нелинейной теорий вязкоупругости входят механические характеристики, которые подлежат определению из экспериментов. При сложном напряженном состоянии в качестве таких характеристик чаще всего рассматриваются ядра сдвиговой ползучести и ядра объемной ползучести [1, 6]. Интерес также представляют ядра ползучести, входящие в зависимости между инвариантами тензоров деформаций и напряжений, задающие скалярные свойства среды [7, 9, 10].

Параметры ядер ползучести при сложном напряженном состоянии определяются, как правило, на основе результатов испытаний при простых режимах нагружения с использованием аналитических зависимостей между ядрами. В качестве простых режимов нагружения выбирают испытания на одноосное растяжение с одновременным замером продольных и поперечных деформаций, а также испытания на чистое кручение. По результатам испытаний на растяжение определяются ядра продольной и поперечной ползучести. По результатам испытаний на кручение определяются ядра сдвиговой ползучести. В работе [5] сформулированы зависимости между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и ядрами продольной и поперечной ползучести для линейно-вязкоупругих материалов.

В данной работе устанавливается зависимость между ядрами ползучести при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и поперечной ползучести для нелинейно-вязкоупругих материалов.

**1. Исходные соотношения.** В случае простого нагружения опреде-

ляющее уравнение деформирования нелинейной вязкоупругой среды при сложном напряженном состоянии, устанавливающее зависимость между компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}(t)$ , тензора напряжений  $\sigma_{ij}(t)$  и временем  $t$ , записывается в виде

$$\varepsilon_{ij}(t) - \delta_{ij}\varepsilon_0(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t))}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)), \quad (1.1)$$

совпадающем по структуре с уравнением нелинейной теории малых упруго-пластических деформаций. Здесь  $\varepsilon_0(\cdot)$ ,  $\sigma_0(\cdot)$  и  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\sigma_i(t)$  – первые инварианты и интенсивности тензоров  $\varepsilon_{ij}(\cdot)$  и  $\sigma_{ij}(t)$ ;  $\delta_{ij}$  – единичный симметричный тензор второго ранга или дельта-функция Кронекера.

Зависимость между инвариантами, определяющими скалярные свойства среды, задается уравнениями ползучести [7, 9]

$$\begin{aligned} \varphi_i(\varepsilon_i(t)) &= \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau, \\ \varphi_0(\varepsilon_0(t)) &= \sigma_0(t) + \lambda_0 \int_0^t K_0(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (1.2)$$

решением которых являются уравнения релаксации

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \varphi_i(\varepsilon_i(t)) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau)\varphi_i(\varepsilon_i(\tau))d\tau, \\ \sigma_0(t) &= \varphi_0(\varepsilon_0(t)) - \lambda_0 \int_0^t R_0(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon_0(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\varphi_i(\cdot)$  и  $\varphi_0(\cdot)$  – функции, задающие нелинейность скалярных свойств;  $K_i(\cdot)$  и  $K_0(\cdot)$  – ядра ползучести;  $R_i(\cdot)$  и  $R_0(\cdot)$  – ядра релаксации;  $\lambda_i$ ,  $\lambda_0$  – реологические параметры.

Между ядрами ползучести и релаксации существует интегральная связь

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (1.4)$$

которая позволяет по значениям параметров ядер ползучести рассчитывать релаксацию напряжений и наоборот.

Значения интенсивностей деформаций  $\varepsilon_i(t)$  и средних деформаций  $\varepsilon_0(t)$  определяются из (1.2) обращением функций  $\varphi_i(\cdot)$  и  $\varphi_0(\cdot)$ , так что

$$\varepsilon_i(t) = \psi_i \left[ \left( \sigma_i(t) \right) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau)\sigma_i(\tau)d\tau \right];$$

$$\varepsilon_0(t) = \psi_0 \left[ \sigma_0(t) + \lambda_0 \int_0^t K_0(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right] \quad (1.5)$$

где  $\psi_i(\cdot) = \varphi^{-1}(\cdot)$  и  $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ .

**2. Определение неизвестных функций и их параметров.** Определяющие уравнения (1.2), (1.3) и (1.5) содержат четыре независимые функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $\varphi_0(\cdot)$ ,  $K_i(\cdot)$ ,  $K_0(\cdot)$  и два параметра  $\lambda_i$ ,  $\lambda_0$ , подлежащие определению из экспериментов. Ядра релаксации  $R_i(\cdot)$ ,  $R_0(\cdot)$  связаны с ядрами ползучести  $K_i(\cdot)$  и  $K_0(\cdot)$  соотношениями типа (1.4), а функции  $\psi_i(\cdot)$  и  $\psi_0(\cdot)$  являются обращениями функций  $\varphi_i(\cdot)$  и  $\varphi_0(\cdot)$ .

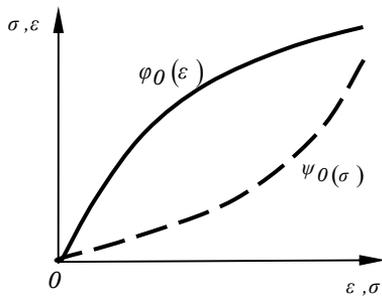


Рис. 1

В уравнениях (1.2) и (1.3) нелинейность вязкоупругих свойств задается функциями  $\varphi_i(\cdot)$  и  $\varphi_0(\cdot)$ , а в уравнении (1.5) — обращениями  $\psi_i(\cdot)$  и  $\psi_0(\cdot)$  этих функций. Функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $\varphi_0(\cdot)$ ,  $\psi_i(\cdot)$ ,  $\psi_0(\cdot)$  задаются сглаживающими кубическими сплайнами, а коэффициенты сплайнов определяются по результатам аппроксимации представленных на рис. 1 сплайнами экспериментальных диаграмм растяжения и их обращений [4].

При определении параметров функций  $\varphi_i(\cdot)$  и  $\psi_i(\cdot)$  диаграммы растяжения строятся в координатах « $\sigma_i - \varepsilon_i$ », а аппроксимирующие сплайны задаются в виде

$$\varphi_i(\varepsilon_i) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_i + a_{2,j}\varepsilon_i^2 + a_{3,j}\varepsilon_i^3; \quad (2.1)$$

$$\psi_i(\sigma_i) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma_i + b_{2,j}\sigma_i^2 + b_{3,j}\sigma_i^3, \quad (2.2)$$

где

$$\sigma_i = \sigma_1, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \psi_i = \varphi_i^{-1}.$$

При определении же параметров функций  $\varphi_0(\cdot)$  и  $\psi_0(\cdot)$  диаграммы растяжения строятся в координатах « $\sigma_0 - \varepsilon_0$ », а аппроксимирующие сплайны записываются в виде

$$\varphi_0(\varepsilon_0) = c_{0,j} + c_{1,j}\varepsilon_0 + c_{2,j}\varepsilon_0^2 + c_{3,j}\varepsilon_0^3; \quad (2.3)$$

$$\psi_0(\sigma_0) = d_{0,j} + d_{1,j}\sigma_0 + d_{2,j}\sigma_0^2 + d_{3,j}\sigma_0^3, \quad (2.4)$$

в которых

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_1, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}), \quad \psi_0 = \varphi_0^{-1}.$$

Коэффициенты  $a_{0,j}$  и  $c_{0,j}$  сплайн-аппроксимаций (2.1) и (2.3) имеют размерность напряжений и зависят от  $j$ -го интервала разбиения оси деформаций, а коэффициенты  $b_{0,j}$  и  $d_{0,j}$  имеют размерность деформаций и зависят от  $j$ -го интервала разбиения оси напряжений.

Параметры ядер продольной и поперечной ползучести определяются по результатам обработки экспериментальных данных на ползучесть образцов материала при одноосном растяжении постоянными напряжениями. В процессе испытаний на ползучесть измеряются, как уже отмечалось, продольные  $\varepsilon_{11}(t)$  и поперечные  $\varepsilon_{22}(t)$  деформации. В этом случае одномерные нелинейные определяющие соотношения продольной и поперечной ползучести задаются по аналогии с (1.2) интегральными уравнениями

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_1 \left( 1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) d\tau \right), \\ \varphi_{22}(\varepsilon_{22}(t)) &= -\sigma_1 \left( 1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\sigma_1$  – одноосное напряжение;  $\varphi_{11}(\cdot)$ ,  $\varphi_{22}(\cdot)$  – функции, задающие нелинейность процессов продольной и поперечной ползучести;  $K_{11}(\cdot)$ ,  $K_{22}(\cdot)$  – ядра продольной и поперечной ползучести;  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$  – реологические параметры. Параметры функций  $\varphi_{11}(\cdot)$ ,  $\varphi_{22}(\cdot)$  и ядер ползучести  $K_{11}(\cdot)$ ,  $K_{22}(\cdot)$ , а также реологические параметры  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$  определяются по методике, изложенной в работе [4].

Функции  $\varphi_{11}(\cdot)$  и  $\varphi_{22}(\cdot)$  задаются сглаживающими кубическими сплайнами, так что

$$\varphi_{11}(\varepsilon_{11}) = f_{0,j} + f_{1,j}\varepsilon_{11} + f_{2,j}\varepsilon_{11}^2 + f_{3,j}\varepsilon_{11}^3; \quad (2.6)$$

$$\varphi_{22}(\varepsilon_{22}) = g_{0,j} + g_{1,j}\varepsilon_{22} + g_{2,j}\varepsilon_{22}^2 + g_{3,j}\varepsilon_{22}^3. \quad (2.7)$$

Здесь коэффициенты сплайнов  $f_{0,j}$  и  $g_{0,j}$ , как и выше, имеют размерность напряжений и зависят от  $j$ -го интервала разбиения оси деформаций. Значения коэффициентов определяются по результатам аппроксимации сплайнами (2.6) и (2.7) экспериментальных диаграмм растяжения в координатах « $\sigma_1 - \varepsilon_{11}$ » и соответственно «сжатия» в координатах « $\sigma_1 - \varepsilon_{22}$ ».

Параметры ядер продольной  $K_{11}(\cdot)$  и поперечной  $K_{22}(\cdot)$  ползучести, а также значения реологических пара-

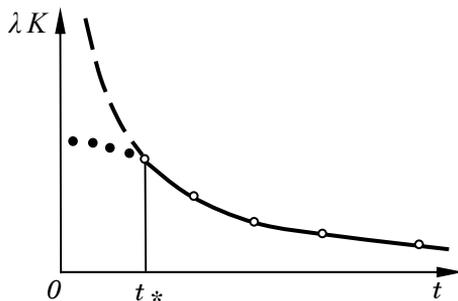


Рис. 2

метров  $\lambda_{11}$  и  $\lambda_{22}$  определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер (рис. 2, точки), полученных на основе условия подобию изохронных диаграмм продольной и поперечной ползучести и соответствующих диаграмм мгновенного деформирования. В области сингулярности ( $t \rightarrow 0$ ) дискретные значения ядер ползучести (полужирные точки) учитываются с помощью весовых функций [4]. В этом случае задача сводится к минимизации функционала

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n_*-1} \left\{ p_j(t) \left[ K(t_j) - \lambda K(t, q_s) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n \left[ K(t_j) - \lambda K(t, q_s) \right]^2, \quad (2.8)$$

где весовая функция  $p_j(t)$  задается соотношением

$$p_j(t) = \left[ 1 + \left| \frac{K(t_j) - \lambda K(t, q_s)}{K(t_*) - \lambda K(t_*, q_s)} \right|^m \right]^{-1},$$

причем  $p_j(\cdot) \Rightarrow 0$ , когда  $K(t, q_s) \Rightarrow \infty$  и  $p_j(\cdot) = 1$  при  $K(t_j) = \lambda K(t, q_s)$ . При этом  $K(t_j)$  – набор дискретных значений ядер ползучести;  $K(t, q_s)$  – функция, задающая ядро ползучести аналитически;  $q_s$  – число параметров ядра;  $n$  – число дискретных значений ядер ползучести в области  $\{0, t_*\}$ ;  $m$  – порядок моментов разностей ( $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

В качестве функций, задающих ядра продольной и поперечной ползучести при реализации условия (2.8), могут быть использованы функции степенные, экспоненциальные, их комбинации, а также дробно-экспоненциальная функция.

Ядра ползучести  $K_i(\cdot)$  и  $K_0(\cdot)$  и их параметры, задающие скалярные свойства нелинейной вязкоупругой среды, определяются на основе соотношений, связывающих эти ядра с ядрами продольной  $K_{11}(\cdot)$  и поперечной  $K_{22}(\cdot)$  ползучести. Для установления зависимости между ядрами ползучести  $K_i(\cdot)$ ,  $K_0(\cdot)$  и ядрами ползучести  $K_{11}(\cdot)$ ,  $K_{22}(\cdot)$  разрешим уравнения (1.2) и (2.5) относительно  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\varepsilon_0(t)$  и соответственно относительно  $\varepsilon_{11}(t)$ ,  $\varepsilon_{22}(t)$ . Воспользовавшись далее модифицированным принципом суперпозиции [2, 11] из уравнений (1.2) при условии, что величины  $\sigma_i$  и  $\sigma_0$  не зависят от времени  $t$ , получаем

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{3}{2} \psi_i(\sigma_i) \left( 1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau) d\tau \right) + \varepsilon_{22}(t),$$

$$\varepsilon_{22}(t) = \frac{3}{2} \psi_0(\sigma_0) \left( 1 + \lambda_0 \int_0^t K_0(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{11}(t), \quad (2.9)$$

а из уравнений (2.5) – выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \psi_{11}(\sigma_1) \left( 1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) d\tau \right) \\ \varepsilon_{22}(t) &= -\psi_{22}(\sigma_1) \left( 1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\psi_i(\cdot) = \varphi_i^{-1}(\cdot)$ ,  $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ ,  $\psi_{11}(\cdot) = \varphi_{11}^{-1}(\cdot)$ ,  $\psi_{22}(\cdot) = \varphi_{22}^{-1}(\cdot)$ .

Уравнения (2.9) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \psi_i(\sigma_1) \left( 1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau) d\tau \right) + \psi_0 \left( \frac{1}{3} \sigma_1 \right) \left( 1 + \lambda_0 \int_0^t K_0(\tau) d\tau \right), \\ \varepsilon_{22}(t) &= \psi_0 \left( \frac{1}{3} \sigma_1 \right) \left( 1 + \lambda_0 \int_0^t K_0(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2} \psi_i \left[ (\sigma_1) \left( 1 + \lambda_i \int_0^t K_i(\tau) d\tau \right) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

в котором, как и в (2.4),  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_1$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22})$ .

Из совместного решения уравнений (2.10) и (2.11) для зависимости между ядрами ползучести  $K_i(t)$ ,  $K_0(t)$ ,  $K_{11}(t)$ ,  $K_{22}(t)$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \psi_0 \left( \frac{1}{3} \sigma_1 \right) \lambda_0 K_0(t) + \psi_i(\sigma_1) \lambda_i K_i(t) &= \psi_{11}(\sigma_1) \lambda_{11} K_{11}(t), \\ \frac{1}{2} \psi_i(\sigma_1) \lambda_0 K_0(t) - \frac{1}{3} \psi_0 \left( \frac{1}{3} \sigma_1 \right) \lambda_0 K_0(t) &= \psi_{22}(\sigma_1) \lambda_{22} K_{22}(t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

определитель которой

$$\Delta = -\frac{1}{2} \psi_0 \left( \frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \psi_i(\sigma_{11}) \neq 0,$$

что свидетельствует о существовании нетривиальных решений системы уравнений (2.12). Решение этой системы позволяет установить зависимость между ядрами ползучести  $K_i(t)$ ,  $K_0(t)$  и  $K_{11}(t)$ ,  $K_{22}(t)$  в виде

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{2 \psi_{11}(\sigma_1) \lambda_{11} K_{11}(t) + \psi_{22}(\sigma_1) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_i(\sigma_1)}; \quad (2.13)$$

$$\lambda_0 K_0(t) = \frac{\psi_{11}(\sigma_1) \lambda_{11} K_{11}(t) - 2 \psi_{22}(\sigma_1) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\psi_0(\sigma_1/3)}. \quad (2.14)$$

По уравнениям (2.13) и (2.14) находятся дискретные значения величин, пропорциональных ядрам ползучести  $K_i(t)$  и  $K_0(t)$ . Аппроксимация этих значений одной из функций, используемых для задания ядер ползучести на основе условия (2.8) позволяет определить параметры этих ядер, а также реологических параметров  $\lambda_i$  и  $\lambda_0$ .

**3. Экспериментальная апробация.** Определяющее уравнение ползучести (1.1) было апробировано экспериментально на решении задачи расчета деформаций ползучести при чистом кручении. Решение строилось с использованием функций и параметров функций, входящих в определяющее уравнение (1.1) и определяемых по результатам испытаний образцов материала при одноосном растяжении.

Определяющее уравнение ползучести (1.1) с учетом соотношений (1.5) представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{3\Psi_i}{2\sigma_i(t)} \left[ \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right] & \left[ \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) \right] + \\ + \delta_{ij} \Psi_0 \left[ \sigma_0(t) + \lambda_0 \int_0^t K_0(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right], & \end{aligned} \quad (3.1)$$

а ядра ползучести зададим дробно-экспоненциальной функцией

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (3.2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ ) – параметры, подлежащие определению из эксперимента;  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функция Эйлера.

Рассмотрим сдвиговую ползучесть тонкостенных трубчатых элементов под действием постоянного крутящего момента. Величина действующего касательного напряжения  $\sigma_{21}(t)$  в любой момент времени  $t$  удовлетворяет условию

$$\sigma_{21}(t) = h(t) (\sigma_{21})_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (3.3)$$

в котором  $\sigma_{21} = const$ ;  $k$  – число уровней напряжений  $\sigma_{21}$ ;  $h(t)$  – единичная функция Хевисайда.

Уравнение сдвиговой ползучести для несжимаемых нелинейно-вязкоупругих материалов при постоянных касательных напряжениях, исходя из (3.1) с учетом (3.2) и (3.3), записывается в виде

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{i=0}^3 b_{ij} \left\{ \sqrt{3} h(t) \sigma_{21} \left[ 1 + \lambda_{11} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right]^i \right\}, \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon_0(t) = 0$ ,  $\Psi_0(\cdot) = 0$ ;  $\Psi_i(\cdot) = \Psi_{11}(\cdot)$ ;  $\lambda_i = \lambda_{11}$ ;  $K_i(\cdot) = K_{11}(\cdot)$ . Функция  $\Psi_{11}(\cdot)$  задается согласно (2.2) при условии  $\varepsilon_i = \varepsilon_{11}$ .

Расчет деформаций сдвиговой ползучести по уравнению (3.4) апробировался экспериментально на примере ползучести тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП при температуре  $\theta = 20^\circ\text{C}$  и поликарбоната «Дифлон» при  $\theta = 80^\circ\text{C}$ . Экспериментальные данные заимствованы соответственно из [3, 8].

В таблице приведены значения коэффициентов в зависимости  $\psi_{11}$  от

Материал	$b_{0,3}$	$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{3,3}$	$\alpha$	$\beta,$ $\text{час}^{1+\alpha}$	$\lambda_{11},$ $\text{час}^{1+\alpha}$
Полиэтилен ПЭВП	0,0185	-0,0069	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$-3,56 \cdot 10^{-5}$	-0,2003	1,1060	0,8590
Поликарбонат «Дифлон»	0,0000	0,0005	$-9,45 \cdot 10^{-6}$	$3,64 \cdot 10^{-7}$	-0,6054	0,4376	0,3373

$\sigma_1$  для  $j=3$ , вычисленных согласно сплайн-аппроксимации (2.2), значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в дробно-экспоненциальном ядре ползучести (3.2), а также значения реологического параметра  $\lambda_{11}$ .

Результаты расчетов деформаций сдвиговой ползучести, выполненных по уравнению (3.4), представлены на рис. 3 для тонкостенных трубчатых элементов из полиэтилена высокой плотности ПЭВП (рис. 3, а) и из

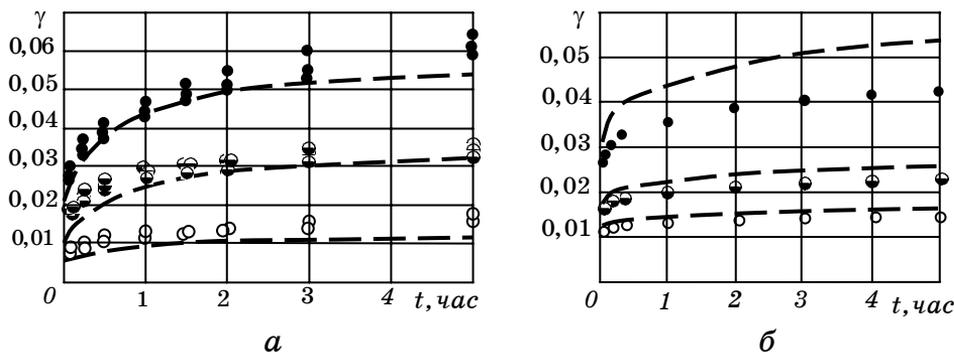


Рис. 3

поликарбоната «Дифлон» (рис. 3, б) при чистом кручении. По оси ординат отложена величина угла сдвига  $\gamma_{21}(t) = 2\varepsilon_{21}(t)$ . Расчетные данные изображены штриховыми линиями, экспериментальные – линиями точек. Значения деформаций сдвиговой ползучести тонкостенных трубчатых элементов представлены при напряжениях  $\sigma_{21} = 2,0$  (○);  $3,45$  (◐);  $4,8$  (●) МПа (рис. 3, а) и из при напряжениях  $\sigma_{21} = 14$  (○);  $20$  (◐);  $30$  (●) МПа (рис. 3, б).

Как видно, получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчета с экспериментальными данными. Для большинства рассмотренных уровней напряжений максимальная погрешность не превышает 15% и возникает в области больших длительностей нагружения. Наиболее существенные расхождения между результатами расчетов и

экспериментальными данными (до 40%) возникают для образцов из поликарбоната «Дифлон» при  $\sigma_{21} = 30 \text{ МПа}$  (см. рис. 3,б). Эти расхождения могут быть связаны с отклонениями от гипотезы единой диаграммы деформирования в координатах «интенсивность напряжений – интенсивность деформаций», задающей физические свойства среды в определяющем уравнении (1.1).

Таким образом, предложенный общий подход для определения механических характеристик нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии основывается на использовании представления деформаций в виде полиномиального разложения по линейным функционалам. Трудности, связанные с нахождением функций интегрирования для членов высших порядков полиномиального разложения, являющиеся механическими характеристиками, очевидны. Число независимых экспериментов для определения таких характеристик не обосновано. Более перспективным представляется подход, в котором устанавливается зависимость между ядрами ползучести при сложном напряженном состоянии в одном из упрощенных вариантов общей нелинейной теории вязкоупругости и ядрами продольной и поперечной ползучести, полученными при одноосном растяжении. В настоящей работе этот подход реализован в рамках нелинейной модели вязкоупругости типа модели Работнова. Обобщение модели на сложное напряженное состояние выполнено на основе гипотезы о тензорно-линейной связи между тензорами деформаций ползучести и напряжений и соответственно пропорциональности девиаторов. Зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений, задающая скалярные свойства среды, апробирована экспериментально на задаче расчета деформаций ползучести тонкостенных трубчатых образцов при чистом кручении. Функции и параметры функций, использованные в расчетах, определены по результатам одноосных испытаний образцов материала.

**РЕЗЮМЕ.** Сформульовано залежності між ядрами повзучості, що задають скалярні властивості ізотропного нелінійно-в'язкопружного середовища за умов складного напруженого стану, та ядрами повздовжньої та поперечної повзучості за умов одновісного розтягу. У якості моделі середовища використано нелінійну модель в'язкопружності Работнова. Узагальнення моделі на складний напружений стан виповнено на підставі тензорно-лінійного зв'язку та пропорційності девиаторів. Експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій повзучості за умов чистого скручення за механічними характеристиками, що знайдені за результатами випробувань на одновісний розтяг.

**Ключові слова:** нелінійна в'язкопружність, ізотропні матеріали, ядра спадковості, складний напружений стан, тензорно-лінійний зв'язок, одномірна модель Работнова, скалярні в'язкопружні властивості, повздовжня повзучість, поперечна повзучість.

**SUMMARY.** The functions between creep kernels giving scalar properties of isotropic nonlinear viscoelastic medium under the complex stress state and longitudinal as well as transverse creep kernels obtained under uniaxial tension have been stated. The nonlinear Rabotnov's model of viscoelasticity is used as a medium model. The generalization of the model on the complex stress state has been carried out based on a tensor-linear connection and proportionality of deviators. The problem of creep strains calculation under the pure torsion using the mechanical characteristics obtained from results at uniaxial tension tests has been approved experimentally.

**Key words:** nonlinear viscoelasticity, isotropic materials, hereditary kernels, the complex stress state, tensor-linear relation, onedimensional Rabotnov's model, scalar viscoelastic behaviour, longitudinal creep, transverse creep.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
2. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука, 1973. – 288 с.
3. Вилкс У. К., Креггерс А. Ф. Простое нагружение нелинейно-ползучего полимерного материала // Механика полимеров. – 1967. – №2. – С. 236–242.
4. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости // Прикладная механика. – 2011. – Т. 47, № 3. – С. 75–88.
5. Колтунов А. А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) // Механика полимеров. – 1969. – №4. – С. 754–758.
6. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 279 с.
7. Ломакин В. А., Колтунов М. А. Моделирование процессов деформирования нелинейных вязко-упругих сред // Механика полимеров. – 1967. – № 2. – С. 221–227.
8. Малмейстер А. К., Янсон Ю. О. Неизотермическое деформирование физически нелинейного материала (поликарбоната) при сложном напряженном состоянии // Механика композитных материалов. – 1979. – № 6. – С. 971–976.
9. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести // Вестн. Моск. ун-та. – 1948. – № 10. – С. 81–91.
10. Суворова Ю. В., Алексеева С. И. Нелинейная наследственная модель с учетом температуры при различных напряженных состояниях // Механика композитных материалов. – 1996. – Т. 32, № 1. – С. 72–82.
11. Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 23.10.2012 г.*

УДК 539.421

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,  
 М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,  
 Ю. А. ЧЕРНОЙВАН, канд. физ.-мат. наук

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БЕРЕГОВ ТРЕХ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН В РАМКАХ МОДЕЛИ ЛЕОНОВА-ПАНАСЮКА

*Модель Леонова-Панасюка применена для изучения деформированного состояния бесконечной изотропной пластинки с тремя коллинеарными трещинами. Предложен алгоритм численного решения задачи о нахождении раскрытия берегов трещины. Рассмотрены все возможные случаи взаимного расположения трещин. Полученные результаты указывают на незначительное влияние процесса слияния двух трещин на раскрытие третьей трещины.*

**Ключевые слова:** три коллинеарные трещины, зоны предразрушения, нелинейная механика разрушения.

Изучению напряженно-деформированного состояния тела, ослабленного системой коллинеарных трещин в рамках модели Леонова-Панасюка-Дагдейла, посвящены работы [1–4]. В данной работе с использованием решения задачи для плоскости с прямолинейными разрезами [5] исследовано напряженно-деформированное состояние бесконечного упругого изотропного тела с системой трех коллинеарных трещин.

**Постановка задачи.** Пусть в бесконечной упругой пластинке вдоль одной прямой расположена система трех трещин разной длины. К пластинке приложено равномерно распределенное на бесконечности растягивающее усилие  $p$ , направление которого совпадает с направлением нормали к линии расположения трещин.

Введем ортогональную декартову систему координат, ось  $Ox$  которой направим вдоль линии трещин. В соответствии с моделью модели Леонова-Панасюка-Дагдейла области нелинейного поведения материала в окрестности вершин трещин можно заменить разрезами, к берегам которых приложены сжимающие напря-

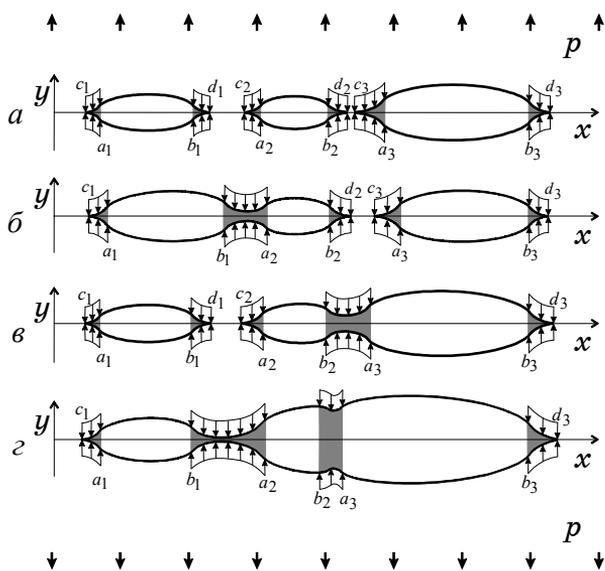


Рис. 1

жения интенсивности  $\sigma$ . Эти напряжения показаны на рис. 1 равномерно распределенными на соответствующих отрезках усилиями. Таким образом, приходим к задаче теории упругости о растяжении упругой пластинки с разрезами вдоль оси  $Ox$  при таких условиях на контуре:

$$\tau_{xy}(t) = 0, \quad t \in L; \quad \sigma_y(t) = \begin{cases} 0, & t \in L'; \\ \sigma, & t \in L'', \end{cases}$$

где

$$L = \begin{cases} \bigcup_{k=1}^3 L_k, \quad L_k = (c_k, d_k), & \text{задача а,} \\ L_1 \cup L_2, \quad L_1 = (c_1, d_2), \quad L_2 = (c_3, d_3), & \text{задача б,} \\ L_1 \cup L_2, \quad L_1 = (c_1, d_1), \quad L_2 = (c_2, d_3), & \text{задача в,} \\ L_1, \quad L_1 = (c_1, d_3), & \text{задача г,} \end{cases}$$

$$L' = \bigcup_{k=1}^3 (a_k, b_k), \quad L'' = L - L'.$$

Концы разрезов  $c_k$  и  $d_k$  следует определять так, чтобы выполнялось условие ограниченности напряжений. При достаточно близком расположении физических трещин (им в модели отвечают отрезки  $L'$ ) соседние зоны нелинейного поведения (зоны предразрушения) объединяются в одну. Условием объединения зон предразрушения будем считать условие равенства нулю решения задачи *а*. Все случаи рассмотренных в работе моделей, которые отвечают взаимному расположению трех физических трещин, проиллюстрированы на рис. 1.

Далее приведем метод решения задач *а* и *б*. Очевидно, что задача *в* превратится в задачу *б* при изменении направления оси  $Ox$ . Задача *г* имеет аналитическое решение, которое также будет приведено далее.

**Решение задачи при отсутствии объединенных зон предразрушения (задача *а*), общее решение задачи.** Общее решение задачи для плоскости с прямолинейными разрезами при нормальном к линии трещины направлении приложения внешней нагрузки в работе [2] определяется двумя комплексными функциями  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ :

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{p}{4}, \quad \Omega(z) = \Phi(z) + \frac{p}{2}, \quad (1)$$

где

$$\Phi_0(z) = \frac{\sigma}{2\pi i X(z)} \int_{L''} \frac{X^+(t)}{t-z} dt;$$

$$X(z) = \prod_{k=1}^n (z - c_k)^{1/2} (z - d_k)^{1/2}; \quad (2)$$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_k z^{n-k}, \quad C_0 = \frac{p}{2};$$

$n$  – количество разрезов;  $c_k$  и  $d_k$  – аффиксы концов  $k$ -го разреза ( $k=1, 2, \dots, n$ );  $C_k$  – коэффициенты, определяемые из условий однозначности перемещений:

$$2 \int_{L_k} \frac{P_n(t)}{X^+(t)} dt + \int_{L_k} [\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)] dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Для перемещений точек контуров прямолинейных разрезов имеем

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)}. \quad (4)$$

Здесь для случая плоского напряженного состояния  $\varkappa = (3\lambda + \mu)/(\lambda + \mu)$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе материала пластинки;

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz, \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz.$$

**Алгоритм численного решения задачи.** На верхних берегах разрезов функция (2) при  $n = 3$  может быть представлена в виде

$$X^+(t) = (-1)^{3-k} i \widehat{X}(t) \quad (t \in L_k, \quad k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

в котором

$$\widehat{X}(t) = \sqrt{\prod_{k=1}^3 (t - c_k)(t - d_k)}.$$

Используя формулы Сохоцкого-Племеля, получим

$$\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t) = 2\sigma_1 \frac{G(t)}{X^+(t)}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{2\pi}, \quad (6)$$

где

$$G(t) = \sum_{k=1}^3 (-1)^{3-k} [F_{c_k}(t) + F_{d_k}(t)]; \quad (7)$$

$$F_{c_k}(t) = \int_{c_k}^{a_k} \frac{\widehat{X}(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad F_{d_k}(t) = \int_{b_k}^{d_k} \frac{\widehat{X}(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (8)$$

Ниже под  $G(t)$  будем понимать действительную часть комплекснозначной функции  $G(t)$ . Тогда

$$\int_{L_k} [\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)] dt = \frac{2\sigma_1 J_k}{(-1)^{3-k} i},$$

$$J_k = \int_{L_k} \frac{G(t)}{\widehat{X}(t)} dt \quad (k = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Функцию в числителе подынтегральных выражений в (8) в окрест-

ности концов разрезов  $c_k$ ,  $d_k$  можно представить соответственно в виде

$$\begin{aligned}\widehat{X}(y) &= \sqrt{y \sum_{i=0}^5 q_{(ck)i} y^i} \quad \text{при } y = t - c_k, \\ \widehat{X}(y) &= \sqrt{y \sum_{i=0}^5 q_{(dk)i} y^i} \quad \text{при } y = d_k - t.\end{aligned}\quad (10)$$

Из-за трудностей, которые возникают при аналитическом вычислении интегралов  $F_{ck}$ ,  $F_{dk}$ , представим функцию  $\widehat{X}$  полиномом на каждом из отрезков  $(0, y_{ck}')$ ,  $(0, y_{dk}')$  (рис. 2), причем

$$\begin{aligned}y_{ck} &= a_k - c_k, & y_{ck}' &= \kappa y_{ck} = a_{k'} - c_k, \\ y_{dk} &= d_k - b_k, & y_{dk}' &= \kappa y_{dk} = d_k - b_{k'},\end{aligned}$$

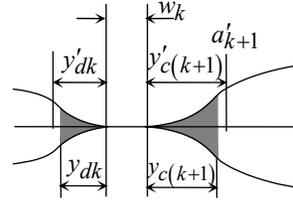


Рис. 2

а параметр  $\kappa$  немного превышает единицу. Так, для значений аргумента из промежутков  $(0, y_{ck}')$  и  $(0, y_{dk}')$  соответственно получим

$$\begin{aligned}\widehat{X}(y) &\approx \sqrt{y} \sum_{m=0}^{n_{ck}} g_{(ck)m} (y/y_{ck}')^m, \\ \widehat{X}(y) &\approx \sqrt{y} \sum_{m=0}^{n_{dk}} g_{(dk)m} (y/y_{dk}')^m,\end{aligned}\quad (11)$$

где  $n$  – величина, определяемая точностью представления.

Проведя в интегралах (8) замены  $\tau = c_k + y_{ck}x^2$  и  $\tau = d_k - y_{dk}x^2$  соответственно получаем

$$\begin{aligned}F_{ck}(\delta_{ck}) &\approx 2\sqrt{y_{ck}} \int_0^1 \sum_{m=0}^{n_{ck}} h_{(ck)m} \frac{x^{2m+2} dx}{x^2 - \delta_{ck}}, \\ F_{dk}(\delta_{dk}) &\approx -2\sqrt{y_{dk}} \int_0^1 \sum_{m=0}^{n_{dk}} h_{(dk)m} \frac{x^{2m+2} dx}{x^2 - \delta_{dk}},\end{aligned}\quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned}h_{(ck)m} &= g_{(ck)m} \left( \frac{y_{ck}}{y_{ck}'} \right)^m = \frac{g_{(ck)m}}{\kappa^m}, & \delta_{ck} &= \delta_{ck}(t) = \frac{t - c_k}{y_{ck}}, \\ h_{(dk)m} &= g_{(dk)m} \left( \frac{y_{dk}}{y_{dk}'} \right)^m = \frac{g_{(dk)m}}{\kappa^m}, & \delta_{dk} &= \delta_{dk}(t) = \frac{d_k - t}{y_{dk}}.\end{aligned}\quad (13)$$

После почленного интегрирования (12) находим

$$\begin{aligned}
F_{ck}(\delta_{ck}) &\approx 2\sqrt{y_{ck}} \sum_{m=0}^n h_{(ck)m} \zeta_m(\delta_{ck}), \\
F_{dk}(\delta_{dk}) &\approx -2\sqrt{y_{dk}} \sum_{m=0}^n h_{(dk)m} \zeta_m(\delta_{dk}),
\end{aligned} \tag{14}$$

где  $\zeta_m(\delta) = \int_0^1 x^{2m+2}/(x^2 - \delta) dx$ .

**Определение длин зон предразрушения и вертикального перемещения берегов трещин.** Функция  $\Phi(z)$  может быть определена следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{1}{X(z)} \left( \sigma_1 \int_{L''} \frac{X^+(t)}{t-z} dt + P_3(z) \right) - \frac{p}{4}.$$

Для нахождения перемещений берегов разрезов определим, какие значения принимает последняя функция на берегах. Используя формулу Сохоцкого-Племеля, получаем выражения

$$\Phi^+(t) = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma_1 G(t) + P_3(t)}{X^+(t)} - \frac{p}{4}, \quad \Phi^-(t) = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma_1 G(t) + P_3(t)}{X^-(t)} - \frac{p}{4}, \tag{15}$$

в которых  $G(t)$  – функция, определенная формулой (7) и представляющая собой функцию лишь геометрических параметров.

Положения границ разрезов  $c_k, d_k, k=1, 2, 3$  найдем из условия конечности функции  $\Phi$  в этих точках

$$\sigma_1 G(c_k) + P_3(c_k) = 0, \quad \sigma_1 G(d_k) + P_3(d_k) = 0 \quad (k=1, 2, 3).$$

Эти соотношения представляют собой систему шести нелинейных уравнений. При решении этой системы коэффициенты полинома  $P_3(t)$  вместе со значениями функции  $G$  в точках  $z=c_k, \tau=d_k$  следует рассматривать как функции расположения границ разрезов  $c_k, d_k$ . Согласно (4), перемещение верхнего берега  $k$ -го разреза можно получить из формулы

$$2\mu \left[ u^+(x) + iv^+(x) \right] = \int_{c_k}^x \left[ \varkappa \Phi^+(t) - \Omega^-(t) \right] dt.$$

Используя вторую формулу в (1) и выражения (15), получаем

$$\varkappa \Phi^+(t) - \Omega^-(t) = (\varkappa - 1) \frac{\sigma}{2} - (\varkappa + 1) \frac{p}{4} + (\varkappa + 1) \frac{\sigma_1 G(t) + P_3(t)}{X^+(t)}.$$

Таким образом, для вертикального перемещения верхнего берега  $k$ -го разреза ( $k=1, 2, 3$ ) находим формулу

$$v(x) = (-1)^{3-k+1} \frac{\varkappa + 1}{2\mu} \int_{c_k}^x \frac{\sigma_1 G(t) + P_3(t)}{\widehat{X}(t)} dt. \quad (16)$$

Случай объединения двух внутренних зон предразрушения (задача б). В этой задаче имеем два разреза и пять зон предразрушения, одна из которых является внутренней. На верхних берегах разрезов функция (2) при  $n=2$  может быть представлена в виде

$$X^+(t) = (-1)^{2-k} i \widehat{X}(t), \quad t \in L_k, \quad k=1, 2; \quad (17)$$

$$\widehat{X}(t) = \sqrt{\prod_{k=1, k \neq 2}^3 (t - c_k) \prod_{k=2}^3 (t - d_k)}.$$

Второй интеграл в условии однозначности перемещений (3) запишется так

$$\int_{L_k} [\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)] dt = \frac{2\sigma_1 J_k}{(-1)^{2-k} i}, \quad (18)$$

где

$$J_k = \int_{L_k} \frac{G(t)}{\widehat{X}(t)} dt, \quad k=1, 2;$$

$$G(t) = -[F_{c1}(t) + F_{e1}(t) + F_{d2}(t)] + F_{c3}(t) + F_{d3}(t);$$

$F_{ck}$  и  $F_{dk}$  – функции, задаваемые соотношениями (8);

$$F_{e1}(t) = \int_{b_1}^{a_1} \frac{\widehat{X}(\tau)}{\tau - t} d\tau; \quad (19)$$

$$\widehat{X}(y) = \sqrt{\sum_{i=0}^4 q_{(ck)i} y^i}, \quad y = t - e_1, \quad e_1 = \frac{b_1 + a_2}{2}. \quad (20)$$

Введем обозначения

$$y_{e1} = a_2 - b_1, \quad y'_{e1} = \kappa y_{e1} = a'_2 - b'_1, \\ a'_2 = a_2 + \frac{\kappa - 1}{2} y_{e1}, \quad b'_1 = b_1 - \frac{\kappa - 1}{2} y_{e1}.$$

На отрезке  $(-y'_{e1}/2, y'_{e1}/2)$  построим представление функции  $\widehat{X}(y)$  в форме полинома

$$\widehat{X}(y) \approx \sum_{m=0}^{n_{e1}} g_{(e1)m} (y/y'_{e1})^m, \quad (21)$$

где  $n_{e1}$  – число, определяемое точностью представления.

Проведя в (19) под интегралом замену  $\tau = e_1 + y_{e1}x$ , находим

$$F_{e_1}(t) \approx \int_{-1/2}^{1/2} \sum \frac{g_{(e_1)m} (y_{e_1} x / y'_{e_1})^m}{y_{e_1} x - (t - e_1)} y_{e_1} dx \quad (22)$$

или

$$F_{e_1}(\delta_{e_1}) \approx \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{m=0}^{n_{e_1}} h_{(e_1)m} \frac{x^m dx}{x - \delta_{e_1}}, \quad (23)$$

где

$$h_{(e_1)m} = g_{(e_1)m} \left( \frac{y_{e_1}}{y'_{e_1}} \right)^m = \frac{g_{(e_1)m}}{\kappa^m}, \quad \delta_{e_1} = \delta_{e_1}(t) = \frac{t - e_1}{y_{e_1}}. \quad (24)$$

**Случай объединения всех внутренних зон предразрушения (задача 2).** В этом случае для вертикального перемещения берегов одного разреза с двумя внутренними зонами предразрушения получаем

$$v(x) = \frac{\varkappa + 1}{2\mu} \sigma_1 \sum_{k=1}^3 \{K(x, b_k) - K(x, a_k)\} \quad (25)$$

где

$$K(x, \xi) = (x - \xi) \ln \frac{\delta(\xi) - \delta(x)}{\delta(\xi) + \delta(x)}, \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{x - c_1}{d_3 - x}}.$$

Координаты концов зон предразрушения определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \{\delta(b_k) - \delta(a_k)\} &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{\sigma}\right), \\ \sum_{k=1}^3 \{\delta(b_k) - \delta(a_k)\} &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\pi}{\sigma}\right), \\ \widehat{X}(t) &= \sqrt{(t - c_1)(d_3 - t)}. \end{aligned} \quad (26)$$

**Результаты численных исследований.** Проведем исследование влияния взаимного расположения трещин в системе на поле деформаций. Будем сравнивать длины зон предразрушения и перемещение в вершинах физических трещин, которые входят в систему, с соответствующими величинами для единичной трещины такой же длины. Для единичной трещины полудлины  $l$  длина зон предразрушения и перемещение в вершинах могут быть найдены из соотношений

$$y_{l1} = l \left( \cos^{-1} \frac{\pi p}{2\sigma} - 1 \right), \quad v_{l1} = \sigma_1 2l \ln \cos^{-1} \frac{\pi p}{2\sigma},$$

причем перемещение приведено с точностью до множителя, который содержит упругие характеристики материала тела.

На рис. 3 совмещены графики вертикальных перемещений берегов

трещин для следующих значений координат физических концов трещин:  $a_1 = -1$ ,  $b_1 = -0,5$ ,  $a_3 = 0,5$ ,  $b_3 = 1$ , а вторую трещину, той же длины, что

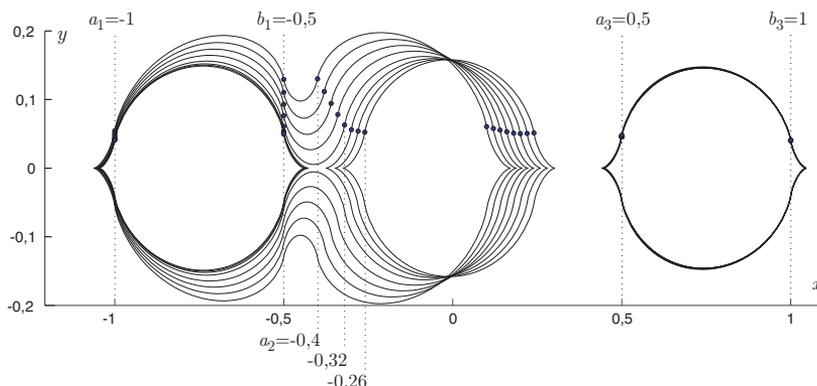


Рис. 3

и первая с третьей, смещаем от  $a_2 = -0,4$  до  $a_2 = -0,26$  с шагом  $0,02$ , получая восемь конфигураций. Для конфигураций  $a_2 = -0,4, \dots, -0,32$  имеем задачу  $b$ , для конфигураций  $a_3 = -0,3; -0,28; -0,26$  – задачу  $a$ . Отметим, что при переходе от одной конфигурации к другой вертикальное перемещение третьей трещины изменяется несущественно.

При проведении расчетов считалось, что  $\sigma = 3$ ,  $p = 1$  (размерности этих величин не указываем, поскольку в выражении для вертикального перемещения  $\sigma$  делится на постоянную, в которую входят упругие постоянные материала и которая имеет ту же размерность, что и  $\sigma$ ).

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что процесс слияния двух из этих трех трещин слабо влияет на раскрытие третьей трещины даже при достаточно близком ее расположении к сливающимся трещинам.

Изложенную схему расчетов можно применять для решения задач с произвольным количеством коллинеарных трещин. Использование этой схемы также делает возможным решение задач определения параметров развития трещин в вязкоупругих и анизотропных телах с помощью методик, изложенных в работе [6].

**РЕЗЮМЕ.** У цій роботі модель Леонова-Панасюка застосовано для вивчення деформованого стану нескінченного ізотропного тіла з трьома колінеарними тріщинами. Запропоновано алгоритм числового розв'язування задачі про знаходження розкриття берегів тріщини. Дослідження задачі виконано для всіх можливих випадків взаємного розташування тріщин. Отримані числові розв'язки вказують на незначний вплив процесу злиття двох тріщин на розкриття третьої тріщини.

**Ключові слова:** три колінеарні тріщини, зони передруйнування, нелінійна механіка руйнування

**SUMMARY.** In this work, a strip-yield model is used to study the deformed state of an infinite isotropic body with three collinear cracks. A numerical algorithm is presented to obtain crack opening displacements effectively. The problem is analyzed for all possible cases of mutual location of the cracks. The numerical solution shows negligible influence of two cracks coalescence process on the opening displacement of the third crack.

**Keywords:** three co-linear cracks, process zone, non-linear fracture mechanics

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витвицкий П. М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – К.: Наук. мысль, 1965. – С. 77–85.
2. *Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А.* Определение длин зон предразрушения у фронта двух коллинеарных трещин неравной длины // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 50. – С. 78–84.
3. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Черноіван Ю. О.* Модель зростання і злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – Т. 55, № 1. – С. 61–71.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Nishimura T.* Strip yield analysis of two collinear unequal cracks in an infinite sheet // Engng Fract. Mech. – 2002. – Vol. 69. – P. 1173–1191.
6. *Xu W, Wu X.R.* Weight functions and strip-yield model analysis for three collinear cracks. // Engng Fract. Mech. – 2012. – Vol. 85. – P. 73–87.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 12.11.2012*

УДК 539.3

В. Б. ГОВОРУХА, д-р физ.-мат. наук

### РАСЧЕТ ЗОНЫ ВЗАИМНОГО ПЕРЕКРЫТИЯ БЕРЕГОВ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

*Рассмотрено электроупругое состояние кусочно-однородного пьезокерамического тела, ослабленного электропроницаемой трещиной, расположенной на границе раздела материалов. Постановка задачи дана в рамках классической (осцилляционной) модели межфазной трещины. В условиях плоской деформации выполнен расчет зоны взаимного перекрытия берегов межфазной трещины вблизи ее вершины. Проанализировано ее изменение в зависимости от величины внешней нагрузки.*

**Ключевые слова:** пьезокерамика, межфазная трещина, осцилляционная модель.

Исследование разрушения композитных пьезокерамических материалов вследствие распространения трещин по границе раздела слоя имеет важное практическое значение ввиду наличия таких соединений во многих электромеханических изделиях и приборах. В большинстве опубликованных по этой проблеме работ используется классическая (осцилляционная) математическая модель межфазной трещины, предполагающая, что трещина полностью открыта [1, 2, 7]. Это приводит к осциллирующей особенности решения для полей смещений, напряжений и других физических величин, с вытекающим отсюда следствием о взаимном перекрытии берегов трещины. В исследованиях [5, 6] рассмотрена область взаимного перекрытия берегов межфазной трещины в пьезопассивных изотропных телах. В данной работе выполнен расчет размера подобной области для пьезокерамических материалов, а также проанализирована его зависимость от внешних нагрузок.

**Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим туннельную трещину  $-l \leq x_1 \leq l$ ,  $-\infty < x_2 < \infty$ ,  $x_3 = 0$  между двумя разнородными пьезокерамическими полупространствами  $x_3 > 0$  и  $x_3 < 0$ , причем будем считать, что ось  $Ox_3$  направлена вдоль силовых линий электрического поля предварительной поляризации керамики. На бесконечности заданы равномерное нормальное  $\sigma_{33}^\infty$  и касательное  $\sigma_{13}^\infty$  напряжения, а также нормальная составляющая вектора электрической индукции  $D_3^\infty$ .

Будем предполагать, что берега трещины свободны от напряжений и электрических зарядов, а вдоль плоскости раздела материалов имеет место условие идеального электрического контакта. При указанной постановке граничные условия в плоскости  $x_3 = 0$  принимают вид

$$\left[ \left[ \sigma_{33}(x_1) \right] \right] = 0, \quad \left[ \left[ \sigma_{13}(x_1) \right] \right] = 0, \quad \left[ \left[ D_3(x_1) \right] \right] = 0, \quad x_1 \in (-\infty, \infty);$$

$$\begin{aligned} \left[ \left[ u_1(x_1) \right] \right] &= 0, \quad \left[ \left[ u_3(x_1) \right] \right] = 0, \quad \left[ \left[ \varphi(x_1) \right] \right] = 0, \quad |x_1| > l; \\ \sigma_{33}^\pm(x_1, 0) &= 0, \quad \sigma_{13}^\pm(x_1, 0) = 0, \quad \left[ \left[ \varphi(x_1) \right] \right] = 0, \quad |x_1| < l, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $D_3$  – компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции;  $u_1$ ,  $u_3$  – компоненты вектора смещений;  $\varphi$  – электрический потенциал. Квадратные скобки  $\left[ \left[ \cdot \right] \right]$  означают скачок функции при переходе через линию раздела материалов. Индексы (+) и (–) показывают, что величины относятся к верхнему и нижнему полупространствам соответственно.

Считая, что электроупругое состояние не зависит от координаты  $x_2$ , будем рассматривать задачу для случая плоской деформации. Введем полярную систему координат  $(\rho, \theta)$  с началом в правой вершине трещины и полярной осью, направленной вдоль продолжения трещины. В области раздела материалов реализуется асимптотическое распределение напряжений и скачков смещений [4]:

$$\sigma_{33}(\rho, 0) - im\sigma_{13}(\rho, 0) = \frac{K_1 - imK_2}{\sqrt{2\pi\rho}} \left( \frac{\rho}{l} \right)^{i\varepsilon}, \quad \rho \rightarrow 0; \quad (1)$$

$$\left[ \left[ u_3(\rho) \right] \right] - \frac{i}{m} \left[ \left[ u_1(\rho) \right] \right] = \frac{4 \operatorname{ch}(\pi\varepsilon)(K_1 - imK_2)}{sr(1 + 2i\varepsilon)} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left( \frac{\rho}{l} \right)^{i\varepsilon}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (2)$$

где  $i$  – мнимая единица;  $\varepsilon$ ,  $m$ ,  $s$  и  $r$  – вещественные константы, зависящие от характеристик материалов [4].

Выражение  $K_1 - imK_2$  представляет собой комплексный коэффициент интенсивности напряжений классической (осцилляционной) модели трещины, в котором действительные параметры  $K_1$  и  $K_2$  характеризуют интенсивности сингулярностей напряжений у вершины трещины.

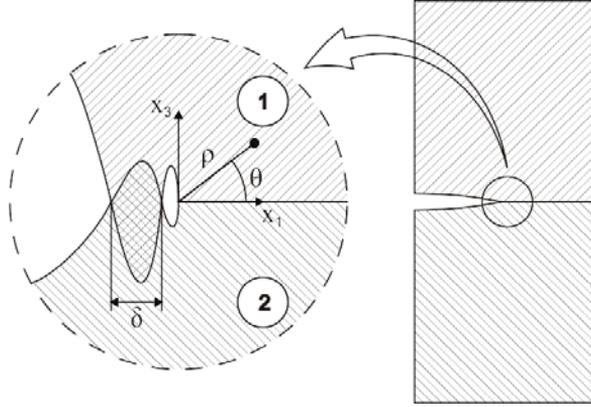
Количественно коэффициенты  $K_j$  ( $j = 1, 2$ ) для электропроницаемой межфазной трещины зависят от характеристик пьезокерамических материалов, размеров трещины и внешней механической нагрузки, но не зависят от внешнего электрического поля [4]:

$$K_1 - imK_2 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 + 2i\varepsilon) (\sigma_{33}^\infty - im\sigma_{13}^\infty).$$

Из выражения (2), принимая во внимание представление

$$\left( \frac{\rho}{l} \right)^{i\varepsilon} = \cos \left[ \varepsilon \ln \left( \frac{\rho}{l} \right) \right] + i \sin \left[ \varepsilon \ln \left( \frac{\rho}{l} \right) \right],$$

видно, что знак скачка смещений вблизи вершины трещины изменяется бесконечное число раз (рисунок). Это означает, что верхний и нижний края трещины должны изгибаться и заходить друг в друга, что физически невозможно. Период осцилляции определяется биматериальной посто-



янной  $\varepsilon$ , которая в случае когда нижний материал более жесткий, чем верхний, принимает положительные значения. При  $\varepsilon = 0$  выражения (1), (2) переходят в решение для однородной среды [3].

Учитывая, что

$$K_1 - imK_2 = |K_1 - imK_2| e^{i\Psi_K}, \quad \left(\frac{\rho}{l}\right)^{i\varepsilon} = e^{i\varepsilon \ln \frac{\rho}{l}},$$

$$1 + 2i\varepsilon = \sqrt{1 + 4\varepsilon^2} e^{i \arctg(2\varepsilon)},$$

перепишем выражение (2) в виде

$$\left[ [u_3(\rho)] \right] - \frac{i}{m} \left[ [u_1(\rho)] \right] = \frac{4 \operatorname{ch}(\pi\varepsilon) |K_1 - imK_2|}{sr\sqrt{1 + 4\varepsilon^2}} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} e^{i\Psi_{\Delta u}(\rho)} \quad \rho \rightarrow 0, \quad (3)$$

где

$$\Psi_K = \arg(K_1 - imK_2), \quad \Psi_{\Delta u}(\rho) = \Psi_K + \varepsilon \ln \frac{\rho}{l} - \arctg(2\varepsilon). \quad (4)$$

После выделения действительной и мнимой частей в выражении (3), скачок нормального смещения будет иметь вид

$$\left[ [u_3(\rho)] \right] = \frac{4 \operatorname{ch}(\pi\varepsilon) |K_1 - imK_2|}{sr\sqrt{1 + 4\varepsilon^2}} \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \cos[\Psi_{\Delta u}(\rho)] \quad \rho \rightarrow 0.$$

Из физической и математической формулировки задачи вытекает требование, чтобы скачок  $\left[ [u_3(\rho)] \right]$  был больше нуля (или по крайней мере был бы равен нулю). Поэтому размер области, в которой берега трещины перекрываются и решение некорректно, определяется условием  $\left[ [u_3(\rho)] \right] < 0$ , т.е. неравенством  $\cos[\Psi_{\Delta u}(\rho)] < 0$ ,

решение которого заключено в пределах

$$\left(2n - \frac{3}{2}\right)\pi < \Psi_{\Delta u}(\rho) < \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (5)$$

где  $n$  – произвольное целое число.

Подставляя (4) в (5), получаем

$$\left(2n - \frac{3}{2}\right)\pi - \Psi_K + \arctg(2\varepsilon) < \varepsilon \ln \frac{\rho}{l} < \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi - \Psi_K + \arctg(2\varepsilon). \quad (6)$$

Таким образом, первая точка контакта берегов трещины расположена на расстоянии  $\delta$  от вершины трещины, где

$$\delta = l \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi - \Psi_K + \arctg(2\varepsilon) \right] \right\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Целое число  $n$  в формуле (7) выбирается так, чтобы величина  $\delta/(2l)$  принимала наибольшее значение на промежутке  $(0, 1)$ .

Рассмотрим далее случай, когда материал верхнего полупространства более жесткий, чем нижнего. В этом случае  $\varepsilon < 0$ . Изменение знака постоянной  $\varepsilon$  ведет к изменению знаков неравенства (6). Поэтому в этом случае максимальный размер области, в которой происходит перекрытие берегов трещины, определяется по формуле

$$\delta = l \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi - \Psi_K + \arctg(2\varepsilon) \right] \right\}, \quad \varepsilon < 0, \quad (8)$$

где целое число  $n$  выбирается также как и в формуле (7).

Объединяя формулы (7) и (8) в одну, получаем

$$\delta = l \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \left(2n - 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \varepsilon\right)\pi - \Psi_K + \arctg(2\varepsilon) \right] \right\}.$$

Аналогично, рассматривая нормальное напряжение  $\sigma_{33}(\rho, 0)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , нетрудно показать, что длина области вблизи вершины трещины, где  $\sigma_{33}(\rho, 0)$  начинает колебаться, приблизительно равна  $\delta$ .

**Анализ результатов численных исследований.** Численные исследования были проведены для пьезокерамических композиций  $PZT-5H/PZT-4$ ,  $PZT-5H/BaTiO_3$ ,  $PZT-5H/PZT-5$ . Характеристики этих материалов приведены в табл. 1. Считалось, что  $\sigma_{33}^\infty = 10$  МПа,  $D_3^\infty = 0$ ,  $l = 0,02$  м, а величина  $\sigma_{13}^\infty$  варьировалась.

Результаты расчета значений постоянной  $\varepsilon$  для сочетаний материалов  $\frac{PZT-5H}{PZT-4}$ ,  $\frac{PZT-5H}{BaTiO_3}$ ,  $\frac{PZT-5H}{PZT-5}$  получились соответственно такими: 0,01964; 0,01446; 0,01296. Из полученных результатов видно, что для реальных пьезокерамических биматериальных композиций значение постоянной  $\varepsilon$  по абсолютной величине очень мало, а ее знак, в отличие от знаков постоянных  $m$ ,  $s$  и  $r$ , зависит от расположения материалов в композите.

В табл. 2 приведены значения относительной величины области перекрытия берегов трещины  $\delta/(2l)$  в зависимости от внешней нагрузки  $\sigma_{13}^\infty/\sigma_{33}^\infty$ . Как видно, при растяжении взаимопрокиновение берегов меж-

фазной трещины локализовано в весьма малой окрестности вершины.

Таблица 1

Величина	Пьезокерамические материалы			
	PZT-4	PZT-5H	PZT-5	BaTiO <sub>3</sub>
$c_{44}, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	13,90	12,60	12,10	15,00
$c_{12}, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	7,78	5,50	7,54	6,60
$c_{13}, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	7,43	5,30	7,52	6,60
$c_{33}, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	11,30	11,70	11,10	14,60
$c_{44}, 10^{10} \text{ Н/м}^2$	2,56	3,53	2,11	4,40
$e_{31}, \text{ Кл/м}^2$	-6,98	-6,50	-5,40	-4,35
$e_{33}, \text{ Кл/м}^2$	13,84	23,30	15,80	17,50
$e_{15}, \text{ Кл/м}^2$	13,44	17,00	12,30	11,40
$\varepsilon_{11}, 10^{-10} \text{ Ф/м}$	60,00	151,00	81,10	98,70
$\varepsilon_{33}, 10^{-10} \text{ Ф/м}$	54,70	130,00	73,50	112,00

Поэтому с физической точки зрения можно допустить, что полученное решение послужит хорошим приближением к реальному поведению тела в точках, удаленных от вершины трещины. Положение меняется, когда межфазная трещина подвергается сдвигу. В этом случае решение, включающее осциллирующие сингулярности, не дает полезного результата и указывает на необходимость использования других моделей межфазной трещины, лишенных упомянутого противоречия.

Таблица 2

$\sigma_{13}^{\infty} / \sigma_{33}^{\infty}$	$\delta/2l$		
	$\frac{PZT-5H}{PZT-4}$	$\frac{PZT-5H}{BaTiO_3}$	$\frac{PZT-5H}{PZT-5}$
0	$0,9358 \cdot 10^{-35}$	$0,3361 \cdot 10^{-47}$	$0,1130 \cdot 10^{-52}$
-1	$0,2451 \cdot 10^{-18}$	$0,3423 \cdot 10^{-24}$	$0,1401 \cdot 10^{-27}$
-5	$0,9036 \cdot 10^{-5}$	$0,3503 \cdot 10^{-6}$	$0,3922 \cdot 10^{-7}$
-10	$0,1995 \cdot 10^{-2}$	$0,3882 \cdot 10^{-3}$	$0,1276 \cdot 10^{-3}$

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто класичну (осциляційну) модель електропроникної тріщини, розташованої на межі поділу двох різнорідних п'єзокерамічних матеріалів. У рамках цієї моделі досліджено зони взаємопроникнення матеріалів в околі вершин тріщини та проаналізовано їхню довжину залежно від зовнішнього механічного навантаження.

**Ключові слова:** п'єзоелектрична кераміка, міжфазна тріщина, осциляційна модель.

**SUMMARY.** The classical (oscillating) model for an interface crack between two different piezoceramic materials is considered. The zones of crack faces interpenetrations at the crack tips are investigated in the framework of this model. The length of these zones is analyzed with respect to external mechanical loading.

**Keywords:** piezoelectric ceramics, interface crack, oscillating model.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бакиров В. Ф. Интегральные соотношения для задачи о трещине на границе раздела пьезоэлектрика и проводника // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 6. – С. 128–150.

2. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником // Прикладная математика и механика – 1975. – Т. 39, № 1. – С. 149–159.

3. *Кудрявцев Б. А., Ракитин В. И.* Трещина Гриффитса в пьезоэлектрической среде // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1979. – № 1. – С. 125–132.

4. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bi-materials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – Vol. 70. – P. 127–143.

5. *Hills D. A., Barber J. R.* Interface cracks // Int. J. Mech. Sci. – 1993. – Vol. 35. – P. 27–37.

6. *Rice J. R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 98–103.

7. *Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R.* Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol. 40, N 4. – P. 739–765.

*Днепропетровский национальный университет*

*Поступила 08.11.2012*

УДК 539.3

*И. К. СЕНЧЕНКОВ*, д-р физ.-мат. наук,  
*О. П. ЧЕРВИНКО*, канд. физ.-мат. наук,  
*Н. Д. ОКСЕНЧУК*

### ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ИМПУЛЬСНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ДИСКА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ФАЗОВОГО СОСТАВА МАТЕРИАЛА НА НЕУПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*В рамках динамической связанной задачи термомеханики исследуется напряженно-деформированное состояние стального диска, которое возникает под действием термомеханического импульса. Используется модель течения Боднера-Партома, учитывающая влияние фазового состава на неупругие характеристики, и обобщенная на случай многофазового состава материала. Задача решается численно с использованием итерационной схемы и метода конечных элементов. Исследуется влияние микроструктурных превращений на остаточные напряжения и упрочнение материала.*

**Ключевые слова:** импульсное термомеханическое нагружение, микроструктурные превращения, модель течения, остаточное напряженно-деформированное состояние, изотропное упрочнение

Математическому моделированию термомеханических процессов при импульсном лазерном воздействии посвящены работы [10, 12]. Для материалов типа сталей большое значение при определении остаточных напряжений имеет учет микроструктурных превращений (МСП) [4, 8]. Микроструктурные превращения мартенситного типа при импульсном термическом и термомеханическом воздействии на поверхность тела рассмотрены в работах [1, 2]. При этом учитывалось лишь изменение объема материала при МСП.

В данной статье исследуется остаточное напряженно-деформированное состояние диска при импульсном термомеханическом нагружении. При этом в расчетной схеме кроме объемного эффекта МСП учитывается также влияние текущего фазового состава на неупругие механические характеристики материала в рамках модели течения Боднера-Партома [6, 7, 9]. В качестве материала диска принимается сталь 35ХМА.

**Постановка задачи.** Математическая постановка динамической осесимметричной связанной задачи термомеханики включает в себя:

– соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

– уравнения движения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \dot{u}_r, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \dot{u}_z,\end{aligned}\quad (2)$$

где  $u_r$  и  $u_z$  – компоненты вектора перемещений,  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{rz}$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  – компоненты тензора деформации;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho$  – плотность материала;  
– уравнение теплопроводности

$$\bar{c}_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{k} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - T \dot{\sigma}_{kk} \bar{\alpha} + \rho \Delta i_{\xi} C^{\xi} + D'. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{c}_v &= c_v^{\xi} C^{\xi}, \quad \bar{k} = k^{\xi} C^{\xi}, \quad V_0^{\xi} = V^{\xi}(\theta_r), \\ \bar{\alpha} &= \frac{\sum_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi} \alpha_{\xi}}{\sum_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi}}, \quad \alpha_{\xi} = \frac{(V^{\xi} - V_0^{\xi})}{3(\theta - \theta_0) V_0^{\xi}}, \\ \sum_{\xi} C^{\xi} &= C^a + C^b + C^f + C^p + C^m = 1;\end{aligned}$$

$\theta$  – температура;  $\theta_r$  – отсчетная температура;  $\dot{\theta} = \partial \theta / \partial t$ ;  $\bar{c}_v$  и  $\bar{k}$  – объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности смесей фаз;  $\bar{\alpha}$  – обобщенный коэффициент объемного расширения;  $\dot{\sigma}_{kk} = \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ;  $\Delta i_{\xi}$  – скрытая (латентная) теплота микроструктурных превращений;  $D'$  – скорость внутренней диссипации;  $V^{\xi}(\theta)$  – свободный объем фазы  $\xi$  при температуре  $\theta$ ;  $C^{\xi}$  – объемная концентрация фазы  $\xi$  в долях единицы; индекс  $\xi$  принимает значения  $a, b, p, f, m$ , где  $a$  – аустенит,  $f$  – феррит,  $p$  – перлит,  $b$  – бейнит,  $m$  – мартенсит; предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Третье слагаемое правой части уравнения (3) определяет температурный эффект изменения объема; четвертое слагаемое – эффект скрытой теплоты МСП; пятое – эффект скорости диссипации механической энергии.

При этом имеют место начальные условия

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0 \quad (4)$$

и граничные условия. Последние на поверхности термического нагружения на «пятне»  $z = 0$ ,  $0 < r < r_q$  имеют вид:

– тепловые граничные условия

$$q_z = -k\theta_{,z} = \begin{cases} q_0 \cos \frac{\pi r}{2r_q} \sin \frac{\pi t}{t_q}, & r \leq r_q, \quad t \leq t_q, \\ 0, & r_q < r, \quad t \leq t_q, \\ 0, & 0 < r, \quad t > t_q; \end{cases} \quad (5)$$

– механические граничные условия

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -\sigma_0 \cos \frac{\pi r}{2r_q} \sin \frac{\pi t}{t_\sigma}, & r \leq r_q, \quad t \leq t_\sigma; \\ 0, & r_q < r, \quad t \leq t_\sigma; \\ 0, & 0 < r, \quad t > t_\sigma, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\theta_0$  – начальная температура;  $q_0$  и  $\sigma_0$  – заданные параметры нагружения;  $t_q$ ,  $t_\sigma$  – времена действия импульсов, между которыми принимается соотношение  $t_\sigma = 2t_q$ ;  $r_q$  – радиус зоны облучения. Остальная часть поверхности теплоизолированная и свободная от термомеханического нагружения

$$\theta_{,i} n_i = 0, \quad \sigma_{ij} n_j = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

причем  $n_i$  – компоненты вектора внешней единичной нормали к граничной поверхности.

Термомеханическое поведение материала описывается моделью течения Боднера–Партома, которая обобщена на случай влияния фазового состава на неупругие характеристики. Модель включает

– уравнение аддитивности деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{0ph} \quad (i, j = r, z, \varphi), \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{in}$  и  $\varepsilon_{ij}^e$  – неупругая и упругая составляющие деформации,  $\varepsilon_{ij}^{0ph}$  –

объемная термотрансформационная деформация, которая описывает температурный и трансформационный эффекты изменения объема [2, 8]

$$\varepsilon_{ij}^{0ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V^\xi(\theta)C^\xi(\theta) - V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}{3V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)} \delta_{ij}; \quad (9)$$

– закон Гука, записанный для девиаторной и шаровой составляющих тензоров,

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{0ph}); \quad (10)$$

– закон течения Прандтля-Рейса с условием неупругой несжимаемости

$$\varepsilon_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \varepsilon_{ij}^{in}(0) = 0; \quad (11)$$

– уравнение эволюции параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K} = m_1 (\bar{K}_1 - K) \dot{W}^{in}, \quad K(0) = 0. \quad (12)$$

При этом  $G$  – модуль сдвига;  $K_V$  – модуль объемного сжатия;  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформации соответственно,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk} / 3$ ,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk} \delta_{ij} / 3$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $J_2$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $J_2 = s_{ij} s_{ij} / 2$ ;  $\dot{W}^{in}$  – неупругая мощность,  $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ ;  $D_0$  – предельное значение скорости неупругой деформации при сдвиге,  $D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}$ ;  $D_0$ ,  $n$ ,  $m_1$ ,  $K_0$ ,  $K_1$  – параметры модели.

Для мультифазового состава материала параметры модели  $K_0$ ,  $K_1$  определяются с помощью линейного правила смесей [5, 6]

$$\bar{K}_0 = K_0^\xi C^\xi, \quad \bar{K}_1 = K_1^\xi C^\xi, \quad (13)$$

где  $K_0^\xi$ ,  $K_1^\xi$  – параметры модели для конкретных фаз  $\xi$ . Предполагается, что остальные параметры модели не зависят от фазового состава материала.

**Метод решения задачи.** Задача (1)–(12) является нелинейной и решается численно методом пошагового интегрирования по времени [2, 3].

Концентрации фаз распада переохлажденного аустенита определяются с помощью термокинетической диаграммы [4, 5] и соотношений для удельных объемов фаз [8]. Накопление концентрации фаз вдоль кривых охлаждения в области мартенситного превращения рассчитывается с помощью уравнения Коистинена–Марбургера [11].

**Результаты расчетов и выводы.** Расчеты проводились для следующих параметров диска: радиус  $R = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , толщина  $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , радиус пятна облучения  $r_q = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Геометрия и схема нагружения диска

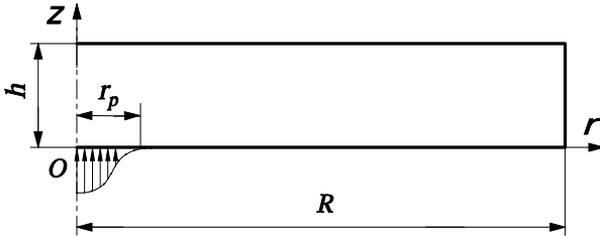


Рис. 1

указаны на рис. 1. При этом принималось, что

$$\sigma_0 = 8000 \text{ МПа},$$

$q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ кВт/м}^2$ . Длительность действия теплового импульса  $t_q = 1 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ , а импульса давления  $t_\sigma = 2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ .

Практическая сходимость была достигнута для начального шага по вре-

мени  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ . Температура изменялась в пределах  $20^\circ\text{C} \div 1300^\circ\text{C}$ .

При исследовании термического, механического и комбинированного термомеханического импульсного нагружения с учетом влияния фазового состава на неупругие характеристики материала рассматривались распределения остаточных характеристик напряженно-деформированного состояния и параметра изотропного упрочнения материала  $K$ . Для результатов расчета использовались следующие обозначения:  $q + f_s$  – только тепловое нагружение с учетом влияния фазового состава на неупругие характеристики материала ( $q_0 \neq 0$ );  $p$  – только механическое импульсное нагружение ( $\sigma_0 \neq 0$ );  $q + f_s + p$  – комбинированное термомеханическое нагружение с учетом влияния фазового состава на неупругие характеристики материала ( $q_0 \neq 0, \sigma_0 \neq 0$ ).

На рис. 2 – 5 приведены результаты расчетов распределений остаточных величин при вышеуказанных видах нагружения. Распределения по глубине диска компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$  показаны на рис. 2; интенсивности напряжений  $s_i$ , где  $s_i = J_2^{1/2}$  – на рис. 3; интенсивности неупругой деформации  $\varepsilon_i^{in}$ ,  $\varepsilon_i^{in} = (\varepsilon_{ij}^{in} \varepsilon_{ij}^{in} / 2)^{1/2}$  – на рис. 4; суммарного параметра изотропного упрочнения  $K_s = K + \bar{K}_0$  – на рис. 5. За время формирования остаточного состояния принималось  $t = 5 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ , которое отвечает затуханию волновых процессов.

Как видно, механическое нагружение (кривые  $p$ ) формирует сжимающие радиальные напряжения  $s_i \sim 575 \text{ МПа}$  в слое  $z_p < 10^{-3} \text{ м}$  (зона механического влияния) при уровне интенсивности неупругой деформации  $\varepsilon_i^{in} \sim 0,01$ . При тепловом облучении (кривые  $q + f_s$ ) достигается уро-

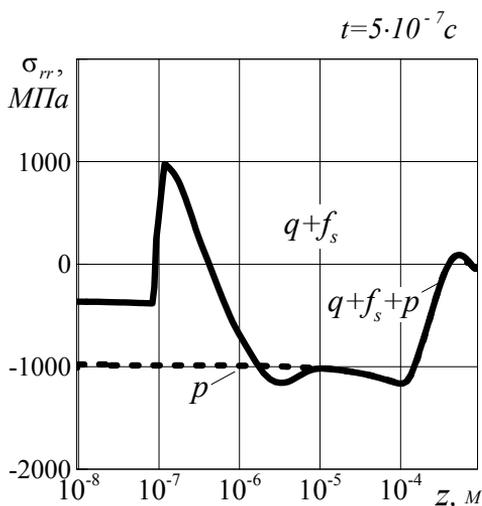


Рис. 2

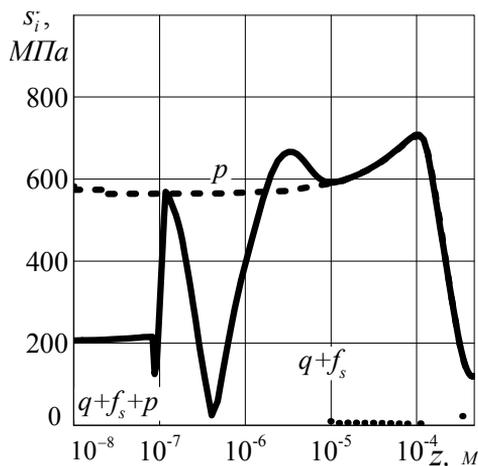


Рис. 3

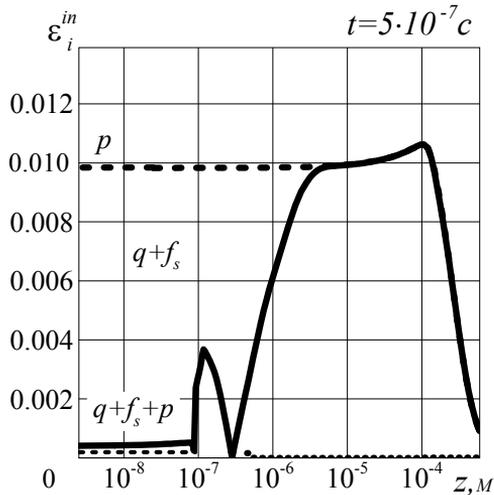


Рис. 4

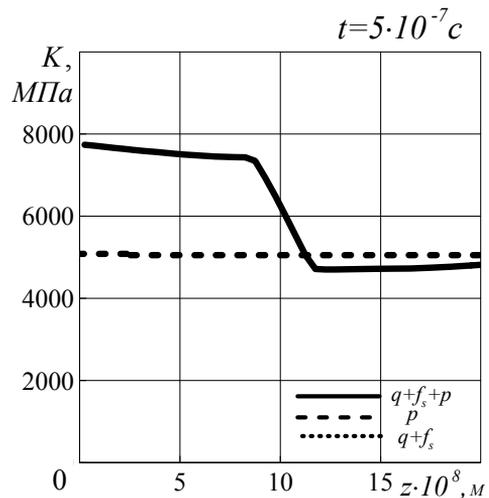


Рис. 5

вень интенсивности напряжений  $s_i \sim 1000 \text{ МПа}$  и неупругих деформаций –  $\varepsilon_i^{\text{in}} \sim 0,0001$  в зоне термического влияния  $z_q \sim 10^{-5} \text{ м}$ . Параметр изотропного упрочнения  $K_s$  в зоне трансформационного влияния  $z_t \sim 10^{-7} \text{ м}$  принимает значение  $K_s = 8400 \text{ МПа}$ . На рис. 5 штрих-пунктирная линия отвечает начальному значению суммарного параметра упрочнения  $K_0$  для базового фазового состава [5]. Отличие штрихпунктирной кривой от сплошной и пунктирной кривых отражает эффект трансформационного упрочнения, обусловленного более высоким уровнем предела текучести материала в мартенситной фазе по сравнению с исходной. Уровень сжимающих напряжений при комбинированном термомеханическом импульсном нагружении (кривые  $q + f_s + p$ ) ниже, чем при тепловом и механическом нагружении. Сжимающие радиальные напряжения имеют две области: первая –  $0 < z < z_t$ , обусловлена микроструктурными превращениями; вторая –  $7 \cdot 10^{-7} < z < 10^{-3} \text{ м}$ , обусловлена действием механической нагрузки.

Таким образом, развитая в работе модель, учитывающая влияние фазового состава материала на неупругие свойства, позволяет уточнить остаточные распределения напряжений и деформаций, а также классифицировать механизмы упрочнения поверхностных слоев материала при комбинированном термомеханическом воздействии.

**РЕЗЮМЕ.** В рамках динамічної зв'язаної задачі термомеханіки досліджується напружено-деформований стан сталевго диска, що виникає під дією термомеханічного імпульсу. Використовується модель течії Боднера-Партома, яка враховує вплив фазового складу на непружні характеристики, та узагальнена на випадок багатфазового складу матеріалу. Задача розв'язується чисельно з використанням ітераційної схеми та методу скінченних елементів. Досліджується вплив микроструктурних перетворень на залишкові напруження і зміцнення матеріалу.

**Ключові слова:** імпульсне термомеханічне навантаження, мікроструктурні перетворення, модель течії, залишковий напружено-деформований стан, ізотропне зміцнення

**SUMMARY.** Within a dynamic coupled problem of thermomechanics the problem of stress-strain microstructural state of 35HMA steel disk under thermomechanical pulse loading is investigated. An influence of the phase state of the material on inelastic characteristics is taken into account. The Bodner–Partom model generalized in the case of multiphase material state is utilized. The problem is solved numerically by using the finite element method. The microstructure transformation influence on the residual stress and hardening of the material regions is studied.

**Keywords:** pulse thermomechanical loading, microstructural transformations, flow model, residual stress-strains state, isotropic hardening

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Жук Я. А., Сенченков І. К., Бойчук Е. В.* Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые термическим импульсом на торце // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Т. 42. – С. 136–141.
2. *Жук Я. О., Сенченков І. К., Васильева Л. Я.* Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. –Т. 54, № 1. – С. 101–115.
3. Осесимметричная динамическая связанная задача термовязкопластичности / *Я. А. Жук, И. К. Сенченков, В. И. Козлов, Г. А. Табиева* // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 10. – С. 83–89.
4. *Попов А. А., Попова А. Е.* Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М.: Машгиз, 1961. – 430 с.
5. *Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д.* Исследование влияния микроструктуры на остаточное НДС вязкопластического полупространства при импульсном термомеханическом нагружении // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – №4 (50). – С. 61–69.
6. *Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д.* Моделирование неізотермического течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. –Т. 55, № 1. – С. 138–144.
7. *Сенченков І. К., Жук Я. А., Табиева Г. А.* Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 53–60.
8. *Юрьев С.Ф.* Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.
9. *Bodner S. R.* Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report). Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology. Haifa 32000, Israel, 2000. – 106 p.
10. *Braisted W., Brockman R.* Finite element simulation of laser shock peening // Int. J. Fatigue. – 1999. – Vol. 21. – P. 719–724.
11. *Koistinen D. P, Marburger R. E.* A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steels // Acta Metall. – 1959. – Vol. 7. – P. 59–60.
12. *Yilbas B. S., Shuja S. Z., Arif A., Gondal M. A.* Laser-shock processing of steel // Journal of Materials Processing Technology. – 2003. – Vol. 135. – P. 6–17.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 16.11.2012*

УДК 539.3

Я. А. ЖУК, д-р физ.-мат. наук,  
 Е. В. ДОЛЯ, канд. физ.-мат. наук  
 Н. Д. ОКСЕНЧУК,

### УПРОЧНЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ТЕПЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ С УЧЕТОМ МАРТЕНИСИТНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

*Рассматривается стальной цилиндр, облученный тепловым импульсом. Нелинейное поведение материала описывается моделью течения Боднера-Партома, которая обобщена на случай многофазового состава материала. Задача решается численно методом пошагового интегрирования по времени и МКЭ. Исследуется влияние микроструктурных превращений на упрочнение материала. Дается оценка механизмов упрочнения.*

*Ключевые слова:* импульсное тепловое нагружение, мартенситное превращение, модель течения, трансформационное упрочнение

Лазерные и лучевые импульсные технологии широко используются в настоящее время для поверхностной обработки материалов с целью повышения прочности [11, 12]. Моделированию текущего и остаточного НДС, а также микроструктурного состояний, возникающих в результате такого нагружения, посвящены работы [1, 2]. Однако в этих работах влияние микроструктурных, в частности мартенситных, превращений учитывается посредством эффекта объемных изменений вследствие преобразования аустенита в мартенсит при охлаждении.

В настоящей работе при моделировании текущего и остаточного состояний, кроме изменений объема, учитывается также влияние фазового состава на неупругие механические характеристики материала. Дается оценка механизмам упрочнения, в частности, деформационному и трансформационному (структурному). В качестве материала используется сталь 35ХМА.

**Постановка задачи.** Используется термомеханическая модель Боднера-Партома [6], обобщенная на случай зависимости ее параметров, которые отвечают за предел текучести и временное сопротивление материала, от фазового состава [3, 5]. Модель включает

– уравнение аддитивности деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{oph}, \quad i, j = r, z, \varphi; \quad (1)$$

– уравнения закона Гука, записанные для девиаторной и шаровой составляющих тензоров,

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{oph}); \quad (2)$$

– закон течения Прандтля-Рейса с условием неупругой несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(0) = 0; \quad \varepsilon_{ii}^{in}(0) = 0; \quad (3)$$

– уравнение эволюции параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K}' = m_1 (\bar{K}_1 - K') \dot{W}^{in}, \quad K'(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^{in}$  и  $\varepsilon_{ij}^e$  – неупругая и упругая составляющие деформации,  $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$  – объемная термотрансформационная деформация, которая описывает температурный и трансформационный эффекты изменения объема [2, 10];  $G$  – модуль сдвига;  $K_V$  – модуль объемного сжатия;  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – девиаторы тензоров напряжений и деформации соответственно,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk} / 3$ ,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_{kk} / 3$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $J_2$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $J_2 = s_{ij} s_{ij} / 2$ ;  $\dot{W}^{in}$  – неупругая мощность,  $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ ;  $D_0$  – предельное значение скорости неупругой деформации при сдвиге,  $D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}$ ;  $D_0$ ,  $n$ ,  $m_1$ ,  $\bar{K}_0$ ,  $\bar{K}_1$  – параметры модели, причем  $\bar{K}_0$ ,  $\bar{K}_1$  для многофазового состава материала определяются с помощью линейного правила смесей [5].

Микроструктурные превращения (МСП) при охлаждении стали характеризуются термотрансформационной деформацией и зависимостью неупругих свойств от фазового состава материала. Термотрансформационная деформация вычисляется с помощью концентрации фаз и соотношений для удельных объемов [7, 10]. Распад переохлажденного аустенита описывается с помощью термокинетической диаграммы [1, 2, 4]. Накопление концентрации фаз вдоль кривых охлаждения в области мартенситного превращения рассчитывается с помощью уравнения Коистинена–Марбургера [3, 9].

Кроме указанных уравнений модели течения и кинетики МСП, постановка динамической связанной задачи термомеханики в цилиндрической системе координат  $orz\varphi$  для цилиндра  $0 < r < R$ ,  $0 < z < L$  включает соотношения Коши для осесимметричного случая (5); уравнения движения (6); уравнение теплопроводности (7), а также начальные и граничные условия (8) – (10)

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}; \quad (6)$$

$$\bar{c}_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \bar{k} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - T \dot{\sigma}_{kk} \bar{\alpha} + \rho \Delta i_{\xi} \dot{C}^{\xi} + D', \quad (7)$$

где  $\xi = a, b, p, f, m$ ;

$$\bar{c}_v = c_v^\xi C^\xi, \quad \bar{k} = k^\xi C^\xi, \quad V_0^\xi = V^\xi(\theta_r), \quad \bar{\alpha} = \frac{\sum_\xi V_0^\xi C^\xi \alpha_\xi}{\sum_\xi V_0^\xi C^\xi},$$

$$\alpha_\xi = \left( V^\xi - V_0^\xi \right) / 3(\theta - \theta_0) V_0^\xi, \quad \sum_\xi C^\xi = C^a + C^b + C^f + C^p + C^m = 1.$$

В уравнениях (5) – (7) приняты следующие обозначения:  $u_r, u_z$  – компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}$  – компоненты тензора деформации;  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho$  – плотность материала;  $\theta$  – температура;  $\theta_r$  – отсчетная температура;  $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$ ;  $\bar{c}_v, \bar{k}$  – объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности смесей фаз;  $\bar{\alpha}$  – обобщенный коэффициент объемного расширения;  $\dot{\sigma}_{kk} = \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz} + \dot{\sigma}_{rz} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ;  $\Delta i_\xi$  – латентная теплота МСП;  $D'$  – скорость внутренней диссипации;  $V^\xi(\theta)$  – свободный объем фазы  $\xi$  при температуре  $\theta$ ;  $C^\xi$  – объемная концентрация фазы  $\xi$  в долях единицы;  $\xi = a, f, p, b, m$ , где  $a$  – аустенит,  $f$  – феррит,  $p$  – перлит,  $b$  – бейнит,  $m$  – мартенсит; по повторяющемуся индексу проводится суммирование.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u_r = \dot{u}_r = 0, \quad u_z = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0; \quad (8)$$

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_s = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_p} t, & t \leq t_q, \quad z = 0, \quad 0 < r < R, \\ 0, & t > t_q. \end{cases} \quad (9)$$

Остальная поверхность цилиндра считается теплоизолированной и свободной от напряжений

$$\theta_i n_i = 0, \quad \sigma_{ij} n_j = 0, \quad t > 0, \quad i, j = r, z. \quad (10)$$

Здесь  $\theta_0$  – начальная температура;  $q_0$  – параметр теплового потока;  $t_q$  – время действия импульса,  $n_j$  – компоненты вектора внешней единичной нормали к граничной поверхности.

**Метод решения задачи.** Задача является нелинейной и решается численно методом пошагового интегрирования по времени, итерационного метода и метода конечных элементов. Алгоритм решения задачи изложен в работе [2].

**Результаты расчетов и выводы.** Расчеты проводились при следующих параметрах:  $R = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $L = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ;  $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ кВт/м}^2$ ;  $t_q = 10^{-8} \text{ с}$ ;  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ , где  $\Delta t$  – начальный шаг по времени. Исходная структура стали была следующей:  $C^a = 0$ ,  $C^b = 0,79$ ,  $C^{f+p} = 0,11$ ,  $C^m = 0,10$ .

Классическим механизмом упрочнения неупругих, в частности пла-

стических и вязкопластических, тел является деформационный механизм, который определяется накопленной пластической деформацией, пластической работой или другими мерами упрочнения.

В случае микроструктурных превращений возникает дополнительный трансформационный механизм, определяемый зависимостью неупругих характеристик материала, в частности, начального или перманентного предела текучести  $\sigma_{02}$  или временного сопротивления  $\sigma_B$  материала от его фазового состава.

В рассматриваемой модели течения ответственным за упрочнение является параметр изотропного упрочнения  $K$ ,  $K = K' + \bar{K}_0$ ,  $\bar{K}_0 = K_0^\xi C^\xi$ . Параметр  $\bar{K}_0$  отражает влияние температуры и фазового состава, а  $K'$  – преимущественно деформационное упрочнение.

Неупругие характеристики фаз и соответствующие значения параметров модели для стали 35ХМА рассчитаны в работе [5] и приводятся в таблице, в которой даны параметры модели  $K_0^\xi$ ,  $K_1^\xi$  и неупругие свойства  $\sigma_{02}^\xi$ ,  $\sigma_B^\xi$  для фаз  $\xi = a, b, f, p, m$ .

Видно, что параметры  $K_0^\xi$  и  $K_1^\xi$  пропорциональны неупругим характеристикам  $\sigma_{02}^\xi$  и  $\sigma_B^\xi$  фаз. При этом пределы текучести и прочности мартенсита почти на порядок выше, чем у фазы аустенита.

Результаты исследований парциальных вкладов обоих механизмов показаны на рис. 1–3. Для анализа результатов расчета использованы следующие обозначения вариантов задач:  $q + f_s$  – тепловое нагружение с учетом влияния фазового состава на неупругие характеристики и объем материала;  $q + f$  – тепловое нагружение с учетом только термотрансформационной деформации. Штрих-пунктирная кривая отвечает начальному значению параметра упрочнения  $\bar{K}_0$  для исходного фазового состава.

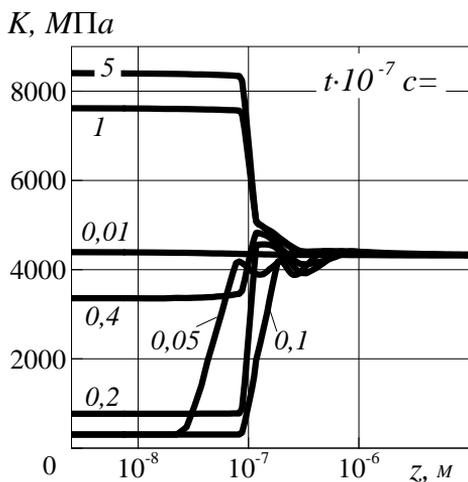


Рис. 1

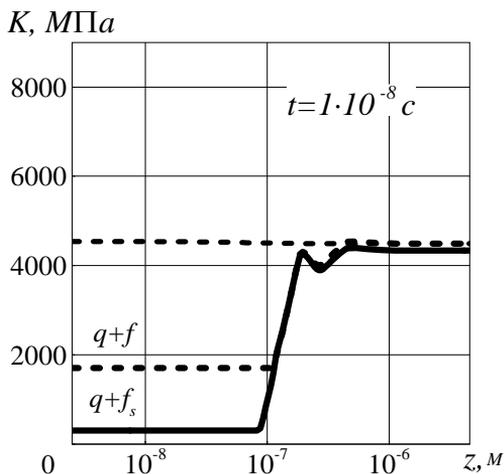


Рис. 2

На рис. 1 видно, что значение  $K$  на протяжении импульса ( $0 < t < 10^{-8} c$ ) существенно уменьшается вследствие разогрева. Затем параметр  $K$  возрастает в результате снижения температуры, и при  $\theta < \theta_n$  – за счет мартенситного превращения, причем  $\theta_n$  – температура начала мартенситного превращения.

Результаты расчетов для момента времени  $t = 10^{-8} c$  показаны на рис. 2. Вследствие аустенизации наружного слоя при  $\theta > A_{c1} \approx 730^{\circ}C$  кривая  $q + f_s$  лежит ниже кривой  $q + f$ , поскольку она отображает возросшую концентрацию аустенита с более низким пределом текучести

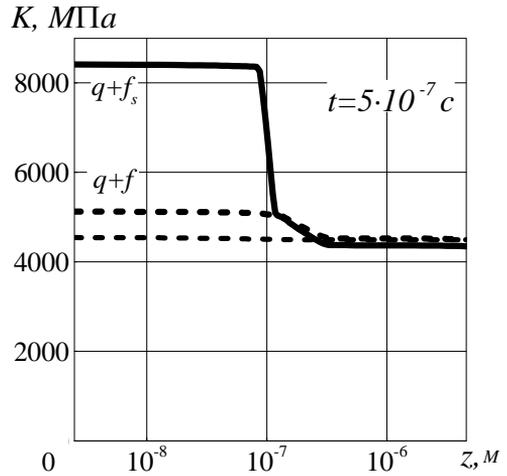


Рис.3

(таблица). В остаточном состоянии  $t > 5 \cdot 10^{-7} c$  (рис. 3) упрочнение имеет уже высокий уровень за счет возрастания при охлаждении концентрации

$\xi$	$\sigma_{02}^{\xi}, MPa$	$\sigma_B^{\xi}, MPa$	$K_0^{\xi}, MPa$	$K_1^{\xi}, MPa$
$a$	165	190	712	824
$f + p$	827	948	3562	4123
$b$	900	1032	3877	4489
$m$	1611	1848	6943	8039

мартенсита с высоким пределом текучести. При этом приращение параметра упрочнения относительно исходного состава равно  $\Delta K = 4200 MPa$ , а приращение за счет деформационного упрочнения составляет  $\Delta K = 800 MPa$ .

Таким образом, трансформационный механизм упрочнения, который учитывает зависимость неупругих характеристик от фазового состава, является определяющим, по сравнению с деформационным для рассматриваемых материалов и условий нагружения.

**РЕЗЮМЕ.** Розглядається сталевий циліндр, опромінений тепловим імпульсом. Нелінійна поведінка матеріалу описується моделлю течії Боднера-Партома, яка узагальнена на випадок багатозафазового складу матеріалу. Задача розв'язується чисельно методом покрокового інтегрування по часу та МКЕ. Досліджується вплив мікроструктурних перетворень на зміцнення матеріалу. Дається оцінка механізмам зміцнення матеріалу.

**Ключові слова:** імпульсне теплове навантаження, мартенситне перетворення, модель течії, трансформаційне зміцнення.

**SUMMARY.** The steel cylinder irradiated by a heat pulse is considered. Nonlinear behaviour of the material is described by Bodner-Partom unified flow model generalized for

the case of multiphase material state. The problem is solved numerically by the time step integration method and FEM. The influence of microstructure on the material hardening is investigated. Estimation of the hardening mechanisms is given.

**Keywords:** pulse thermal loading, martensite transformations, flow model, transformation hardening.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Жук Я. А., Червинко О. П., Васильева Л. Я.* Структурные превращения в цилиндре из стали, инициируемые импульсным термическим воздействием // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – № 42. – С. 73–78.

2. *Жук Я. О., Сенченков І. К., Васильева Л. Я.* Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевого диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. –Т. 54, №1. – С. 101–115.

3. *Оксенчук Н.Д.* Напружено-деформований стан сталевого циліндра при тепловому опроміненні та врахуванні мікроструктурних перетворень // Мет. розв'язування прикладних задач механіки твердого деформівного тіла. – 2012. № 13. – С. 301–308.

4. *Попов А. А., Попова А. Е.* Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М.: Машгиз, 1961. –430 с.

5. *Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д.* Моделирование неізотермічного течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. –Т. 55, №1. – С. 138–144.

6. *Сенченков І. К., Жук Я. А., Табиева Г. А.* Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 53–60.

7. *Юрьев С.Ф.* Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.

8. *Bodner S. R.* Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report). Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology. Haifa 32000, Israel, 2000. – 106 p.

9. *Koistinen D. P., Marburger R. E.* A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron-carbon alloys and carbon steels // Acta Metall. – 1959. – Vol. 7. – P. 59–60.

10. *Leblond J.B., Mottet G., Devaux J.C.* A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformation. – I. Derivation of general relations // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – Vol. 34, № 4. – P. 395–409.

11. *Rubio-Gonzales C., Osana J. L., Gomes-Rosas G.* Effect of laser shock processing an fatigue crack growth and fracture toughness of 6061-T6 aluminum alloy / // Mater. Sci. & Engng. – 2004. – Vol. 386, №3. – P. 291–295.

12. *Yilbas B. S.* Laser pulse heating and flexural wave generation during treatment of metallic surfaces // J. Materials Processing Techn. – 2003. – Vol. 141. – P. 1–8.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев,  
Киевский национальный университет*

*Поступила 27.10.2012*

УДК 539.3

*В. С. КИРИЛЮК*, д-р физ.-мат. наук**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ  
ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА  
С ВНУТРЕННЕЙ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ**

*Рассмотрены задачи статики термоэлектроупругости для трансверсально-изотропного электроупругого материала, содержащего внутреннюю дискообразную трещину, при стационарных температурных воздействиях в материале. С помощью представления решений уравнений термоэлектроупругости через потенциальные функции и использования потенциалов Буссинеска задачи термоэлектроупругости сведены к решению задач теории потенциала. Для трещины круговой формы при построении потенциальных функций использованы интегралы Фурье-Бесселя. В замкнутом виде получены выражения КИН и КИЭИ при различных симметричных температурных воздействиях в электроупругом материале с круговой трещиной. Как частные случаи, из приведенных выражений следуют выражения КИН для круговой трещины в упругом трансверсально-изотропном материале при температурных воздействиях. Проведены численные исследования. Установлено влияние свойств пьезоэлектрического материала на значения КИН и КИЭИ.*

*Ключевые слова:* термоэлектроупругость, пьезоэлектрический материал, круговая трещина, температурное воздействие, напряженное состояние, коэффициенты интенсивности напряжений.

Решениям задач электроупругости для пьезоэлектрических тел с плоскими трещинами посвящены работы [3, 4, 7, 8]. Влияние температурных полей на напряженное и электрическое состояние трансверсально-изотропных электроупругих тел с трещинами круговой и эллиптической формы для отдельных случаев температурных воздействий изучено в работах [7, 8]. Соответствие между коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) для плоских трещин, расположенных в плоскости изотропии электроупругого трансверсально-изотропного материала, с КИН для трещин той же формы в упругом изотропном материале при силовых и температурных воздействиях установлено в работах [2, 6]. В то же время, задачи статики термоэлектроупругости для пьезоэлектрического материала с внутренней круговой трещиной (в плоскости изотропии материала) при произвольных симметричных (относительно плоскости расположения трещины) температурных нагрузках не решались.

Такая задача может быть решена с помощью соответствия между решениями задач электроупругости и теории упругости. Впервые такой подход, устанавливающий соответствие между решениями задач для протяженных тел с начальными напряжениями, содержащими плоские трещины, при силовых нагрузках и упругими телами с трещинами той же формы были предложен в работах А.Н. Гузя [1].

В настоящей статье решена трехмерная задача статики термоэлектроупругости для пьезоэлектрического материала с внутренней круговой

трещиной, расположенной в плоскости изотропии электроупругого материала при симметричных температурных нагрузках общего вида. С помощью представления решения уравнений термоэлектроупругости для трансверсально-изотропного электроупругого материала для круговой трещины на основе интегралов Фурье-Бесселя в явном виде получены выражения потенциальных функций и найдены формулы для оценки КИН и КИЭИ для круговой трещины при температурных нагрузках общего вида. На основе полученных результатов решен ряд задач.

**Постановка задачи.** Рассмотрим внутреннюю круговую трещину радиуса  $a$  в электроупругом трансверсально-изотропном материале, расположенную в плоскости его изотропии. Будем предполагать, что на поверхности трещины известно симметричное относительно плоскости трещины распределение температуры  $-T_0(r, \theta) < 0$ , поверхности трещины свободны от силовых и электрических нагрузок, т. е.

$$\begin{aligned} u_z^\pm &= \Psi^\pm = 0, & \sigma_{xz}^\pm &= \sigma_{yz}^\pm = 0, & \partial T^\pm / \partial z &= 0 \quad (r > a), \\ \sigma_{xz}^\pm &= \sigma_{yz}^\pm = 0, & \sigma_{zz}^\pm &= 0, & D_z^\pm &= 0, \\ T^\pm(r, \theta, 0) &= -T_0(r, \theta), & 0 \leq r < a, & & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{aligned} \quad (1)$$

Представим температурное поле на поверхности трещины с помощью рядов Фурье

$$T_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \sin n\theta \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi T_0(r, \theta) d\theta; \\ f_n(r) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi T_0(r, \theta) \cos n\theta d\theta; \quad g_n(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi T_0(r, \theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

**Основные соотношения.** Уравнения стационарной термоэлектроупругости для пьезокерамического тела относительно перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и электрического потенциала  $\Psi$  (при отсутствии массовых сил, сосредоточенных зарядов и источников тепла) принимают вид

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \beta_{11} T_{,x}, \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \beta_{11} T_{,y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} \\
& + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = \beta_{33}T_{,z}, \\
& (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33}u_{z,zz} - \\
& - \varepsilon_{11}^S(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S\Psi_{,zz} = -p_3T_{,z}; \\
& \lambda_{11}(T_{,xx} + T_{,yy}) + \lambda_{33}T_{,zz} = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – независимые модули упругости, измеряемые при постоянном электрическом поле;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости, измеряемые при постоянной деформации;  $\lambda_{11}, \lambda_{33}$  – коэффициенты теплопроводности;  $\beta_{11}, \beta_{33}$  – коэффициенты температурных напряжений;  $p_3$  – пирозлектрическая постоянная.

Решение системы уравнений (3) можно выразить через пять следующих потенциальных функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) таким образом [7]:

$$\begin{aligned}
u_x &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}, & u_y &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}, \\
u_z &= \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}, & \Psi &= \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z},
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $k_i, l_i$  – неизвестные постоянные.

После подстановки выражений перемещений и потенциала (4) в уравнения (3) эти уравнения удовлетворяются тождественно, если функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5). \tag{5}$$

Здесь  $v_5 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , а значения  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned}
& v^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\
& + v (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0,
\end{aligned}$$

в котором

$$\begin{aligned}
A_1 &= c_{11}^E e_{15}, & A_2 &= (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15}, \\
A_3 &= c_{44}^E e_{33}, & B_2 &= - \left[ \varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15} (e_{31} + e_{15}) \right], \\
B_3 &= \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33} (e_{31} + e_{15}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S, & C_3 &= -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S, \\
C_2 &= (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S, \\
D_2 &= e_{15} (c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}), \\
D_3 &= c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E).
\end{aligned} \tag{6}$$

Постоянные  $k_j, l_j$  ( $i=1, 2, 3$ ) в формулах (4) связаны с величинами  $v_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = \overline{1, 3}), \tag{7}$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 4}). \tag{8}$$

Потенциальная функция  $\Phi_4$  одновременно удовлетворяет двум уравнениям

$$\Phi_{4,zz} = \frac{m}{k^2} T; \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2 \Phi_{4,zz} = 0, \tag{9}$$

в которых  $k^2 = \lambda_{33} / \lambda_{11}$  (отношение коэффициентов теплопроводности),  $m$  – неизвестная постоянная.

Значения  $k_j, l_j$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
k_j &= \frac{(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})}{(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})}, \\
l_j &= \frac{(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2}{(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})} \quad (j = \overline{1, 3}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Для определения неизвестных постоянных  $k_4, l_4$  получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&(\beta_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} c_{33}^E + \beta_{11} c_{44}^E k^2) k_4 + (\beta_{33} (e_{15} + e_{31}) - \beta_{11} e_{33} + \\
&\quad + \beta_{11} e_{15} k^2) l_4 + (\beta_{33} (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (c_{44}^E + c_{13}^E) k^2) = 0, \\
&(-p_3 (c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11} e_{33} + \beta_{11} e_{15} k^2) k_4 + (-p_3 (e_{15} + e_{31}) + \beta_{11} \varepsilon_{33}^S - \\
&\quad - \beta_{11} \varepsilon_{11}^S k^2) l_4 + (-p_3 (c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11} (e_{15} + e_{31}) k^2) = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$m = \frac{\beta_{11} k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E) k_4 + (e_{15} + e_{31}) l_4 - c_{11}^E k^2}. \quad (12)$$

При введении обозначений  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$ ,  $\Phi_5(x, y, z_5)$  являются гармоническими функциями в соответствующей системе координат.

**Метод решения.** Температурное поле в пьезоэлектрическом материале с трещиной представим в виде потенциала простого слоя с неизвестной плотностью

$$T(x, y, z_4) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\theta(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\left[ (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2 \right]^{1/2}}, \quad (13)$$

где  $\Omega$  – область круговой трещины. Далее воспользуемся суперпозицией двух состояний. Для первого из состояний суперпозиции выберем потенциальную функцию

$$\Phi_4^{(1)}(x, y, z_4) = F(x, y, z_4) = m \iint_{\Omega} \theta(\xi, \eta) \{ z_4 \ln(\rho_4 + z_4) - \rho_4 \} d\xi d\eta, \quad (14)$$

в которой  $\rho_4(x, y, z_4) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_4^2}$ . Для этого состояния также положим  $\Phi_i^{(1)}(x, y, z_i) = \alpha_i^* F(x, y, z_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $\Phi_5^{(1)} = 0$ , где  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$ ,  $\alpha_3^*$  – постоянные, которые определим из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1^* a_1}{\sqrt{v_1}} + \frac{\alpha_2^* a_2}{\sqrt{v_2}} + \frac{\alpha_3^* a_3}{\sqrt{v_3}} &= -\frac{a_4}{k}, & \frac{\alpha_1^* k_1}{\sqrt{v_1}} + \frac{\alpha_2^* k_2}{\sqrt{v_2}} + \frac{\alpha_3^* k_3}{\sqrt{v_3}} &= -\frac{k_4}{k}, \\ \alpha_1^* d_1 + \alpha_2^* d_2 + \alpha_3^* d_3 &= -l_4/k. \end{aligned} \quad (15)$$

Для второго состояния суперпозиции выберем функции

$$\Phi_4^{(2)} = \Phi_5^{(2)}, \quad \Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \beta_i^* f^*(x, y, z_i) + \beta_i^{**} f^{**}(x, y, z_i), \quad (i = \overline{1, 3})$$

где  $\beta_i^*$ ,  $\beta_i^{**}$  – неизвестные постоянные,  $f^*(x, y, z)$  и  $f^{**}(x, y, z)$  – неизвестные функции. Взяв далее постоянные  $\beta_i^*$ ,  $\beta_i^{**}$  согласно [6], при  $z = 0$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f^*}{\partial z^2} &= -m \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i^* a_i + a_4 \right) T_0^*(x, y) = \gamma_S^{Piezo} T_0^*(x, y) \quad (x, y) \in \Omega; \\ \frac{\partial f^*}{\partial z} &= 0, \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 f^{**}}{\partial z^2} = -m \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i^* d_i + d_4 \right) T_0^* (x, y) = \gamma_D^{Piezo} T_0^* (x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \quad (17)$$

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial z} = 0, \quad (x, y) \in R^2 \setminus \Omega.$$

Используем при построении потенциальных функций  $f^*$  и  $f^{**}$  гармонический потенциал  $\phi(r, \theta, z)$  в виде интеграла Фурье–Бесселя [5]

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta \int_0^{\infty} g_n^*(s) \frac{1}{s} J_n(r, s) e^{-sz} ds + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\infty} h_n^*(s) \frac{1}{s} J_n(r, s) e^{-sz} ds, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} g_n^*(s) &= \sqrt{\frac{s}{2\pi}} \int_0^a J_{n+1/2}(st) \frac{1}{t^{n-1/2}} \left[ \int_0^t \frac{u^{n+1} f_n(u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} \right] dt; \\ h_n^*(s) &= \sqrt{\frac{s}{2\pi}} \int_0^a J_{n+1/2}(st) \frac{1}{t^{n-1/2}} \left[ \int_0^t \frac{u^{n+1} g_n(u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} \right] dt. \end{aligned}$$

Тогда для распределения температурного поля на поверхностях круговой трещины в виде рядов по тригонометрическим функциям находим выражения КИН и КИЭИ

$$\begin{aligned} \frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{u^{n+1} f_n(u) du}{\sqrt{a^2 - u^2}} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{u^{n+1} g_n(u) du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Для случая осесимметричного распределения температурного поля на поверхностях трещины имеем

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{u T_0(u) du}{\sqrt{a^2 - u^2}}. \quad (20)$$

На основе найденных выражений для КИН и КИЭИ рассмотрим ряд конкретных задач.

**Задача 1.** Пусть в центре круговой трещины на ее поверхностях действует сосредоточенный температурный источник, т.е. имеем

$$T(r, \theta, 0) = -T_0(r) = -\frac{T_0}{2\pi r} \delta(r).$$

Тогда находим

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{T_0}{(\pi a)^{3/2}}. \quad (21)$$

**Задача 2.** Если температура распределена равномерно по окружности радиуса  $c < a$ , то

$$T(r, \theta, 0) = -T_0(r) = -\frac{T_0}{2\pi r} \delta(r - c).$$

В результате получаем

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{T_0}{(\pi a)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (c/a)^2}}. \quad (22)$$

**Задача 3.** Пусть на внутренней круговой части поверхностей трещины  $b < a$  поддерживается постоянная температура

$$T(r, \theta, 0) = -T_0, \quad 0 \leq r < b.$$

Тогда

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi a}} \int_0^b \frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 2T_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right). \quad (23)$$

**Задача 4.** Если на внешней кольцевой части трещины  $b < r < a$  поддерживается постоянное значение температуры:

$$T(r, \theta, 0) = -T_0, \quad b < r < a,$$

то в результате имеем

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi a}} \int_b^a \frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 2T_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right). \quad (24)$$

Отметим, что, сложив значения КИН для задач 3 и 4, получим значения КИН в случае, когда температурное поле принимает постоянное значение на всей поверхности круговой трещины.

**Задача 5.** Если температура принимает постоянное значение на внутренней кольцевой части  $0 \leq c < r < b \leq a$  круговой трещины

$$T(r, \theta, 0) = -T_0, \quad c < r < b,$$

то получаем

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi a}} \int_c^b \frac{udu}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 2T_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left( \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right). \quad (25)$$

**Задача 6.** Пусть в двух точках поверхностей круговой трещины с полярными координатами  $(b, \pm\alpha)$ , где  $b < a$  действуют сосредоточенные источники (стоки) температурного поля, т.е.

$$T(r, \theta, 0) = -T_0(r, \theta) = -\frac{T_0}{r} \delta(r, \theta) \delta(r, \theta).$$

В этом случае задача не является осесимметричной и, воспользовавшись разложениями по тригонометрическим функциям, получаем

$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{2T_0}{(\pi a)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-r_0^2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n \cos n\alpha \cos n\theta \right], \quad (26)$$

где  $r_0 = b/a$ . Положив  $\alpha = 0$ , получим решение для случая, когда на поверхностях трещины в точке с полярными координатами  $(b, 0)$  действуют сосредоточенные температурные источники (стоки) с двойной интенсивностью  $2T_0$ , т.е.

$$T(r, \theta, 0) = -T_0(r, \theta) = -\frac{2T_0}{r} \delta(r-b) \delta(0). \quad (27)$$

Тогда имеем

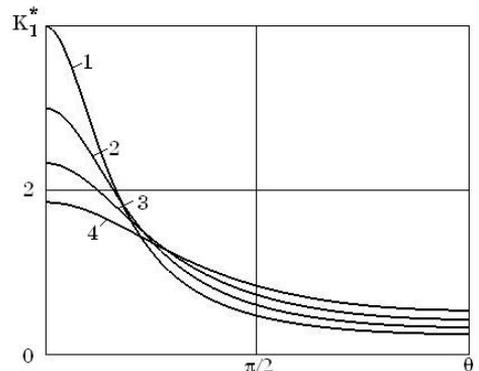
$$\frac{K_I}{\gamma_S^{Piezo}} = \frac{K_D}{\gamma_D^{Piezo}} = \frac{2T_0}{(\pi a)^{3/2}} \frac{1-r_0^2}{1-2r_0 \cos \theta + r_0^2}. \quad (28)$$

Отметим, что с помощью полученных выражений КИН и КИЭИ для распределения температурного поля на поверхностях круговой трещины общего вида (2) могут быть найдены характеристики силовых и электрических полей вблизи трещины, вызванные другими температурным воздействиями, что могут быть сведены к виду (2).

При переходе от пьезоэлектрического материала к упругому трансверсально-изотропному имеем  $\gamma_S^{Piezo} \rightarrow \gamma^{Trans}$ . Осуществляя переход к изотропному материалу, получаем  $\gamma^{Trans} \rightarrow \mu\alpha(1+\nu)/(1-\nu)$  ( $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения).

**Анализ результатов численных исследований.** Рассмотрим пьезоэлектрическое тело с круговой трещиной, на верхней и нижней поверхностях (в точках  $r_0 = b/a$  и  $\theta = 0$ ) которой действуют сосредоточенные стоки тепла согласно выражениям (27). На основе формул (28) изучим распределение КИН и КИЭИ вдоль фронта

круговой трещины в электроупругом материале. На рисунке показано распределение КИН и КИЭИ для различных расстояний нахождения температурных стоков от центра трещины. Линии 1, 2, 3, 4 отвечают случаям, когда  $r_0 = b/a$  равно 0,6; 0,5; 0,4; 0,3 соответственно, при  $K_I^* = K_I (\pi a)^{3/2} / 2T_0 \gamma_S^{Piezo}$ . Видно, что при приближении стока тепла к фронту трещины (при увеличении



значения  $r_0$ ) максимальные значения КИН и КИЭИ возрастают.

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано задачі термоелектропружності для трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу, що містить внутрішню дископодібну тріщину, при стаціонарних температурних впливах. За допомогою представлення розв'язків рівнянь термоелектропружності через потенціальні функції і використання потенціалів Буссінеска задачі термоелектропружності зведено до розв'язку задач теорії потенціалу. Для тріщини кругової форми при побудові потенціальних функцій використано інтеграли Фур'є-Бесселя. У замкненому вигляді отримано вирази КИН і КИЭИ при різних симетричних температурних впливах у електропружному матеріалі з круговою тріщиною. Як частинний випадок, з наведених виразів випливають вирази КИН для кругової тріщини у пружному трансверсально-ізотропному матеріалі при температурних впливах. Проведено числові дослідження. Встановлено вплив властивостей п'єзоелектричного матеріалу на значеннях КИН і КИЭИ.

**Ключові слова:** термоелектропружність, п'єзоелектричний матеріал, кругова тріщина, температурний вплив, напружений стан, коефіцієнти інтенсивності напружень

**SUMMARY.** The static problems of thermoelectroelasticity for a transversally isotropic electroelastic material that contains the inner penny-shaped crack under stationary temperature influences were considered. By means of representation of thermoelectroelasticity equations solutions and Bussinesc potential the problems of thermoelectroelasticity were reduced to the solution of the potential theory problems. The Bessel-Fourrier integrals were used for construction of the potentials functions for the crack of the circle form. The expressions of SIF and IEIF were obtained in the closed form for different symmetric temperature influences in the electroelastic material with circle crack. As the particular cases, the expressions of SIF for a penny-shape crack in the elastic transversally isotropic material follow from obtained results. The numerical researches were carried out. The influence of piezoelectric material properties on the values of SIF and IEIF was established.

**Key words:** thermoelectroelasticity, piezoelectric material, circle crack, thermal influence, stress state, stress intensity factors

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
2. Кирилук В. С. Термонапряженное состояние пьезокерамического тела с плоской трещиной при симметричном тепловом потоке с поверхностей трещины // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 7. – С. 23–33.
3. Chen W. Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium // Int. J. Fract. – 2005. – Vol. 131, № 3. – P. 231–246.
4. Kaloerov S. A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 43, № 6. – P. 631–637.
5. Kassir M. K., Sih G. C. Three-dimensional crack problems. Mechanics of fracture vol. 2 – Leyden, 1975. – 452 p.
6. Kirilyuk V. S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, № 3. – P. 320–330.
7. Podil'chuk Yu. N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.
8. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 40, № 3. – P. 237–246.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев*

*Поступила 12.11.2012*

УДК 539.3

О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

## КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВОГНУТЫМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ

*Рассмотрено контактное взаимодействие трансверсально-изотропного пьезоэлектрического полупространства с осесимметричным вогнутым жестким штампом. Контактная задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма. В аналитическом виде получено соотношение для поиска неизвестной области контакта вогнутого жесткого штампа осесимметричной формы с пьезоэлектрическим полупространством, которое зависит от силы сжатия, геометрических параметров штампа и электроупругих свойств пьезоэлектрического материала. Как частные случаи, из приведенных выражений следуют параметры контактного взаимодействия упругих трансверсально-изотропного и изотропного полупространств с вогнутым жестким штампом. Проведены численные исследования. Установлено влияние силы вдавливания штампа и свойств электроупругого материала на параметры контактного взаимодействия полупространства с вогнутым жестким штампом.*

**Ключевые слова:** электроупругость, контактная задача, пьезоэлектрический материал, полупространство, вогнутый штамп.

Исследованиям контактного взаимодействия жестких осесимметричных штампов с упругими изотропными и трансверсально-изотропными телами посвящены работы [5, 6, 8] и [3] соответственно. Многие важные задачи контактной механики для тел с начальными напряжениями решены А. Н. Гузем и его учениками [4]. Для пространственных задач электроупругости решены задачи лишь для случая выпуклых жестких штампов [1, 2, 7, 9].

В данной статье дано решение пространственной контактной задачи для пьезоэлектрического полупространства, на которое давит вогнутый жесткий осесимметричный штамп. Из полученных результатов как частные случаи следуют параметры контактного взаимодействия упругого трансверсально-изотропного полупространства с вогнутым штампом [1, 2, 7, 9].

**Постановка задачи.** Рассмотрим трансверсально-изотропное электроупругое полупространство, поверхность которого перпендикулярна оси симметрии пьезоматериала (рис. 1). На поверхности полупространства действует гладкий штамп. Поверхность полупространства неэлектропроводна. Тогда на плоскости контакта  $z=0$  имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad D_z = 0, \quad z = 0;$$

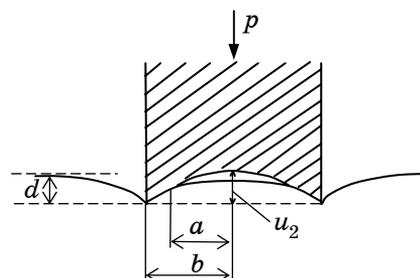


Рис. 1

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \\
\sigma_{zz} &= -p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; \\
u_z &= \delta - \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\varphi(x, y)$  – функция, описывающая поверхность вогнутого жесткого штампа,  $D_z$  – нормальная компонента вектора электрической индукции,  $\Omega$  – неизвестная область контакта под вогнутым штампом, поскольку внутренний радиус области контакта  $a$  (рис. 1) следует определить в процессе решения задачи,  $p^*(x, y)$  – контактное давление под штампом.

**Основные соотношения.** Уравнения статики электроупругости для трансверсально-изотропного электроупругого тела относительно перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и электрического потенциала  $\Psi$  принимают вид

$$\begin{aligned}
c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\
+ (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\
c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\
+ (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\
(c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + \\
+ c_{33}^E u_{z,zz} + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

В уравнениях (2)  $c_{11}^E$ ,  $c_{12}^E$ ,  $c_{13}^E$ ,  $c_{33}^E$ ,  $c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}$ ,  $e_{15}$ ,  $e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S$ ,  $\varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости.

Решение системы уравнений (24) согласно [9] можно выразить через четыре потенциальные функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ )

$$\begin{aligned}
u_x &= \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \\
u_z &= \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z},
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $k_i$ ,  $l_i$  – постоянные;  $\Phi_j$  – функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1, 5}); \tag{4}$$

$v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ ,  $v_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – корни следующего алгебраического уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned} &v^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ &+ v (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты при степенях  $v$  находим с помощью таких обозначений:

$$\begin{aligned} A_1 &= c_{11}^E e_{15}, \quad A_2 = (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{31} + e_{15}) - c_{11}^E e_{33} - c_{44}^E e_{15}, \\ A_3 &= c_{44}^E e_{33}, \quad B_2 = -\left[ \varepsilon_{11}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{15} (e_{31} + e_{15}) \right], \\ B_3 &= \varepsilon_{33}^S (c_{13}^E + c_{44}^E) + e_{33} (e_{31} + e_{15}), \quad C_1 = -c_{11}^E \varepsilon_{11}^S, \\ C_2 &= (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11}^E \varepsilon_{33}^S + c_{44}^E \varepsilon_{11}^S, \quad C_3 = -c_{44}^E \varepsilon_{33}^S, \\ D_2 &= e_{15} (c_{13}^E + c_{44}^E) - c_{44}^E (e_{31} + e_{15}); \\ D_3 &= c_{33}^E (e_{31} + e_{15}) - e_{33} (c_{13}^E + c_{44}^E). \end{aligned} \quad (6)$$

Постоянные  $k_j, l_j$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) в формулах (3) связаны с величинами  $v_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_j &= c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j, \\ d_j &= e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (8)$$

Значения  $k_j, l_j$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} k_j &= \frac{(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})}{(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})}; \\ l_j &= \frac{(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2}{(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})} \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (9)$$

При введении обозначений  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  являются гармоническими функциями в соответствующей системе координат.

**Метод решения.** Воспользуемся далее схемой, используемой в работах [1, 2] для изучения контактного взаимодействия полупространства с жесткими выпуклыми штампами. Выберем потенциальные функции  $\Phi_i$

( $i = \overline{1, 4}$ ) следующим образом:

$$\Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \beta_i^* \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i = \overline{1, 3}); \quad (10)$$

где  $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ),  $\beta_i^*$  – неизвестные пока постоянные,  $p(\xi, \eta)$  – функция, определяемая в процессе решения задачи. Положим также  $\Phi_4^{(2)} = 0$ . Постоянные  $\beta_i^*$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) для второго состояния суперпозиции выберем из решения системы трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1^* a_1 + \beta_2^* a_2 + \beta_3^* a_3 &= 1; & \beta_1^* d_1 + \beta_2^* d_2 + \beta_3^* d_3 &= 0; \\ \beta_1^* a_1 / \sqrt{v_1} + \beta_2^* a_2 / \sqrt{v_2} + \beta_3^* a_3 / \sqrt{v_3} &= 0. \end{aligned}$$

В результате, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} &= 0, & D_z|_{z=0} &= 0 \text{ при } z = 0; \\ u_z|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}; \\ \sigma_{zz}|_{z=0} &= \begin{cases} -p(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A^{Piezo} = \sum_{j=1}^3 \frac{\beta_j^* k_j}{\sqrt{v_j}}$ .

Таким образом, рассматриваемая контактная задача о взаимодействии пьезоэлектрического полупространства (с неэлектропроводной поверхностью) с вогнутым жестким штампом может быть сведена к решению задачи теории потенциала, которая подобна задаче о взаимодействии упругого изотропного полупространства со штампом той же формы (при замене значения  $(1 - \nu)/\mu$  в упругой задаче величиной  $A^{Piezo}$ ).

Отметим, что при переходе от электроупругого материала к упругому трансверсально-изотропному материалу величина  $A^{Piezo}$  принимает значение  $A^{Trans}$ . Осуществляя далее переход к упругому изотропному материалу, из значения  $A^{Trans}$  получаем  $(1 - \nu)/\mu$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\mu$  – модуль сдвига материала.

Воспользовавшись далее результатами исследования задачи о контакте вогнутого жесткого осесимметричного штампа с упругим изотропным полупространством [5, 6, 8], получаем связь между силой вдавливания и параметрами контакта в виде

$$\frac{P}{2\pi} A^{Piezo} = \int_0^b g_0(t) dt + \int_b^\infty g_2(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^a g(t) \log \left( \frac{b-t}{b+t} \right) dt; \quad (13)$$

$$g_0(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\omega f_0(\omega) d\omega}{\sqrt{t^2 - \omega^2}}, \quad (0 \leq t < b)$$

$$g_2(t) = \frac{4}{\pi^2} \int_t^\infty \sqrt{\omega^2 - t^2} \left\{ \frac{d}{d\omega} \int_a^\omega \left[ \frac{d}{ds} \int_s^\infty \frac{r f_1(r) dr}{\sqrt{r^2 - s^2}} \right] \frac{s ds}{\sqrt{\omega^2 - s^2}} \right\} d\omega,$$

где  $g(t)$  является решением уравнения Фредгольма

$$g(t) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \frac{g(s)}{t^2 - s^2} \left[ 2s \log \left( \frac{b-t}{b+t} \right) - 2t \log \left( \frac{b-s}{b+s} \right) \right] ds =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^2 - \omega^2}} \frac{d}{d\omega} \int_\omega^b \frac{s g_0(s) ds}{\sqrt{s^2 - \omega^2}} d\omega - \frac{2t}{\omega} \int_b^\infty \frac{g_2(s) ds}{t^2 - s^2}. \quad (14)$$

В дальнейшем, аналогично рассмотрению задачи контактного взаимодействия вогнутого штампа с упругим полупространством [5], при получении приближенного решения задачи будет использовано разложение по малому параметру, где  $\varepsilon = a/b$ ,  $a$  – неизвестное значение внутреннего радиуса области контакта кольцевой формы (рис. 1).

Для сферически вогнутого штампа (рис. 1) имеем

$$u(r) = (d - u_2) + u_2 (r/b)^2 = f_0(r); \quad f_1(r) = 0. \quad (15)$$

Воспользовавшись далее суперпозицией состояний таким же образом, как и в задаче для упругого полупространства [5], для слагаемого, связанного с перемещением под штампом  $(d - u_2)$  получаем соотношение

$$P(c) = \frac{4b(d - u_2)}{A^{Piezo}} \left\{ \left[ 1 - \frac{4c^3}{3\pi^2} - \frac{8c^5}{15\pi^2} - \frac{16c^6}{27\pi^4} - \frac{92c^7}{315\pi^2} - \frac{448c^8}{675\pi^2} + O(c^9) \right] \right\}. \quad (16)$$

Для второго состояния, отвечающего перемещению  $u_2(r/b)^2$ , находим

$$g_0(t) = 4u_2 t^2 / \pi b^2; \quad g_2(t) = 0 \quad (17)$$

В результате дальнейших преобразований, для второго члена суперпозиции имеем

$$P(c) = \frac{8b}{3A^{Piezo}} \left\{ 1 + \frac{4c^3}{\pi^2} - \frac{8c^5}{5\pi^2} - \frac{16c^6}{9\pi^4} - \frac{4c^7}{5\pi^2} - \frac{328c^8}{225\pi^2} + O(c^9) \right\}. \quad (18)$$

Для суперпозиции состояний, отвечающей вдавливанию вогнутого жесткого штампа, получаем

$$P(c) = \frac{4b}{A^{Piezo}} \left\{ (d - u_2) \left[ 1 - \frac{4c^3}{3\pi^2} - \frac{8c^5}{15\pi^2} - \frac{16c^6}{27\pi^4} - \frac{92c^7}{315\pi^2} - \frac{448c^8}{675\pi^2} + O(c^9) \right] + \right.$$

$$+\frac{2}{3}u_2 \left[ 1 + \frac{4c^3}{\pi^2} - \frac{8c^5}{5\pi^2} - \frac{16c^6}{9\pi^4} - \frac{4c^7}{5\pi^2} - \frac{32c^8}{225\pi^2} + O(c^9) \right]. \quad (19)$$

Для нахождения неизвестного внутреннего радиуса контакта воспользуемся аналогично [5] условием экстремума  $\partial P(c)/\partial c = 0$ , откуда имеем

$$\frac{d}{u_2} = 1 + 2 \frac{1 - \frac{2c^2}{3} - \frac{8c^3}{9\pi^2} - \frac{7c^4}{15} - \frac{64c^5}{675\pi^2} + O(c^6)}{1 + \frac{2c^2}{3} + \frac{8c^3}{9\pi^2} + \frac{23c^4}{45} + \frac{896c^5}{675\pi^2} + O(c^6)}, \quad (20)$$

где величины  $d$  и  $u_2$  обозначены на рис. 1. Из (19) и (20), полагая  $\varepsilon = 0$ , получаем значение нагрузки, при которой внутренний радиус кольцевой зоны контакта становится равным 0. Так, получаем

$$P = \frac{32bu_2}{3A^{Piezo}}, \quad d = 3u_2. \quad (21)$$

При нагрузках  $P > \frac{32bu_2}{3A^{Piezo}}$  распределение контактных напряжений под сферически вогнутым штампом соответствует суперпозиции решений для плоского и параболидоидального штампов

$$\sigma_{zz} = -\frac{2u_2}{\pi A^{Piezo} b} \left\{ \left( 1 + \frac{d}{u_2} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 4 \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (22)$$

При этом также имеем

$$P = \frac{4bu_2}{A^{Piezo}} \left( \frac{d}{u_2} - \frac{1}{3} \right).$$

С помощью полученных выражений определяются контактное давление и связь параметров контакта с силой, действующей на сферически вогнутый жесткий штамп.

Отметим, что из выражений (19)–(22) для контактного взаимодействия пьезоэлектрического полупространства со сферически вогнутым жестким штампом предельным переходом следуют соответствующие параметры контакта для упругого трансверсально-изотропного полупространства с вогнутым штампом той же формы. Для этого следует величину  $A^{Piezo}$  в указанных формулах заменить значением  $A^{Elast}$ , которую получаем, полагая равными нулю электрические свойства пьезоэлектрического материала. Отношения величин  $A^{Piezo}/A^{Elast}$  для ряда пьезокерамических материалов приведено в работе [2]. Так для электроупругих материалов PZT-4, PХЕ-5, ВаTiO3 отношение  $A^{Piezo}/A^{Elast}$  равно 0,695; 0,735; 0,854 соответственно. Последующим предельным переходом к уп-

ругому изотропному материалу из выражений  $A^{Elast}$  получаем величину  $(1 - \nu)/\mu$ , т.е. из найденных выражений как частный случай следуют результаты работы [5].

**Анализ результатов численных исследований.** Рассмотрим контактное взаимодействие жесткого сферически вогнутого штампа (рис.1) с электроупругим полупространством. Из соотношений (19), (20), при заданной силе вдавливания штампа, решая алгебраическое уравнение 13-го порядка относительно значения  $c = a/b$ , определяем внутренний радиус неизвестной области контакта кольцевой формы. На рис. 2 показано влияние нагрузки  $P$  и свойств пьезоэлектрического материала (реализуется через значение  $A^{Piezo}$ ) на размеры внутреннего радиуса контакта. При достижении значения нагрузки  $P = 32 bu_2 / 3A^{Piezo}$  внутренний радиус контакта становится равным нулю, что отражено на рис. 2, и область контакта принимает круговую форму (вместо области кольцевой формы). При этом, сравнивая между собой отношения  $A^{Piezo} / A^{Elast}$  для разных эдектроупругих материалов, убеждаемся, что за счет связанности силовых и электрических полей для перехода от кольцевой области контакта к площадке контакта круговой формы для пьезоэлектрических материалов требуется приложить большую нагрузку, чем для чисто упругого трансверсально-изотропного материала (с теми же упругими свойствами, что и соответствующий пьезоэлектрический материал).

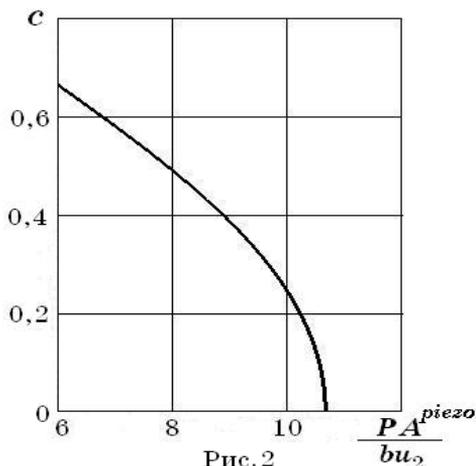


Рис. 2

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто контактну взаємодію трансверсально-ізоотропного п'єзоелектричного півпростору з осесиметричним вигнутим жорстким штампом. Контактна задача зведена до розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма. В аналітичному вигляді отримано співвідношення для пошуку невідомої області контакту вигнутого жорсткого штампа осесиметричної форми з п'єзоелектричним півпростором, яке залежить від сили стискання, геометричних параметрів штампу і електропружних властивостей п'єзоелектричного матеріалу. Як частинні випадки, з наведених виразів впливають параметри контактної взаємодії пружного трансверсально-ізоотропного і ізоотропного півпросторів з вигнутим жорстким штампом. Проведено числові дослідження. Встановлено вплив сили притискання штампу і властивостей електропружного матеріалу на параметри контактної взаємодії півпростору з вигнутим жорстким штампом.

**Ключові слова:** електропружність, контактна задача, п'єзоелектричний матеріал, півпростір, вигнутий штамп

**SUMMARY.** The contact interaction of the transversally-isotropic piezoelectric half-space with axesymmetric concave rigid punch was considered. The contact problem was reduced to the solution of the Fredholm integral equation. The relation for the finding of unknown contact region of concave rigid punch of axesymmetric form with piezoelectric half-space, which depends on the pressure force, geometric parameters of punch and electroelastic properties of piezoelectric material was obtained in analytical form. As a partial case, the parameters of contact interaction of elastic transversally-isotropic and isotropic halfspaces with concave rigid punch follow from the mentioned relation. The numerical investigations

were carried out. The influence of pressure force of punch and properties of electroelastic material on parameters of contact interaction of halfspace with concave rigid punch was established.

**Key words:** electroelasticity, contact problem, piezoelectric material, half-spaces, concave punch

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилюк В. С. О взаимосвязи решений статических контактных задач теории упругости и электроупругости для полупространства // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 11. – С. 69–84.
2. Кирилюк В. С., Левчук О. И. Двумерная контактная задача электроупругости о вдавливании штампов в пьезокерамическую полуплоскость // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 11. – С. 55–70.
3. Akiyama T., Hara T., Shibuya T. Elastic contact problem of a transversely isotropic half-space indented by a concave or convex rigid punch // Theoretical and Applied Mechanics, Japan. – 2003. – Vol. 52. – P. 31–42.
4. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B. Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 7. – P. 744–765.
5. Barber J. R. Indentation of the semi-infinite elastic solid by a concave rigid punch // Journal of Elasticity. – 1976. – Vol. 6, № 2. – P. 149–159.
6. Collins W. D. On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations. VIII potential problems for a circular annulus // Proc. Edinburgh Math. Society (Series 2) – 1963. – Vol. 13. – P. 235–246.
7. Ding H. J., Hou P. F., Guo F. L. The elastic and electric fields for three-dimensional contact for transversely isotropic piezoelectric materials // Int. J. Solids Structures. – 2000. – Vol. 37, № 23. – P. 3201–3229.
8. Jain D. L. and Kanwal R. P. Three-part boundary value problems in potential and generalised axially symmetric potential theories // J. Analyse Math. – 1975. – Vol. 25. – P. 107–158.
9. Podil'chuk Yu. N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132 – 170.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев*

*Поступила 10.11.2012*

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,  
О. Г. ДАШКО, канд. физ.-мат. наук

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ЗАДАННЫХ СДВИГАЮЩИХ УСИЛИЯХ

*Методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра совместно с методом возмущения формы границы найдено решение задачи о напряженном состоянии около эллиптического отверстия в нетонкой трансверсально изотропной пластине, находящейся под действием постоянных сдвигающих усилий. Описаны результаты числовых исследований, проведен их анализ.*

**Ключевые слова:** трансверсально изотропная пластина, эллиптическое цилиндрическое отверстие, напряженное состояние.

В работах [5, 7] изложена методика решения задач о напряженном состоянии нетонких трансверсально изотропных пластин, ослабленных некруговыми отверстиями. Используется метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра и метод возмущения формы границы [2]. Изложенным способом в [8] приведено решение задачи о распределении напряжений около эллиптического отверстия в пластине, находящейся в условиях постоянного всестороннего растяжения. В данной работе этим же способом рассматривается задача о концентрации напряжений около эллиптического отверстия в пластине при заданных на бесконечности касательных напряжениях.

**Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим трансверсально изотропную пластину постоянной толщины  $2h$ , срединная плоскость  $S$  которой совпадает с плоскостью изотропии. Пластина отнесена к декартовой системе координат  $x_i$  ( $i=1, 3$ ), в которой переменные  $x_1, x_2$  расположены в плоскости  $S$ , а  $x_3$  изменяется по толщине пластины на отрезке  $[-h, h]$ . Следуя [1], представим компоненты вектора перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3)$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(\xi)$  координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1)$$

где  $x=(x_1, x_2)$ ,  $\xi=h^{-1}x_3$ ,  $u_j^{(k)}(x)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$  – коэффициенты разложений, именуемые моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра),  $N$  – натуральное число, которое для удобства будем считать

четным,  $N = 2n$  ( $n = 0, 1, \dots < \infty$ ).

Относительно моментов  $\sigma_{ij}^{(k)}$ , как функций двух независимых переменных, получаем [7] систему уравнений

$$\partial_{\alpha} \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + f_j^{(k)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3; k = \overline{0, N}). \quad (2)$$

Здесь  $\partial_{\alpha} = \partial/\partial x_{\alpha}$ ;  $K = (k-1)/2$ ; символ  $[K]$  обозначает целую часть числа  $K$ ;  $f_j^{(k)}$  – свободные члены, содержащие заданные на плоских гранях пластины ( $x_3 = h$ ,  $x_3 = -h$ ) напряжения  $\sigma_{3j}^+$ ,  $\sigma_{3j}^-$ , т.е.

$$f_j^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) h^{-1} \left[ \sigma_{3j}^+ - (-1)^k \sigma_{3j}^- \right]. \quad (3)$$

По повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование, причем латинские буквы принимают значения 1, 2, 3, а греческие – 1, 2.

Соотношения упругости для анизотропного тела имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}, \quad (4)$$

где  $c_{ijlm}$  – упругие постоянные материала, удовлетворяющие условиям симметрии [6];  $\varepsilon_{lm}^{(k)}$  – моменты деформаций, определяемые равенствами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_{\alpha} u_j^{(k)} \quad (\alpha = 1, 2); \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = h^{-1} u_j^{(k)} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (5)$$

в которых

$$u_j^{(k)} = (2k+1) \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)}, \quad (6)$$

причем  $N_k = (N - k - 1)/2$ .

Подставим выражения (4), (5) в равенства (2) и, полагая  $\sigma_{3j}^+ = \sigma_{3j}^- = 0$ , получим однородную систему уравнений, записанную в моментах компонент вектора перемещений. Для трансверсально изотропного тела данная система распадается на две независимые группы уравнений, описывающие соответственно симметричное и кососимметричное (по отношению к плоскости  $S$ ) деформирование пластины. При симметричном деформировании общее решение уравнений равновесия пластины в комплексной форме имеет вид [9]

$$c_{66} u_+^{(0)} = \kappa^* \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l,$$

$$c_{66} u_+^{(2)} = \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s,$$

$$\begin{aligned}
c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}), \\
c_{66}u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^N c_l^{(1)} V_l, \\
c_{66}u_3^{(2k-1)} &= \sum_{l=1}^N c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k = \overline{2, n}),
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные аналитические функции комплексной переменной  $z = x_1 + ix_2$ ;  $V_l$  и  $W_s$  – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned}
\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l &= 0 \quad (l = \overline{1, N}), \\
\Delta W_s - t_s h^{-2} W_s &= 0 \quad (s = \overline{1, n}),
\end{aligned} \tag{8}$$

в которых параметрами  $k_l$  и  $t_s$  служат корни соответствующих характеристических уравнений;  $a_l^{(2k)}$ ,  $b_s^{(2k)}$ ,  $c_l^{(2k-1)}$  и  $\kappa^*$ ,  $\kappa_1^*$ ,  $\kappa_2^*$  – безразмерные константы.

Согласно (7), напряжения  $\sigma_{ij}^{(k)}$  в полярной системе координат  $r, \theta$  записываются таким образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= 4 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{l=1}^N d_l^{(0)} V_l, \\
\sigma_{33}^{(0)} &= h^{-1} \sum_{l=1}^N d_{3l}^{(0)} V_l, \\
\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= 4e^{-2i\theta} \left( -z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right), \\
\sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= 2h^{-1} \sum_{l=1}^N d_l^{(2k)} V_l, \\
\sigma_{33}^{(2k)} &= h^{-1} \sum_{l=1}^N d_{3l}^{(2k)} V_l, \\
\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} &= 4e^{-2i\theta} \left( \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi'''(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + \right. \\
&\quad \left. + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right), \\
\sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} &= 2e^{-i\theta} \left( \sum_{l=1}^N p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right) \quad (k = \overline{1, n}),
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $\mu_*^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_*^{(2k)} = 0$  ( $k > 1$ );  $d_l^{(2k)}$ ,  $d_{3l}^{(2k)}$ ,  $p_l^{(2k-1)}$  и  $q_s^{(2k-1)}$  – постоянные. Отсюда получим равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} + i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= 2 \left\{ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - e^{-2i\theta} \left( z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + h^{-1} \sum_{l=1}^N \left( d_l^{(0)} V_l + 2h^2 a_l^{(0)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right) \right\}; \\ \sigma_{rr}^{(2k)} + i\sigma_{r\theta}^{(2k)} &= 2h^2 \mu_*^{(2k)} e^{-2i\theta} \overline{\varphi'''(z)} + h^{-1} \sum_{l=1}^N \left( d_l^{(2k)} V_l + \right. \\ &\quad \left. + 2h^2 a_l^{(2k)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right) + 2ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \quad (k=1, n), \\ \sigma_{r\theta}^{(2k-1)} &= 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{l=1}^N p_l^{(2k-1)} e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} W_s \right) \quad (k=1, n), \end{aligned} \quad (10)$$

которыми определяются на контуре кругового отверстия граничные условия.

На основе приведенных формул рассмотрим задачу о напряженном состоянии трансверсально изотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием. Поверхность отверстия свободна от усилий, а на бесконечности пластина находится под действием постоянных сдвигающих напряжений  $\sigma_{12}^\infty = \tau$ ,  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ . Для бесконечной области  $S$ , ограниченной кривой  $L$  аналитические функции  $\varphi(z) = \Phi(z)$ ,  $\psi(z) = \Psi(z)$  примем в виде

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (11)$$

где  $a_n$ ,  $b_n$  ( $n > 0$ ) – произвольные постоянные;  $a_0$ ,  $b_0$  – константы, определяемые напряжениями, заданными на бесконечности, т.е.

$$a_0 + \overline{a_0} = \frac{1}{4} \left( \sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty} \right), \quad b_0 = -\frac{1}{4} \left( \sigma_{11}^{(0)\infty} - \sigma_{22}^{(0)\infty} - 2i\sigma_{12}^{(0)\infty} \right). \quad (12)$$

В рассматриваемом случае  $a_0 = \overline{a_0} = 0$ ,  $b_0 = i\tau/2$ .

Вид метегармонических функции  $V_l$  зависит от значений корней характеристического уравнения, которые могут быть действительными или комплексными. Если, в частности, имеется  $2n_1$  ( $n_1 \leq n$ ) вещественных положительных и  $2(n - n_1)$  комплексно-сопряженных корней, то

$$\begin{aligned} V_l &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} K_n \left( rR^{-1} x_l \right) e^{in\theta}, \quad l \in [1, 2n_1]; \\ V_{2l+1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} H_n^{(1)} \left( rR^{-1} x_{2m+1} \right) e^{in\theta}, \quad l \in [n_1, n-1]; \end{aligned}$$

$$V_{2l+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(l)} H_n^{(2)}(rR^{-1}x_{2l+2}) e^{in\theta}, \quad l \in [n_1, n-1], \quad (13)$$

где  $K_n(rR^{-1}x_l)$ ,  $H_n^{(1)}(rR^{-1}x_{2l+1})$ ,  $H_n^{(2)}(rR^{-1}x_{2l+2})$  – цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля первого и второго рода,  $x_l = Rh^{-1}\sqrt{k_l}$ ,  $x_{2l+1} = Rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+1}}$ ,  $x_{2l+2} = \bar{x}_{2l+1}$ ,  $B_n^{(l)}$ ,  $C_n^{(l)}$ ,  $D_n^{(l)}$  – произвольные постоянные. Корни характеристического уравнения для метагармонических функций  $W_s$  вещественные положительные, поэтому

$$W_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n^{(s)} K_n(rR^{-1}y_s) e^{in\theta}. \quad (14)$$

Здесь  $y_s = Rh^{-1}\sqrt{t_s}$ ,  $R$  – константа.

Для свободного от напряжений кругового отверстия радиуса  $R$  граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta) - i\sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta) \right) \Big|_{r=R} &= 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta) \Big|_{r=R} &= 0 \quad (k = \overline{0, n}). \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда, учитывая формулы (10) и значения функций (11), (13), (14), получаем систему алгебраических уравнений для определения произвольных констант.

Предположим, что контур  $L$  криволинейного отверстия незначительно отличается от кругового контура радиуса  $R$  и будем считать, что кривая  $L$  при  $\rho = 1$  описывается уравнениями [3, 4]

$$x = \rho \cos \vartheta + \varepsilon \rho^{-m} \cos m\vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta - \varepsilon \rho^{-m} \sin m\vartheta, \quad (16)$$

где  $x = x_1/R$ ,  $y = x_2/R$  – безразмерные декартовы координаты;  $\rho$  и  $\vartheta$  – ортогональные криволинейные координаты;  $\varepsilon$  и  $m$  – параметры, характеризующие форму отверстия. В комплексной форме уравнения (16) имеют вид

$$x + iy = \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) = re^{i\theta}. \quad (17)$$

Здесь  $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ ,  $f(\zeta) = \zeta^{-m}$ . В частности, для эллиптического отверстия

$$f(\zeta) = \zeta^{-1} \quad (m = 1), \quad \varepsilon = (a - b)/(a + b), \quad R = (a + b)/2, \quad (18)$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

Из конформного отображения (17) следует, что

$$r = |\omega(\zeta)|, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\zeta)}{\operatorname{Re} \omega(\zeta)}. \quad (19)$$

Криволинейная система координат  $\rho, \vartheta, \xi$  повернута относительно полярной  $r, \theta, x_3$  вокруг общей оси  $\xi = h^{-1}x_3$  на некоторый угол  $\beta$  и экспонента этого угла определяется формулой [3]

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}. \quad (20)$$

В обеих системах имеют место разложения искомых функций в ряд по полиномам Лежандра. Тогда на основании формул преобразования компонент тензора напряжений получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2k)} &= \sigma_{33}^{(2k)}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} &= e^{2i\beta} \left( \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} \right), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} &= e^{i\beta} \left( \sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $\sigma_{i'j'}^{(m)} = \sigma_{i'j'}^{(m)}(\rho, \vartheta)$ ,  $(i', j' = \rho, \vartheta, \xi)$ ,  $\sigma_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta, x_3)$ .

В криволинейной системе координат краевые условия на границе  $L$  записываются таким же способом, как и на контуре кругового отверстия. В частности, для свободного от напряжений отверстия имеем

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{\rho\rho}^{(2k)}(\rho, \vartheta) - i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)}(\rho, \vartheta) \right) \Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (22)$$

Принимая во внимание формулы (19), основные уравнения (8) в переменных  $\rho, \vartheta$  будут достаточно сложными, и найти их точное аналитическое решение с разделяющимися переменными не представляется возможным. Поэтому, следуя [5, 7], решение задачи будем искать в виде рядов по положительным степеням малого параметра  $\varepsilon$ , т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{i'j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) &= \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau \sigma_{i'j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta), \\ u_j^{(k)}(\rho, \vartheta) &= \sum_{(\tau)} \varepsilon^\tau u_j^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta). \end{aligned} \quad (23)$$

Очевидно, пользуясь равенствами (21), необходимо иметь соответствующие разложения по параметру  $\varepsilon$  их правых частей. Из формулы (20) следует, что

$$\begin{aligned} e^{i\beta} &= 1 + i\varepsilon q_1(\rho, \vartheta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left[ -q_1^2(\rho, \vartheta) + 2iq_2(\rho, \vartheta) \right] + \dots, \\ e^{2i\beta} &= 1 + 2i\varepsilon q_1(\rho, \vartheta) + 2\varepsilon^2 \left[ -q_1^2(\rho, \vartheta) + 2iq_2(\rho, \vartheta) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

а произвольная скалярная функция  $\phi^{(k)}(r, \theta)$  (так же как и компоненты

тензора напряжений  $\sigma_{ij}^{(k,\tau)}(r, \theta)$  согласно [3] представляется рядом

$$\phi^{(k)}(r, \theta) = \sum_{(p)} \varepsilon^p \frac{1}{p!} L_p \phi^{(k)}(\rho, \vartheta). \quad (25)$$

Здесь

$$q_1(\rho, \vartheta) = \frac{m+1}{\rho^{m+1}} \sin(m+1)\vartheta, \quad q_2(\rho, \vartheta) = \frac{m^2-1}{2\rho^{2(m+1)}} \sin 2(m+1)\vartheta; \quad (26)$$

$L_p$  – операторы вида

$$\begin{aligned} L_0 &= 1, \quad L_1 = \frac{\cos(m+1)\vartheta}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin(m+1)\vartheta}{\rho^{m+1}} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \\ L_2 &= \frac{1}{2\rho^{2m}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cos 2(m+1)\vartheta \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) - 2 \sin 2(m+1)\vartheta \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right], \dots \end{aligned} \quad (27)$$

При этом следует заметить, что члены ряда (25) определяются действием операторов  $L_p$  на функции  $\phi^{(k)}(\rho, \vartheta)$ , аналитическая структура которых известна на основании их вида в полярной системе координат.

Учитывая разложения (23) – (25), из равенств (21) после некоторых преобразований и сравнения выражений при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k,l)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,l)} &= \sum_{j=0}^l \Lambda_1^{(l-j)} \left( \sigma_{rr}^{(2k,j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} \right), \\ \sigma_{33}^{(2k,l)} &= \sum_{j=0}^l \Lambda_1^{(l-j)} \sigma_{33}^{(2k,j)}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k,l)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,l)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,l)} &= \sum_{j=0}^l \Lambda_2^{(l-j)} \left( \sigma_{rr}^{(2k,j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)} \right), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,l)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1,l)} &= \sum_{j=0}^l \Lambda_3^{(l-j)} \left( \sigma_{r3}^{(2k-1,j)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1,j)} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_p^{(0)} &= 1 \quad (p = \overline{1, 3}), \quad \Lambda_1^{(1)} = L_1, \quad \Lambda_2^{(1)} = L_1 + 2iq_1, \\ \Lambda_3^{(1)} &= L_1 + iq_1, \quad \Lambda_1^{(2)} = \frac{1}{2} L_2, \\ \Lambda_2^{(2)} &= \frac{1}{2} L_2 - 2q_1^2 + 2i(q_1 L_1 + q_2), \\ \Lambda_3^{(2)} &= \frac{1}{2} L_2 - q_1^2 + i(q_1 L_1 + q_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Напряжения, фигурирующие в правых частях равенств (28), представляются аналогичными (9) формулами, в которых проведена замена переменных  $z, \bar{z}$  на переменные  $\zeta, \bar{\zeta}$  (или же замена переменных  $r/R, \theta$  на  $\rho, \vartheta$ ).

Аналитические функции в этих формулах принимаются в виде

$$\phi_j(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(j)} \zeta^{-n}, \quad \psi_j(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} \zeta^{-n}, \quad (30)$$

а метагармонические функции  $V_l^{(j)}, W_s^{(j)}$  представляются таким образом

$$V_l^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l,j)} K_n(\rho x_l) e^{in\vartheta},$$

$$W_s^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l,j)} K_n(\rho y_s) e^{in\vartheta}. \quad (31)$$

Произвольные постоянные определяются из выполнения граничных условий (22). Таким образом, в каждом из приближений приходим к решению задачи для кругового отверстия.

**Результаты численных исследований.** Проведено исследование напряженного состояния около эллиптического отверстия в трансверсально изотропной пластине, находящейся под действием постоянных касательных напряжений, приложенных на бесконечности. Рассмотрено два приближения по малому параметру  $\varepsilon$  и найдены выражения для компонент тензора напряжений. Так, в частности, кольцевое напряжение  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  определяется формулой

$$\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\tau} = -\sin 2\vartheta + \sum_{k=0}^n \left[ t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,0)}(\rho) \sin 2\vartheta + \varepsilon t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,1)}(\rho) \sin 4\vartheta \right] P_{2k}(\xi), \quad (32)$$

где  $t_{\vartheta\vartheta}^{(2k,j)}(\rho)$  – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

Числовые расчеты проведены для пластины с коэффициентами Пуассона  $\nu=0,25$ ,  $\nu'=0,3$  соответственно в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости при отношении модулей упругости  $E/G'=2,5$ ,  $E/E'=1,75$ . В таблице приведены значения кольцевых  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  и поперечных  $\sigma_{33}$  напряжений в точке  $\rho=1$ ,  $\vartheta=-\pi/5$  соответственно на срединной

Напряжения	$\xi$	$a/b$					
		1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\sigma_{\vartheta\vartheta}/\tau$	0	4,2714	4,3891	4,4951	4,5908	4,6780	4,7574
	1	2,9224	3,0308	3,1309	3,2237	3,3101	3,3909
$\sigma_{33}/\tau$	0	0,8021	0,8068	0,8091	0,8093	0,8079	0,8049
	1	-0,0086	-0,0021	0,0033	0,0077	0,0113	0,0143

( $\xi=0$ ) и граничной ( $\xi=1$ ) плоскостях пластины при некоторых значениях отношения полуосей эллипса  $a/b$ . Из данных таблицы видно, что кольцевые напряжения  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  своего максимального значения достигают на срединной плоскости и этот максимум возрастает при увеличении отношения  $a/b$ . Нормальное поперечное напряжение  $\sigma_{33}$  почти не изменяет своего значения на срединной плоскости.

На рис. 1, 2 представлены кривые изменения кольцевых  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  и поперечных  $\sigma_{33}$  напряжений на контуре отверстия ( $\rho=1$ ) соответственно на срединной (штриховые кривые) и граничной (сплошные кривые) в зависимости от изменения угловой координаты  $\vartheta$ ; линии, отмеченные индексом 1, относятся к круговому отверстию, а индексом 2 – к эллиптическому.

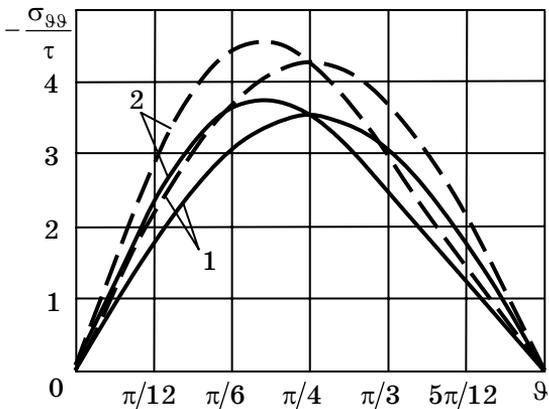


Рис. 1

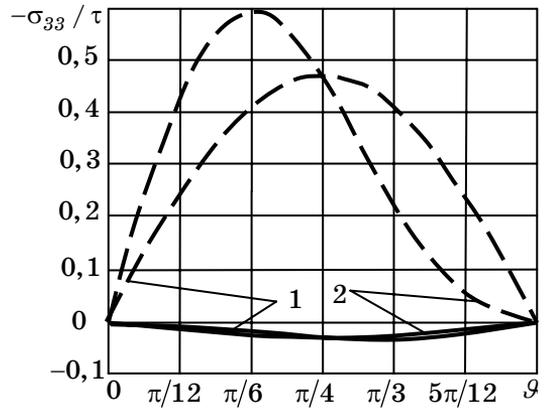


Рис. 2

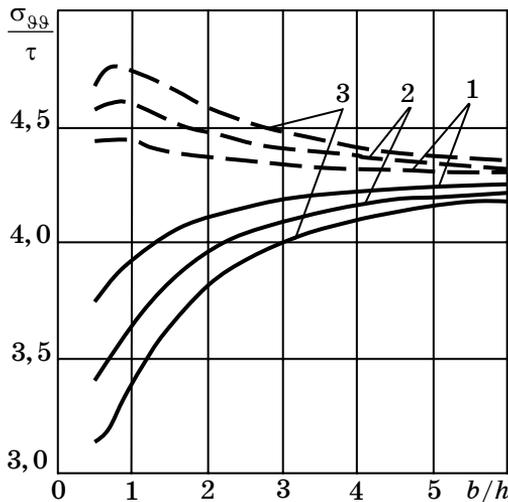


Рис. 3

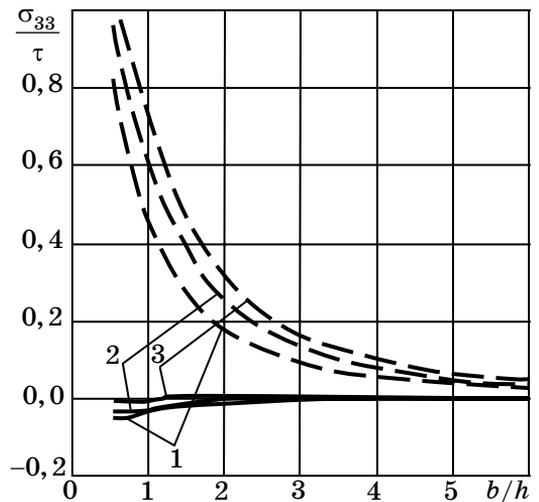


Рис. 4

му. Кривые, приведенные на рис. 3, 4, характеризуют изменение напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  и  $\sigma_{33}$  в зависимости от уменьшения относительной толщины

пластины  $b/h$  при отношении модулей упругости  $E/E'$  равным 0,75; 1,50 и 2,25 (кривые с индексом 1, 2, 3 соответственно). Очевидно, с уменьшением относительной толщины пластины значения напряжений на срединной плоскости понижаются, а на граничной – возрастают, приближаясь к общему значению.

**РЕЗЮМЕ.** Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра сумісно з методом збурення форми границі знайдено розв'язок задачі про напружений стан біля еліптичного отвору в нетонкій трансверсально ізотропній пластині, що знаходиться під дією постійних зсувних зусиль, прикладених на нескінченності. Наведено результати числових досліджень і зроблено їх аналіз.

**Ключові слова:** трансверсально ізотропна пластина, еліптичний отвір, напружений стан.

**SUMMARY.** The problem on the stress-state near an elliptic hole in a non-thin transversely isotropic plate with an elliptical hole subjected to the constant shearing forces at the infinity is solved using the method of expanding into Fourier series through Legendre polynomials together with the boundary-shape perturbation method. The results of numerical study are presented and analyzed.

**Key words:** transversely isotropic plate, elliptical hole, stress state.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – Вып. 30. – С. 3–103.
2. *Гузь О.М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках // Прикладна механіка. – 1962. – Т. 8, № 6. – С. 605–612.
3. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Вища школа, 1989. – 352 с.
4. *Немиш Ю.Н., Пелех В.П., Хома И.Ю.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с криволинейными отверстиями // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 87–95.
5. *Немиш Ю.Н., Хома И.Ю.* Об изгибе нетонких трансверсально-изотропных пластин с криволинейными отверстиями // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 64–73.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. *Хома И.Ю.* О растяжении нетонкой трансверсально-изотропной пластины с некруговой цилиндрической полостью // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 11. – С. 101–113.
8. *Хома И., Дашко О.* Про напружений стан трансверсально ізотропної пластини з еліптичною циліндричною порожниною // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – 2012. – Vol. 20. – С. 269–276.
9. *Khoma I.Yu.* Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – Vol. 101, № 6. – P. 3577–3584.

*Институт механики НАН Украины, г.Киев*

*Поступила 10.10.2012*

УДК 539.375

Л. А. КИПНИС, д-р. физ.-мат. наук,

Г. А. ХАЗИН, канд. физ.-мат. наук,

Т. В. ПОЛИЩУК, А. Л. КИПНИС

## О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА С МЕЖФАЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ПРИ СЖАТИИ

*Решена задача о предельном равновесии кусочно-однородного изотропного упругого тела с межфазными трещинами в угловой точке границы раздела сред в случае полного гладкого контакта берегов. Решение соответствующей краевой задачи построено методом Винера-Хопфа. Исследовано напряженное состояние вблизи угловой точки.*

**Ключевые слова:** граница раздела сред, угловая точка, межфазная трещина, метод Винера-Хопфа.

Для горного дела существенный интерес представляют решения задач теории упругости о предельном равновесии тел, находящихся в условиях сжатия и содержащих трещины с контактирующими берегами. Такие трещины могут зарождаться вблизи различных остроконечных концентраторов напряжений в горных массивах сложной структуры. Если эти трещины неустойчивы, то после достижения состояния предельного равновесия режим их развития будет динамическим, что может привести к разрушению массива. В работе [9] дано решение задачи о равновесии изотропной полуплоскости, содержащей прямолинейную сдвиговую трещину с контактирующими берегами, выходящую на свободную границу под произвольным углом, при условии, что на бесконечности действуют сжимающие напряжения. В математическом отношении эта задача аналогична задаче о тектонической трещине или трещине, заполненной пластическим материалом. В случае однородного тела подобные задачи о сдвиговых трещинах, исходящих из точки упругой плоскости, конца трещины нормального разрыва, угловой точки границы тела при различных краевых условиях на сторонах угла решены в работах [3, 10, 11].

В данной статье решена задача о предельном равновесии кусочно-однородного изотропного тела с межфазными трещинами в угловой точке границы раздела сред в случае полного гладкого контакта берегов.

**Постановка задачи.** В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное тело с границей раздела сред в форме сторон угла (рис. 1), которое составлено из изотропных упругих частей с модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  ( $E_1 > E_2$ ) и коэффициентами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ .

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [6, 8] угловая точка границы раздела сред  $O$  пред-

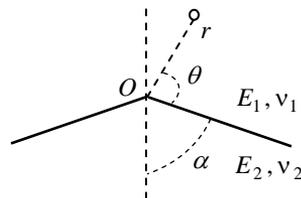


Рис.1

ставляет собой остроконечный концентратор напряжений со степенной особенностью. При этом справедливы следующие формулы:

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = C g_1 r^\lambda + o(r^\lambda), \quad \sigma_\theta(r, 0) = C g_2 r^\lambda + o(r^\lambda) \quad (r \rightarrow 0).$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_1 &= \lambda g_{11} \sin \lambda \alpha + g_{12} \sin(\lambda + 2)\alpha, \\ g_{11} &= (1 - e) \lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha - (1 - \varkappa_1 - 2e) \lambda \sin 2\alpha \times \\ &\quad \times \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - (1 - \varkappa_2)e] \times \\ &\quad \times \lambda \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha - 2[1 - \varkappa_1 - (1 - \varkappa_2)e] \times \\ &\quad \times \cos \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\ &\quad + (1 + \varkappa_1) \lambda \sin 2\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\ &\quad + (1 + \varkappa_1)(1 - \varkappa_2) \cos \lambda \alpha \sin^2(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \times \\ &\quad \times \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1 + \varkappa_2) \lambda \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \times \\ &\quad \times \cos(\lambda + 2)\alpha + (1 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \cos \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \times \\ &\quad \times \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha], \\ g_{12} &= (1 - \varkappa_1 - 2e) \lambda (1 - \varkappa_2 + \lambda) \sin 2\alpha \cos \lambda \alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \times \\ &\quad \times \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1 - e)(1 - \varkappa_2 + \lambda) \lambda^2 \sin^2 2\alpha \times \\ &\quad \times \cos \lambda \alpha - [2 - (1 - \varkappa_2)e] \lambda (1 - \varkappa_2 + \lambda) \sin 2\alpha \cos^2 \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)\alpha + \\ &\quad + 2[1 - \varkappa_1 - (1 - \varkappa_2)e] (1 - \varkappa_2 + \lambda) \cos^2 \lambda \alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \times \\ &\quad \times \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1 + \varkappa_1) \lambda^2 \times \\ &\quad \times \sin 2\alpha \sin \lambda \alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1 + \varkappa_1) \times \\ &\quad \times (1 - \varkappa_2) \lambda \sin \lambda \alpha \cos \lambda \alpha (\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \times \\ &\quad \times \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1 + \varkappa_2) \lambda^2 \sin 2\alpha \sin \lambda \alpha \times \\ &\quad \times \cos \lambda \alpha \cos(\lambda + 2)\alpha - (1 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \lambda \sin \lambda \alpha \cos \lambda \alpha \cos(\lambda + 2)\alpha \times \\ &\quad \times \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha], \\ e &= \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}. \end{aligned}$$

Для  $g_2$  имеет место подобное выражение.

Показатель степени сингулярности напряжений  $\lambda$  в приведенных формулах представляет собой единственный на интервале  $(-1; 0)$  корень

уравнения

$$\Delta(-x - 1) = 0,$$

где

$$\Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2,$$

$$\delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) [\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha],$$

$$\begin{aligned} \delta_1(z) = & (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) \times \\ & \times [\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] \times \\ & \times (\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$$\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] (\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha).$$

Постоянная  $C$  определяется из решения каждой конкретной задачи теории упругости, изображенной на рис. 1. Будем считать эту постоянную отрицательной возрастающей по модулю функцией внешней нагрузки, что соответствует широкому классу задач.

Как показывают результаты расчетов при  $\lambda > -1/2$

$$g_1(\alpha) < 0 \text{ при } \alpha \neq 0, \pi/2, \pi;$$

$$g_1(0) = g_1(\pi/2) = g_1(\pi) = 0;$$

$$g_1 = 0, \text{ при } E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2;$$

$$g_2(\alpha) < 0 \text{ при } \alpha \in (0; \alpha_1) \cup (\pi/2; \alpha_2),$$

$$g_2(\alpha) > 0 \text{ при } \alpha \in (\alpha_1; \pi/2) \cup (\alpha_2; \pi),$$

$$g_2(0) = g_2(\alpha_1) = g_2(\pi/2) = g_2(\alpha_2) = g_2(\pi) = 0;$$

$$g_2 = 0, \text{ при } E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2.$$

Если  $e_0$  увеличивается, то  $\alpha_1, \alpha_2$  уменьшаются.

В табл. 1 приведены некоторые значения показателя степени сингулярности напряжений  $\lambda$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  в зависимости от параметра  $\tilde{\alpha} = 180/\pi$ . Значениям  $e_0$ , равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения  $180\alpha_1/\pi$ , равные 38,2; 34,4; 29,3; 21,7, и значения  $180\alpha_2/\pi$  равные 134,2; 133,4; 133,1; 131,3.

Используя приведенную информацию о функции  $g_2$  и считая всюду в дальнейшем  $\alpha \in (\alpha_1; \pi/2) \cup (\alpha_2; \pi)$ , заключаем, что  $\sigma_\theta(r, 0) \rightarrow -\infty$  при

Таблица 1

$\tilde{\alpha}$	$e_0$			
	2	3	5	10
15	-0,036	-0,068	-0,122	-0,215
30	-0,075	-0,132	-0,232	-0,310
45	-0,112	-0,180	-0,258	-0,332
60	-0,112	-0,184	-0,248	-0,308
75	-0,086	-0,127	-0,167	-0,203
105	-0,025	-0,037	-0,049	-0,059
120	-0,054	-0,081	-0,104	-0,124
135	-0,089	-0,130	-0,168	-0,202
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318

$r \rightarrow 0$ . Поэтому на границе раздела сред вблизи угловой точки нормальные напряжения являются сжимающими. Тогда вследствие высокой концентрации напряжений в угловой точке возможно зарождение исходящих из нее межфазных трещин с полностью контактирующими берегами, длина которых в значительной степени меньше размеров тела. Чем больше отличаются друг от друга материалы, тем шире область значений угла  $\alpha$ , при которых следует ожидать образование таких трещин. Предполагается, что трение между берегами трещин отсутствует.

Определим условия страгивания зародившихся трещин, исследуем их равновесие на устойчивость и изучим поведения напряжений вблизи угловой точки. С учетом малости трещин приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рис. 2). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным на интервале  $(-l; 0)$  корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная  $C$ , входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи. Граничные условия рассматриваемой задачи (рис. 2) имеют следующий вид:

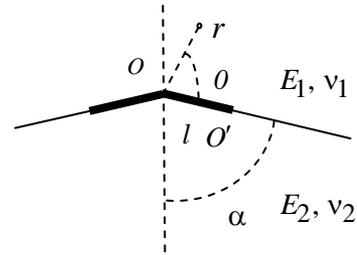


Рис.2

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= 0, \quad u_\theta = 0 \text{ при } \theta = \pi - \alpha; \\ \tau_{r\theta} &= 0, \quad u_\theta = 0 \text{ при } \theta = -\alpha; \\ \langle \sigma_\theta \rangle &= \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \text{ при } \theta = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad r < l; \quad \langle u_r \rangle = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad r > l, \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = C g_1 r^\lambda + o(1/r) \text{ при } \theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

Здесь  $-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$ ;  $\langle a \rangle$  – скачок  $a$ .

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая (задача 1) отличается от нее тем, что вместо первого из условий (2) имеем

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = -C g_1 r^\lambda, \quad (4)$$

а на бесконечности напряжения затухают как  $o(1/r)$  (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача – задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой. Для построения решения задачи 1 будем использовать метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [1, 2, 5, 7, 10].

**Решение уравнения Винера-Хопфа и определение коэффициента интенсивности напряжений.** Применяя преобразование Меллина к урав-

нениям равновесия, условию совместности деформаций, уравнениям закона Гука, условиям (1) и учитывая второе из условий (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda + 1} &= Actg p \pi G(p) \Phi^-(p), \\ A &= \frac{(1 + \varkappa_1)[1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1 \varkappa_2)e + \varkappa_2 e^2]}, \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)}, \\ G_1(p) &= [\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1 \varkappa_2)e + \varkappa_2 e^2][a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi, \\ G_2(p) &= [1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e][b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi, \\ a_0(p) &= (1 + \varkappa_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha), \\ a_1(p) &= (1 + \varkappa_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha], \\ b_0(p) &= (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\ b_1(p) &= (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\ &\quad \times [\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - \\ &\quad - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \\ b_2(p) &= [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau = -C g_1 l^\lambda, \\ \Phi^+(p) &= \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, \mathbf{0}) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  – достаточно малые положительные числа. Подобные уравнения решены, например, в [2, 10]. Решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= \frac{\tau K^+(p) G^+(p)}{p + \lambda + 1} \left[ \frac{1}{K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{K^+(p) G^+(p)} \right] (\operatorname{Re} p < 0) \\ \Phi^-(p) &= \frac{\tau p G^-(p)}{AK^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1) (p + \lambda + 1) K^-(p)} (\operatorname{Re} p < 0), \\ \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] &= \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$K^{\pm}(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)} \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функция}). \quad (6)$$

Определим коэффициент интенсивности напряжений  $K_{II}$  для конца  $O'$  трещины. Вблизи точки  $O'$  в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек реализуется асимптотика, представляющая собой решение однородной статической задачи теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости, содержащей на прямолинейной границе раздела сред полубесконечную линию разрыва касательного смещения, порождаемое корнем  $-1/2$  ее характеристического уравнения. В частности, имеют место асимптотики

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &\sim \frac{\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}, \quad \theta = 0, \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow l + 0; \\ \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle &\sim -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \frac{\alpha_1 + e}{1 + \alpha_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}, \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow l - 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Исходя из (7), по теореме абелева типа получаем

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &\sim \frac{\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \\ \Phi^-(p) &\sim -\frac{\alpha_1 + e}{1 + \alpha_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2pl}} \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью (6) находим асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{\tau}{AK^+(-\lambda - 1)G^+(-\lambda - 1)\sqrt{p}} \quad p \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Согласно (8), (9), получаем формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце  $O'$  трещины

$$K_{II} = \frac{2\sqrt{2}(1 + \alpha_2 e)g_1\Gamma(\lambda + 3/2)}{[1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e]\Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)} Cl^{\lambda+1/2}. \quad (10)$$

**Определение условия страгивания трещин и исследование поведения напряжений вблизи угловой точки.** Руководствуясь силовым критерием разрушения [4, 8] и приравнивая правую часть (10) к критическому значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_{IIc}$ , представляющему собой заданную постоянную материала, приходим к следующему уравнению для определения разрушающей нагрузки:

$$C = \frac{[1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e]\Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)}{2\sqrt{2}(1 + \alpha_2 e)g_1\Gamma(\lambda + 3/2)} \frac{K_{IIc}}{l^{\lambda+1/2}} \quad (11)$$

Таким образом, страгивание трещин произойдет тогда, когда пара-

метр нагружения  $C$ , возрастая по модулю с ростом внешней нагрузки, достигнет своего предельного значения, определяемого формулой (11).

Поскольку  $\lambda > -1/2$ , из (10) находим

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial l} = \frac{2\sqrt{2}(1 + \alpha_2 e)(\lambda + 1/2)g_1 \Gamma(\lambda + 3/2)}{[1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e] \Gamma(\lambda + 2)G^+(-\lambda - 1)} C l^{\lambda - 1/2} > 0. \quad (12)$$

Используя (12) и критерий устойчивости равновесия трещин [4, 8], можно сформулировать следующий вывод: если из угловой точки границы раздела изотропных упругих сред исходят межфазные трещины, длина которых в значительной степени меньше размеров тела, находящегося в условиях сжатия, то в случае полного гладкого контакта берегов их равновесие неустойчиво; после достижения состояния предельного равновесия режим развития трещин будет динамическим.

Используя (6), можно получить выражения для меллиновских трансформант напряжений. В результате применения к этим выражениям формулы обращения Меллина, могут быть определены напряжения. В частности, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(p, \theta)M(p)}{(p + \lambda + 1)D(p)} r^{-p-1} dp, \\ M(p) &= -\frac{g_1 \Gamma(\lambda + 3/2) \Gamma(1-p) G^+(p)}{\Gamma(\lambda + 2) \Gamma(1/2 - p) G^+(-\lambda - 1)} C l^{p+\lambda+1}, \\ D(p) &= d_0(p) + d_1(p)e, \\ d_0(p) &= (1 + \alpha_1) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha), \\ d_1(p) &= (1 + \alpha_2) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $F(p, \theta)$  – известная целая функция  $p$ ;  $\gamma$  – произвольная прямая, параллельная мнимой оси и лежащая в полосе  $-\varepsilon_1 < \text{Re } p < 0$ .

В полосе  $-1 < \text{Re } p < 0$  подынтегральная функция в (13) имеет две особенности – простые полюсы в точках  $p = -\lambda - 1$  и  $p = -\lambda_1 - 1$ , где  $\lambda_1$  – единственный на интервале  $(-1, 0)$  корень уравнения  $D(-x - 1) = 0$ .

Зависимость корня  $\lambda_1$  от угла  $\alpha$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  изображена на рис. 3. Кривые 1, 2, 3, 4, соответствуют случаям  $e_0$ , равным соответственно 2; 3; 5; 10. В табл 2 приведены некоторые значения корня  $\lambda_1$  ( $\tilde{\alpha} = 180\alpha/\pi$ ).

Таблица 2

$\tilde{\alpha}$	$e_0$			
	2	3	5	10
15	-0,738	-0,702	-0,652	-0,602
30	-0,640	-0,611	-0,577	-0,541
45	-0,547	-0,527	-0,506	-0,484
60	-0,430	-0,419	-0,408	-0,398
75	-0,262	-0,258	-0,255	-0,252
105	-0,274	-0,277	-0,280	-0,283
120	-0,467	-0,476	-0,484	-0,492
135	-0,613	-0,628	-0,641	-0,653
150	-0,731	-0,749	-0,767	-0,782
165	-0,835	-0,855	-0,873	-0,889

Используя эту информацию об особых точках подынтегральной функции в (13), применяя к интегралу (13) теорему о вычетах и складывая решения задач 1 и К, находим главный член разложения напряжения  $\sigma_\theta$  в асимптотический ряд при  $r \rightarrow 0$  в рассматриваемой задаче теории упругости с граничными условиями (1) – (3) (рис. 3). Имеет место следующая формула:

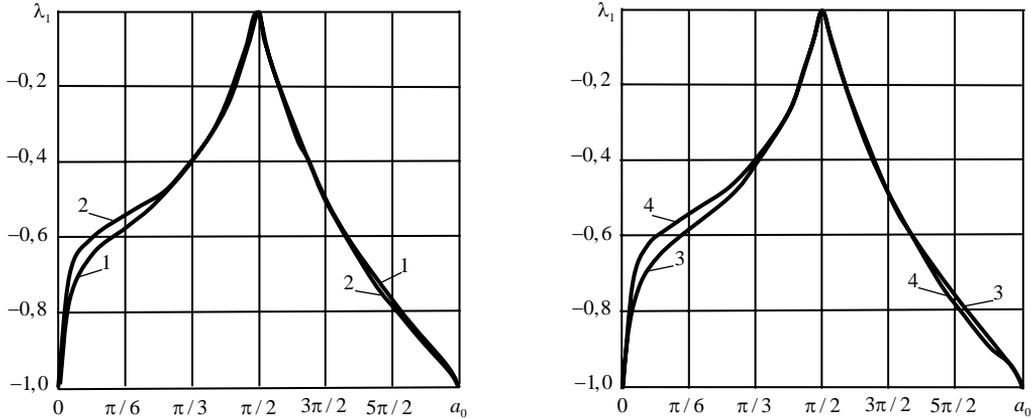


Рис. 3

$$\sigma_\theta(r, \theta) = r^{\lambda_1} S(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}) \quad (r \rightarrow 0),$$

$$C_1 = \frac{g_1 \Gamma(\lambda + 3/2) \Gamma(\lambda_1 + 2) G^+(-\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda) s \Gamma(\lambda + 2) \Gamma(\lambda_1 + 3/2) G^+(-\lambda - 1)} C l^{\lambda - \lambda_1},$$

$$s = (1 + \alpha_1) \left\{ [\cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] [2\alpha \cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha + \sin 2\alpha] - 2(\pi - \alpha) \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) [\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1) \sin 2\alpha] \right\} + (1 + \mu_2) \left\{ [2(\pi - \alpha) \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha] [\cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha - \cos 2\alpha] - 2\alpha [\sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda_1 + 1) \sin 2\alpha] \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha \right\} e,$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} [-S_1(\lambda_1 + 2) \sin \lambda_1 \theta + S_2 \sin(\lambda_1 + 2)\theta + S_3(\lambda_1 + 2) \cos \lambda_1 \theta - S_4 \cos(\lambda_1 + 2)\theta],$$

$$S_1 = 2c_1 - (c_2 c_3 + (1 + \alpha_2) c_4 c_5) e,$$

$$S_2 = 2(1 + \alpha_2 + \lambda_1) c_1 - [\lambda_1 c_2 c_3 - (1 + \alpha_2)(\lambda_1 + 2) c_4 c_6] e,$$

$$S_3 = 2c_6 c_7 - (c_3 c_6 + (1 + \alpha_1) c_4 c_8) e,$$

$$S_4 = 2(1 + \alpha_1 + \lambda_1) c_5 c_7 - [\lambda_1 c_5 c_3 + (1 + \alpha_1)(\lambda_1 + 2) c_4 c_8] e,$$

$$c_1 = [\cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] \times$$

$$\begin{aligned} & \times [\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1)\sin 2\alpha], \\ c_1 &= \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha, \\ c_3 &= (2\lambda_1 + 3 + \varkappa_2)\sin \alpha + (1 - \varkappa_2)\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha, \\ c_4 &= \cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha - \cos 2\alpha, \\ c_5 &= \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha, \\ c_6 &= \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha, \\ c_7 &= \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1)\sin 2\alpha, \\ c_8 &= \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Здесь  $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$ .

Аналогичные формулы имеют место для  $\sigma_\theta(r, \theta)$  при  $-\alpha \leq \theta \leq 0$ , а также для  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  и  $\sigma_r(r, \theta)$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы: угловая точка  $O$  (рис. 2) является особой точкой рассматриваемой краевой задачи теории упругости; она представляет собой остроконечный концентратор напряжений. При приближении точки плоскости к точке  $O$  напряжения стремятся к бесконечности.

Особенность напряжений в точке  $O$  степенная. Показатель степени сингулярности напряжений зависит от угла, отношения модулей Юнга и от коэффициентов Пуассона. Этот показатель представляет собой единственный на интервале  $(-1; 0)$  корень определенного трансцендентного уравнения.

С ростом угла  $\alpha$  от нуля до  $\pi/2$  концентрация напряжений в угловой точке ослабевает, а с ростом его от  $\pi/2$  до  $\pi$  усиливается.

Если угол  $\alpha$  стремится к нулю или к  $\pi$ , показатель степени сингулярности напряжений стремится к  $-1$ . Если угол  $\alpha$  стремится к  $\pi/2$  показатель степени сингулярности напряжений стремится к нулю.

Если угол  $\alpha$  острый, то с ростом отношения модулей Юнга  $E_1/E_2$  концентрация напряжений в угловой точке ослабевает, а если тупой — усиливается.

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано задачу про граничну рівновагу кусково-однорідного ізотропного пружного тіла з міжфазними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ у випадку повного гладкого контакту берегів. Розв'язок відповідної крайової задачі побудовано методом Вінера-Хопфа. Досліджено напружений стан біля кутової точки.

**Ключові слова.** Межа поділу середовищ, кутова точка, міжфазна тріщина, метод Вінера-Хопфа.

**SUMMARY.** The problem on the limit equilibrium of the piece-homogeneous isotropic elastic body with the interfacial cracks at the corner point of the media-separating boundary is solved in the case of full smooth contact of faces. A solution of the corresponding boundary-value problem is constructed by the Wiener - Hopf method. The stress near the corner

point is investigated.

**Key words:** media-separating boundary, corner point, interfacial crack, Wiener - Hopf method.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А. Об устойчивости равновесия трещины Коттрелла // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, №2. – С. 13–23.
3. Кипнис Л. А., Черепанов Г. П. Применение принципа выбора к проблеме начального развития линий скольжения из угловой точки // Прикладная математика и механика. – 1989. – Т. 53, №1. – С. 159–164.
4. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с.
5. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит, 1962. – 279 с.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
8. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
9. Черепанов Г. П. Равновесие откоса с тектонической трещиной // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40, №1. – С. 136–151.
10. Kaminsky A. A., Kipnis L. A., Khazin G. A. A Criterion for the Onset for Growth of Two Shear Cracks in an Elastic Body under Plane – strain Conditions // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 4. – P. 439–446.
11. Lo K. K. Modeling of plastic yielding at a crack tip by inclined slip planes // Int. J. Fract. – 1979. – Vol. 15, № 6. – P. 583–589.

*Уманский государственный педагогический университет,  
Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 01.11.2012*

УДК 539.375

М. В. ДУДИК, канд. физ.-мат. наук,  
Ю. В. ДИХТЯРЕНКО

## РАЗВЕТВЛЕНИЕ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

*Методом Винера-Хопфа в условиях плоской деформации дано решение задачи о начальной зоне предразрушения вблизи угловой точки границы раздела двух различных упругих сред, из которой выходит трещина нормального отрыва. Полученное решение использовано для определения направления дальнейшего распространения трещины. Показана возможность разветвления трещины в угловой точке границы раздела.*

**Ключевые слова:** угловая точка границы раздела упругих сред, зона предразрушения, разветвление трещины.

Для трещины, выходящей на границу раздела различных сред, при увеличении внешней нагрузки возможны такие варианты ее дальнейшего распространения, как скольжение вдоль границы, разветвление в одном из материалов или пересечение границы без разветвления. Решение соответствующих задач обычно сводится к введению в конце исходной трещины виртуального трещинообразного отростка с последующим использованием того или иного критерия выбора его ориентации [12 – 14, 16, 17, 19]. Эффективным оказывается также метод, учитывающий образование в окрестности вершины трещины начальной зоны предразрушения, ориентация которой определяет направление дальнейшего распространения трещины [4, 5]. Наряду с решениями задач о трещине, выходящей на плоскую границу раздела сред [1, 8, 12, 15, 18, 19], актуальными также являются задачи о трещине с вершиной в угловой точке ломаной границы раздела. Концентрация напряжений вблизи вершины трещины приводит к появлению в ее окрестности зоны предразрушения, аналитические исследования которой на начальной стадии ее развития возможны в рамках модели Леонова-Панасюка-Дагдейла [10], представляющей зону линией разрыва смещения, на которой задано некоторое условие перехода материала в состояние предразрушения. В частности, в [6, 7] выполнены расчеты начальной зоны предразрушения в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела двух упругих сред в ее угловой точке в случаях образования зоны в связующем материале или на продолжении трещины; на их основе сделаны выводы о возможности скольжения трещины по границе или пересечения ею границы.

В данной работе исследуется возможность разветвления трещины нормального отрыва в угловой точке границы раздела сред путем расчета двух симметричных боковых зон предразрушения, образующихся в одном из материалов композита под углом к линии трещины.

**Постановка задачи.** В условиях плоской деформации рассматривается задача для кусочно-однородного изотропного тела о расчете начальной зоны предразрушения вблизи вершины трещины нормального отрыва,

выходящей из угловой точки границы раздела сред в материал с модулем Юнга  $E_1$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_1$ .

Будем различать случаи образования зоны предразрушения в материале с упругими постоянными  $E_1, \nu_1$  (рис. 1) и в материале с упругими постоянными  $E_2, \nu_2$  (рис. 2). В соответствии с гипотезой локализации [10] начальная зона предразрушения сосредоточена в тонком слое материала, поэтому с учетом симметрии задачи будем моделировать ее двумя

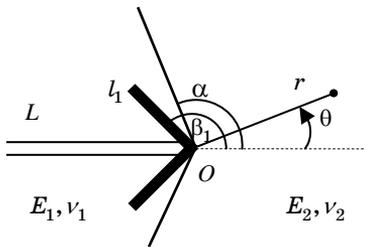


Рис. 1.

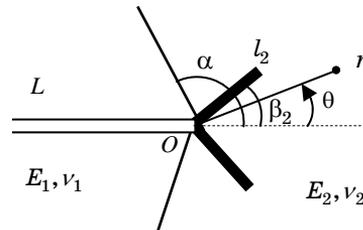


Рис. 2.

наклоненными под углом  $\beta_i$  к продолжению трещины линиями разрыва нормального смещения, на которых нормальное напряжение равно сопротивлению отрыва материала  $\sigma_i$ . Здесь и ниже индексом  $i$  ( $i=1, 2$ ) будем обозначать величины, относящиеся к зоне предразрушения в первом или втором материале.

На начальном этапе развития размеры зоны предразрушения значительно меньше длины  $L$  трещины и других существенных размеров тела, потому тело будем считать кусочно-однородной плоскостью с границей раздела сред в форме сторон угла, из вершины которого вдоль биссектрисы выходит полубесконечная трещина, а по обе стороны к продолжению трещины под углом  $\beta_i$  – две линии разрыва одинаковой длины  $l_i$ . В силу симметрии достаточно выполнить расчет лишь одной ветви зоны предразрушения, например, в области  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Поэтому приходим к двум однотипным статическим краевым задачам теории упругости с граничными условиями вида

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (\theta = \pi),$$

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0 \quad (\theta = 0),$$

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (\theta = \alpha),$$

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0 \quad (\theta = \beta_i); \tag{1}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_i \quad (\theta = \beta_i, r \leq l_i), \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (\theta = \beta_i, r \geq l_i); \tag{2}$$

$$\sigma_\theta = C F_i(\beta_i) r^\lambda + o(1/r) \quad (\theta = \beta_i, r \rightarrow \infty); \tag{3}$$

где  $2\alpha$  ( $0 \leq 2\alpha \leq 2\pi$ ) – угол раствора границы раздела сред;  $\langle f \rangle$  – скачок величины  $f$ ;  $C$  – постоянная, характеризующая интенсивность внешнего силового поля и считающаяся заданной по условию задачи;

$$\begin{aligned}
F_i(\beta) &= \begin{cases} F_1(\beta), & \alpha \leq \beta \leq \pi, \\ F_2(\beta), & 0 \leq \beta \leq \alpha, \end{cases} \\
F_1(\beta) &= \frac{(2\pi)^\lambda}{4\lambda\varphi_2} \left\{ \lambda\varphi_2 \sin(\lambda+2)(\pi-\beta) - (\lambda+2)\varphi_2 \sin\lambda(\pi-\beta) + \right. \\
&\quad \left. + (\lambda+2)\varphi_1 \cos(\lambda+2)(\pi-\beta) - (\lambda+2)\varphi_1 \cos\lambda(\pi-\beta) \right\}, \\
F_2(\beta) &= \frac{(2\pi)^\lambda}{4\lambda\varphi_2 \cos\lambda\alpha} \left\{ [(\lambda+2)\psi_1\varphi_1 + \lambda\psi_2\varphi_2] \cos\lambda\alpha \cos(\lambda+2)\beta + \right. \\
&\quad \left. + (\lambda+2)(\psi_3\varphi_1 + \psi_4\varphi_2) \cos\lambda\beta \right\}, \\
\varphi &= -[(\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha], \\
\varphi_1 &= \varphi \left\{ (e-1)\lambda \sin(\lambda+2)(\pi-\alpha) - [(e-1)(\lambda+2) - e(1+\kappa_2) + \right. \\
&\quad \left. + (1+\kappa_1)] \sin\lambda(\pi-\alpha) \right\} - 2e(1+\kappa_2)\lambda \cos\pi\lambda \sin(\lambda+1)\alpha \sin\alpha, \\
\varphi_2 &= \varphi \left\{ [(e-1)(\lambda+2) - e(1+\kappa_2) + (1+\kappa_1)] \cos\lambda(\pi-\alpha) - \right. \\
&\quad \left. - (e-1)(\lambda+2) \cos(\lambda+2)(\pi-\alpha) \right\} - 2e(1+\kappa_2) \sin\pi\lambda \times \\
&\quad \times (\lambda \sin(\lambda+1)\alpha \sin\alpha + \cos\lambda\alpha), \\
\psi_1 &= -2\lambda \cos(\pi\lambda - \alpha) \sin\alpha + 2 \sin(\lambda+2)(\pi-\alpha) \cos\lambda\alpha, \\
\psi_2 &= -2\lambda \sin(\pi\lambda - \alpha) \sin\alpha + 2 \cos\lambda\pi - 2 \cos(\lambda+2)(\pi-\alpha) \cos\lambda\alpha, \\
\psi_3 &= -\varphi \cos\lambda(\pi-\alpha) - 2 \sin\pi\lambda (\lambda \sin(\lambda+1)\alpha \sin\alpha + \cos\lambda\alpha), \\
\psi_4 &= -\varphi \sin\lambda(\pi-\alpha) + 2\lambda \cos\pi\lambda \sin(\lambda+1)\alpha \sin\alpha; \\
\kappa_i &= 3 - 4v_i, \quad e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+v_2}{1+v_1};
\end{aligned}$$

$\lambda$  – наименьший на интервале  $(-1, 0)$  корень характеристического уравнения аналогичной задачи без зоны предразрушения [3]

$$\begin{aligned}
D_0(-\lambda-1) &= 0; \\
D_0(p) &= 4e^2 [\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha] [p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha)] + \\
&\quad + e \left\{ (1+\kappa_1)(1+\kappa_2) \sin 2p\pi - 4[\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha] \times \right. \\
&\quad \times [p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha)] - (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) \times \\
&\quad \times \left. \left[ (1+\kappa_1)(1+\kappa_2) - 4(p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p(\pi-\alpha)) \right] \right\} + \\
&\quad + (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) \left\{ (1+\kappa_1)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4[p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p(\pi-\alpha)] \right\}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для обеспечения отрывных нормальных напряжений на линии разрыва должно выполняться условие  $CF_i(\beta_i) > 0$ , что в дальнейшем и предполагается.

При приближении к концу зоны предразрушения для напряжений и смещений реализуется асимптотика, являющаяся асимптотически наибольшим решением однородной задачи теории упругости вблизи вершины полубесконечной прямой линии разрыва нормального смещения в однородном материале. В частности, имеет место асимптотика

$$\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim - \frac{4(1 - \nu_i^2)}{E_i} \frac{K_i}{\sqrt{2\pi(l_i - r)}} \text{ при } \theta = \beta_i, \quad r \rightarrow l_i - 0, \quad (5)$$

где  $K_i$  – коэффициент интенсивности напряжений в конце линии разрыва, который находится в ходе решения задачи.

Решение сформулированной краевой задачи теории упругости будем искать в виде суммы решений следующих двух задач. Первая задача отличается от исходной тем, что вместо первого условия в (2) используется условие

$$\theta = \beta_i, \quad r \leq l_i: \quad \sigma_\theta = \sigma_i - CF_i(\beta_i)r^\lambda, \quad (6)$$

а на бесконечности напряжения затухают быстрее чем  $1/r$ . Вторая задача является аналогичной задачей для случая отсутствия зоны предразрушения и ее решение известно [3]. Поэтому достаточно найти решение первой задачи.

**Расчет зоны предразрушения.** Применив к уравнениям равновесия, условиям совместности деформаций, уравнения закона Гука и граничным условиям (1) преобразование Меллина [11]

$$f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr,$$

где  $f(r, \theta)$  – произвольная компонента тензора напряжений или вектора смещения,  $p$  – комплексный параметр преобразования, и учитывая второе условие (2) и условие (6), приходим к следующему функциональному уравнению Винера-Хопфа первой задачи в полосе  $-\delta_2 < \text{Re } p < \delta_1$  ( $\delta_1, \delta_2$  – достаточно малые положительные числа):

$$\Phi_i^+(p, \beta_i) + \frac{\sigma_i}{p+1} - \frac{CF_i(\beta_i)l_i^\lambda}{p+\lambda+1} = -\text{tg } p \pi G_i(p, \beta_i) \Phi_i^-(p, \beta_i), \quad (7)$$

где

$$\Phi_i^+(p, \beta) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho l_i, \beta) \rho^p d\rho,$$

$$\Phi_i^-(p, \beta) = \frac{E_i}{4(1-v_i^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l_i \\ \theta=\beta}} \rho^p d\rho,$$

$$G_i(p, \beta) = \frac{D_i(p, \beta) \cos p\pi}{D_0(p) \sin p\pi},$$

$$\begin{aligned} D_1(p, \beta) = & 4(e-1)(\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_5) [(e-1)\Delta_6 - e(1+\kappa_2)\sin 2p\alpha] - \\ & - 4(e-1)(1+\kappa_1)\Delta_6 [\sin 2p(\beta-\alpha)\Delta_1 - \sin^2 p(\beta-\alpha)\Delta_5] - \\ & - e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2) [4\cos(p-1)\beta\cos(p+1)\beta\Delta_1 + (\Delta_6 - \Delta_3)\Delta_5] + \\ & + (1+\kappa_1)^2 \Delta_5\Delta_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2(p, \beta) = & e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2) [\Delta_3(\Delta_5 - \Delta_4) - 4\cos(p-1)\beta\cos(p+1)\beta \times \\ & \times (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_7)] - [4\cos(p-1)\beta\cos(p+1)\beta\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4] \left\{ (1+\kappa_1)^2 + \right. \\ & \left. + 4(e-1)(1+\kappa_1)\sin^2 p(\pi-\alpha) - 4(e-1)^2\Delta_7 \right\} - 4e^2(1+\kappa_2)^2 \times \\ & \times \cos(p-1)\beta\cos(p+1)\beta\Delta_7 + 4(e-1)e(1+\kappa_2)\Delta_7\Delta_8, \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p(\pi - \beta),$$

$$\Delta_2 = p^2 \sin^2(\beta - \alpha) - \sin^2 p(\beta - \alpha),$$

$$\Delta_3 = p \sin 2\beta + \sin 2p\beta,$$

$$\Delta_4 = p \sin 2(\beta - \alpha) - \sin 2p(\beta - \alpha),$$

$$\Delta_5 = p \sin 2\beta + \sin 2p(\pi - \beta),$$

$$\Delta_6 = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_7 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\begin{aligned} \Delta_8 = & p \sin 2\beta \sin 2p(\alpha - \beta) + 2\sin^2 p(\alpha - \beta) \cos 2\beta + \\ & + 2\sin p(\alpha + \beta) \sin p(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Поскольку  $G_i(it, \beta)$  является действительной положительной четной функцией  $t$ , которая стремится к 1 при  $t \rightarrow \pm\infty$ , возможна факторизация коэффициента  $G_i(p, \beta)$  уравнения Винера-Хопфа по формуле Гахова [2]:

$$G_i(p, \beta) = \frac{G_i^+(p, \beta)}{G_i^-(p, \beta)} \quad (\operatorname{Re} p = 0),$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_i(z, \beta)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_i^+(p, \beta), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G_i^-(p, \beta), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases}$$

С учетом факторизации  $\operatorname{tg} p\pi = p/K^+(p)K^-(p)$ ,  $K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p)/\Gamma(0,5 \mp p)$  ( $\Gamma(p)$  – гамма-функция Эйлера) это позволяет представить уравнение Винера-Хопфа (7) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{K^+(p)\Phi_i^+(p, \beta_i)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{\sigma_i}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} \right] - \\ & - \frac{CF_i(\beta_i)l_i^\lambda}{p+\lambda+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right] = \\ & = - \frac{\Phi_i^-(p, \beta_i)}{K_i^-(p)G_i^-(p, \beta_i)} - \frac{CF_i(\beta_i)l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(p+\lambda+1)(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} + \\ & + \frac{\sigma_i K^+(-1)}{(p+1)G_i^+(-1, \beta_i)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Левая часть уравнения (8) аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p < 0$ , а правая – в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ . Тогда, в соответствии с принципом аналитического продолжения, должна существовать единая функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, которая равна левой и правой частям этого уравнения в соответствующих полуплоскостях.

Из (5) с помощью теоремы абелевого типа [9] получим

$$\Phi_i^-(p, \beta_i) \sim - \frac{K_i}{\sqrt{2pl_i}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Отсюда следует, что функции в левой и правой частях уравнения (8) обращаются на бесконечности в 0. Поэтому, по теореме Лиувилля, существует единая аналитическая функция, тождественно равная нулю во всей комплексной плоскости переменной  $p$ . Это приводит к точному решению уравнения (8):

$$\begin{aligned} \Phi_i^+(p, \beta_i) &= - \frac{pG_i^+(p, \beta_i)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\sigma_i}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{CF_i(\beta_i)l_i^\lambda}{p+\lambda+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0) \\ \Phi_i^-(p, \beta_i) &= K^-(p)G_i^-(p, \beta_i) \left\{ \frac{\sigma_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)(p+1)} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)(p+\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right\} \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (10)$$

В соответствии с решением (10) уравнения Винера-Хопфа имеет место асимптотика

$$\Phi_i^-(p, \beta_i) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \frac{\sigma_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right\} \quad (p \rightarrow \infty).$$

Сравнивая это выражение с (9), находим коэффициент интенсивности напряжений в конце зоны предразрушения

$$K_i = -\sqrt{2l_i} \left\{ \frac{\sigma_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right\}.$$

Полагая  $K_i = 0$ , получаем формулу для определения длины  $l_i$  зоны предразрушения

$$l_i = (|C|/\sigma_i)^{-1/\lambda} R_i(\beta_i) \quad (11)$$

$$R_i(\beta_i) = \left[ \frac{\sqrt{\pi} |F_i(\beta_i)| \Gamma(1+\lambda) I_i(0, \beta_i)}{2\Gamma(1, 5+\lambda) I_i(\lambda, \beta_i)} \right]^{\frac{1}{\lambda}},$$

$$I_i(\lambda, \beta) = \exp \left[ \frac{\lambda+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_i(it, \beta)}{t^2 + (\lambda+1)^2} dt \right].$$

В качестве критерия выбора направления рассматриваемой ветви зоны предразрушения используем условие максимума накопленной в ней потенциальной энергии, которая в рамках принятой в работе модели оказывается связанной с трансформантой  $\Phi_i^-(1, \beta_i)$ :

$$W_i = \frac{1}{2} \sigma_i \int_0^{l_i} \langle u_\theta(r, \beta_i) \rangle dr = - \frac{2(1-v_i^2) \sigma_i l_i^2}{E_i} \Phi_i^-(1, \beta_i).$$

Учитывая полученное выше решение (10) уравнения Винера-Хопфа, условие  $K_i = 0$  и формулы (11), находим следующее выражение для потенциальной энергии:

$$W_i = - \frac{4\sigma_i^2 (1-v_i^2) \lambda}{\pi E_i (2+\lambda)} \left( \frac{|C| \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1)}{2\sigma_i \Gamma(1, 5+\lambda)} \right)^{-2/\lambda} w_i(\beta_i),$$

$$w_i(\beta) = \left[ \frac{|F_i(\beta)| I_i(0, \beta)^{1+\lambda}}{I_i(\lambda, \beta)} \right]^{-2/\lambda}.$$

Таким образом, угол наклона  $\beta_i$  линии разрыва смещения определяется из условия  $w_i(\beta_i) = \max$ .

**Анализ полученных результатов.** Поскольку страгиванию трещины предшествует образование в окрестности ее вершины зоны предразрушения, являющейся областью материала с ослабленными межатомными связями, следует ожидать распространение трещины в направлении, соответствующем ориентации линии разрыва нормального смещения, моделирующей зону предразрушения на начальной стадии ее развития. Для определения предполагаемого направления дальнейшего распространения трещины сравним максимальные значения потенциальной энергии, накопленной в ожидаемых зонах предразрушения в каждом из материалов соединения. Отношение этих потенциальных энергий, а также длин зон предразрушения определяются формулами

$$\frac{W_1}{W_2} = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{-2(\lambda+1)/\lambda} Z, \quad \frac{l_1}{l_2} = \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{-1/\lambda} X,$$

где

$$Z = \frac{1 - \nu_1}{e(1 - \nu_2)} \left[ \frac{|F_1(\beta_1)| I_1(0, \beta_1)^{1+\lambda} I_2(\lambda, \beta_2)}{|F_2(\beta_2)| I_2(0, \beta_2)^{1+\lambda} I_1(\lambda, \beta_1)} \right]^{\frac{2}{\lambda}},$$

$$X = \left[ \frac{|F_1(\beta_1)| I_1(0, \beta_1) I_2(\lambda, \beta_2)}{|F_2(\beta_2)| I_2(0, \beta_2) I_1(\lambda, \beta_1)} \right]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

В таблице представлены результаты числовых расчетов зависимости от угла раствора границы раздела сред  $2\alpha$  углов наклона ожидаемых зон предразрушения в каждом из материалов, а также множителей  $X$  и  $Z$ , которые определяют отношения длин и накопленных в зонах энергий. Расчеты выполнены при отношениях модулей Юнга сред  $E_1/E_2 = 0,2$  (левая часть таблицы) и  $E_1/E_2 = 5$  (правая часть таблицы) и одинаковых значениях их коэффициентов Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$ .

Анализ приведенных в таблице результатов расчетов показывает, что в случае  $E_1 < E_2$  при равенстве сопротивлений отрыва соединенных материалов ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) и углах раствора границы раздела сред  $2\alpha \leq 120^\circ$  имеем  $W_1 > W_2$ , что в соответствии с используемым энергетическим критерием предполагает образование двух симметричных боковых зон предразрушения в первом материале, тогда как при углах раствора  $2\alpha$  из пределов  $120^\circ < 2\alpha < 180^\circ$  предпочтение следует отдавать образованию двух боковых зон во втором материале. Поскольку зоны предразрушения определяют направление развития трещины при достижении критической нагрузки, можно сделать вывод, что при указанных условиях произойдет разветвление трещины – ее разделение на два симметричных отростка. Если первый материал является не только менее жестким, но и менее

трещиностойким ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ), тогда при углах раствора от  $2\alpha \approx 120^\circ$  до некоторого  $2\alpha_1 = 180^\circ$ , определяемого условием  $W_1 = W_2$ , распространение трещины будет идти вдоль границы раздела сред в первом материале

$2\alpha^\circ$	$\beta_1^\circ$	$\beta_2^\circ$	X	Z	$\beta_1^\circ$	$\beta_2^\circ$	X	Z
20	38,0	10	0,979	1,425	10	0,0	0,972	0,971
40	53,7	20	1,142	2,031	20	0,0	0,893	0,893
60	59,2	30	1,116	1,838	30	0,0	0,795	0,778
80	60,2	40	1,002	1,354	40	0,0	0,684	0,634
100	60,6	50	0,945	1,090	50	0,0	0,560	0,469
120	62,0	60	0,966	1,002	60	0,0	0,424	0,293
140	70,0	49,8	0,730	0,870	70	0,0	0,281	0,137
160	80,0	25,1	0,368	0,450	80	0,0	0,145	$3,781 \cdot 10^{-2}$
180	90,0	2,4	0,125	$9,011 \cdot 10^{-2}$	131	0,0	0,103	$1,838 \cdot 10^{-2}$
200	100,0	0,0	$3,273 \cdot 10^{-2}$	$7,498 \cdot 10^{-3}$	133,3	0,0	$9,770 \cdot 10^{-2}$	$1,691 \cdot 10^{-2}$
220	110,0	0,0	$7,922 \cdot 10^{-3}$	$5,374 \cdot 10^{-4}$	137,4	0,0	$7,253 \cdot 10^{-2}$	$1,018 \cdot 10^{-2}$
240	120,0	0,0	$2,286 \cdot 10^{-3}$	$5,654 \cdot 10^{-5}$	142,9	0,0	$3,915 \cdot 10^{-2}$	$3,520 \cdot 10^{-3}$
260	130,0	0,0	$6,807 \cdot 10^{-4}$	$6,675 \cdot 10^{-6}$	149,9	0,0	$1,353 \cdot 10^{-2}$	$5,600 \cdot 10^{-4}$
280	140,0	0,0	$1,704 \cdot 10^{-4}$	$6,130 \cdot 10^{-7}$	157,9	3,5	$2,386 \cdot 10^{-3}$	$2,859 \cdot 10^{-5}$
300	150,0	0,0	$2,964 \cdot 10^{-5}$	$3,184 \cdot 10^{-8}$	150	4,5	$8,564 \cdot 10^{-4}$	$2,841 \cdot 10^{-6}$
320	160,0	0,0	$2,596 \cdot 10^{-6}$	$5,763 \cdot 10^{-10}$	160	3,2	$3,730 \cdot 10^{-4}$	$1,106 \cdot 10^{-6}$
340	170,0	0,0	$4,274 \cdot 10^{-8}$	$8,323 \cdot 10^{-13}$	170	0,8	$1,666 \cdot 10^{-5}$	$9,598 \cdot 10^{-9}$

( $\beta_1 = \alpha$ ). Если же менее трещиностойким является второй материал ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ) и выполняется условие  $W_1 < W_2$ , то при малых углах раствора вплоть до некоторого  $2\alpha_2 = 120^\circ$  трещина после пересечения границы будет распространяться вдоль границы раздела сред во втором материале ( $\beta_2 = \alpha$ ), а при углах раствора  $2\alpha$  из пределов  $2\alpha_2 < 2\alpha \leq 180^\circ$  возможно ее разветвление на два симметричных отростка внутри второго материала ( $\beta_2 < \alpha$ ).

При углах раствора  $2\alpha > 180^\circ$  трещина после пересечения границы раздела будет распространяться в первоначальном направлении по биссектрисе угла раствора сред ( $\beta_2 = 0^\circ$ ). Такой же вывод следует из правой части таблицы в случае, если первый материал жестче второго ( $E_1 > E_2$ ) и имеет большее сопротивление отрыва ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ), в то время как при  $\sigma_1 < \sigma_2$  и малых углах раствора существует возможность распространения трещины вдоль границы раздела сред со стороны первого материала ( $\beta_1 = \alpha$ ) или отклониться в первый материал ( $\beta_1 > \alpha$ ), если только будет выполняться условие  $W_1 > W_2$ . Полученные результаты согласуются с выводами работы [7], в которой сравнивалось развитие зон предразрушения на гра-

нице раздела сред в связующем материале и на продолжении трещины.

Отметим, что при малых углах раствора и незначительном различии сопротивлений отрыва соединенных материалов размеры зон предразрушения в обоих материалах отличаются слабо ( $X \approx 1$ ), тогда как при больших углах раствора зона предразрушения во втором материале оказывается более развитой ( $X \ll 1$ ), если только сопротивление отрыва второго материала не является намного больше, чем первого.

**РЕЗЮМЕ.** Методом Вінера-Хопфа в умовах плоскої деформації дано розв'язок задачі про початкову зону передруйнування в околі кутової точки межу поділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить тріщина нормального відриву. Отриманий розв'язок використано для передбачення напрямку подальшого поширення тріщини. Показана можливість розгалуження тріщини у кутовій точці межі поділу.

**Ключові слова:** кутова точка межі поділу пружних середовищ, зона передруйнування, розгалуження тріщини.

**SUMMARY.** Solution of the problem about the process zone near an angular point of an interface of two different elastic media from which a mode I crack goes out are founded by the Wiener – Hopf method for the plain strain conditions. The obtained solution is used for prediction of a crack propagation direction. The possibility of the crack branching in the corner point of interface is discovered.

**Key words:** angular point of an elastic media interface, process zone, crack branching.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Боджи. Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов // Тр. Американо-советских инженеров-механиков. Прикладная механика. – 1965. – Т. 32, № 2. – С. 186–192.
2. Гахов В. Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Каминский А. А., Дудик М. В., Дякон В. Н. О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 103–108.
4. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 6. – С. 71–79.
5. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 10. – С. 28–41.
6. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А., Дудик М. В. О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
7. Каминський А. О., Кіпніс Л. А., Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 111–119.
8. Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 120–128.
9. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
10. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
12. Chen S., Wang T., Kao-Walter S. Finite boundary effects in problem of a crack per-

pendicular to and terminating at a bimaterial interface // *Acta Mech. Sinica.* – 2005. – Vol. 21. – P. 56–64.

13. *He M. Y., Hutchinson J. M.* Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials // *Int. J. Sol. Struct.* – 1989. – Vol. 25. – P. 1053–1067.

14. *Leguillon D., Lacroix C., Martin E.* Crack deflection by an interface – asymptotics of the residual thermal stresses // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2001. – Vol. 38. – P. 7423–7445.

15. *Li J., Zhang X. B., Recho N.* Investigation of an arbitrarily oriented crack meeting an interface between two elastic materials // *Eur. J. Mech. A – Solid.* – 1997. – Vol. 16, № 5. – P. 795–821.

16. *Martinez D., Gupta V.* Energy criterion for crack deflection at an interface between two orthotropic media // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1994. – Vol. 42. – P. 1247–1271.

17. *Tulloch D. L., Reimanis I. E., Graham A. L., Petrovic J. J.* Deflection and penetration of cracks at an interface between two dissimilar materials // *Acta Metall Mater.* – 1994. – Vol. 42. – P. 3245–3252.

18. *Zak A. R., Williams M. L.* Crack point stress singularities at bi-material interface // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30, № 1. – P. 142–143.

19. *Zhang Z., Suo Z.* Split singularities and the competition between crack penetration and debond at a bimaterial interface // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2007. – Vol. 44. – P. 4559–4573.

*Уманский государственный педагогический университет*

*Поступила 01.11.2012*

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,  
Е. В. АВДЮШИНА, канд. физ.-мат. наук,  
А. Б. МИРОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук

### ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА В ЗАДАЧАХ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЗАГРУЖЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*С использованием комплексных потенциалов, интегралов типа Коши, аналитического продолжения и решения задачи линейного сопряжения рассмотрены задачи для многосвязной изотропной полуплоскости, на прямолинейной границе которой действуют внешние усилия или жесткие штампы. Численными исследованиями изучено влияние геометрических характеристик рассматриваемой полуплоскости на ее напряженное состояние. Установлено, что, как и следовало ожидать по принципу Сен-Венана, напряженно-деформированное состояние полуплоскости, кроме небольшой окрестности участков загрузки прямолинейной границы, не зависит от способа приложения нагрузки, а зависит от значения главного вектора приложенных усилий.*

**Ключевые слова:** многосвязная изотропная полуплоскость, принцип Сен-Венана, метод комплексных потенциалов, интегралы типа Коши, аналитическое продолжение, задача линейного сопряжения.

В различных работах даны решения задачи для полуплоскости с незагруженной прямолинейной границей. При этом широкое использование получил метод комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили [6, 8], который позволил в сочетании с другими методами решить различные классы задач для полуплоскости с отверстиями, трещинами, в том числе выходящими на прямолинейную границу [1–5, 7, 9]. Для случаев, когда на прямолинейной границе многосвязной полуплоскости действуют внешние усилия, исследования с использованием комплексных потенциалов проведены недостаточно широко, а для случая, когда на границе действуют штампы, они даны лишь в работах [1–5].

В данной статье решения задач для многосвязной полуплоскости с загруженной внешними усилиями или штампами прямолинейной границей исследованы на предмет правомерности принципа Сен-Венана и использования этих решений для любой нагрузки на границе полуплоскости.

**Постановка задачи.** Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат  $Oxy$  многосвязную изотропную полуплоскость с прямолинейной границей  $L^+$  и конечным числом произвольно расположенных эллиптических отверстий с контурами  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ), полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  и центрами в точках  $x_{0l}$ ,  $y_{0l}$  (рис. 1). На отрезках конечной части прямолинейной границы действуют внешние усилия или штампы, остальные части этой границы свободны от усилий и закреплений, на контурах от-

вертей заданы внешние усилия или перемещения, на бесконечности полуплоскость не нагружена. Исследуем границы применимости к рассматриваемой полуплоскости принципа Сен-Венана, по которому, кроме небольших окрестностей участков приложения нагрузок на прямолинейной границе, напряженно-деформированное состояние полуплоскости, не зависит от способа приложения этих сил, а зависит только от их главного вектора и главного момента. Исследование проведем решением двух задач: задачи о действии на отрезке  $[-d, d]$  прямолинейной границы равномерного давления интенсивности  $p$  и задачи о жестко сцепленном с полуплоскостью штампе с плоским основанием под действием сосредоточенной силы  $P_0$ .

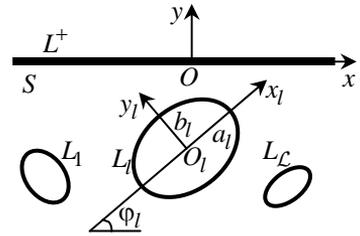


Рис. 1

Решения задач проведем с помощью комплексных потенциалов для многосвязной изотропной полуплоскости.

Пусть на отрезке  $[-d, d]$  прямолинейной границы полуплоскости действует равномерно распределенное давление интенсивности  $p$ . В этом случае из граничных условий на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши для комплексных потенциалов, точно удовлетворяющих граничным условиям на границе полуплоскости, получаются следующие выражения [1]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi_{0p}(z) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \varphi_{ln}(z) a_{ln} - \bar{\psi}_{ln}(z) \bar{a}_{ln} - \bar{\varphi}_{ln}(z) b_{ln} \right], \\ \Omega(z) &= \varphi_{0p}(z) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_{ln}(z) a_{ln} - \bar{\varphi}_{ln}(z) \bar{a}_{ln} - \varphi_{ln}(z) \bar{b}_{ln} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{0p}(z) &= -\frac{p}{2\pi i} \ln \frac{z-d}{z+d}, \\ \varphi_{ln}(z) &= -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l(\zeta_l^2 - m_l)}, \\ \psi_{ln}(z) &= -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l(\zeta_l^2 - m_l)^3} \left\{ c_{l3} \zeta_l^3 + c_{l2} \zeta_l^2 + \right. \\ &\quad \left. + c_{l1} \zeta_l + n \left[ d_{l4} \zeta_l^4 + c_{l3} \zeta_l^3 + d_{l2} \zeta_l^2 - c_{l1} \zeta_l + d_{l0} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2)$$

$\zeta_l$  – переменные, определяемые из конформных отображений внешности единичного круга  $\zeta_l$  на внешность эллипса  $L_l$ :

$$z = z_{0l} + R_l \left( \zeta_l + \frac{m_l}{\zeta_l} \right); \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
z_{0l} &= x_{0l} + iy_{0l}, \quad R_l = R_{0l} e^{i\varphi_l}, \\
R_{0l} &= \frac{a_l + b_l}{2}, \quad m_l = \frac{a_l - b_l}{a_l + b_l}; \\
c_{l3} &= \bar{r}_{l1}, \quad c_{l2} = 2(\bar{r}_{l0} + \bar{r}_{l2} m_l), \quad c_{l1} = \bar{r}_{l1} m_l, \\
d_{l4} &= \bar{r}_{l2}, \quad d_{l2} = \bar{r}_{l0} - \bar{r}_{l2} m_l, \quad d_{l0} = -\bar{r}_{l0} m_l, \\
r_{l0} &= \frac{R_l - \bar{R}_l m_l}{\bar{R}_l}, \quad r_{l1} = \frac{z_{0l} - \bar{z}_{0l}}{\bar{R}_l}, \quad r_{l2} = \frac{m_l R_l - \bar{R}_l}{\bar{R}_l};
\end{aligned} \tag{4}$$

$\varphi_l$  – угол между положительными направлениями оси  $Ox$  и полуоси  $a_l$  контура  $L_l$ , отсчитываемый против часовой стрелки;  $a_{ln}$ ,  $b_{ln}$  – постоянные, определение которых из граничных условий на контурах отверстий методом наименьших квадратов приводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [1], после решения которой функции (1) становятся известными и по ним можно вычислять напряжения [8]

$$\begin{aligned}
\sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\
\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) + \Omega(z)].
\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть теперь на отрезке  $[-d, d]$  прямолинейной границы полуплоскости действует жестко сцепленный с границей штамп с прямолинейным основанием, находящийся под действием вертикальной силы  $P_0$ . В этом случае из граничных условий на прямолинейной границе аналитическим продолжением комплексных потенциалов через незагруженные участки прямолинейной границы и решением получаемых задач линейного сопряжения из двух комплексных потенциалов останется один, который примет вид [2–5]

$$\Phi(z) = \varphi_{0p_0}(z) + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{X(z)} (\varphi_{ln}(z) a_{ln} + \bar{\varphi}_{ln}(z) b_{ln} + \bar{\psi}_{ln}(z) \bar{a}_{ln}), \tag{6}$$

где

$$\varphi_{0p_0}(z) = -\frac{P_0}{2\pi X(z)}, \quad X(z) = \sqrt{z^2 - d^2}; \tag{7}$$

$\varphi_{ln}(z)$ ,  $\psi_{ln}(z)$  – функции вида (2);  $a_{ln}$  – постоянные, определение которых из граничных условий на контурах отверстий методом наименьших квадратов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы напряжения по известным функциям вычислим по формулам [2–5, 8]

$$\begin{aligned}
\sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\
\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) - \bar{\Phi}(z)].
\end{aligned} \tag{8}$$

Для сплошной полуплоскости комплексные потенциалы будут такими:

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \varphi_{op}$$

в случае действия равномерного давления на границе, и

$$\Phi(z) = \varphi_{0p_0}(z),$$

если на границе действует жесткий штамп.

В обоих приведенных решениях граничные условия на прямолинейной границе удовлетворяются точно. То есть для обоих случаев вне отрезка  $[-d, d]$   $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ , а в

точках этого отрезка для давления на границе  $\sigma_y = -p$ ,

$\tau_{xy} = 0$ , для жестко сцепленного с границей штампа

$\sigma_y = \nu \sigma_x$ , где  $\nu$  — коэффициент Пуассона, который принимался равным  $1/3$ . Кстати,

при проведении расчетов точное выполнение указанных условий проверялось и они соблюдаются, что подтверждает верность получаемых результатов. Что же касается граничных условий на контурах отверстий, то они удовлетворяются приближенно, причем точность их удовлетворения зависит от количества членов, оставляемых в рядах (1) или (6), и количества точек, выбираемых на контурах отверстий. При проведении численных исследований эти значения увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль относительной погрешности, отнесенной к максимальным значениям напряжений, не превышал  $10^{-3}$ ). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо брать более 100 точек на каждом контуре отверстия, а количество членов рядов от 10 до 50 в зависимости от близости отверстий друг к другу и к границе полуплоскости. Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

В табл. 1 для сплошной полуплоскости приведены значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в точках перемены с ординатами  $y$  (абсцис-

Таблица 1

$\frac{y}{d}$	Напряжения			
	$\sigma_x$		$\sigma_y$	
	давление	штамп	давление	штамп
0,0	-1,0000	-0,1125	-1,0000	-0,3376
-0,1	-0,8735	-0,1271	-0,9996	-0,3308
-0,5	-0,4502	-0,1278	-0,9595	-0,3182
-1,0	-0,1817	-0,0763	-0,8183	-0,3022
-1,5	-0,0805	-0,0405	-0,6682	-0,2696
-2,0	-0,0405	-0,0225	-0,5498	-0,2346
-2,5	-0,0227	-0,0133	-0,4618	-0,2041
-3,0	-0,0139	-0,0084	-0,3958	-0,1891
-3,5	-0,0090	-0,0046	-0,3453	-0,1689
-4,0	-0,0062	-0,0031	-0,3058	-0,1424
-5,0	-0,0032	-0,0016	-0,2481	-0,1174
-10,	-0,0004	-0,0002	-0,1265	-0,0617

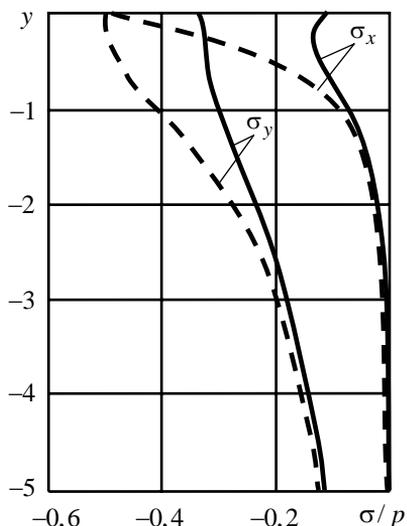


Рис. 2

сы этих точек  $x=0$ ). При этом значения величин для равномерного давления приведены с точностью до интенсивности давления  $p$ , для действия штампа – с точностью до силы  $P_0$ . На рис. 2 изображены графики

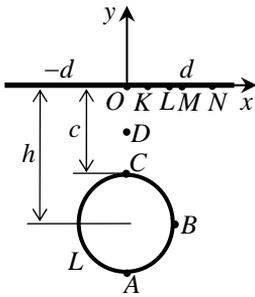


Рис. 3

распределения этих напряжений. При этом сплошные линии относятся к случаю действия штампа, штриховые – к случаю равномерного давления на границе; значения величин для давления на границе поделены на 2 (с целью формирования одинакового главного вектора действующих усилий). Как видно из описанных результатов, вблизи прямолинейной границы значения напряжений для рассмотренных двух случаев нагружения не связаны друг с другом, но при  $y/d > 1$  они отличаются друг от друга незначительно, если для обоих случаев выбрать одинаковый главный вектор внешних сил, т. е. умножить значения напряжений для случая действия штампа на 2 (так как главный вектор сил в случае давления равен  $2dp$ ).

В табл. 2 и табл. 3 соответственно для случаев действия равномерного давления и штампа на границе полуплоскости с круговым отверстием радиуса  $a_1$  контура  $L_1$  (рис. 3) в зависимости от значения отношения  $c/a_1$ , где  $c$  – длина перемычки, приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости  $A(0; -h - a_1)$ ,  $B(a_1; -h)$ ,  $C(0; -c)$ ,  $D(0; -c/2)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $K(d/2; 0)$ ,  $L(0,99d; 0)$ ,  $M(1,01d; 0)$ ,  $N(1,5d; 0)$ ,  $h$  – расстояние от границы полуплоскости до центра круга. При этом считалось, что длина отрезка прямолинейной границы  $2d = 2a_1$ . Для случая действия штампа на рис. 4 и 5 приведены графики распределения напря-

Таблица 2

Точки	Напряжения	$c/a_1$					
		10	5	2	1	0,5	0,1
A	$\sigma_s$	0,097	0,153	0,234	0,290	0,346	0,477
B	$\sigma_s$	-0,343	-0,612	-1,138	-1,619	-2,087	-2,670
C	$\sigma_s$	0,138	0,291	0,720	1,148	1,604	4,203
D	$\sigma_x$	-0,005	-0,034	-0,255	-0,689	-1,440	-8,023
	$\sigma_y$	-0,242	-0,431	-0,649	-0,594	-0,505	-0,467
O	$\sigma_x$	-1,006	-1,036	-1,305	-2,123	-4,085	-20,030
	$\sigma_y$	-1,006	-1,034	-1,245	-1,644	-1,917	2,699
K	$\sigma_x$	-1,005	-1,029	-1,113	-0,935	-0,117	2,450
	$\sigma_y$	-0,005	-0,029	-0,099	0,115	0,934	3,183
L	$\sigma_x$	-0,005	-0,022	0,008	0,350	0,874	1,361

Таблица 3

Точки	Напряжения	$c/a_1$					
		10	5	2	1	0,5	0,1
A	$\sigma_s$	0,047	0,074	0,107	0,123	0,127	0,127
B	$\sigma_s$	-0,168	-0,293	-0,520	-0,697	-0,851	-1,060
C	$\sigma_s$	0,067	0,135	0,267	0,208	-0,040	-0,020
D	$\sigma_x$	-0,003	-0,019	-0,100	-0,143	-0,093	-0,014
O	$\sigma_y$	-0,114	-0,188	-0,203	-0,071	-0,001	-0,003
	$\sigma_x$	-0,113	-0,112	-0,100	-0,058	-0,016	-0,003
	$\sigma_y$	-0,338	-0,336	-0,300	-0,174	-0,047	-0,008
K	$\sigma_x$	-0,129	-0,129	-0,124	-0,110	-0,088	-0,039
	$\sigma_y$	-0,387	-0,387	-0,372	-0,329	-0,265	-0,118
L	$\sigma_x$	-0,665	-0,666	-0,723	-0,910	-1,133	-1,428
	$\sigma_y$	-1,995	-1,999	-2,168	-2,729	-3,398	-4,285
M	$\sigma_x$	-2,499	-2,593	-3,162	-3,861	-4,350	-4,931
N	$\sigma_x$	-0,104	-0,117	-0,133	-0,065	0,018	0,114

жений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в точках перемычки. На рис. 6 и 7 для различных значений отношения  $c/a_1$  при действии на границе полуплоскости штампа и давления соответственно изображены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру. При этом  $\theta$  – центральный угол окружности  $L_1$ , отсчитываемый от точки A против часовой стрелки.

Из табл. 2–3 и рис. 4–7 следует, что как и для сплошной полуплоскости, вблизи прямолинейной границы полуплоскости с отверстием или

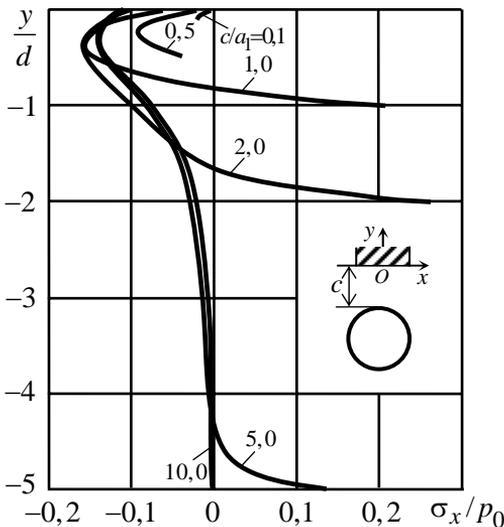


Рис. 4

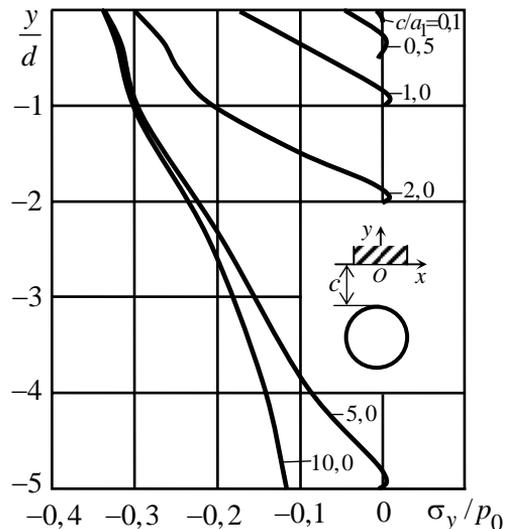


Рис. 5

трещиной значения напряжений для рассмотренных двух случаев загрузки

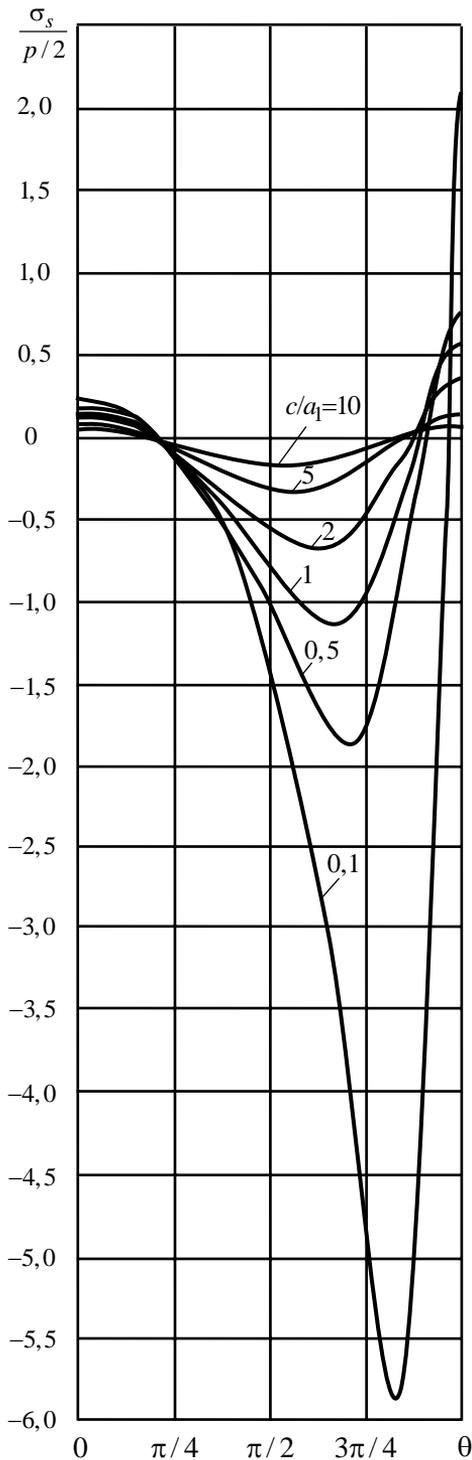


Рис. 6

не связаны друг с другом, но при  $y/d > 1$ ,  $c/a_1 > 1$  они отличаются друг от друга незначительно, если для обоих случаев выбрать одинаковый главный вектор внешних сил, т. е. умножить значения напряжений для случая действия штампа на 2 (так как главный вектор сил в случае давления равен  $2dp$ ). Следовательно, и для полуплоскости с отверстием имеет место принцип Сен-Венана, в соответствии с которым, кроме небольшой зоны около участка действия нагрузок на границе полуплоскости, значения всех величин не зависят от способа действия нагрузок, а зависят от значения главного вектора приложенных сил. Как показывают проведенные исследования, принцип Сен-Венана соблюдается и для любого количества, сочетания и расположения отверстий и трещин в полуплоскости. Но в случае вертикальных трещин происходит смыкание берегов вблизи вершин и КИН получают отрицательными. В остальных же точках при стремлении полуоси эллипса  $b$  к нулю закономерности изменения напряжений сохраняются.

Заметим, что из проведенных исследований для разных значений ширины штампа следует, что в случае неблизких расстояний между границей полуплоскости и контуром отверстия значения напряжений вблизи основания штампа не зависят от ширины штампа и прямо пропорциональны "интенсивности давления под штампом"  $p = P_0/2d$ .

Кроме указанной аналогии двух задач (о действии на границе полуплоскости равномерно распределенного давления или жестко сцепленного с прямолинейной границей абсолютно жесткого штампа), из приведенных данных также следует, что с приближением отверстия к границе полуплоскости концентрация напряжений

около отверстия и в зоне между отверстием и прямолинейной границей растёт, кроме небольшой окрестности прямолинейной границы, где наблюдаются другие закономерности. Для близких расположений отверстия к границе полуплоскости особенно большие напряжения возникают около контура отверстия. Последние в десятки раз превышающие соответствующих значений для случая действия штампа. При  $c \geq 5d$  вблизи прямолинейной границы напряжения оказываются такими же, как в сплошной полуплоскости под действием соответствующей нагрузки.

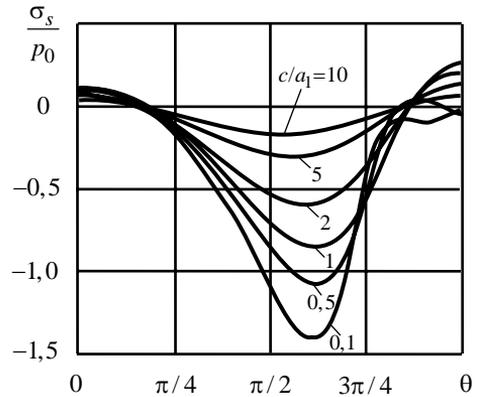


Рис. 7

**РЕЗЮМЕ.** З використанням комплексних потенціалів, інтегралів типу Коші, аналітичного продовження і рішення задачі лінійного спряження розглянуті задачі для багатозв'язної ізотропної півплощини, на прямолінійній границі якої діють зовнішні зусилля або жорсткі штампи. Чисельними дослідженнями вивчено вплив геометричних характеристик розглянутої півплощини на її напружений стан. Встановлено, що, як і слід було очікувати за принципом Сен-Венану, напружено-деформований стан півплощини, крім невеликої околиці ділянок завантаження прямолінійною границі, не залежить від способу прикладання навантаження, а залежить від значення головного вектора докладених зусиль.

**Ключові слова:** багатозв'язна ізотропна півплощина, принцип Сен-Венану, метод комплексних потенціалів, інтеграли типу Коші, аналітичне продовження, задача лінійно-го спряження.

**SUMMARY.** With the use of complex potentials, Cauchy integrals, analytic continuation and the solution of the problem of linear conjugation received problems for a multiply isotropic half-plane, on a straight boundary of which are external forces or hard punches. Numerical study investigated effect of the geometric characteristics of these half-plane on its stress state. Found that, as expected by Saint-Venant's principle, the stress-strain state of the half-plane, except for a small neighborhood sites loading straight border, is independent of the application of the load, but depends on the value of the main vector the effort.

**Key words:** multiply isotropic half-plane, the Saint-Venant's principle, method of complex potentials, Cauchy integrals, analytic continuation, the problem of linear conjugation.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вакулєнко С. В., Калоєров С. А. Приближенный метод определения напряженного состояния многосвязной изотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 65–76.
2. Калоєров С. А. Приложение задачи сопряжения к исследованию напряженного состояния многосвязной изотропной полуплоскости // Теорет. и прикладная механика. – 1991. – Вып. 22. – С. 20–26.
3. Калоєров С. А. Решение основных задач теории упругости для полуплоскости с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1998. – Вып. 28. – С. 157–171.
4. Калоєров С. А., Вакулєнко С. В. Смешанная задача теории упругости для изотропной полуплоскости с круговыми отверстиями // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 99–107.
5. Калоєров С. А., Вакулєнко С. В. Смешанная задача теории упругости для полуплос-

кости с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 42–57.

6. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной в теории упругости. – М., Л.: ОНТИ, Глав. ред. общетех. дисциплин, 1935. – 224 с.

7. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – К.: Вища шк., 1975. – 228 с.

8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 708 с.

9. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 10.10.2012*

УДК 539.3

*Р. М. ИСРАФИЛОВ*, канд. физ.-мат. наук,  
*Е. В. САВЕЛЬЕВА*, канд. физ.-мат. наук

### ПРИВЕДЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПУАССОНА В НАПРАВЛЕНИИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ ПЛОСКОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ОРТОТРОПНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

*Предложен аналитический способ определения приведенных коэффициентов Пуассона для трехслойной пластины симметричного строения. Геометрические параметры и механические свойства материалов структурных элементов пластины предполагаются известными. Теоретически исследованы два различных вида нагружения прямоугольной пластины, в результате чего получены уравнения для определения искоемых коэффициентов двумя различными способами. Для двух материалов получены числовые значения соответствующих коэффициентов.*

*Ключевые слова:* трехслойная пластина, сотовый ортотропный материал, сотовый наполнитель, коэффициенты Пуассона

Как известно, до настоящего времени в научной литературе отсутствуют методы аналитического или численного определения коэффициентов Пуассона  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{zx}$ ,  $\nu_{yz}$ ,  $\nu_{zy}$ , т.е. в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ , перпендикулярных плоскости пластины  $Oxy$  [7, 8, 9]. Это связано [1], по-видимому, с тем, что при обычных допущениях прикладных теорий трехслойных панелей, эти коэффициенты из решения задач выпадают. Однако, применение классической теории Кирхгофа-Лява и прикладных теорий типа теорий С.П. Тимошенко, С.А. Амбарцумяна и других [2, 5, 6] допустимо только в случае тонких и средней толщины пластин (например, при  $H/R < 10$  для круглых пластин радиуса  $R$  и толщины  $H$ ).

Применение прикладных теорий к расчету толстых пластин (например, при  $H/R > 10$ ) может привести к существенным погрешностям. Из этого следует необходимость применения методов теории упругости или обобщенной теории И.Н. Векуа [3], которые требуют знания всех девяти (для ортотропных) или пяти (для трансверсально-изотропных) независимых упругих постоянных материалов пластин.

Ниже предложен аналитический способ определения коэффициентов Пуассона для ортотропных и трансверсально-изотропных пластин в плоскостях  $Oxz$  и  $Oyz$ . Он существенно отличается от методики определения коэффициентов  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$  в плоскости  $Oxy$  [1].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим прямоугольную трехслойную пластину с одинаковыми изотропными тонкими внешними слоями толщины  $\delta$  и ортотропным сотовым наполнителем толщины  $h$ , оси упругой симметрии которого параллельны кромкам панели (рис. 1). Будем считать, что материалы внешних слоев и пластинок, образующих соты за-

полнителя, одинаковы и соединены между собой по срединным плоско-

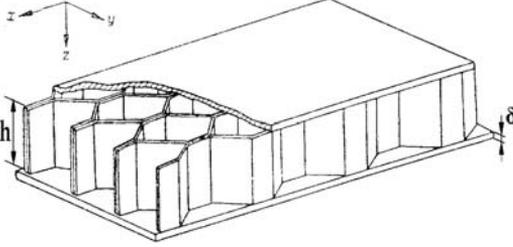


Рис. 1

стям; внешние слои и заполнитель панели деформируются в пределах пропорциональности при нагрузках, для которых все элементы панели сохраняют устойчивость. Соединение всех слоев панели между собой осуществляется таким образом, чтобы получаемая структура имела жесткие непрерывные стенки, принимающие сдвиг в двух взаимно перпендикулярных

направлениях. Далее под приведенными параметрами будем понимать параметры эквивалентного сплошного заполнителя.

**2. Методика определения коэффициентов Пуассона.** Нормальные напряжения в ортотропном заполнителе связаны с его деформациями следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (1 + v_{zy}v_{yz}) \bar{E}_x \varepsilon_x + (v_{yx} + v_{zx}v_{yz}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (v_{zx} + v_{yx}v_{zy}) \bar{E}_z \varepsilon_z, \\ \sigma_{yy} &= (v_{xy} + v_{zy}v_{xz}) \bar{E}_x \varepsilon_x + (1 + v_{xz}v_{zx}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (v_{zy} + v_{xy}v_{zx}) \bar{E}_z \varepsilon_z, \\ \sigma_{zz} &= (v_{xz} + v_{xy}v_{yz}) \bar{E}_x \varepsilon_x + (v_{yz} + v_{yx}v_{xz}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (1 + v_{xy}v_{yx}) \bar{E}_z \varepsilon_z,\end{aligned}\quad (2.1)$$

где  $v_{xy}$ ,  $v_{yx}$ ,  $v_{xz}$ ,  $v_{zx}$ ,  $v_{yz}$ ,  $v_{zy}$  – постоянные, которые в общем случае, неодинаковы, но соотношения напряжения-деформации (2.1) симметричны ( $v_{xy}\bar{E}_y = v_{yx}\bar{E}_x$ ,  $v_{xz}\bar{E}_z = v_{zx}\bar{E}_x$ ,  $v_{yz}\bar{E}_z = v_{zy}\bar{E}_y$ ) и только три коэффициента Пуассона являются независимыми величинами.

Так как толщина внешних слоев  $\delta$  намного меньше толщины заполнителя  $h$  ( $\delta \ll h$ ) относительным удлинением внешних слоев в поперечном направлении (по координате  $z$ ) по сравнению с деформациями заполнителя можно пренебречь ( $\varepsilon_{z1} \approx 0$ ). Тогда напряжения во внешних слоях будут определяться формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{x1} &= \bar{E}_1 (\varepsilon_{x1} + v_1 \varepsilon_{y1}), \quad \sigma_{y1} = \bar{E}_1 (\varepsilon_{y1} + v_1 \varepsilon_{x1}), \\ \sigma_{z1} &= \bar{E}_1 v_1 (\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1}),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где  $\bar{E}_1 = E_1 (1 - v_1^2)^{-1}$ .

В выражениях (2.1), (2.2) для приведенных модулей упругости и коэффициентов Пуассона сотового заполнителя введены обозначения

$$\begin{aligned}\bar{E}_x &= v_{xyz} E_x, \quad \bar{E}_y = v_{xyz} E_y, \quad \bar{E}_z = v_{xyz} E_z, \\ v_{xyz} &= \left[ (1 - v_{zx}v_{xz})(1 - v_{zy}v_{yz}) - (v_{xy} + v_{zy}v_{xz})(v_{yx} + v_{zx}v_{yz}) \right]^{-1}, \\ E_1 &= \frac{E}{1 - v^2}, \quad v_1 = \frac{v}{1 - v},\end{aligned}\quad (2.3)$$

причем  $E_x, E_y, E_z, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона изотропного материала пластинок, образующих соты и внешние слои.

Выделим из трехслойной панели по всей ее толщине элемент с продольной осью  $Oy$  при растяжении (или сжатии) в направлении оси  $Oz$  (перпендикулярном слоям) в условиях плоской деформации ( $\varepsilon_y = 0, \varepsilon_{y1} = 0$ ). В этом случае общая поперечная деформация элемента панели складывается из полных деформаций всех слоев. При этом вертикальные напряжения во всех слоях одинаковы. На основании этих условий и утверждений физические уравнения (2.1), (2.2) записываются так:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (1 - \nu_{zy}\nu_{yz})\bar{E}_x\varepsilon_x + (\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy})\bar{E}_z\varepsilon_z, \\ \sigma_{yy} &= (\nu_{xy} + \nu_{zy}\nu_{xz})\bar{E}_x\varepsilon_x + (\nu_{zy} + \nu_{xy}\nu_{zx})\bar{E}_z\varepsilon_z, \\ \sigma_{x1} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}\varepsilon_{x1}, \quad \sigma_{y1} = \frac{\nu_1 E_1}{1 - \nu_1^2}\varepsilon_{x1}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

При этом

$$\varepsilon_{x1} = \frac{1 - \nu_1^2}{\nu_1 E_1} \left[ (\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz})\bar{E}_x\varepsilon_x + (1 - \nu_{xy}\nu_{yx})\bar{E}_z\varepsilon_z \right], \quad (2.5)$$

$\sigma_{yy}, \sigma_{y1}$  – торцевые напряжения.

Из условий незагруженности кромок слоев, параллельных осям  $Ox$  и  $Oy$ , получим

$$\sigma_{xx}h + 2\sigma_{x1}\delta = 0, \quad \sigma_{yy}h + 2\sigma_{y1}\delta = 0 \quad (\text{условия равновесия}). \quad (2.6)$$

На основании (2.3) из выражений (2.4)–(2.6) получим кубическое уравнение с двумя неизвестными  $\nu_{zx}, \nu_{zy}$ :

$$\begin{aligned}c_{11}\nu_{zy}^3 + c_{12}\nu_{zy}^2\nu_{zx} + c_{13}\nu_{zy}\nu_{zx}^2 + c_{14}\nu_{zy}^2 + c_{15}\nu_{zx}^2 + \\ + c_{16}\nu_{zy}\nu_{zx} + c_{17}\nu_{zy} + c_{18} = 0,\end{aligned}\quad (2.7)$$

в котором

$$\begin{aligned}c_{11} &= \frac{E_y}{E_z}, \quad c_{12} = \nu_{yx}\frac{E_x}{E_z} + \nu_{xy}\frac{E_y}{E_z}, \quad c_{13} = \frac{E_x}{E_z}, \\ c_{14} &= 2\frac{E_y}{E_z}\left(1 - \frac{\nu_{xy}}{\nu_1}\right)\frac{\delta}{h}, \quad c_{15} = 2\frac{E_x}{E_z}\left(1 - \frac{\nu_{xy}}{\nu_1}\right)\frac{\delta}{h}, \\ c_{16} &= 2\left(\nu_{yx}\frac{E_x}{E_z} + \nu_{xy}\frac{E_y}{E_z}\right)\left(1 - \frac{\nu_{xy}}{\nu_1}\right)\frac{\delta}{h}, \\ c_{17} &= -(1 - \nu_{xy}\nu_{yx}), \quad c_{18} = -2(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})\left(1 - \frac{\nu_{xy}}{\nu_1}\right)\frac{\delta}{h}.\end{aligned}$$

Для вывода второго уравнения вида (2.7) рассмотрим элемент пластины с продольной осью  $Ox$  в условиях плоской деформации ( $\varepsilon_x = 0$ ,  $\varepsilon_{x1} = 0$ ) при растяжении (или сжатии) в направлении оси  $Oz$  (перпендикулярном слоям). В этом случае из соотношений (2.1), (2.2) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= (v_{yx} + v_{zy}v_{yz})\bar{E}_y\varepsilon_y + (v_{zx} + v_{yx}v_{zy})\bar{E}_z\varepsilon_z, \\ \sigma_{yy} &= (1 - v_{xz}v_{zx})\bar{E}_y\varepsilon_y + (v_{zy} + v_{xy}v_{zx})\bar{E}_z\varepsilon_z, \\ \sigma_{x1} &= \frac{v_1 E_1}{1 - v_1} \varepsilon_{y1}, \quad \sigma_{y1} = \frac{E_1}{1 - v_1} \varepsilon_{y1},\end{aligned}\quad (2.8)$$

где  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{x1}$  – торцевые напряжения.

Исходя из того, что при растяжении (или сжатии) элемента в направлении оси  $Oz$  вертикальные напряжения во всех слоях одинаковы, т. е.  $\sigma_z = \sigma_{z1}$ , имеем

$$\varepsilon_{y1} = \frac{1 - v_1^2}{v_1 E_1} \left[ (v_{xz} + v_{xy}v_{yz})\bar{E}_x \varepsilon_x + (1 - v_{xy}v_{yx})\bar{E}_z \varepsilon_z \right]. \quad (2.9)$$

На основании (2.3) из выражений (2.6) и (2.8), (2.9) получаем второе уравнение относительно  $v_{zx}$ ,  $v_{zy}$ :

$$c_{21}v_{zx}^3 + c_{22}v_{zx}^2 v_{zy} + c_{23}v_{zx}v_{zy}^2 + c_{24}v_{zx}^2 + c_{25}v_{zy}^2 + c_{26}v_{zx}v_{zy} + c_{27}v_{zx} + c_{28} = 0. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}c_{21} &= -\frac{E_x}{E_z}, \quad c_{22} = -\left( v_{yx} \frac{E_x}{E_z} + v_{xy} \frac{E_y}{E_z} \right), \quad c_{23} = -\frac{E_y}{E_z}, \\ c_{24} &= -2 \frac{E_x}{E_z} \left( 1 - \frac{v_{yx}}{v_1} \right) \frac{\delta}{h}, \quad c_{25} = -2 \frac{E_y}{E_z} \left( 1 - \frac{v_{yx}}{v_1} \right) \frac{\delta}{h}, \\ c_{26} &= -2 \left( v_{yx} \frac{E_x}{E_z} + v_{xy} \frac{E_y}{E_z} \right) \left( 1 - \frac{v_{yx}}{v_1} \right) \frac{\delta}{h}, \\ c_{27} &= 1 - v_{xy}v_{yx}, \quad c_{28} = 2 \left( 1 - v_{xy}v_{yx} \right) \left( 1 - \frac{v_{yx}}{v_1} \right) \frac{\delta}{h}.\end{aligned}$$

Таким образом, для определения коэффициентов Пуассона  $v_{zx}$ ,  $v_{zy}$  в плоскостях  $Oxz$ ,  $Oyz$  построена система алгебраических уравнений (2.7), (2.10). В частности, для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии  $Oxy$  (т. е. при  $v_{xy} = v_{yx}$ ,  $E_x = E_y$ ,  $v_{zx} = v_{zy}$ ) система уравнений (2.7), (2.10) сводится к одному кубическому уравнению в канонической форме

$$c_{31}v_{zx}^3 + c_{32}v_{zx}^2 + c_{33}v_{zx} + c_{34} = 0, \quad (2.11)$$

где

$$c_{31} = -2 \frac{E_x}{E_z} (1 + \nu_{xy}), \quad c_{32} = -4 \frac{E_x}{E_z} (1 + \nu_{xy}) \left(1 - \frac{\nu_{xy}}{\nu_1}\right) \frac{\delta}{h},$$

$$c_{33} = 1 - \nu_{xy}^2, \quad c_{34} = 2 \left(1 - \nu_{xy}^2\right) \left(1 - \frac{\nu_{xy}}{\nu_1}\right) \frac{\delta}{h}.$$

В качестве примера рассмотрим трехслойную пластину с сотовым наполнителем из шестигранных ячеек. Упругие и геометрические параметры для двух различных материалов (внешних слоев и наполнителя) приведены в табл. 1 [1].

Таблица 1

Материал	$\delta$ (см)	$h$ (см)	$E_x = E_y$ (МПа)	$E_1$ (МПа)	$E_z$ (МПа)	$E_M$ (МПа)	$\nu_{xy} = \nu_{yx}$	$\nu_1$	$\nu_M$
№ 1	0,05	4	5,36	3021	255,7	2750	0,931	0,43	0,3
№ 2	0,1	1	62,6	1750	126	1470	0,630	0,36	0,4

Число действительных корней уравнения (2.11) зависит от знака дискриминанта  $D = q^2 + p^3$ , где  $q = \frac{c_{32}^3}{27c_{31}^3} - \frac{c_{32}c_{33}}{c_{31}^3} + \frac{c_{34}}{c_{31}}$ ,  $p = \frac{3c_{31}c_{33} - c_{32}^2}{9c_{31}^2}$ . Для обоих рассмотренных материалов величины  $3D$  и  $p$  принимают отрицательные значения (соответственно  $-0,1675$  и  $-0,0017$  для материала № 1;  $-0,5518$  и  $-0,1266$  для материала № 2). При условии  $D < 0$  и  $p < 0$  целесообразно воспользоваться вспомогательными величинами  $\varphi$  и  $r = \pm \sqrt{|p|}$ , причем знак  $r$  должен совпадать со знаком  $q$ . Тогда корни уравнения (2.11) определяются выражениями

$$\begin{aligned} v_{zx}^{(1)} &= -2r \cos \frac{\varphi}{3} - \frac{c_{32}}{3c_{31}}, \\ v_{zx}^{(2)} &= 2r \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) - \frac{c_{32}}{3c_{31}}, \\ v_{zx}^{(3)} &= +2r \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) - \frac{c_{32}}{3c_{31}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\varphi = q/r^3$ . В таком случае, для обоих рассматриваемых материалов уравнение (2.11) имеет три различных действительных корня, числовые значения которых представлены в табл. 2. При этом, однако, следует учитывать, что для трансверсально-изотропной конструкции должно выполняться условие [4]

Таблица 2

Материал	$v_{zx}^{(1)}$	$v_{zx}^{(2)}$	$v_{zx}^{(3)}$
№ 1	-1,054	1,2746	0,0532
№ 2	-0,565	0,6686	0,0562

$$\nu_{yz} + \nu_{zx} + \nu_{xy} \leq 2/3, \quad (2.13)$$

причем знак равенства соответствует абсолютно несжимаемому материалу. Для обоих материалов, из трех полученных корней условие (2.13) соблюдается только для  $v_{zx}^{(3)}$ . Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} v_{zx} &= 0,0532 \text{ для № 1;} \\ v_{zx} &= 0,0562 \text{ для № 2.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Следует отметить, что задача определения коэффициентов Пуассона  $v_{zx}$ ,  $v_{zy}$  для сложных ортотропных конструкций с помощью предложенной методики является нетривиальной.

**3. Другой подход к определению коэффициентов Пуассона.** Для проверки достоверности формул (2.7), (2.10), а также числовых результатов (2.13) рассмотрим элемент трехслойной пластины по всей ее толщине при растяжениях (или сжатиях) в направлениях осей  $Ox$  или  $Oy$  в условиях плоской деформации.

Для вывода первого уравнения вида (2.7) рассмотрим элемент с продольной осью  $Oy$  в условиях плоской деформации ( $\varepsilon_y = 0$ ,  $\varepsilon_{y1} = 0$ ) при растяжении или сжатии в направлении оси  $Ox$ . В этом случае из соотношений (2.1) для ортотропного заполнителя получим

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (1 - v_{zy}v_{yz})\bar{E}_x\varepsilon_x + (v_{zx} + v_{yx}v_{zy})\bar{E}_z\varepsilon_z, \\ \sigma_{yy} &= (v_{xy} + v_{zy}v_{zx})\bar{E}_x\varepsilon_x + (v_{zy} + v_{xy}v_{zx})\bar{E}_z\varepsilon_z, \\ \sigma_{zz} &= (v_{xz} + v_{xy}v_{yz})\bar{E}_x\varepsilon_x + (1 - v_{xy}v_{yx})\bar{E}_z\varepsilon_z. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для напряжений во внешних слоях (2.2), с учетом того, что деформации этих слоев и заполнителя при растяжениях (или сжатиях) в направлениях осей  $Ox$  или  $Oy$  одинаковы, имеем

$$\sigma_{x1} = \bar{E}_1\varepsilon_x, \quad \sigma_{y1} = v_1\bar{E}_1\varepsilon_x, \quad \sigma_{z1} = v_1\bar{E}_1\varepsilon_x. \quad (3.2)$$

Здесь торцевыми являются напряжения  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{y1}$ .

При условии, что к кромкам панели, параллельным оси  $Oy$ , при растяжении (или сжатии) в направлении оси  $Ox$ , не приложены внешние нагрузки, получим (условие равновесия)

$$\sigma_{yy}h + 2\sigma_{y1}\delta = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку деформируемость внешних слоев значительно меньше деформируемости сотового заполнителя, нормальным напряжением в заполнителе можно пренебречь:

$$\sigma_{zz} = (v_{xz} + v_{xy}v_{yz})\bar{E}_x\varepsilon_x + (1 - v_{xy}v_{yx})\bar{E}_z\varepsilon_z = 0. \quad (3.4)$$

Из выражений (3.3), (3.4) с учетом (3.1), (3.2) получаем первое квадратное уравнение относительно  $v_{zx}$ ,  $v_{zy}$  в виде

$$c_{41}v_{zx}^2 + c_{42}v_{zy}^2 + c_{43}v_{zx}v_{zy} + c_{44} = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} c_{41} &= v_{xy} \frac{E_x}{E_z} + 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_z} \frac{\delta}{h}, \\ c_{42} &= -v_{xy} \frac{E_y}{E_z} - 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_x} \frac{E_y}{E_z} \frac{\delta}{h}, \\ c_{43} &= -2v_{xy}^2 \frac{E_y}{E_z} - 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_x} \left( v_{xy} \frac{E_y}{E_z} + v_{yx} \frac{E_x}{E_z} \right) \frac{\delta}{h}, \\ c_{44} &= (1 - v_{xy}v_{yx}) \left[ v_{xy} + 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_x} \frac{\delta}{h} \right]. \end{aligned}$$

Для вывода второго уравнения вида (3.5) рассмотрим элемент панели с продольной осью  $Ox$  в условиях плоской деформации ( $\varepsilon_{xx} = 0$ ,  $\varepsilon_{x1} = 0$ ) при растяжении (или сжатии) в направлении оси  $Oy$ . В этом случае из соотношений (2.1) для заполнителя имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (v_{yx} + v_{zx}v_{yz}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (v_{zx} + v_{yx}v_{zy}) \bar{E}_z \varepsilon_z, \\ \sigma_{yy} &= (1 - v_{xz}v_{zx}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (v_{zy} + v_{xy}v_{zx}) \bar{E}_z \varepsilon_z, \\ \sigma_{zz} &= (v_{yz} + v_{yx}v_{xz}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (1 - v_{xy}v_{yx}) \bar{E}_z \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Напряжения во внешних слоях будут такими:

$$\sigma_{x1} = \bar{E}_1 v_1 \varepsilon_y, \quad \sigma_{y1} = \bar{E}_1 \varepsilon_y, \quad \sigma_{z1} = v_1 \bar{E}_1 \varepsilon_y. \quad (3.7)$$

Здесь торцевыми являются напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{x1}$ .

При условии, что к кромкам панели, параллельным оси  $Ox$ , при растяжении (или сжатии) в направлении оси  $Oy$  не приложены внешние нагрузки, получим (условие равновесия)

$$\sigma_{xx} h + 2\sigma_{x1} \delta = 0. \quad (3.8)$$

Аналогично (3.3) запишем

$$\sigma_{zz} = (v_{yz} + v_{yx}v_{xz}) \bar{E}_y \varepsilon_y + (1 - v_{xy}v_{yx}) \bar{E}_z \varepsilon_z = 0. \quad (3.9)$$

Из условий (3.8), (3.9), с учетом (3.6), (3.7), получаем второе квадратное уравнение относительно  $v_{zx}$ ,  $v_{zy}$ :

$$c_{45}v_{zx}^2 + c_{46}v_{zy}^2 + c_{47}v_{zx}v_{zy} + c_{48} = 0. \quad (3.10)$$

Здесь

$$c_{45} = -\frac{E_x}{E_z} \left[ v_{yx} + 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_y} \frac{\delta}{h} \right],$$

$$c_{46} = -\frac{E_y}{E_z} \left[ v_{yx} + 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_y} \frac{\delta}{h} \right],$$

$$c_{47} = -2 \left[ v_{yx}^2 \frac{E_y}{E_z} + (1 - v_{xy}v_{yx}) \left( v_{xy} \frac{E_y}{E_z} + v_{yx} \frac{E_x}{E_z} \right) v_1 \frac{\bar{E}_1}{E_x} \frac{\delta}{h} \right],$$

$$c_{48} = (1 - v_{xy}v_{yx}) \left[ v_{yx} + 2v_1 (1 - v_{xy}v_{yx}) \frac{\bar{E}_1}{E_y} \frac{\delta}{h} \right].$$

Аналогично (2.7), (2.10) система (3.5), (3.9) для трансверсально-изотропного материала сводится к одному квадратному уравнению

$$c_{49} v_{zx}^2 + c_{50} = 0, \quad (3.11)$$

в котором

$$c_{49} = -2(1 + v_{xy}) \left[ v_{xy} \frac{E_x}{E_z} + 2v_1 (1 - v_{xy}^2) \frac{\bar{E}_1}{E_z} \frac{\delta}{h} \right],$$

$$c_{50} = (1 - v_{xy}^2) \left[ v_{xy} + 2v_1 (1 - v_{xy}^2) \frac{\bar{E}_1}{E_x} \frac{\delta}{h} \right].$$

Для двух материалов, постоянные которых представлены в табл. 1, из уравнения (3.11) получаем

$$v_{zx} = 0,0538 \text{ для № 1,}$$

$$v_{zx} = 0,0571 \text{ для № 2.} \quad (3.12)$$

Как видим, для обоих видов нагружения результаты расчетов (2.14) и (3.12) практически совпадают, что подтверждает справедливость формул (2.11) и (3.11).

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано аналітичний спосіб визначення приведених коефіцієнтів Пуассона для тришарової пластини симетричної будови. Геометричні параметри і механічні властивості матеріалів структурних елементів пластини вважаються відомими. Теоретично досліджені два різних види навантаження прямокутної пластини, в результаті чого отримані рівняння для визначення шуканих коефіцієнтів двома різними способами. Для двох матеріалів отримані числові значення відповідних коефіцієнтів.

**Ключові слова:** тришарова пластинка, стільниковий ортотропний матеріал, стільниковий заповнювач, коефіцієнти Пуассона

**SUMMARY.** The analytical method of determination of resulted Poisson ratios for three-layer plate of the symmetric structure is proposed. Geometrical parameters and mechanical properties of the structural elements of the plate are known. Two different types of the loading of the rectangular plate are theoretically investigated, and the equations for the determination of unknown coefficients are obtained in two different ways. Numerical results are obtained by the example of two materials

**Key words:** three-layer plate, honeycomb orthotropic material, honeycomb filler, Poisson ratios

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А. Я., Брюккер Л. Э., Кушин Л.М., Прусаков А. П. Расчёт трёхслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 266 с.
3. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 285 с.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. – М., Л.: ОНТИ, 1935. – 675 с.
6. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1948. – 460 с.
7. Birman V., Bird, L.W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60. – P. 195–216.
8. Giunta G., Catapano A., Belouettar S. Failure indentation analysis of composite sandwich plates via hierarchical models // J. Sandwich Str. Mater. – 2013. – Vol. 15, № 1. – P. 45–70.
9. Guo L. C., Wu L. Z., Ma L. The interface crack problem under a concentrated load for a functionally graded coating-substrate composite system // Comp. Struct. – 2004. – Vol. 63. – P. 397–406.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 18.01.2012*

УДК 539.3:534.1

*М. В. ФОМЕНКО*, канд. физ.-мат. наук**КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН В СЛУЧАЕ  
СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ТОРЦАХ  
И СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА СЛОЕВ**

*В трехмерной постановке решены задачи теории упругости об установившихся колебаниях трехслойной изотропной пластины симметричного строения, плоские грани которой покрыты диафрагмой или находятся в условиях скользящей заделки. На границах раздела слоев выполняются условия скользящего контакта без отрыва. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях. Проведены асимптотический анализ и численные исследования дисперсионных уравнений. Представлены диаграммы спектральных кривых, графики изменения фазовых и групповых скоростей, частоты запираания.*

**Ключевые слова:** *трехслойная пластина, скользящий контакт, диафрагма, скользящая заделка, установившиеся колебания, метод однородных решений, дисперсионные спектры, фазовые и групповые скорости, частоты запираания.*

Развитие теорий поперечно-неоднородных упругих пластин и методов решения конкретных задач отражено в обзорных статьях [10, 16–18] и монографиях, например, [11, 15], которые свидетельствуют о том, что большинство научных результатов получено с использованием приближенных теорий. Поэтому актуальным является развитие известных и создания новых аналитических методов для исследования напряженно-деформированного состояния и волновых полей в слоистых пластинах на основе уравнений трехмерной теории упругости. Для решения пространственных задач статики и динамики неоднородных пластин важную роль сыграли однородные решения, предложенные в работе [8]. В работе [6] впервые полуобратным методом получена полная система однородных решений уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной плиты симметричного строения. Исследованию свойств однородных решений неоднородных плит посвящены работы [11, 12]. Колебания трехслойной пластины в случае граничных условий плоского торца и идеального контакта слоев исследовались с использованием однородных решений в работе [14]. Однако на границе раздела слоев может иметь место условие полного проскальзывания при неразрывности нормальных компонент смещений и напряжений [9]. Для колебаний трехслойных пластин при проскальзывании слоев в работах [1–4, 13] получены однородные решения. В частности, в работе [2] рассмотрены кососимметричные колебания таких пластин с покрытыми диафрагмой торцами, а в работе [1] – симметричные колебания пластин в случае граничных условий плоского торца.

В данной работе на основе метода однородных решений в трехмерной постановке рассмотрены задачи с противоположной симметрией о гармонических колебаниях трехслойной пластины, плоские грани кото-

рой покрыты диафрагмой или находятся в условиях скользящей заделки, а на границе раздела слоев выполняются условия скользящего контакта.

**Постановка задач.** Рассмотрим трехслойную пластину толщины  $2h$ , симметричного строения относительно ее срединной плоскости со слоями из изотропных материалов и находящихся друг с другом в условиях скользящего контакта. На боковой поверхности пластины действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени усилия. Рассмотрим следующие задачи: симметричные колебания пластины, лицевые грани которой покрыты диафрагмой (задача 1), и кососимметричные колебания пластины со скользящей заделкой торцов (задача 2).

Отнесем пластину к размерным прямоугольным декартовым координатам  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ . Координатную плоскость  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  совместим со срединной плоскостью пластины, а ось  $\tilde{x}_3$  направим перпендикулярно торцам пластины. Величины, относящиеся к верхнему слою, имеют индекс 1 внизу, к внутреннему – индекс 2. Обозначим через  $h_1$  – толщину внешних одинаковых слоев,  $2h_2$  – толщину внутреннего слоя, а упругие характеристики материалов слоев обозначим через  $\tilde{G}_m$  – модуль сдвига,  $\nu_m$  – коэффициент Пуассона,  $\rho_m$  – плотность материала,  $m$  – номер слоя ( $m = 1, 2$ ).

Введем безразмерные величины и координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1/R, & x_2 &= \tilde{x}_2/R, & x_3 &= \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R), \\ \lambda &= h/R, & h &= h_1 + h_2, & \lambda_1 &= h_1/h, & \lambda_2 &= h_2/h, \\ u_{mi} &= \tilde{u}_{mi}/R, & \sigma_{mij} &= \tilde{\sigma}_{mij}/(2\tilde{G}_2) \quad (i, j = \overline{1, 3}, m = 1, 2); \\ G &= \tilde{G}_1/\tilde{G}_2, & \eta &= \rho_1/\rho_2. \end{aligned}$$

Тогда построение однородных решений задач об установившихся колебаниях рассматриваемой пластины сводится к интегрированию уравнений движения для каждого слоя

$$\begin{aligned} \lambda^{-2}\partial_3^2 u_{mj} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2)u_{mj} + \nu_{m0}\partial_j\theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \lambda^{-2}\partial_3^2 u_{m3} + (D^2 + \Omega_m^2/\lambda^2)u_{m3} + \lambda^{-1}\nu_{m0}\partial_3\theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом одного из граничных условий на торцах пластины

$$u_{1j}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad \sigma_{133}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{1j3}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad u_{13}(x_1, x_2, 1) = 0 \quad (3)$$

и условий проскальзывания слоев

$$\begin{aligned} u_{13}(x_1, x_2, \lambda_2) &= u_{23}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{133}(x_1, x_2, \lambda_2) &= \sigma_{233}(x_1, x_2, \lambda_2), \\ \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \lambda_2) &= 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, \lambda_2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\partial_i = \partial/\partial x_i, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_m = \partial_1 u_{m1} + \partial_2 u_{m2} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{m3},$$

$$v_{m0} = 1/(1 - 2v_m), \quad \Omega_m = h\omega/c_{Sm}, \quad c_{Sm} = \sqrt{\tilde{G}_m/\rho_m}.$$

**Построение однородных решений задач.** Решения задач (1), (2), (4) и (1), (3), (4) состоят из суммы вихревого и потенциального состояний [6]

$$\begin{Bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ u_{m3} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_{mk}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) \\ -p_{mk}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n_{mp}(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2) \\ n_{mp}(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2) \\ q_{mp}(x_3) C_p(x_1, x_2) \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $B_k(x_1, x_2)$ ,  $C_p(x_1, x_2)$  – метагармонические функции

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0,$$

$$D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p/\lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0;$$

$p_{mk}(x_3)$  – собственные функции вихревого состояния

$$p_{1k}(x_3) = \cos l_{1k}(x_3 - l_2),$$

$$p_{2k}(x_3) = r \cos l_{2k} x_3 + (1-r) l_{2k}^{-1} \sin l_{2k} x_3,$$

$$l_{1k} = r \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_1} + (1-r) \frac{\pi k}{\lambda_1},$$

$$l_{2k} = r \frac{\pi k}{\lambda_2} + (1-r) \frac{\pi(2k-1)}{2\lambda_2},$$

$$r = \begin{cases} 1, & \text{в задаче 1;} \\ 0, & \text{в задаче 2;} \end{cases}$$

$\delta_k$  – собственные значения

$$\{\delta_k\} = \{\delta_{1k}\} \cup \{\delta_{2k}\}, \quad \delta_{mk}^2 = l_{mk}^2 - \Omega_m^2;$$

$n_{mk}(x_3)$ ,  $q_{mk}(x_3)$  и  $\gamma_p$  – неизвестные функции и параметр разделения переменных потенциального состояния, которые находятся из задач на собственные значения

$$n_m'' + \left[ \Omega_m^2 + \gamma^2 (1 + v_{m0}) \right] n_m + \lambda v_{m0} q_m' = 0,$$

$$q_m'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + v_{m0}} q_m + \frac{\gamma^2 v_{m0}}{\lambda (1 + v_{m0})} n_m' = 0,$$

$$r n_1(1) + (1-r) [\lambda q_1(1) + n_1'(1)] = 0,$$

$$r [\gamma^2 (v_{10} - 1) n_1(1) + \lambda (v_{10} + 1) q_1'(1)] + (1-r) q_1(1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
q_1(\lambda_2) &= q_2(\lambda_2), \quad \lambda q_1(\lambda_2) + n'_1(\lambda_2) = 0, \quad \lambda q_2(\lambda_2) + n'_2(\lambda_2) = 0, \\
G\left[\gamma^2(\nu_{10} - 1)n_1(\lambda_2) + \lambda(\nu_{10} + 1)q'_1(\lambda_2)\right] &= \\
&= \gamma^2(\nu_{20} - 1)n_2(\lambda_2) + \lambda(\nu_{20} + 1)q'_2(\lambda_2).
\end{aligned} \tag{5}$$

Решением краевых задач (5) являются функции

$$\begin{aligned}
n_1(x_3) &= H_1 \cos \gamma_{11}(x_3 - \lambda_2) + H_2 \sin \gamma_{11}(x_3 - \lambda_2) + \\
&\quad + H_3 \cos \gamma_{12}(x_3 - \lambda_2) + H_4 \sin \gamma_{12}(x_3 - \lambda_2), \\
q_1(x_3) &= Q_1 \sin \gamma_{11}(x_3 - \lambda_2) + Q_2 \cos \gamma_{11}(x_3 - \lambda_2) + \\
&\quad + Q_3 \sin \gamma_{12}(x_3 - \lambda_2) + Q_4 \cos \gamma_{12}(x_3 - \lambda_2), \\
n_2(x_3) &= r(H_5 \cos \gamma_{21}x_3 + H_6 \cos \gamma_{22}x_3) + \\
&\quad + (1-r)(H_5 \sin \gamma_{21}x_3 + H_6 \sin \gamma_{22}x_3), \\
q_2(x_3) &= r(Q_5 \sin \gamma_{21}x_3 + Q_6 \sin \gamma_{22}x_3) + \\
&\quad + (1-r)(Q_5 \cos \gamma_{21}x_3 + Q_6 \cos \gamma_{22}x_3),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{m1}^2 &= \gamma^2 + k_m^2 \Omega_m^2, \quad \gamma_{m2}^2 = \gamma^2 + \Omega_m^2, \quad k_m^2 = (1 - 2\nu_m)/(2 - 2\nu_m); \\
Q_i &= a_i H_i / \lambda, \quad a_1 = -\gamma_{11}, \quad a_2 = \gamma_{11}, \quad a_3 = -\gamma^2 / \gamma_{12}, \\
a_4 &= \gamma^2 / \gamma_{12}, \quad a_5 = (1 - 2r)\gamma_{21}, \quad a_6 = (1 - 2r)\gamma^2 / \gamma_{22}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $H_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) в задаче 1 получаются такими:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \gamma_{21} \Omega_2^2 \kappa_1^2 S_{11} C_{12} S_{21} S_{22}, \quad H_2 = -\gamma_{21} \Omega_2^2 \kappa_1^2 C_{11} C_{12} S_{21} S_{22}, \\
H_3 &= -2\gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{21} \Omega_2^2 C_{11} S_{12} S_{21} S_{22}, \quad H_4 = 2\gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{21} \Omega_2^2 C_{11} C_{12} S_{11} S_{22}, \\
H_5 &= \gamma_{11} \Omega_1^2 \kappa_2^2 C_{11} C_{12} S_{22}, \quad H_6 = -2\gamma_{11} \gamma_{21} \gamma_{22} \Omega_1^2 C_{11} C_{12} S_{21},
\end{aligned}$$

а в задаче 2 выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \gamma_{21} \Omega_2^2 \kappa_1^2 C_{11} S_{12} C_{21} C_{22}, \quad H_2 = \gamma_{21} \Omega_2^2 \kappa_1^2 S_{11} S_{12} C_{21} C_{22}, \\
H_3 &= -2\gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{21} \Omega_2^2 S_{11} C_{12} C_{21} C_{22}, \quad H_4 = -2\gamma_{11} \gamma_{12} \gamma_{21} \Omega_2^2 S_{11} S_{12} C_{21} C_{22}, \\
H_5 &= \gamma_{11} \Omega_1^2 \kappa_2^2 S_{11} S_{12} C_{22}, \quad H_6 = -2\gamma_{11} \gamma_{21} \gamma_{22} \Omega_1^2 S_{11} S_{12} C_{21}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\kappa_{m2}^2 = \gamma^2 + \gamma_{m2}^2, \quad S_{mj} = \sin \gamma_{mj} \lambda_m, \quad C_{mj} = \cos \gamma_{mj} \lambda_m \quad (j, m = 1, 2).$$

Собственные значения  $\gamma_p$  в задачах 1 и 2 находятся соответственно из дисперсионных уравнений

$$F_1(\gamma, \Omega) \equiv \eta\gamma_{11}C_{11}C_{12}(\xi_2C_{21}S_{22} - \tau_2S_{21}C_{22}) - G^2(\xi_1S_{11}C_{12} - \tau_1C_{11}S_{12})\gamma_{21}S_{21}S_{22} = 0, \quad (6)$$

$$F_2(\gamma, \Omega) \equiv \eta\gamma_{11}S_{11}S_{12}(\xi_2S_{21}C_{22} - \tau_2C_{21}S_{22}) - G^2(\xi_1C_{11}S_{12} - \tau_1S_{11}C_{12})\gamma_{21}C_{21}C_{22} = 0, \quad (7)$$

где

$$\Omega = \max\{\Omega_1, \Omega_2\}, \quad \tau_m = 4\gamma^2\gamma_{m1}\gamma_{m2}, \quad \xi_m = (\gamma^2 + \gamma_{m2}^2)^2.$$

Дисперсионные уравнения (6) и (7) описывают частотные спектры P-SV волн. Корни  $\gamma_p$  этих уравнений являются действительными, мнимыми или комплексными, зависят от приведенной частоты колебаний  $\Omega$  и параметров  $G$ ,  $\eta$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Действительные и комплексные корни  $\gamma$  отвечают краевым (стоячим) волнам – нераспространяющиеся моды. Мнимые собственные значения  $\gamma$  соответствуют распространяющимся (бегущим) модам, которые имеют основное значение для исследования процесса переноса энергии.

**Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения.** Методы дисперсионного анализа распространения волн в трехслойной пластине предполагают изучение предельного поведения дисперсионных кривых при различных значениях параметра  $\gamma$  и частоты  $\Omega$ . Асимптотический анализ также важен для проведения численных исследований и изучения характеристик волнового процесса. Проведем асимптотические исследования дисперсионных уравнений (6) и (7). Раскладывая функции  $F_j(\gamma, \Omega)$  ( $j = 1, 2$ ) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\Omega = 0$ , получаем уравнения в задачах статики

$$F_1(\gamma, 0) \equiv (1 - \nu_1)\cos^2\gamma\lambda_1(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) - G(1 - \nu_2)(\sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)\sin^2\gamma\lambda_2 = 0,$$

$$F_2(\gamma, 0) \equiv (1 - \nu_1)\sin^2\gamma\lambda_1(\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) - G(1 - \nu_2)(\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)\cos^2\gamma\lambda_2 = 0.$$

Для обеих задач в особом положении оказывается первая мнимая ветвь дисперсионных спектров уравнений (6) и (7), проходящая через начало координат  $\gamma = 0$ ,  $\Omega = 0$ . Соответствующие дисперсные моды оказывается распространяющимися при любой частоте  $\Omega$ . Для анализа скоростей этих мод при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионные уравнения (6) и (7) за счет малости величин  $\gamma$ ,  $\Omega$ . При этом для безразмерной фазовой скорости  $v_p = c_p/c_0 = \Omega/v$  ( $v = \text{Im } \gamma$ ,  $c_0 = \min\{c_{S1}, c_{S2}\}$ ) соответственно в задачах 1 и 2 имеем

$$v_p = 2v_{S2}\sqrt{1-k_2^2}, \quad v_p = 2v_{S1}\sqrt{1-k_1^2},$$

где  $v_{Sj} = c_{Sj}/c_0$  ( $j = 1, 2$ ). Из данных формул следует, что в низкочастотном диапазоне волны являются бездисперсными.

При рассмотрении поведения мнимых мод с увеличением частоты  $\Omega$  можно выделить два диапазона изменения параметра  $\gamma$ : при малых  $\gamma$  имеем длинноволновое приближение, при больших – коротковолновое. В первом случае для всех мнимых участков дисперсионных ветвей характерно наличие частот запирания [7]. Для их определения полагаем в соотношениях (6), (7)  $\gamma = 0$  и получаем трансцендентные уравнения

$$F_1(0, \Omega) = (Gk_2\Omega_1s_{11}s_{21} - k_1\Omega_2c_{11}c_{21})c_{12}s_{22}, \quad (8)$$

$$F_2(0, \Omega) = (Gk_2\Omega_1c_{11}c_{21} - k_1\Omega_2s_{11}s_{21})s_{12}c_{22}, \quad (9)$$

где

$$s_{m1} = \sin(k_m\Omega_m\lambda_m), \quad s_{m2} = \sin(\Omega_m\lambda_m), \\ c_{m1} = \cos(k_m\Omega_m\lambda_m), \quad c_{m2} = \cos(\Omega_m\lambda_m).$$

Каждое из уравнений (8) и (9) определяет по три независимые серии частот запирания. Причем частоты вторых и третьих серий находятся в явном виде и не зависят от значений коэффициентов Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  в отличие от частот первых семейств, которые находятся численно.

Оценим предельные значения фазовых скоростей  $c_p$  в коротковолновом диапазоне. В области  $v > \Omega_1$  и  $v > \Omega_2$  при  $v \rightarrow \infty$  из дисперсионных соотношений (6), (7) для первой распространяющейся моды получаем уравнение

$$\frac{\eta}{G}r_1\left(\left(1+s_2^2\right)^2-4r_2s_2\right)+Gr_2\left(\left(1+s_1^2\right)^2-4r_1s_1\right)=0, \quad (10)$$

где

$$r_m = \sqrt{1-c^2/c_{Pm}^2}, \quad s_m = \sqrt{1-c^2/c_{Sm}^2},$$

$c_{Pm}, c_{Sm}$  – соответственно скорости продольных и сдвиговых объемных волн в материале  $m$ -го слоя. Уравнение (10) совпадает с известным [7] для нахождения скорости  $c_{St}$  волны Стоунли вблизи поверхности раздела двух упругих полупространств с условиями проскальзывания по поверхности контакта. Поэтому для коротких волн вид граничных условий на торцах пластины не оказывает влияния на характер локализации фазовой скорости низшей распространяющейся моды. Фазовая скорость этой моды в коротковолновом высокочастотном диапазоне получается такой же, как и скорость поверхностной волны Стоунли. Для остальных ветвей при  $v \rightarrow \infty$  имеем  $c = \min\{c_{S1}, c_{S2}\}$ .

Рассмотрим случай одинаковых упругих и геометрических парамет-

ров материалов слоев пластины:  $G=1$ ,  $\eta=1$ ,  $\nu_1=\nu_2=\nu$ ,  $\lambda_1=\lambda_2=1/2$ . Тогда дисперсионные уравнения (6) и (7) примут вид

$$(\gamma^2 + \gamma_2^2)^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - 4\gamma^2 \gamma_1 \gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0, \quad (11)$$

где  $\gamma_1^2 = \gamma^2 + (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)\Omega^2$ ,  $\gamma_2^2 = \gamma^2 + \Omega^2$ . Соотношение (11) с точностью до обозначений совпадает с известным дисперсионным уравнением Рэлея-Лэмба для нормальных мод в слое [7]. Таким образом, в случае несовершенного контакта слоев невозможен переход от трехслойной к однослойной пластине, если принять равными упругие характеристики материалов слоев.

Рассмотрим некоторые предельные случаи дисперсионных уравнений (6) и (7). Если  $G \rightarrow 0$  (внешние слои – абсолютно мягкие или внутренний слой – жесткий), то из (6) и (7) соответственно получаем следующие

$$C_{11}C_{12}(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) = 0, \quad S_{11}S_{12}(\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) = 0.$$

В результате левая часть каждого из уравнений состоит из двух множителей. Уравнения  $C_{11}C_{12} = 0$  или  $S_{11}S_{12} = 0$  соответствуют колебаниям однослойной пластины со скользящей заделкой торцов и совпадает с полученными в работе [5]. Уравнения, соответствующие второму множителю, описывают упругое равновесие пластины при отсутствии напряжений на плоских гранях [8].

Если  $G \rightarrow \infty$  (внешние слои – жесткие или внутренний слой – абсолютно мягкий), то уравнения (6), (7) трансформируется к таким

$$(\sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)S_{21}S_{22} = 0, \quad (\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)C_{21}C_{22} = 0.$$

Из данных уравнений следует, что внешние слои находятся в состоянии равновесия [8], а внутренний слой совершает колебания [5].

При  $\lambda_1 \rightarrow 0$  соотношения (6), (7) сводятся к следующим

$$(\gamma^2 + \gamma_{22}^2)^2 C_{21}S_{22} - 4\gamma^2 \gamma_{21} \gamma_{22} S_{21}C_{22} = 0, \quad \left( \frac{2\gamma^2}{1 - \nu_1} + \Omega_1^2 \right) C_{21}C_{22} = 0.$$

Таким образом, в задаче 1 получаем уравнение Рэлея-Лэмба для симметричных колебаний слоя [7]. В задаче 2 имеем уравнение кососимметричных колебаний слоя с учетом граничных условий типа плоского торца [5] и соотношение, которое определяет известную [7] скорость распространения волн в тонкой пластине  $v_p = \sqrt{2/(1 - \nu_1)}$ .

При  $\lambda_2 \rightarrow 0$  из уравнений (6), (7) следует

$$C_{11}C_{12} \left( \frac{2\gamma^2}{1 - \nu_2} + \Omega_2^2 \right) = 0, \quad (\gamma^2 + \gamma_{12}^2)^2 C_{11}S_{12} - 4\gamma^2 \gamma_{11} \gamma_{12} S_{11}C_{12} = 0,$$

что также соответствует известным результатам [5, 7].

**Анализ результатов численных исследований.** Пусть внешние слои пластины изготовлены из алюминия и характеризуются параметрами среды  $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu_1 = 0,35$ ,  $c_{S1} = 3110 \text{ м/с}$ , а внутренний – из вольфрама с постоянными  $\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu_2 = 0,29$ ,  $c_{S2} = 2860 \text{ м/с}$ . Расчеты проводились для варианта  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ . При этом для частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  имеем  $\Omega_1/\Omega_2 = 0,920$ .

Результаты численных решений дисперсионных уравнений (6), (7) представлены на рис. 1 и 2 в виде спектральных кривых – зависимостей собственных значений  $\gamma$  от безразмерной частоты  $\Omega$  при заданных значениях величин  $G$ ,  $\eta$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . На диаграммах дисперсионных

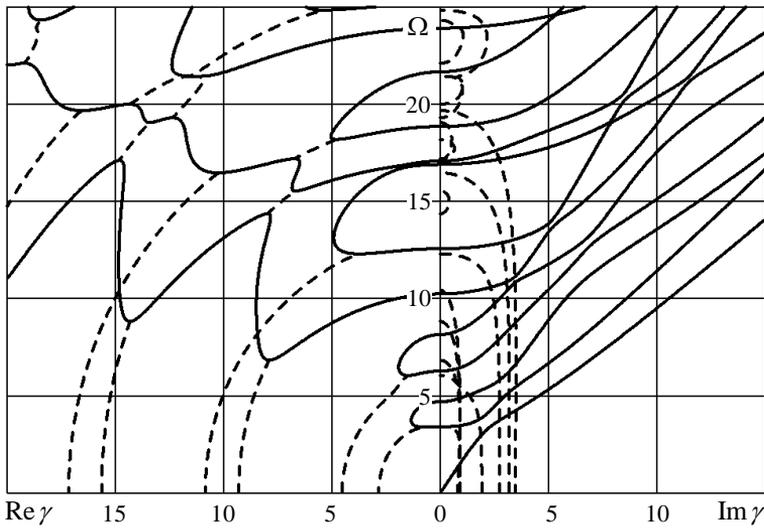


Рис. 1

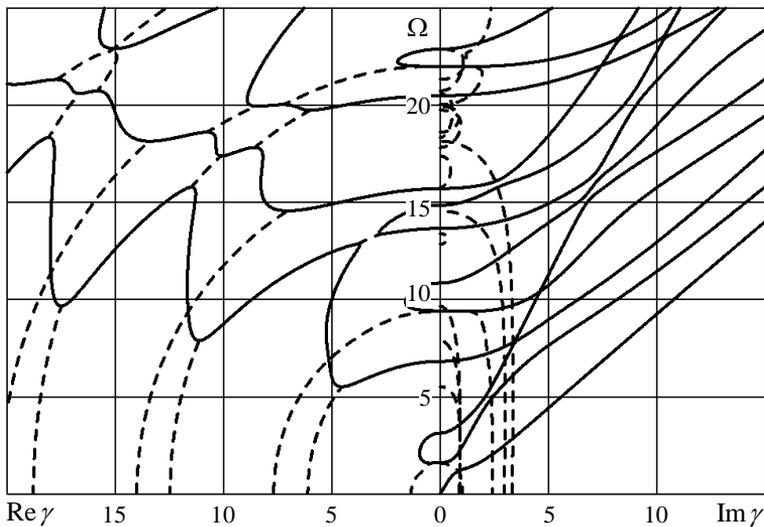


Рис. 2

кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ( $\text{Re}\gamma, \Omega$ ) и мнимую ( $\text{Im}\gamma, \Omega$ ) плоскости. Видно, что дисперсионные уравнения (6), (7) при фиксированной частоте имеют конечное число действительных и мнимых корней и счетное множество комплексных корней, а в области низких частот  $\Omega \ll 1$  данные уравнения не имеют действительных корней  $\gamma$ . Следует отметить, что в аналогичных задачах о колебаниях трехслойной пластины со смешанными граничными условиями на торцах [1, 2] дисперсионный спектр в низкочастотном диапазоне содержал счетное множество действительных ветвей.

На рис. 3 и рис. 4 показаны изменения безразмерных фазовых  $v_p = c_p/c_{S2}$  (рис. 3, а, 4, а) и групповых  $v_g = c_g/c_{S2}$  (рис. 3, б, 4, б) скоростей первых трех распространяющихся мод в диапазоне частот  $0 \leq \Omega \leq 20$ . Данные рис. 3 соответствуют задаче 1, рис. 4 – задаче 2.

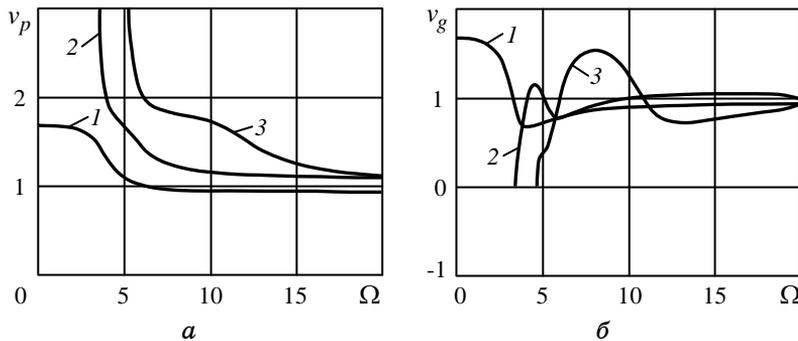


Рис. 3

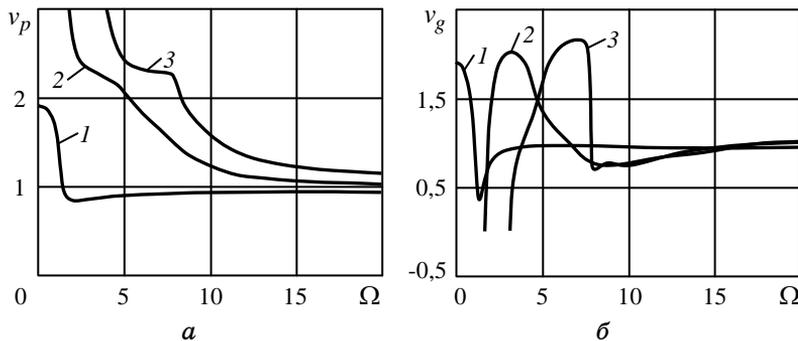


Рис. 4

Вблизи ненулевых частот запирания фазовая скорость  $v_p \rightarrow \infty$ , а групповая  $v_g = 0$ . Для нулевой частоты запирания при  $\gamma = 0$  в задаче 1 находим  $v_p(0) = v_g(0) = 1,678$ , а в задаче 2 –  $v_p(0) = v_g(0) = 1,905$ . В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными, и значения групповой скорости мало отличаются от значений фазовой.

Уравнение (10) имеет вещественный корень, что указывает на существование поверхностной волны Стоунли вблизи плоскостей контакта слоев. Значение ее скорости  $v_{St}$ , отнесенной к  $c_{S2}$ , равно 0,936. В задаче 1 величина фазовой скорости  $v_p$  для первой моды в высокочастотном пределе остается больше асимптотического значения  $v_{St}$  (см. рис. 3, *a*), а в задаче 2 – меньше (см. рис. 4, *a*). Остальные кривые приближаются к асимптоте  $v_p = 1$  сверху.

Данные рис. 5 иллюстрируют изменения безразмерных фазовых скоростей низшей распространяющейся симметричной (рис. 5, *a*) и кососимметричной (рис. 5, *б*) мод при различных граничных условиях на торцах трехслойной пластины: жесткое защемление, свободные от напряжений торцы, диафрагма, скользящая заделка (соответственно кривые 1–4). Сплошные кривые соответствуют рассматриваемым ам, а штриховые – результатам работ [1–4, 13].

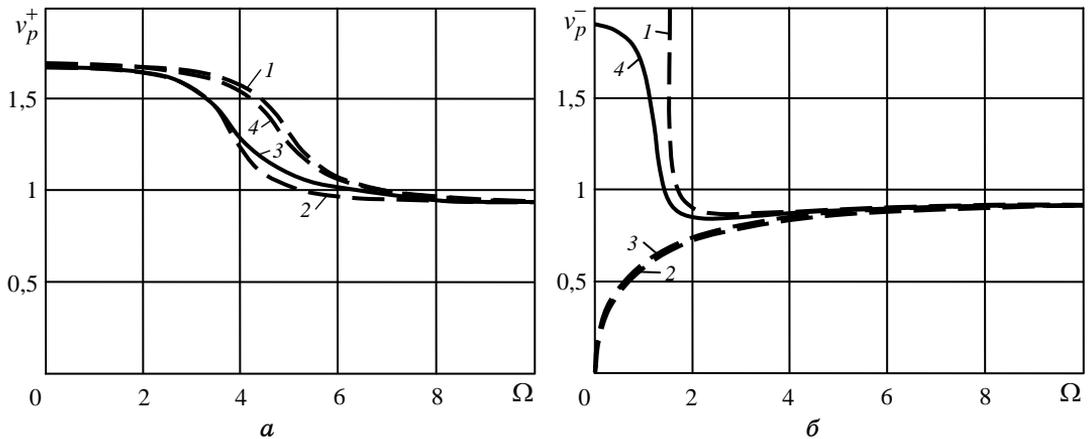


Рис. 5

Как видно из рис. 5, при симметричных колебаниях пластины скорости первой моды при увеличении частоты  $\Omega$  монотонно убывают и на нулевой частоте запирания принимают конечные значения для всех видов граничных условий. Для кривых 1, 2 и 4 они соответственно равны 1,708, 1,678 и 1,690. Это обусловлено наличием в соответствующих дисперсионных спектрах моды, выходящей из нуля и являющейся бездисперсной в низкочастотном диапазоне. При кососимметричных колебаниях пластины значение фазовой скорости на нулевой частоте запирания в задаче 2 также отлично от нуля, а для случаев свободного края и диафрагмы  $v_p^-(0) = 0$  (кривые 2 и 3). Для высоких частот, независимо от вида граничных условий на торцах пластины, асимптотой для фазовой скорости первой моды является значение 0,936. Таким образом, неоднородность пластины приводит к новому характеру локализации фазовой скорости первой моды, а вид граничных условий следует учитывать при малых и средних частотах. Для высоких частот граничные условия оказывают незначительное влияние на значение величины  $v_p$ .

В таблице приведены значения первых десяти частот запираания P-SV волн в задачах 1 и 2, вычисленные на основе уравнений (8) и (9), а также в аналогичных задачах симметричных и кососимметричных колебаний трехслойных пластин при скользящем контакте слоев и различных видах граничных условий на торцах [1–4, 13]. Столбцы с номером 1 соот-

№ частоты	1	2	3	4	1	2	3	4
	Симметричные колебания				Кососимметричные колебания			
1	0	0	0	0	1,625	0	0	0
2	3,415	4,699	3,415	5,948	3,142	3,142	3,142	1,625
3	5,948	6,283	4,699	6,283	3,415	6,830	3,415	3,142
4	6,283	6,830	6,283	6,830	9,425	6,864	6,864	6,830
5	10,244	8,155	8,155	12,566	10,244	9,425	9,425	9,425
6	12,566	12,566	10,244	13,659	10,851	11,916	10,244	10,851
7	13,691	13,659	12,566	13,691	14,854	13,659	11,916	13,659
8	17,074	16,893	16,893	17,933	15,708	15,708	15,708	14,854
9	17,933	18,850	17,074	18,850	17,074	20,433	17,074	15,708
10	18,850	20,489	18,850	20,489	21,991	20,489	20,433	20,489

ветствуют жесткому заземлению торцов [3], столбцы 2 – свободным от напряжений плоским граням [4, 13], столбцы 3 – граничным условиям диафрагмы (задача 1 и результаты работы [2]), а столбцы 4 – плоскому торцу (результаты работы [1] и задача 2). Из данной таблицы видно, что вид граничных условий и симметрии колебаний приводит к значительному изменению значений частот запираания. Однако для всех краевых условий на торцах пластины имеются одинаковые подмножества частот запираания  $\Omega^+ = \{2\pi(k-1)\}_{k=1}^\infty$ ,  $\Omega^- = \{\pi(2k-1)\}_{k=1}^\infty$ .

Таким образом, анализ дисперсионных кривых, графиков изменения безразмерных фазовых и групповых скоростей, частот запираания, показывает, что по сравнению с аналогичными задачами для трехслойной пластины со скользящим контактом слоев [1–4, 13] в данном случае происходят количественные и качественные изменения характеристик волнового процесса.

**РЕЗЮМЕ.** У просторовій постановці розв'язано задачі теорії пружності про установлені коливання тришарової ізотропної пластини симетричної будови, плоскі грані якої вкриті діафрагмою або знаходяться в умовах ковзного закріплення. На межах поділу шарів виконуються умови ковзного контакту без відриву. Одержано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Здійснено асимптотичний аналіз і чисельні дослідження дисперсійних рівнянь. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки зміни фазових і групових швидкостей, частоти запираання.

**Ключові слова:** тришарова пластина, ковзний контакт, діафрагма, ковзне закріплення, усталені коливання, метод однорідних розв'язків, дисперсійні спектри, фазові та групові швидкості, частоти запираання.

**SUMMARY.** In spatial statement the elasticity theory problems of steady-state vibrations of three-layer isotropic plates of symmetric structure is solved. The flat faces of plate are covered by diaphragm or sliding fixed. Conditions of sliding contact without separation are fulfilled on the interface of layers. The homogeneous solutions of the system of equations of motion in displacements are obtained. The asymptotic analysis and computational investigations of dispersive equations are carried out. Diagrams of spectral curves, curves of phase and group velocities, cut-off frequencies are represented.

**Key words:** three-layer plate, sliding contact, diaphragm, sliding fixing, steady-state vibrations, method of homogeneous solutions, dispersion spectra, phase and group velocities, cut-off frequencies.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Колебания трехслойных пластин в случае граничных условий плоского торца и проскальзывания слоев // *Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. науки.* – 2011. – № 2. – С. 36–41.
2. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Колебания трехслойных пластин при проскальзывании слоев и с покрытыми диафрагмой торцами // *Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины.* – 2011. – Т. 23. – С. 5–14.
3. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Колебания трехслойных пластин с жесткой заделкой торцов и при проскальзывании слоев // *Теорет. и прикладная механика.* – 2011. – № 3 (49). – С. 38–50.
4. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Симметричные упругие колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – Т. 54, № 3. – С. 70–80.
5. *Алтухов Є. В., Панченко Ю. В., Богатчук А. Ю.* Коливання ізотропних пластин з урахованням крайових умов типу плоского торця або діафрагми // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки.* – 2000. – № 1. – С. 41–45.
6. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // *Прикладная математика и механика.* – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870–876.
7. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
8. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // *Прикладная математика и механика.* – 1942. – Т. 6, вып. 2–3. – С. 151–168.
9. *Марчук А. В.* Трехмерное аналитическое решение для слоистых плит с учетом проскальзывания слоев // *Прикладная механика.* – 1997. – Т. 33, № 9. – С. 10–14.
10. *Пискунов В. Г., Рассказов А. О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикладная механика.* – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22–56.
11. *Устинов Ю. А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
12. *Устинов Ю. А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // *Докл. АН СССР.* – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755–758.
13. *Фоменко М. В.* Кососимметричные колебания трехслойных пластин при отсутствии напряжений на торцах и проскальзывании слоев // *Тр. Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины.* – 2010. – Т. 20. – С. 188–195.
14. *Шевченко В. П., Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Упругие колебания трехслойных пластин в случае плоского торца // *Доп. НАН України.* – 2011. – № 9. – С. 70–77.
15. *Шульга Н. А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
16. *Шульга Н. А.* Распространение упругих волн в периодически-неоднородных средах // *Прикладная механика.* – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 15–56.
17. *Altenbach H.* Theories for laminated and sandwich plates. A review // *Mech. of Composite Mater.* – 1998. – Vol. 34, No 3. – P. 243–252.
18. *Carrera E.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // *Appl. Mechan. Rev.* – 2003. – Vol. 56, No 3. – P. 287–308.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 05.11.2012*

УДК 539.3

В. А. ШАЛДЫРВАН, д-р физ.-мат. наук,  
Г. В. ЕРЖАКОВ

## РАВНОМЕРНОЕ ВРАЩЕНИЕ ТРАНСТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

*Методом однородных решений построено аналитическое решение задачи о равномерном вращении кольцевой транстропной пластины. Численно исследовано напряженное состояние пластины в зависимости от ее толщины.*

*Ключевые слова:* транстропная пластина, однородные решения, частное решение.

Несмотря на наличие больших математических трудностей, уже в середине XX века были получены серьезные результаты по решению пространственных задач теории упругости изотропного тела [1–3, 7]. В дальнейшем были решены более сложные задачи, когда тело считалось трансверсально-изотропным (транстропным): были разработаны различные методы решения, даны решения конкретных задач [5, 6, 10, 11]. При этом наиболее широкое распространение при решении задач получил метод однородных решений [5, 6].

В классе задач о вращении были получены решения для изотропной сплошной [12] и кольцевой [8, 9] пластин, в том числе методом однородных решений [9].

В данной статье методом однородных решений дано решение задачи о равномерном вращении кольцевой пластины из транстропного материала.

**Постановка задачи и построение решения.** Рассмотрим транстропную цилиндрическую кольцевую пластину толщины  $2H$ , ограниченную цилиндрическими поверхностями с радиусами  $R_1, R_2$ . Будем считать, что плоскость изотропии пластины перпендикулярна оси цилиндра, технические постоянные материала удовлетворяют соотношениям  $b_1 > 0, b_1^2 - b_2 < 0$

[3], где  $b_1 = \frac{s_0^2 - \nu_2}{1 - \nu}$ ,  $b_2 = \frac{\nu_2}{\nu_z} \frac{1 - \nu_2 \nu_z}{1 - \nu^2}$ ,  $\nu_2 = \nu_z \frac{E}{E_z}$ ,  $s_0^2 = \frac{G}{G_z}$ , которые можно за-

писать и в виде  $c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{13}c_{44} > 0$ ,  $c_{11}c_{33} - (c_{13} + 2c_{44})^2 < 0$ , где  $c_{ij}$  – модули упругости. Пластина вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Отнесем пластину к декартовой системе координат, плоскость  $O\tilde{x}\tilde{y}$  которой лежит в срединной плоскости, а начало совпадает с геометрическим центром цилиндра. Также будем пользоваться цилиндрической системой координат, полюс которой совпадает с началом координат системы  $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ . При построении решения будем использовать безразмерные координаты  $x = \tilde{x}/R_1$ ,  $y = \tilde{y}/R_1$ ,  $z = \tilde{z}/(hR_1)$ , где  $h = H/R_1$  – относительная тол-

щина; также будем использовать безразмерные перемещения  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}/R_1$ , напряжения  $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/2G$  и приведенную частоту вращения  $\omega_0 = \omega \sqrt{\rho R_1^2/2G}$  ( $i, j = x, y, z$ ), где  $\rho$  – массовая плотность материала,  $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ ; также введем обозначение  $R = R_2/R_1$ .

Пластину во вращающейся вместе с ней системе координат можно рассматривать как находящуюся в равновесии под действием центробежных сил. Для определения ее напряженного состояния необходимо найти решение системы уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2 s_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + D^2 u + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + 2\omega_0^2 x = 0, \quad (u \leftrightarrow v, x \leftrightarrow y), \\ \frac{\mu_2}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{s_0^2} D^2 w + \frac{\mu_3}{h} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{yz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{zz}(x, y, \pm 1) = 0, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \text{ при } r_i = 1, R. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение системы будем искать в виде суммы общего решения однородной системы и некоторого ее частного решения. Частное решение, оставляющее плоские грани свободными от напряжений, будем искать в виде [9]

$$\begin{aligned} u^c = A_1 x^3 + A_2 x y^2 + A_3 x z^2, \quad v^c = B_1 x^2 y + B_2 y^3 + B_3 y z^2, \\ w^c = C_1 z x^2 + C_2 z y^2 + C_3 z^3. \end{aligned}$$

Из осесимметричности задачи следует, что  $A_1 = B_2$ ,  $A_2 = B_1$ ,  $A_3 = B_3$ ,  $C_1 = C_2$ .

Удовлетворяя уравнениям равновесия (1) и граничным условиям на торцах пластины (2), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 6(1 + \mu_1) A_1 + 2(1 + \mu_1) A_2 + 2 \left( \frac{1}{h s_0^2} \right) A_3 + \frac{2\mu_3}{h} C_1 = -2\omega_0^2, \\ \frac{2\mu_3}{h} A_3 + \frac{2}{s_0^2} C_1 + \frac{3\mu_2}{h^2} C_3 = 0, \quad \frac{A_3}{h} + C_1 = 0, \\ 3c_{13} A_1 + c_{13} A_2 + \frac{c_{33}}{h} C_1 = 0, \quad 2c_{13} A_3 + \frac{3c_{33}}{h} C_3 = 0, \end{aligned}$$

решая которую найдем

$$A_1 = A_2 = -\frac{1}{8}(1 - \nu)\omega_0^2, \quad A_3 = -\frac{h^2 \nu_2}{2} \omega_0^2,$$

$$C_1 = \frac{h\nu_2}{2} \omega_0^2, \quad C_3 = \frac{1}{3} \frac{h^3 \nu_2^2}{1-\nu} \omega_0^2.$$

Напряжения, соответствующие частному решению  $u_i^u$ , таковы

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^u &= -\frac{3+\nu}{8} \omega_0^2 r^2 - \frac{\nu_2(\nu+1)}{2(1-\nu)} z^2 h^2 \omega_0^2, \\ \sigma_{\theta\theta}^u &= -\frac{1+3\nu}{8} \omega_0^2 r^2 - \frac{\nu_2(\nu+1)}{2(1-\nu)} z^2 h^2 \omega_0^2, \quad \sigma_{rz}^u = \sigma_{zz}^u = 0. \end{aligned}$$

При  $E_z = E$ ,  $\nu_z = \nu$  найденное частное решение совпадает с известным [9] для изотропной пластины.

Таким образом, для определения решения  $u_i^o$  однородной системы получаем граничные условия вида

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^o(r, \pm 1) &= \sigma_{\theta z}^o(r, \pm 1) = \sigma_{zz}^o(r, \pm 1) = 0, \\ \sigma_{rr}^o(1, z) &= \frac{3+\nu}{8} \omega_0^2 + \frac{\nu_2(\nu+1)}{2(1-\nu)} z^2 h^2 \omega_0^2, \quad \sigma_{rz}^o(1, z) = 0, \\ \sigma_{rr}^o(R, z) &= \frac{3+\nu}{8} \omega_0^2 R^2 + \frac{\nu_2(\nu+1)}{2(1-\nu)} z^2 h^2 \omega_0^2, \quad \sigma_{rz}^o(R, z) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а для напряжений от однородного решения – выражения [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^o &= L_4 F + h^2 \mu_8 (1/3 - z^2) L_4^* F + \sum_1^\infty [s_p(z) L_0 + n_p(z) L_3] \Psi_p, \\ \sigma_{\theta\theta}^o &= L_3 F + h^2 \mu_8 (1/3 - z^2) L_3^* F + \sum_1^\infty [s_p(z) L_0 + n_p(z) L_4] \Psi_p, \\ \sigma_{rz}^o &= \sum_1^\infty r_p(z) L_1 \Psi_p, \quad \sigma_{zz}^o = \sum_1^\infty t_p(z) L_0 \Psi_p, \end{aligned}$$

где

$$\Psi_p = X_p K_0(\gamma_p^* r) / K_0(\gamma_p^*) + Y_p I_0(\gamma_p^* r) / I_0(\gamma_p^* R), \quad F = a \ln r + b r^2. \quad (4)$$

Подставляя напряжения от однородного решения в граничные условия (3) и используя метод Бубнова-Галеркина, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 2b + a + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^\infty A_{0p}(1) X_p + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^\infty B_{0p}(1) Y_p &= \frac{3+\nu}{8} \omega_0^2 + \frac{\nu_2(\nu+1)}{6(1-\nu)} h^2 \omega_0^2, \\ 2b + \frac{a}{R^2} + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^\infty A_{0p}(R) X_p + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^\infty B_{0p}(R) Y_p &= \\ &= \frac{3+\nu}{8} \omega_0^2 R^2 + \frac{\nu_2(\nu+1)}{6(1-\nu)} h^2 \omega_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp}(1) X_p + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} B_{mp}(1) Y_p &= \frac{1}{2} P_m^{(1)}, \\
\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} C_{mp}(1) X_p + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_{mp}(1) Y_p &= 0, \\
\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp}(R) X_p + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} B_{mp}(R) Y_p &= \frac{1}{2} P_m^{(2)}, \\
\operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} C_{mp}(R) X_p + \operatorname{Re} \sum_{p=1}^{\infty} D_{mp}(R) Y_p &= 0, \quad m = \overline{1, \infty}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_{mp}(r) &= \left( l_{mp} - \frac{n_{mp}}{r} P_0^-(\gamma_p^* r) \right) \frac{K_0(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^*)}, \\
B_{mp}(r) &= \left( l_{mp} - \frac{n_{mp}}{r} P_0^+(\gamma_p^* r) \right) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^* R)}, \\
C_{mp}(r) &= r_{mp} P_0^-(\gamma_p^* r) \frac{K_0(\gamma_p^* r)}{K_0(\gamma_p^*)}, \quad D_{mp}(r) = r_{mp} P_0^+(\gamma_p^* r) \frac{I_0(\gamma_p^* r)}{I_0(\gamma_p^* R)}, \\
P_m^{(1)} = P_m^{(2)} &= \frac{2}{(\pi m)^2} \frac{\nu_2(\nu+1)}{(1-\nu)} h^2 \omega_0^2.
\end{aligned}$$

Для сплошной пластины в (4) следует положить  $a = 0$ ,  $X_p = 0$  и внести соответствующие изменения в систему (5).

**Описание и анализ результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования с целью выяснения влияния относительной толщины и отношения радиусов внешней и внутренней боковых поверхностей на значения напряжений. В качестве материалов рассмат-

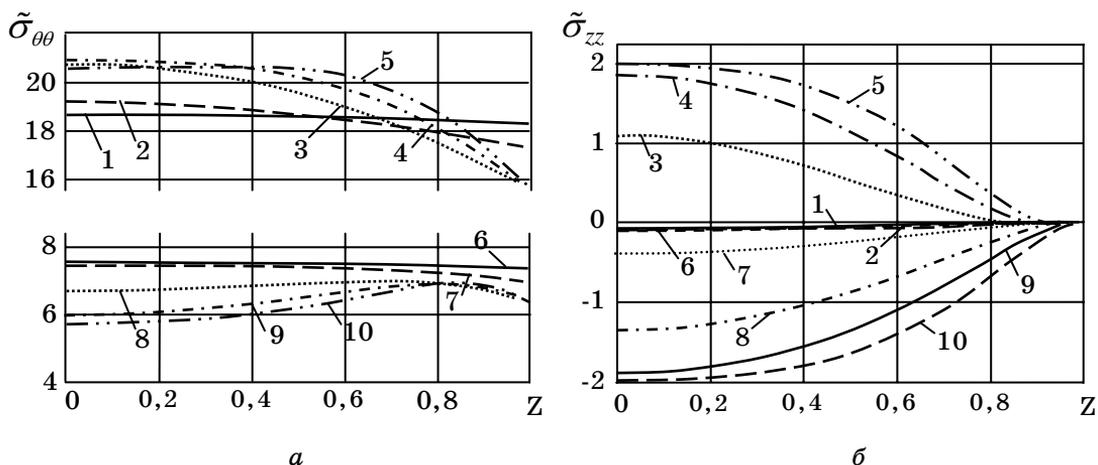


Рис.1

ривались кадмий с постоянными  $\nu = 0,0543$ ,  $\nu_z = 0,262$ ,  $\nu_2 = 0,943$ ,  $s_0^2 = 2,031$ , и цинк, для которого  $\nu = -0,053$ ,  $\nu_z = 0,256$ ,  $\nu_2 = 0,847$ ,  $s_0^2 = 1,538$ . Ниже описаны некоторые из полученных результатов. При этом значения напряжений приведены с точностью до  $\sigma = \rho\omega^2 R_1^2 (3 + \nu) / 16G$  как множителя.

На рис. 1 приведены графики распределения напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / \sigma$ ,  $\tilde{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz} / \sigma$  в зависимости от  $z$  для пластины из кадмия. Кривые 1–5 относятся к напряжениям на внутренней боковой поверхности, когда относительная толщина  $h$  равна соответственно 0,5; 1; 2; 3; 4. Кривые 6–10 соответствуют напряжениям на внешней боковой поверхности при тех же значениях  $h$ . В табл. 1 приведены значения напряжений

Таблица 1  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  и  $\tilde{\sigma}_{zz}$  в кольцевой

$h$	$r$	$z$						
		0	0,4	0,8	1	0	0,4	0,8
0,5	A	18,79	18,74	18,59	18,48	-0,06	-0,04	-0,01
	B	8,44	8,42	8,35	8,27	-0,08	-0,06	-0,01
1,0	A	19,20	18,94	18,20	17,66	-0,06	-0,06	-0,03
	B	8,41	8,37	8,16	7,91	-0,31	-0,24	-0,05
2,0	A	20,54	19,89	17,78	16,24	0,98	0,65	0,04
	B	7,84	7,93	7,86	7,33	-1,18	-0,90	-0,21
4,0	A	20,35	20,41	18,83	16,26	1,79	1,55	0,33
	B	6,99	7,25	7,88	7,34	-1,77	-1,59	-0,59
		4,82	5,10	5,84	5,32	-1,97	-1,77	-0,63

пластине из цинка в точках на внутренней (А) и внешней (В) поверхностях. Для точки на внешней поверхности (В) второй строкой приведены значения напряжений в сплошной пластине. Из данных рис. 1 и табл. 1 следует, что на внутренней боковой поверхности минимальные значения  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  принимает на торце, а максимальные на срединной плоскости (при малых  $h$ ) или рядом с ней (при

больших  $h$ ). На внешней боковой поверхности минимальные значения  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  при малых  $h$  достигаются на торце, а при больших  $h$  – на срединной

Таблица 2

$z$	Точки	$h$			$h$			$h$			$h$		
		1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4
0,0	A	5,51	5,44	5,44	9,22	9,40	9,24	19,20	20,54	20,35	33,14	35,11	36,36
	B	3,47	3,38	3,39	4,79	4,37	4,32	8,41	7,84	6,97	13,44	13,03	11,15
0,4	A	5,43	5,47	5,44	9,01	9,31	9,29	18,94	19,89	20,41	32,89	34,04	35,77
	B	3,50	3,40	3,38	4,77	4,49	4,32	8,37	7,93	7,25	13,38	13,00	11,67
0,8	A	5,14	5,30	5,46	8,41	8,63	9,10	18,20	17,78	18,83	32,17	30,93	31,76
	B	3,50	3,52	3,46	4,65	4,64	4,61	8,16	7,86	7,88	13,13	12,59	12,41
1,0	A	4,91	4,92	4,92	8,01	7,91	7,92	17,66	16,24	16,26	31,63	28,77	27,62
	B	3,39	3,40	3,40	4,46	4,40	4,41	7,91	7,33	7,34	12,86	11,83	11,43

поверхности. Максимальные напряжения при малых  $h$  достигаются на срединной плоскости, однако при увеличении относительной толщины перемещаются ближе к торцам. Напряжения  $\tilde{\sigma}_{zz}$  при малых  $h$  малы, но с ростом  $h$  увеличиваются и могут составлять десятые доли  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ .

В табл.2 представлены значения напряжений  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$  для различных отношений радиусов  $R = R_2 / R_1$  в кольцевой пластине из цинка. Из нее видно, что увеличение внешнего радиуса приводит к росту напряжений.

Характер изменения напряжений на срединной плоскости по радиусу в кольцевой пластине из кадмия представлен на рис. 2: 1, 2, 3 –  $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}$ , 4, 5, 6 –  $\tilde{\sigma}_{rr}$ , 7, 8, 9 –  $\tilde{\sigma}_{zz}$  при  $h = 0.1$ ; 1; 4 соответственно.

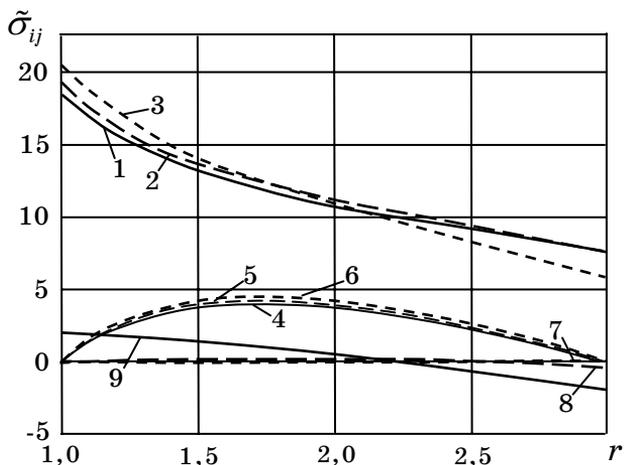


Рис.2

Численный переход к изотропным материалам ( $\nu = 1/3$ ) дает результаты, хорошо согласующиеся со значениями для изотропных материалов [9].

Точность решения оценивалась по выполнению граничных условий на боковых поверхностях, при этом максимальные значения напряжений  $\tilde{\sigma}_{rr}$  на боковых поверхностях имели порядок  $10^{-5}$ , а  $\tilde{\sigma}_{rz} - 10^{-6}$ . Для получения данной точности при малых  $h$  ( $h = 0.1$ ) в системе оставлялось 15 неизвестных, при больших  $h$  ( $h = 4$ ) – 200.

В табл. 3 сравниваются напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$ , полученные с помощью описанного в статье метода (ОР – однородные решения) и с помощью метода, используемого в [13], при котором уравнения равновесия и гранич-

Таблица 3

h	Метод	z							
		0	0,4	0,8	1	0	0,4	0,8	1
		$r = 1$				$r = 3$			
0,5	ОР	18,70	18,64	18,47	18,33	7,57	7,55	7,48	7,39
	[13]	18,65	18,59	18,43	18,30	7,59	7,54	7,37	7,25
1,0	ОР	19,22	18,89	17,97	17,31	7,48	7,45	7,26	6,98
	[13]	18,73	18,51	17,85	17,36	7,68	7,46	6,80	6,30
2,0	ОР	20,79	20,05	17,52	15,63	6,71	6,87	6,94	6,36
	[13]	19,08	18,20	15,56	13,57	8,02	7,14	4,50	2,52
3,0	ОР	20,93	20,59	18,15	15,56	5,98	6,33	6,92	6,34
	[13]	19,65	17,67	11,73	7,27	8,60	6,61	0,67	-3,79

ные условия на торцах удовлетворяются точно, а граничные условия на боковой поверхности «смягченно» (интегрально). Значения напряжений приводятся на внутренней и внешней боковой поверхностях кольцевой ( $R = 3$ ) пластины, изготовленной из кадмия.

При малых относительных толщинах оба решения хорошо согласуются друг с другом, однако, при больших  $h$  решения существенно отличаются.

**РЕЗЮМЕ.** Методом однорідних розв'язків побудовано аналітичний розв'язок задачі про рівномірне обертання кільцевої транстропної пластини. Чисельно досліджено напружений стан пластини в залежності від її

**Ключові слова:** транстропна пластинка, однорідні розв'язки, частий розв'язок.

**SUMMARY.** The analytical solution of the problem of the uniformly rotating annular transtropic plate were built with method of homogeneous solutions. The stress state of the plate depending of its thickness was numerically explored.

**Keywords:** transtropic plate, homogeneous solution, particular solution.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 6. – С. 1057–1074.
2. Гринченко В. Т. Точное решение задачи Кирша // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6., № 5. – С. 10–17.
3. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Напряженное состояние толстой многосвязной пластинки // Теория пластин и оболочек. – М.: Наука, 1973. – С. 717–722.
4. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
5. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Определение напряженного состояния многосвязных транстропных пластин // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 5. – С. 909–917.
6. Лехницкий С. Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 4. – С. 687–696.
7. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2–3. – С. 151–168.
8. Ляв А. Математическая теория упругости. – М., Л.: ОНТИ, 1935. – 675 с.
9. Напряженное состояние пластинок с отверстиями в трехмерной постановке / А. С. Космодамианский, В. Н. Ложкин, Ю. В. Мысовский, В. А. Шалдырван – Донецк, 1970. – 250 с.
10. Роменская Г. И. Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой трансверсально-изотропной плите // Пластины и оболочки. – Ростов н/Д, 1971. – С. 8–19.
11. Роменская Г. И. Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально изотропной плиты // X Всероссийская конференция по теории оболочек и пластин (г. Кутаиси, 22–29 сентября 1975г.): труды. – Кутаиси, 1975. – Т. 1. – С. 260–267.
12. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
13. Ding H. J., Chen W. Q., Zhang L. C. Elasticity of transversely-isotropic materials. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.

Донецкий национальный университет

Поступила 15.11.2012

## Вниманию авторов статей

1. В журнале публикуются статьи, содержащие новые результаты теоретических и экспериментальных исследований в области двумерной и трехмерной механики деформируемого твердого тела, теории упругости и пластичности, механики разрушения, а также гидромеханики.

2. При подготовке статьи необходимо соблюдать структуру изложения: в начале приводится УДК, авторы (с указанием научной степени) и название статьи, затем аннотация и ключевые слова, потом введение (история вопроса и место данной работы), постановка задачи (физическая, математическая), метод и построение решения (без анализа результатов других работ), анализ полученных теоретических и числовых результатов с выводами. В конце статьи приводится список литературы, а также на украинском и английском языках – резюме и ключевые слова (переводы аннотации в начале статьи). Статья должна быть научно и литературно обработана. Особое внимание нужно уделять правильному использованию общепринятой терминологии. Авторам нужно учитывать правильное использование понятий «величина» и «значение» и не допускать стилистических и терминологических погрешностей. Все числовые значения используемых величин должны приводиться в системе Си. В десятичных дробях целая часть должна отделяться от дробной запятой (а не точкой).

3. Текст статьи в редакторе Word набирается шрифтом UkrainianSchoolBook (размером 11), аннотация, ключевые слова, резюме и список литературы, табличный материал – тем же шрифтом размером 9. Формулы набираются с использованием Microsoft Equation или MathType шрифтом UkrainianSchoolBook и Symbol: Full – 11 pt, subscript /superscript – 70 %, sub-subscript/ superscript – 60 %, symbol – 150 %, sub-symbol – 100 %; текст и переменные – курсивом. Указанным способом набираются также все буквы латинского и греческого алфавитов, встречающиеся в тексте. Межстрочный интервал – одинарный. Каждая формула отделяется от основного текста интервалом в 5 пунктов. Параметры страницы: формат – В5 (176×250 мм), поля зеркальные; сверху – 1,7 см, снизу – 2,2 см, внутри – 1,8 см, снаружи – 1,5 см, абзацный отступ 1 см

4. Группы формул отделяются друг от друга знаком точки с запятой, внутри группы формулы отделяются друг от друга знаком запятой. Каждая строка формул набирается отдельным объектом Microsoft Equation. Во всех случаях после знаков препинания ставится один (в объектах Microsoft Equation – два) пробела. Если в строке за формулой в скобках приведены расшифровки величин, то перед скобкой знак запятой или точки с запятой не ставится, но ставятся один пробел. В тех случаях, когда скобки или знаки арифметических действий внутри формул сливаются с соседними символами, нужно ставить пробелы внутри объекта Microsoft Equation. Номер формулы или группы формул ставится в конце последней строки формул. Если подряд приводятся несколько групп формул, то они отделяются друг от друга знаком точки с запятой.

5. Рисунки изготавливаются с использованием графического редактора и представляются в электронном виде в двух экземплярах: «немой» (в формате jpg, bmp и т. д., без подписей), для редактирования при необходимости, и с обозначениями. Сканированные рисунки не принимаются. На рисунки наносятся негустые равномерные сетки, основные линии выполняются толще, чем линии сетки и осей координат; буквенные обозначения набираются размером 9.

6. К статье прилагаются на отдельном листе данные об авторе (авторах) – фамилия, имя, отчество, адрес, телефон, а также на украинском и английском языках фамилии и инициалы авторов и название статьи.