

---

---

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Хома И. Ю., Дашко О. Г., Прощенко Т. М.</i> Растяжение нетонкой трансверсально-изотропной пластины с начальными напряжениями, ослабленной круговой цилиндрической полостью . . . . .	7
<i>Каминский А. А., Селиванов М. Ф., Черноиван Ю. А.</i> Начальный период роста трещины в вязкоупругом композите при смешанном нагружении . . . . .	18
<i>Кит Г. С., Ивасько Н. М.</i> Плоская деформация полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной . . . . .	30
<i>Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т., Терлецкий Р. Ф., Ивасько Р. А.</i> Исходные соотношения электромагнитотермомеханики подвижных ферромагнитных тел при воздействии установившихся магнитных полей . . . . .	38
<i>Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартыняк Р. М.</i> Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах . . . . .	45
<i>Голуб В. П., Маслов Б. П., Кобзарь Ю. М.</i> К определению параметров ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии . . . . .	53
<i>Павлюк Я. В., Романов А. В., Фернати П. В.</i> Модификация метода определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости . . . . .	65
<i>Кирилюк В. С., Левчук О. И.</i> Контактная задача термоэлектроупругости с учетом выделения тепла при трении скольжения двух пьезоэлектрических тел . . . . .	73
<i>Калоеров С. А.</i> Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит . . . . .	83
<i>Сулим Г. Т., Томашевский М. М., Пастернак Я. М.</i> Интегральные уравнения плоской термоупругости для полуплоскости с	

тонкими включениями . . . . .	101
<i>Сенченков И. К., Червинко О. П., Доля Е. В.</i> Влияние остаточных напряжений на долговечность цилиндра с многослойным наращиванием на торце при циклическом термомеханическом нагружении . . . . .	109
<i>Калоеров С. А., Самодуров А. А.</i> Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости . . . . .	118
<i>Кушнир Р. М., Соляр Т. Я.</i> Определение динамических напряжений в слоистых кольцевых пластинках с использованием модифицированной формулы Прудникова . . . . .	131
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.</i> Влияние деформаций сдвига на колебания и диссипатичный разогрев оболочек вращения с пьезоэлектрическими слоями . . . . .	137
<i>Киричок И. Ф., Жук Я. А.</i> Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами . . . . .	149
<i>Гачкевич А. Р., Козакевич Т. В.</i> Исследование влияния предварительного подогрева на остаточное структурное напряженное состояние стальной пластины при воздействии движущихся источников тепла . . . . .	157

---

З М І С Т

<i>Хома І.Ю., Дашко О.Г., Проценко Т.М.</i> Розтяг нетонкої трансверсально-ізотропної пластини з початковими напруженнями . . .	7
<i>Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.</i> Початковий період росту тріщини у в'язкопружному композиті при змішаному навантаженні . . . . .	18
<i>Кім Г. С., Івасько Н. М.</i> Плоска деформація півбезмежного тіла з перпендикулярною до його межі теплоактивною тріщиною .	30
<i>Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф., Івасько Р. О.</i> Вихідні співвідношення електромагнітотермомеханіки рухомих феромагнітних тіл за дії усталених магнітних полів . . . . .	38
<i>Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.</i> Взаємодія пружних тіл з періодичним рельєфом за наявності рідинних містків у міжконтактних зазорах . . . . .	45
<i>Голуб В. П., Маслов Б. П., Кобзарь Ю. М.</i> До визначення параметрів ядер спадковості ізотропних лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану . . . . .	53
<i>Павлюк Я. В., Романов А. В., Фернати П. В.</i> Модифікація методу визначення параметрів ядер спадковості в нелінійній теорії в'язкопружності . . . . .	65
<i>Кириллюк В. С., Левчук О. І.</i> Контактна задача термоелектропружності з врахуванням виділення тепла при терті проковзування двох п'єзоелектричних тіл . . . . .	73
<i>Калоєров С. О.</i> Комплексні потенціали теорії вигину багатозв'язних ізотропних плит . . . . .	83
<i>Сулим Г. Т., Томашівський М. М., Пастернак Я. М.</i> Інтегральні рівняння плоскої термопружності для півплощини з тонкими включеннями . . . . .	101
<i>Сенченков І. К., Червінко О. П., Доля О. В.</i> Вплив залишкових напружень на довговічність циліндра з багатозаровим нарощу-	

ванням на торці при циклічному термомеханічному навантаженні	109
<i>Калоєров С. О., Самодуров А. О.</i> Вплив значень п'єзомодулів на п'єзоефект в задачах електромагнітопружності . . . . .	118
<i>Кушнір Р. М., Соляр Т. Я.</i> Визначення динамічних напружень у шаруватих кільцевих пластинках з використанням модифікованої формули Пруднікова . . . . .	131
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. І., Карнаухова Т. В.</i> Вплив деформацій зсуву на коливання та дисипативний розігрів оболонок обертання з п'єзоелектричними шарами . . . . .	137
<i>Киричок І. Ф., Жук Я. А.</i> Вплив граничних умов і температури вібророзігріву на резонансні осесиметричні коливання в'язкопружних циліндричних оболонок з п'єзоактуаторами і сенсорами	149
<i>Гачкевич О. Р., Козакевич Т. В.</i> Вплив попереднього підігріву на залишковий структурний напружений стан сталевієї пластини при дії рухомих джерел тепла . . . . .	157

**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

*Scientific journal*  
№ 7 (53)

Founded in 1970  
Donetsk 2013

---

**CONTENTS**

<i>Khoma I.Yu., Dashko O.G., Proshchenko T.M.</i> The tension problem for a non-thin transversely isotropic plate with initial stresses .	7
<i>Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O.</i> The initial period of mixed-mode crack growth in viscoelastic composite . . . . .	18
<i>Kit H.S., Ivas'ko N.M.</i> Plane deformation of semi-infinity body with thermally active crack perpendicular to its boundary . . .	30
<i>Hachkevych O.R., Solodyak M.T., Terletskii R.F., Ivas'ko R.O.</i> The basic relations of electromagnetothermomechanics of mobile ferromagnetic solids subjected to steady magnetic fields . . . . .	38
<i>Kozachok O.P., Slobodyan B.S., Martynyak R.M.</i> Interaction of elastic bodies having periodic relief with liquid bridges in inter-contact gaps . . . . .	45
<i>Golub V.P., Maslov B.P., Kobzar Yu.M.</i> On the determination of the heredity kernel parameters of isotropic linear-viscoelastic materials under the complex stress state . . . . .	53
<i>Pavluk Ya.V., Romanov A.V., Fernati P.V.</i> Modification of the method of determination of heredity kernels parameters in the non-linear theory of viscoelasticity . . . . .	65
<i>Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.</i> Contact problem of thermoelectroelasticity with accounting of heat generation under sliding friction of two piezoelectric bodies . . . . .	73
<i>Kaloerov S.A.</i> Complex potentials of bending theory for multiply isotropic plates . . . . .	83
<i>Sulym H.T., Tomashivskyy M.M., Pasternak Ia.M.</i> Integral equations of plane thermoelasticity for a half-plane with thin inclusions . . . . .	101
<i>Senchenkov I.K., Chervinko O.P., Dolya E.V.</i> The influence of residual stresses on longevity of cylinder with multilayer growing end under cyclic thermomechanical loading . . . . .	109

*Kaloerov S.A., Samodurov A.A.* An impact of values of piezo-modules on the piezoeffect in electromagnetoelasticity problems . . . 118

*Kushnir R.M., Solyar T.Ya.* Determination of dynamic stresses in layer ring plates using Prudnikov modified formula . . . 131

*Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.* Influence shear strains on vibrations and dissipative heating of revolution' shells with piezoelectric layers . . . . . 137

*Kirichok I.F., Zhuk Y.A.* Influence of boundary conditions and heating temperature on resonance axisymmetric vibrations of the viscoelastic cylindrical shells containing piezoactuators and sensors 149

*Hachkevych O.R., Kozakevych T.V.* Analysis of preliminary heating on residual structural stress state of steel plate subjected to moving heat sources . . . . . 157

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,  
 О. Г. ДАШКО, канд. физ.-мат. наук,  
 Т. М. ПРОЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук

## РАСТЯЖЕНИЕ НЕТОНКОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

*Методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины получены уравнения упругого равновесия нетонкой трансверсально-изотропной пластины с начальными напряжениями. Приведено общее аналитическое решение этих уравнений. Решена задача о распределении напряжений около круговой цилиндрической полости в пластине, находящейся под действием постоянных растягивающих усилий, приложенных на бесконечности.*

**Ключевые слова:** трансверсально-изотропная пластина, круговая цилиндрическая полость, начальные напряжения.

Проблеме начальных напряжений в механике деформируемого твердого тела уделяется достаточно внимания [1–3]. В работе [4] получены уравнения упругого равновесия нетонких анизотропных оболочек с начальными напряжениями. Редукция трехмерной задачи теории упругости к двумерной осуществляется методом разложения искомым функций в ряды по полиномам Лежандра. Таким же способом найдены [6] уравнения равновесия трансверсально-изотропных пластин. На этом основании в [7] решена задача о напряженном состоянии около кругового отверстия в трансверсально-изотропной пластине при действии постоянных растягивающих сил на бесконечности. При этом в разрешающих уравнениях учитываются лишь нормальные поперечные начальные напряжения. В данной статье излагается решение аналогичной задачи с учетом наличия в пластине тангенциальных составляющих начальных напряжений.

**Постановка задачи.** Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины  $2h$  с однородным поясом начальных напряжений  $p_{ij}^{(0)}$ , в предположении, что

$$p_{11}^{(0)} = p_{22}^{(0)} = \text{const}, \quad p_{ij}^{(0)} = 0, \quad \text{если } i \neq j. \quad (1)$$

Пластина ослаблена круговой цилиндрической полостью радиуса  $R$  и находится под действием постоянных растягивающих усилий, приложенных на бесконечности. Поверхность полости  $R \times [-h, h]$  и граничные плоскости  $x_3 = \pm h$  свободны от внешнего напряжения.

Для решения задачи воспользуемся методом разложения искомым функций по толщине. Представим компоненты вектора перемещений

$u_j(x_1, x_2, x_3)$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(\xi)$  координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (2)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in S$ ,  $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$ ;  $S$  – область в срединной плоскости пластины;  $u_j^{(k)}(x)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$  – коэффициенты разложений, именуемые моментами;  $N$  – натуральное число, которое будем считать четным, т.е.  $N = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Относительно составляющих данного разложения получим систему уравнений равновесия

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - h^{-1} \underline{\sigma}_{3j}^{(k)} = 0 \quad (j = 1, 2, 3; k = \overline{0, N}), \quad (3)$$

в которой  $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ),

$$\underline{\sigma}_{\alpha j}^{(k)} = (2k+1) \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)}, \quad (4)$$

и соотношения упругости, связывающие моменты напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ . Для трансверсально-изотропной пластины они представляются формулами [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= (c_{11} + p_{11}^{(0)}) \varepsilon_{11}^{(k)} + c_{12} \varepsilon_{22}^{(k)} + c_{13} h^{-1} u_3'^{(k)}, \\ \sigma_{12}^{(k)} &= (c_{66} + p_{11}^{(0)}) \varepsilon_{12}^{(k)} + c_{66} \varepsilon_{21}^{(k)}, \\ \sigma_{22}^{(k)} &= c_{11} \varepsilon_{11}^{(k)} + (c_{11} + p_{22}^{(0)}) \varepsilon_{22}^{(k)} + c_{13} h^{-1} u_3'^{(k)}, \\ \sigma_{21}^{(k)} &= c_{66} \varepsilon_{12}^{(k)} + (c_{66} + p_{22}^{(0)}) \varepsilon_{21}^{(k)}, \\ \sigma_{33}^{(k)} &= c_{13} (\varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}) + c_{33} h^{-1} u_3'^{(k)}, \\ \sigma_{13}^{(k)} &= (c_{44} + p_{11}^{(0)}) \varepsilon_{13}^{(k)} + c_{44} h^{-1} u_1'^{(k)}, \\ \sigma_{3\alpha}^{(k)} &= c_{44} (\varepsilon_{\alpha 3}^{(k)} + h^{-1} u_\alpha'^{(k)}) \quad (\alpha = 1, 2), \\ \sigma_{23}^{(k)} &= (c_{44} + p_{22}^{(0)}) \varepsilon_{23}^{(k)} + c_{44} h^{-1} u_2'^{(k)} \quad (k = \overline{0, N}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$  – упругие постоянные материала;

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)}, \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = u_j'^{(k)} = (2k+1) \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)}; \quad (6)$$



$K = (k-1)/2$ ,  $N_k = (N-k-1)/2$ ;  $[K]$  обозначает целую часть числа  $K$ .

Наличие начальных напряжений в определяющих уравнениях (5) приводит к несимметричности моментов касательных напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$ . В этом случае уравнения (3) в комплексной форме принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \left[ \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + i \left( \sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)} \right) \right] + \partial_z \left[ \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} + i \left( \sigma_{12}^{(k)} - \sigma_{21}^{(k)} \right) \right] &= 0, \\ \partial_z \sigma_+^{(k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(k)} - h^{-1} \sigma_{33}^{(k)} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \end{aligned} \quad (7)$$

в котором  $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$ ,  $\sigma_+^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + i\sigma_{23}^{(k)}$ ,  $\sigma_{3+}^{(k)} = \sigma_{31}^{(k)} + i\sigma_{32}^{(k)}$ .

Полагая  $p_{11}^{(0)} = p_{22}^{(0)}$ , запишем равенства (5) так:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} &= 2 \left[ (c_{12} + dc_{66}) e^{(k)} + c_{13} h^{-1} u_3'^{(k)} \right], \\ \sigma_{33}^{(k)} &= c_{13} e^{(k)} + c_{33} h^{-1} u_3'^{(k)}, \\ \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} + i \left( \sigma_{12}^{(k)} - \sigma_{21}^{(k)} \right) &= 2 \left[ (c_{12} + c_{66}) e^{(k)} + p_{11}^{(0)} \partial_z u_+^{(k)} + c_{13} h^{-1} u_3'^{(k)} \right], \\ \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + i \left( \sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)} \right) &= 4dc_{66} \partial_{\bar{z}} u_+^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} - \sigma_{21}^{(k)} = 2p_{11}^{(0)} \operatorname{Im} \left( \partial_z u_+^{(k)} \right), \\ \sigma_+^{(k)} &= 2 \left( c_{44} + p_{11}^{(0)} \right) \partial_{\bar{z}} u_3^{(k)} + c_{44} h^{-1} u_+'^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)} = 4d \operatorname{Im} \left( \partial_{\bar{z}} u_+^{(k)} \right), \\ \sigma_{3+}^{(k)} &= c_{44} \left( 2\partial_{\bar{z}} u_3^{(k)} + h^{-1} u_+'^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом

$$u_+^{(k)} = u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}, \quad e^{(k)} = \partial_z u_+^{(k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(k)}, \quad d = 1 + p_{11}^{(0)}/2c_{66}. \quad (9)$$

Если внести соотношения (8) в равенства (7), то получим систему уравнений равновесия пластины в моментах компонент вектора перемещений. По структуре она распадается на две группы уравнений, описывающие соответственно симметричное и кососимметричное (по отношению к серединной плоскости) деформирование пластины. При симметричном деформировании пластины система уравнений имеет вид [6]

$$\begin{aligned} c_{66}^* \Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66}) \partial_{\bar{z}} e^{(2k)} + \\ + (4k+1) h^{-1} \left[ 2 \sum_{s=1}^n \lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right] &= 0 \quad (k = \overline{0, n}); \end{aligned} \quad (10)$$

$$c_{44}^* \Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1) h^{-1} \left[ \sum_{s=0}^n \gamma_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33} h^{-1} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right] = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \quad (11)$$

где  $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$  – оператор Лапласа;

$$c_{66}^* = c_{66} (1 + d_1), \quad c_{44}^* = c_{44} (1 + d_2),$$

$$d_1 = p_{11}^{(0)}/c_{66}, \quad d_2 = p_{11}^{(0)}/c_{44},$$

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k, \\ c_{13}, & k < s \leq n, \end{cases} \quad \gamma_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k, \\ c_{44}, & k \leq s \leq n, \end{cases}; \quad (12)$$

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k-1), & k \leq s \leq n, \end{cases}$$

$$\beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

**Представление общего решения.** Применим к уравнениям (10) операцию  $\partial_z$  и в найденных равенствах рассмотрим вещественную часть. В результате получим

$$c_{11}^* \Delta e^{(0)} + c_{13} h^{-1} \sum_{s=1}^n \Delta u_3^{(2s-1)} = 0 \quad (k=0); \quad (13)$$

$$c_{11}^* \Delta e^{(2k)} + (4k+1) h^{-1} \left[ \sum_{s=1}^n \lambda_{2s-1}^{(k)} \Delta u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} e^{(2s)} \right] = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (14)$$

Из (13) следует, что

$$e^{(0)} = -\frac{c_{13}}{c_{11}^* h} \sum_{s=1}^n u_3^{(2s-1)} + \frac{2cc_{66}^*}{c_1 c_{11}^* c_{66}} u. \quad (15)$$

Здесь  $u$  – произвольная гармоническая функция. Согласно (15) уравнение (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Delta u_3^{(2k-1)} + \frac{4k-1}{c_{44}^* h} \left[ \sum_{s=1}^n \gamma_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - \frac{c_{33}}{h} \sum_{s=1}^n (\alpha_{2s-1}^{(k)} + c-1) u_3^{(2s-1)} \right] = \\ = \frac{2(4k-1)cc_{13}c_{66}^*}{c_1 c_{11}^* c_{44}^* c_{66} h} u. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенства (15) совместно с (14) образуют систему уравнений  $4n$ -го порядка относительно неизвестных функций  $u_3^{(2k-1)}$ ,  $e^{(2k)}$ . Решение ее примем в виде

$$\begin{aligned} c_{66} u_3^{(1)} = -\chi_1^* h u + u_1, \quad c_{66} u_3^{(2k-1)} = u_{2k-1} \quad (k = \overline{2, n}), \\ c_{66} h e^{(2k)} = u_{2k} \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (17)$$

в котором функции  $u_k$  выражают общее решение однородной системы, которую в стандартной форме представим таким образом:

$$\sum_{k=0}^{2n} (\alpha_{sk} - \beta_{sk} h^2 \Delta) u_k = 0 \quad (s = \overline{1, 2n}). \quad (18)$$

Здесь  $\alpha_{sk}$ ,  $\beta_{sk}$  – константы,  $\chi_1^* = 2c_{13}c_{66}^*/c_1 c_{11}^* c_{33}$ ,  $c_{11}^* = c_{12} + 2dc_{66}$ ,  $c = 1 - c_{13}^2/c_{11}^* c_{33}$ ,  $c_1 = c - c_{66}^*/c_{11}^*$ .

Для решения системы уравнений (18) воспользуемся операторным методом [8]. Введем функцию  $V$  согласно формул

$$u_k = A_{sk}(\Delta)V, \quad (19)$$

где  $A_{sk}(\Delta) = (-1)^{k+s} M_{sk}(\Delta)$ ,  $M_{sk}(\Delta)$  – миноры,  $A_{sk}(\Delta)$  – алгебраические дополнения элементов  $L_{sk}(\Delta) = \alpha_{sk} - \beta_{sk}h^2\Delta$  операторной матрицы  $\|L_{sk}(\Delta)\|_{2n \times 2n}$ . Подставив (19) в  $s$ -е равенство системы (18), найдем

$$\sum_{k=1}^n L_{sk}(\Delta) A_{sk}(\Delta) V = 0, \quad (20)$$

которые в развернутом виде представляются таким образом:

$$\sum_{p=0}^{2n} a_p h^{2p} \Delta^p V = 0. \quad (21)$$

Предположим, что характеристическое уравнение

$$\sum_{p=0}^{2n} a_p k^p = 0,$$

записанное в матричной форме

$$\det \|\alpha_{sk} - k\beta_{sk}\| = 0, \quad (22)$$

имеет простые отличные от нуля корни  $k_m$  ( $m = 1, 2, \dots, 2n$ ). Тогда  $V$  представляется в виде суммы

$$V = \sum_{m=1}^{2n} V_m \quad (23)$$

метатармонических функций  $V_m$ , удовлетворяющих равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0. \quad (24)$$

Раскрывая определители в формуле (19) и учитывая (23), получаем значения моментов вектора перемещений

$$\begin{aligned} c_{66} u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h u + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(1)} V_m, \\ c_{66} u_3^{(2k-1)} &= \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = \overline{2, n}) \end{aligned} \quad (25)$$

и деформаций

$$c_{66} h e^{(0)} = \kappa_e^* h u + \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(0)} V_m,$$

$$c_{66} h e^{(2k)} = \sum_{m=1}^{2n} c_m^{(2k)} V_m \quad (k = \overline{1, n}). \quad (26)$$

Константы  $c_m^{(k)}$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ) определяются алгебраическими дополнениями элементов любой строки определителя  $|\alpha_{sk} - k\beta_{sk}|_{2n \times 2n}$ .

Примем гармоническую функцию  $u$  в виде вещественной части некоторой голоморфной функции  $\phi'(z)$ , т.е.  $u = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)}$ . Учитывая при этом формулы (9), (24), запишем равенства (26) в виде

$$\begin{aligned} c_{66} \left( \partial_z u_+^{(0)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(0)} \right) &= \kappa_e^* \left[ \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] + 2h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_z \partial_{\bar{z}} V_m, \\ c_{66} \left( \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)} \right) &= 2h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_z \partial_{\bar{z}} V_m \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $a_m^{(2k)} = 2k m^{-1} c_m^{(2k)}$ ,  $\kappa_e^* = 2c_{66}^*/c_1 c_{11}^*$ . Отсюда находим составляющие перемещений  $u_+^{(2k)}$ , т.е.

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= \kappa_e^* \phi(z) + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \partial_{\bar{z}} Y_0, \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \partial_{\bar{z}} Y_{2k} \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $Y_{2k}$  – произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Для их определения воспользуемся равенствами (10). Следовательно, если внести в (10) значения функций (25), (26), то после некоторых преобразований получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta Y_0 &= 4ih^{-1} \left[ \overline{\phi'(z)} - \phi'(z) \right], \\ \Delta Y_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} \partial_{\bar{z}} Y_{2s} &= \frac{3i(4k+1)\kappa_2^* c_{44}}{c_{66}^* h} \times \\ &\times \left[ \overline{\phi'(z)} - \phi'(z) \right] \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (29)$$

в которых  $\kappa_2^* = \frac{4c_{13}c_{66}^*}{3c_1 c_{11}^* c_{33}}$ .

Из (29) находим

$$Y_0 = ih^{-1} \left[ z\phi(z) - \bar{z}\phi(z) + \overline{\psi_*(z)} - \psi_*(z) \right], \quad (31)$$

где  $\psi_*(z)$  – произвольная голоморфная функция. Полагая в (30)

$$Y_2 = -i\kappa_2^* h \left[ \overline{\phi'(z)} - \phi'(z) \right] + y_1, \quad Y_{2k} = y_k \quad (k = \overline{2, n}), \quad (32)$$

относительно функций  $y_k$  получим однородную систему уравнений, которую в стандартной форме запишем так:

$$\sum_{l=1}^n (q_{kl} - \delta_{kl} h^2 \Delta) y_l = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (33)$$

Здесь  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера,  $q_{kl} = (4k+1) \beta_{2l}^{(k)} c_{44} / c_{66}^*$ .

При условии, что характеристическое уравнение

$$\det \|q_{kl} - \lambda \delta_{kl}\| = 0 \quad (34)$$

имеет  $n$  различных корней  $\lambda_s$ , из системы (33) аналогичным изложенному выше способом находим

$$y_k = \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} w_s.$$

При этом  $w_s$  – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta w_s - \lambda_s h^{-2} w_s = 0; \quad (35)$$

$b_s^{(2k)}$  – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов произвольной строки определителя  $|q_{kl} - \lambda \delta_{kl}|_{n \times n}$ .

Подставляя функции  $y_k$  в формулы (32) и далее в равенства (28), будем иметь

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= \kappa^* \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m, \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= \mu_2^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i h \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = \overline{2, n}), \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\overline{\psi(z)} = \overline{\psi'_*(z)}$ ,  $\kappa^* = 1 + \kappa_e^*$ ,  $\mu_2^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_2^{(2k)} = 0$  ( $k > 1$ ).

Согласно данному решению соотношения упругости (8) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + i(\sigma_{12}^{(0)} + \sigma_{21}^{(0)}) &= 4d \left[ -z \overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right], \\ \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4\kappa_0 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(0)} V_m, \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(2k)} V_m, \\ \sigma_{12}^{(0)} - \sigma_{21}^{(0)} &= -\frac{i(\kappa^* + 1)}{c_{66}} p_{11}^{(0)} \left[ \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^{(2k)} - \sigma_{21}^{(2k)} &= \frac{P_{11}^{(0)}}{2c_{66}} \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \lambda_s w_s, \\
\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + i \left( \sigma_{12}^{(2k)} + \sigma_{21}^{(2k)} \right) &= 4dh \left[ \mu_2^{(2k)} \overline{h\phi''(z)} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_z^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_z^2 w_s \right], \\
\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(2k)} \partial_z^2 V_m \quad (k = \overline{1, n}), \\
\sigma_+^{(2k-1)} &= \mu_1^{(2k-1)} \overline{h\phi''(z)} + 2 \sum_{m=1}^{2n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s, \quad (37)
\end{aligned}$$

причем  $d_m^{(2k)}$ ,  $p_m^{(2k-1)}$ ,  $q_s^{(2k-1)}$  – константы;  $\mu_2^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_1^{(1)} = c_{44} d_2 \kappa_1^* / 2c_{66}$ ,  $\mu_2^{(2k)} = \mu_1^{(2k-1)} = 0$  ( $k > 1$ ),  $\kappa_0 = (1 + d_1) \left( 1 + d_1 c_{66} / 2c_1 c_{11}^* \right)$ .

**Напряженное состояние пластины с круговой цилиндрической полостью.** Рассмотрим в области  $S$  полярную систему координат  $r, \vartheta$  и воспользуемся формулами преобразования для напряжений при переходе от напряжений  $\sigma_{ij}$  в системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) к напряжениям  $\sigma'_{ij}$  в системе  $x'_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), повернутой вокруг общей оси  $x_3 = x'_3$  на некоторый угол  $\vartheta$ . На основании формул [4]

$$\sigma'_{\vartheta m} = n_{i1} n_{jm} \sigma_{ij}, \quad n_{3l} = n_{3m} = 0 \quad (l, m = 1, 2, 3), \quad (38)$$

где  $n_{jm} = \cos(x_j, x_m)$  – направляющие косинусы, получаем выражения для моментов напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$ . В предположении, что  $x'_1, x'_2$  совпадают с полярными координатами, будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}, \quad \sigma_{r\vartheta}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta r}^{(2k)} = \sigma_{12}^{(2k)} - \sigma_{21}^{(2k)}, \\
\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} + i \left( \sigma_{r\vartheta}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta r}^{(2k)} \right) &= e^{-2i\vartheta} \left[ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + i \left( \sigma_{12}^{(2k)} + \sigma_{21}^{(2k)} \right) \right], \\
\sigma_{r3}^{(2k-1)} + i \sigma_{\vartheta 3}^{(2k-1)} &= e^{-i\vartheta} \sigma_+^{(2k-1)}, \quad \sigma_{3r}^{(2k-1)} + i \sigma_{3\vartheta}^{(2k-1)} = e^{-i\vartheta} \sigma_{3+}^{(2k-1)}. \quad (39)
\end{aligned}$$

На основе приведенного подхода решим задачу о напряженном состоянии пластины, ослабленной круговой цилиндрической полостью радиуса  $R$ . Будем считать, что на поверхности полости  $R \times [-h, h]$  заданы нормальные  $\sigma_{rr}$  и касательные  $\sigma_{r\vartheta}$ ,  $\sigma_{r3}$  напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, \vartheta, x_3) \Big|_{r=R} &= f_1(\vartheta, x_3), \\
\sigma_{r\vartheta}(r, \vartheta, x_3) \Big|_{r=R} &= f_2(\vartheta, x_3), \\
\sigma_{r3}(r, \vartheta, x_3) \Big|_{r=R} &= f_3(\vartheta, x_3), \quad (40)
\end{aligned}$$

а на бесконечности пластина находится под действием постоянных растягивающих усилий  $\sigma_{11}^{\infty} = p_1$ . Разложив заданные функции  $f_j(\vartheta, x_3)$  в конечный ряд Фурье по полиномам Лежандра координаты  $x_3$ , из равенств (40) в области срединной плоскости  $S$  получаем граничные условия

$$\begin{aligned} \left. \left( \sigma_{rr}^{(2k)}(r, \vartheta) + i\sigma_{r\vartheta}^{(2k)}(r, \vartheta) \right) \right|_{r=R} &= f_1^{(2k)}(\vartheta) + if_2^{(2k)}(\vartheta) \quad (k = \overline{0, n}), \\ \left. \sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \vartheta) \right|_{r=R} &= f_3^{(2k-1)}(\vartheta) \quad (k = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (41)$$

в которых  $f_{\alpha}^{(2k)}(\vartheta)$ ,  $f_3^{(2k-1)}(\vartheta)$  – моменты заданных функций, представимые в виде рядов

$$f_1^{(2k)}(\vartheta) + if_2^{(2k)}(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(2k)} e^{in\vartheta}. \quad (42)$$

Для решения сформулированной двумерной задачи воспользуемся методом рядов. Представим голоморфные функции  $\phi'(z)$ ,  $\psi'(z)$  в виде

$$\phi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (43)$$

где  $a_n$ ,  $b_n$  – произвольные постоянные;  $a_0$ ,  $b_0$  – константы, определяемые заданными значениями напряжений на бесконечности. Вид метагармонических функций  $V_m$  и  $w_s$  зависит от значений корней характеристических уравнений (22), (34), которые могут быть вещественными положительными ( $k_1$ ) и комплексно-сопряженными ( $k_2, k_3 = \overline{k_2}$ )

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(\rho x_1) e^{in\vartheta}, \quad V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\vartheta}, \\ V_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\vartheta}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь  $K_n(\rho x_1)$ ,  $H_n^{(1)}(\rho x_2)$ ,  $H_n^{(2)}(\rho x_3)$  – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  – произвольные постоянные.

Если внести значения функций (42) – (44) в равенства (37), (39) и учесть граничные условия (41), то получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных. Характерно, что при каждой гармонике образуются системы уравнений относительно определенных констант и эти системы не связаны между собой. Количество уравнений в них зависит лишь от числа приближений  $N$ .

Будем считать, что  $A_n^{(2k)} = 0$ ,  $A_n^{(2k-1)} = 0 \quad \forall k \in [0, N]$ , т. е. поверхность полости свободна от напряжений. В этом случае неоднородными будут системы уравнений при нулевой и второй гармониках.

**Результаты числовых исследований.** Проведено исследование распределения напряжений около круговой цилиндрической полости в трансверсально-изотропной пластине. Поверхность полости свободна от внешних усилий, а на бесконечности пластина находится в поле одноосного растяжения. Найдены выражения для компонент тензора напряжений. При числовых расчетах принимались выражения технических констант:  $\nu$ ,  $\nu'$  – коэффициенты Пуассона;  $E$ ,  $E'$  – модули упругости;  $G'$  – поперечный модуль сдвига; параметры  $d_1$  и  $d_2$  определялись по формулам  $d_1 = 2\lambda_1(1 + \nu)$ ,  $d_2 = \lambda_1 E/G'$ ,  $\lambda_1 = p_{11}^{(0)}/E$ .

На рис. 1, 2 представлены кривые изменения окружных напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p_1$  на контуре отверстия ( $\rho = 1$ ) на срединной (рис. 1) и граничной (рис. 2) плоскостях пластины в точке  $\vartheta = \pi/2$  в зависимости от изменения параметра  $\lambda_1$  для трех значений отношения модулей упругости:  $E/E' = 0.75$  (кривая 1),  $E/E' = 1.25$  (кривая 2) и  $E/E' = 1.75$  (кривая 3). Как видно, увеличение положительных значений  $\lambda_1$  приводит к уменьшению напряжений, а увеличение по модулю отрицательных значений  $\lambda_1$  – к повышению напряжений. Графики на рис. 3 и 4 иллюстрируют

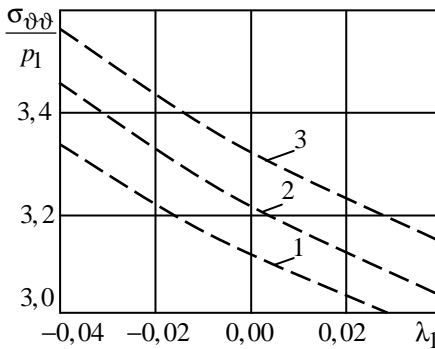


Рис.1

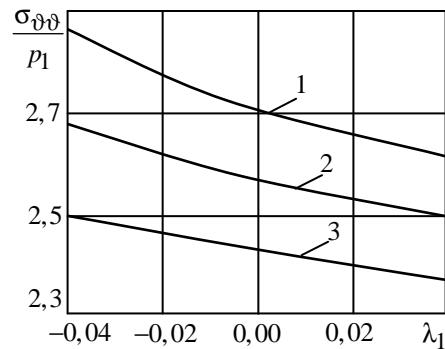


Рис.2

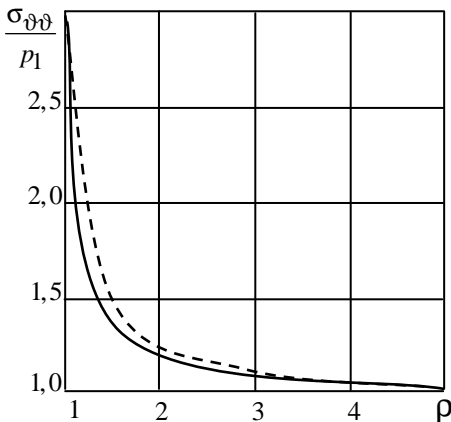


Рис.3

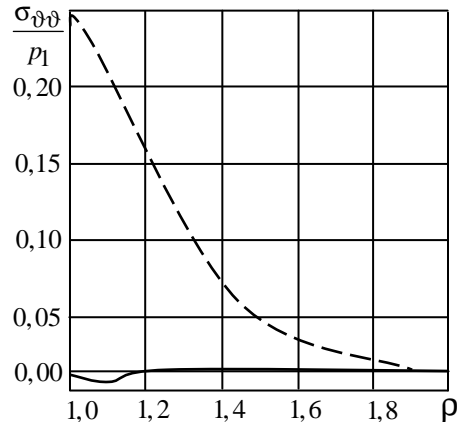


Рис.4



изменение окружных  $\sigma_{\theta\theta}/p_1$  и нормальных поперечных  $\sigma_{zz}/p_1$  на срединной (пунктирная линия) и граничной (сплошная линия) плоскостях пластины при удалении от поверхности полости.

**РЕЗЮМЕ.** Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини отримано рівняння пружної рівноваги нетонкої трансверсально-ізотропної пластини з початковими напруженнями. Наведено загальний аналітичний розв'язок цих рівнянь. Розв'язано задачу про розподіл напружень біля кругової циліндричної порожнини в пластині, що знаходиться під дією постійних розтягуючих сил, прикладених на нескінченності.

**Ключові слова:** трансверсально-ізотропна пластина, кругова циліндрична порожнина, початкові напруження.

**SUMMARY.** The balance equations for a non-thin transversely isotropic plate with initial stresses by use of the expansion method of unknown functions into Fourier series through Legendre polynomials of the thickness coordinate are obtained. The general analytical solution of these equations is given. The problem of a stress distribution around a circular cylindrical hole in the plate subjected to the steady tensile forces applied on the infinity is solved.

**Keywords:** transversely isotropic plate, circular cylindrical hole, initial stresses.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. – К.: Вища шк., 1995. – 304 с.
3. Гузь А.Н. Комплексные потенциалы в задачах теории упругости для тел с начальными напряжениями // Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 12. – С. 32–40.
4. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Изд-во Мир, 1975. – 872 с.
5. Хома І.Ю. Про рівняння математичної теорії оболонок з початковими напруженнями // Сучасні пробл. мат.: Матер. міжн. наук. конф., Чернівці-Київ, 1998. – С. 176–180.
6. Хома І.Ю., Кондратенко О.А. Деякі співвідношення узагальненої теорії нетонких пластин з початковими напруженнями // Доп. НАН України. – 2007. – № 2. – С. 71–75.
7. Хома І.Ю., Кондратенко О.А. Распределение напряжений около круговой цилиндрической полости в пластине с начальными напряжениями // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 28–39.
8. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates // J. Math. Sci. – 2000. – Vol. 101, N 6. – P. 3577–3584.

*Институт механики НАН Украины, Киев  
Киевский национальный университет, Киев*

*Поступила 10.10.2013*

УДК 539.421

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,  
 М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук,  
 Ю. А. ЧЕРНОИВАН, канд. физ.-мат. наук

## НАЧАЛЬНЫЙ ПЕРИОД РОСТА ТРЕЩИНЫ В ВЯЗКОУПРУГОМ КОМПОЗИТЕ ПРИ СМЕШАНОМ НАГРУЖЕНИИ

*Предложен алгоритм численного решения задачи о начальном периоде роста трещины в вязкоупругом композите под действием смешанного нагружения. Для описания вязкоупругих свойств композита использованы операторы с ядром Ю.Н. Работнова. Приведен пример расчета для композита с вязкоупругими компонентами.*

**Ключевые слова:** трещина, длительное разрушение, дробно-экспоненциальные ядра, операторы Работнова, вязкоупругость

Изучение деформирования и разрушения армированных композитных материалов, в связи с широким использованием таких композитов в элементах конструкций, является одним из важных вопросов механики твердых деформируемых тел. Для проектирования важна разработка методов прогнозирования и моделирования поведения таких материалов. Поскольку многие материалы, из которых состоят современные композиты, проявляют вязкоупругие свойства, учет таких свойств может сыграть значительную роль в определении несущей способности элементов конструкций.

Использование резольвентных интегральных операторов для описания вязкоупругих свойств композитных материалов и модели нелинейной механики разрушения материалов позволило получить решения нескольких важных проблем механики разрушения композитов [2–5, 12–15] для случаев разных мод нагружения трещины.

В настоящей работе с помощью описанных выше подходов исследо-

ван начальный период развития трещины в линейно вязкоупругом армированном композите под воздействием смешанного нагружения.

### Постановка задачи.

Рассмотрим трещину в теле, изготовленном из вязкоупругого ортотропного композитного материала. Оси ортотропии будем считать направленными вдоль и нормально к берегам трещины, параллельно к

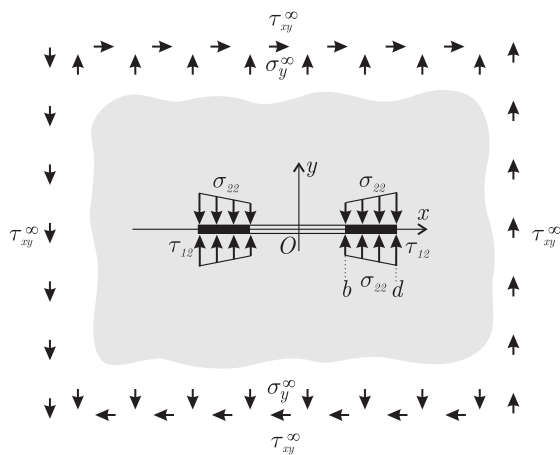


Рис. 1

осям координатной системы  $Oxy$  (рис. 1). Внешнюю нагрузку, под действием которой происходит развитие трещины, будем считать смешанной, состоящей из распределенного нормального к линии трещины растягивающего напряжения  $\sigma_y^\infty$  и распределенного сдвигового напряжения  $\tau_{xy}^\infty$ .

Нелинейное деформирование материала композита в окрестности вершин трещины будем моделировать с помощью модели типа Дагдейла [2, 11] со следующим когезионным законом в областях предразрушения (рис. 2)

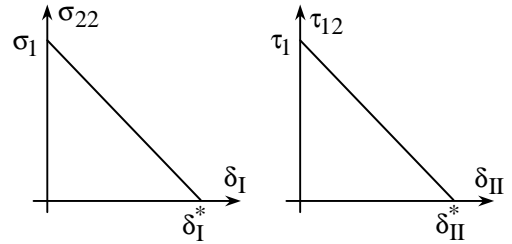


Рис. 2

$$\sigma_{22} = \sigma_1 \left( 1 - \frac{\delta_I}{\delta_I^*} \right), \quad \tau_{12} = \tau_1 \left( 1 - \frac{\delta_{II}}{\delta_{II}^*} \right),$$

где  $\sigma_1$  и  $\tau_1$  – некоторые граничные значения напряжений;  $\delta_I$  и  $\delta_{II}$  – удвоенные смещения берегов трещины вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $\delta_I^*$ ,  $\delta_{II}^*$  – критические значения раскрытий.

Напряжения в правой зоне предразрушения можно отыскать в форме симметричной для левой зоны линейной зависимости от координаты  $t$  так:

$$\sigma_{22}(t) = \frac{(d-t)\sigma_0 + (t-b)\sigma_1}{d-b},$$

$$\tau_{12}(t) = \frac{(d-t)\tau_0 + (t-b)\tau_1}{d-b} \quad (b \leq x \leq d).$$

Закон Гука для ортотропного материала композита запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22}, \\ \gamma_{12} &= a_{66}\tau_{12}. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение упругой задачи может иметь вид

$$\begin{aligned} \delta_I(x) &= \frac{L'}{\pi} [J_0(x)\sigma_0 + J_1(x)\sigma_1], \\ \delta_{II}(x) &= \frac{L''}{\pi} [J_0(x)\tau_0 + J_1(x)\tau_1], \end{aligned}$$

в которой

$$L' = 2\sqrt{a_{11}[L_2 + a_{66}]},$$

$$\begin{aligned}
L'' &= 2\sqrt{a_{22}[L_2 + a_{66}]}, \\
L_2 &= 2\left(\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12}\right); \\
J_0(x) &= -J_1(x) + (x-b)C_\Delta(b, x) - (x+b)C_\Delta(-b, x), \\
J_1(x) &= T(x)/(d-b), \\
C_\Delta(\xi, x) &= \ln \left| \frac{\sqrt{(d+\xi)(d-x)} - \sqrt{(d+x)(d-\xi)}}{\sqrt{(d+\xi)(d-x)} + \sqrt{(d+x)(d-\xi)}} \right|, \\
T(x) &= \frac{1}{2} \left[ (x+b)^2 C_\Delta(-b, x) + (x-b)^2 C_\Delta(b, x) \right] + \sqrt{(d^2 - b^2)(d^2 - x^2)}.
\end{aligned}$$

До момента достижения раскрытия в вершине трещины критического значения величины  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_1$ ,  $d$  можно отыскать из системы уравнений

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \left[ 1 - \frac{L'}{\pi\delta_I^*} (J_0(b)\sigma_0 + J_1(b)\sigma_1) \right] &= \sigma_0, \\
\tau_1 \left[ 1 - \frac{L''}{\pi\delta_{II}^*} (J_0(b)\tau_0 + J_1(b)\tau_1) \right] &= \tau_0, \\
N_0\sigma_0 + N_1\sigma_1 &= \frac{\pi}{2}\sigma_y^\infty, \\
N_0\tau_0 + N_1\tau_1 &= \frac{\pi}{2}\tau_{xy}^\infty,
\end{aligned} \tag{2}$$

где последние два уравнения выражают условие конечности напряжений в точках  $x = \pm d$ ;

$$\begin{aligned}
N_0 &= \frac{d \arccos \frac{b}{d} - \sqrt{d^2 - b^2}}{d - b}, \\
N_1 &= -\frac{b \arccos \frac{b}{d} - \sqrt{d^2 - b^2}}{d - b}.
\end{aligned}$$

При достижении раскрытия в вершинах трещин критического значения  $\sigma_0$  и  $\tau_0$  становятся нулевыми, а система (2) принимает вид

$$L'J_1(b)\sigma_1 = \pi\delta_I^*, \quad L''J_1(b)\frac{\tau_{xy}^\infty}{\sigma_y^\infty}\sigma_1 = \pi\delta_{II}^*, \quad N_1\sigma_1 = \frac{\pi}{2}\sigma_y^\infty; \tag{3}$$

$$J_1(b) = \frac{2b^2}{d-b} \ln \frac{b}{d} + b + d.$$

Из последнего уравнения (2) можно определить  $d$ , а затем воспользовавшись первым и вторым уравнениями системы вместе с

определенной из эксперимента связи  $F(\delta_I, \delta_{II}) = 0$  найти зависимость между ними для определения остальных параметров решения. В нашем примере эта зависимость принята такой:

$$(\delta_I^*)^2 + (\delta_{II}^*)^2 = \delta_e^2.$$

Таким образом, можно определить длительность инкубационного периода роста трещины  $t_0$ . Это значение должно удовлетворять уравнению

$$\left( \frac{\tau_{xy}^\infty}{\sigma_y^\infty} L' \right)^2 + (L'')^2 = \left( \frac{\pi \delta_e}{\sigma_1 J_1(b)} \right)^2.$$

Во всех приведенных выше определяющих уравнениях содержатся функции упругих постоянных материала композита, которые, после применения принципа соответствия или принципа Вольтерра, следует надлежащим образом преобразовать для использования в алгоритме численного решения задачи.

**Представление операторной функции в решениях задач линейной теории вязкоупругости.** В работах по теории линейной вязкоупругости используются два основных подхода решения задач определения напряженно-деформированного состояния в вязкоупругих композитах [16]. Один из этих методов основан на отыскании соответствующих напряжений или деформаций как функций-оригиналов для решений, полученных с помощью преобразования Лапласа [7]. Другой метод основан на принципе Вольтерра [12]. Исследования реологических характеристик вязкоупругих композитов с помощью первого из методов в основном проводятся в области преобразования. Обращение преобразования требует от исследователя определенных усилий и редко производится без дополнительных ограничений и упрощений. Существует два способа перехода из области преобразования во временную область. Использование первого из них не накладывает ограничения на функцию влияния, но обратное преобразование выполняется с помощью приближенных методов, эффективность использования которых существенно зависит от поведения функции влияния для материалов компонентов. Другим способом поиска решения является представление приближенного решения в области преобразования в специальной форме, которая позволяет относительно просто найти обратное преобразование для решения во временной области. Построение решения этим методом возможно, если вязкоупругие свойства материалов композита описываются в рамках стандартной механической модели, в которой функция влияния является линейно комбинацией убывающих экспоненциальных функций (ряда Прони-Дирихле), или в соответствии с обобщенной моделью с использованием производных дробного порядка, когда функция влияния является линейной комбинацией функций Миттаг-Леффлера [16]. В настоящей работе будем описывать свойства деформирования компонентов в рамках стандартной механической модели.

Физические и математические ограничения на моделирование реологических свойств материала в рамках линейной теории упругости усложняют правильное описание этих свойств. Впрочем, удовлетворение

всех возможных требований к модели является практически невозможным заданием, поэтому каждая из моделей, представленных в литературе по теории вязкоупругости, имеет собственные преимущества и недостатки и применяется для собственного диапазона задач. Важным преимуществом описания вязкоупругих свойств компонентов композита в рамках стандартной механической модели является ее универсальность: эта модель достаточно точно описывает изменение во времени свойств довольно широкого класса линейно вязкоупругих материалов. С математической точки зрения такая точность достигается увеличением числа членов в ряде Прони-Дирихле, то есть увеличением количества реологических параметров модели. Однако, результатом такого увеличения является утрата гладкости на графиках функций влияния, что не соответствует естественному поведению материалов. Устранить этот недостаток можно путем отыскания функции влияния не в форме линейной комбинации экспоненциальных функций, а в форме линейной комбинации функций Миттаг-Леффлера, использование которых позволяет уменьшить количество слагаемых. Конечно, такая форма описания свойств материала несколько усложняет вычислительную сторону процесса получения решения, однако значительно уменьшает количество реологических параметров модели.

На основе характеристик деформирования композита можно решать задачи определения напряженно-деформированного состояния в окрестности концентраторов напряжений (трещин, отверстий) в телах, изготовленных из композитных материалов. Напряжения и деформации в таких задачах можно определить из упругого решения, заменив упругие постоянные на соответствующие им вязкоупругие операторы, то есть, применив принцип Вольтерра.

Все исследования в области линейной теории вязкоупругости основаны на базовом соотношении в форме наследственного интеграла или интеграла свертки, впервые полученным Больцманом,

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t C(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad (4)$$

где  $C(t)$  – ядро свертки, являющееся функцией релаксации. Функции времени для напряжений,  $\sigma(t)$ , и деформаций,  $\varepsilon(t)$ , принадлежат к классу функций Хевисайда.

Функцию релаксации, согласно Ю.Н. Работнову, можно отыскать в виде

$$C(t) = E_0 - \sum_{k=1}^n E_k \left[ 1 - E_\alpha \left( -(t / \rho_k)^\alpha \right) \right]$$

или

$$C(t) = E_\infty + \sum_{k=1}^n E_k E_\alpha \left( -(t / \rho_k)^\alpha \right),$$

где

$$E_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma[1 + \alpha n]} \quad (5)$$

функция Миттаг-Леффлера порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ );  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Если  $\alpha = 1$ , то функция (2) превращается в экспоненту. Для  $t \geq 0$  и  $0 < \alpha \leq 1$  функция Миттаг-Леффлера часто называется экспонентой дробного порядка [8].

Величина  $E_0 = C(0)$  является мгновенным значением модуля упругости, а функциональная характеристика скорости релаксации  $T(t) = -C'(t) / E_0$  – ядром релаксации или функцией влияния (функцией скорости релаксации) [12]. В случае представления функции ползучести в форме (1) как

$$\frac{d}{dt} \left[ E_\alpha \left( -[t / \rho]^\alpha \right) \right] = -\rho^{-\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\rho^{-\alpha})^m t^{m\alpha - (1-\alpha)}}{\Gamma[(m+1)\alpha]},$$

функцией влияния будет

$$T(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k R_{\alpha'}(\beta_k, t),$$

где  $\beta_k = \rho_k^{-\alpha}$ ,  $\lambda_k = \frac{E_k}{E_0} \rho_k^{-\alpha}$ ,  $\alpha' = 1 - \alpha$  и

$$R_\alpha(\beta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^m t^{m(1-\alpha) - \alpha}}{\Gamma[(m+1)(1-\alpha)]}, \quad \beta > 0 -$$

дробно-экспоненциальная функция Работнова со значением порядка дробной экспоненты.

Тогда, функцию релаксации можно записать как

$$C(t) = E_0 \left( 1 - \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^n \lambda_k R_\alpha(\beta_k, t - \tau) d\tau \right) \quad (6)$$

или в операторной форме

$$C^* = E_0 \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k R_\alpha^*(\beta_k) \right]. \quad (7)$$

Результат действия оператора  $R^*$  на функцию деформаций может быть записан как

$$R^* \cdot \varepsilon(t) \equiv R(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau,$$

где  $R(t)$  – ядро оператора  $R^*$ .

Далее, можно воспользоваться алгеброй резольвентных операторов и операторными цепными дробями для получения решения задачи вязкоупругости, достаточно лишь выполнения условий применимости принципа соответствия [7] или принципа Вольтерра (в случае операторной формы записи). Полное описание можно найти в работе [5].

Единственным препятствием на пути к применению подобной мето-

дики для изучения деформирования композитных материалов является то, что операторы линейной вязкоупругости должны в таком случае иметь одинаковый порядок дробной экспоненты. Впрочем, и эту проблему можно обойти с помощью изложенного ниже метода приведения.

**Приведение операторов Работнова к общему значению показателя дробной производной.** С помощью операторной формы (4) функции релаксации для компонентов композита можно записать так:

$$C_{\alpha_i}^* \cdot 1 = E_0^{(i)} \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(i)} R_{\alpha_i}^* \left( \beta_k^{(i)} \right) \right]. \quad (8)$$

Далее, можно воспользоваться представлением оператора Работнова [9]:

$$R_{\alpha}^* (\beta) = \frac{I_{\alpha}^*}{1 + \beta I_{\alpha}^*},$$

где  $I_{\alpha}^*$  – оператор Абеля с ядром

$$I_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Представим решение задачи линейной теории вязкоупругости в форме функции операторов Абеля

$$F \left( I_{\alpha}^* \right) = F \left[ \left( I_{\alpha}^* \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}, \left( I_{\alpha}^* \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha}}, \dots, \left( I_{\alpha}^* \right)^{\frac{\alpha_N}{\alpha}} \right] \equiv F_{\alpha}^*. \quad (9)$$

Пусть цепная дробь  $c_0 + \underset{k=1}{D} \frac{c_k x}{1}$  равномерно сходится к функции

$F(x)$ . Тогда можно представить функцию  $F_{\alpha}^*$  из (6) операторной цепной дробью (ОЦД)

$$c_0 + \underset{k=1}{D} \frac{c_k I_{\alpha}^*}{1}. \quad (10)$$

Дробь

$$\Psi_1^{n*} = c_0 + \underset{k=1}{D} \frac{c_k I_{\alpha}^*}{1}$$

является  $n$ -ой подходящей дробью (6). Это приближение можно получить для  $x_i \rightarrow x_0 = 0$  эквивалентными преобразованиями дроби [1]:

$$\Psi_1^{n*} = V_0 + \underset{k=1}{D} \frac{I_{\alpha}^* - x_k}{V_k}, \quad (11)$$

приближая соответствующую функцию действительной переменной



$$\Psi_1^n(x) = V_0 + \sum_{k=1}^n \frac{x - x_k}{V_k}.$$

Таким образом, операторы  $\Psi_1^{n*}$  являются приближениями оператора  $F_\alpha^*$ . Ниже будем использовать такие обозначения для фрагмента ОЦД (8):

$$\Psi_m^{n*} = V_{m-1} + \sum_{k=m}^n \frac{I_\alpha^* - x_k}{V_k}. \quad (12)$$

С помощью алгебры резольвентных операторов фрагмент ОЦД  $\Psi_m^{n*}$ , определяемый соотношением (9), согласно работе [5], можно представить в форме

$$\Psi_m^{n*} = a_m^n + \sum_{i=1}^{L_{n-m}} a_{m,i}^n R^*(\lambda_{m,i}^n), \quad L_s = \left[ \frac{s}{2} \right] + 1,$$

в которой

$$a_m^n = V_{m-1} - \frac{x_m}{a_{m+1}^n}, \quad a_n^n = V_{n-1} - \frac{x_n}{V_n}$$

и  $a_{m,i}^n$ ,  $\lambda_{m,i}^n$  – величины, определяемые из рекуррентных соотношений таким образом:

– для фрагмента с нечетным количеством членов ( $m = n - 2l$ )

(i) с одним членом ( $l = 0$ )

$$a_{n,1}^n = \frac{1}{V_{n-1}V_n - x_n}, \quad \lambda_{n,1}^n = \lambda;$$

(ii) с тремя или большим количеством членов ( $l > 0$ )

$$a_{m,1}^n = \frac{1}{V_{m-1}a_{m+1}^n - x_m} \left( 1 - \sum_{i=1}^{L_{n-m}-1} \frac{b_{m+1,i}^n}{\lambda - \mu_{m+1,i}^n} \right), \quad \lambda_{m,1}^n = \lambda,$$

$$a_{m,i}^n = \frac{b_{m+1,i-1}^n}{V_{m-1}a_{m+1}^n - x_m} \left( x_m + \frac{h}{\lambda - \mu_{m+1,i-1}^n} \right),$$

$$\lambda_{m+1,i-1}^n = \mu_{m+1,i-1}^n \quad (i = 2, 3, \dots, L_{n-m});$$

– для фрагмента с четным количеством членов ( $m = n - 2l - 1$ ,  $l \geq 0$ ):

$$a_{m,i}^n = \frac{b_{m+1,i}^n}{V_{m-1}a_{m+1}^n - x_m} \left( x_m + \frac{h}{\lambda - \mu_{m+1,i}^n} \right),$$

$$\lambda_{m+1,i}^n = \mu_{m+1,i}^n \quad (i = 1, 2, \dots, L_{n-m}).$$

В этих соотношениях  $\mu_{m+1,i}^n$  ( $i = 1, 2, \dots, L_{n-m}$ ) являются корнями уравнения

$$1 - \sum_{i=1}^{L_{n-m}} \frac{a_{m+1,i}^n}{\lambda_{m+1,i}^n - \mu} = 0,$$

а  $b_{m+1,i}^n$  ( $i = 1, 2, \dots, L_{n-m}$ ) – решением системы уравнений

$$1 - \sum_{i=1}^{L_{n-m}-1} \frac{b_{m+1,i}^n}{\lambda_{m+1,j}^n - \mu_{m+1,i}^n} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, L_{n-m}).$$

Следовательно, для  $n$ -го приближения операторной функции можно принять:

$$F_{\alpha}^* \approx \lambda_0 + \sum_{i=1}^{L_{n-1}} \lambda_i R_{\alpha}^*(\beta_i), \quad L_n = \left[ \frac{n}{2} \right] + 1.$$

Значение  $n$  можно выбирать так, чтобы достигалась достаточная точность в приближении функции  $F^* \cdot 1$ .

Важным для решения задачи моментом по определению параметров дробно-экспоненциальной функции является оптимальный выбор параметра  $\alpha$ . Этот параметр характеризует скорость ползучести или релаксации на временном промежутке, где эта скорость существенно отличается от нулевой. С геометрической точки зрения этот параметр соответствует углу наклона части кривой ползучести или релаксации в логарифмических координатах.

Таким образом, даже для композитов, состоящих из нескольких компонентов с вязкоупругими свойствами, можно построить последовательность дробно-экспоненциальных функций, которая будет с достаточной точностью описывать деформирование композита [17]. Следовательно, решения граничных задач линейной вязкоупругости и механики разрушения можно построить с использованием одного базового оператора, отвечающего за изменение напряженно-деформированного состояния во времени.

**Определение длительности инкубационного периода развития трещины в вязкоупругом композите под воздействием смешанного нагружения.** Рассмотрим вязкоупругий слоистый композит, свойства которого после гомогенизации можно описать с помощью модели ортотропного тела. Обобщенный закон Гука для такого композита в главных осях ортотропии можно записать в форме уравнений (1), записав  $a_{ij}$  через технические постоянные:

$$a_{11} = 1 / E_{11}, \quad a_{12} = -\nu_{21} / E_{11}, \quad a_{22} = 1 / E_{22}, \quad a_{66} = 1 / G_{12}.$$

При определении эффективных вязкоупругих модулей композита ( $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$  и  $\nu_{21}$ ) можно воспользоваться экспериментальными данными для релаксации его компонентов и методами теории осреднения свойств композита с известной структурой.

В соответствие с [6] для армированного волокнами композита

технические постоянные можна найти как функции модуля сдвига  $G_i$  и коэффициентов Пуассона  $\nu_i$  изотропных компонент (нижний индекс  $i = 1$  соответствует характеристикам армирования, индекс  $i = 2$  – характеристикам матрицы):

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= c_1 E_1 + c_2 E_2 + \frac{8G_1 c_1 c_2 (\nu_1 - \nu_2)}{d_1}, \\
 E_{22} &= \left[ \frac{\nu_{21}^2}{E_1} + \frac{\nu_2 + 1}{8G_2} \left( \frac{2 + (\nu_1 - 1)\tilde{G}}{d_1} - \frac{2c_1(1 - \tilde{G})}{d_2} \right) \right]^{-1}, \\
 G_{12} &= G_{12}^0 \frac{\sin^n \alpha_n}{\pi^n} \left[ c_1^2 - c_1^{2n} \left( \frac{\tilde{G} - 1}{\tilde{G} + 1} \right)^2 \right], \\
 G_{12}^0 &= G_2 \frac{1 + c_1 + c_2 \tilde{G}}{c_2 + (1 + c_1)\tilde{G}}, \quad G_{23} = G_2 \frac{d_2}{c_2 \nu_2 + (1 + \nu_2 c_1)\tilde{G}}, \\
 \nu_{21} &= \nu_2 - (\nu_2 + 1)(\nu_2 - \nu_1)c_1 / d_1,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
 d_1 &= 2 + c_1(\nu_2 - 1) + c_2(\nu_1 - 1)\tilde{G}, \\
 d_2 &= \nu_2 + c_1 + c_2 \tilde{G}, \\
 \nu_i &= 3 - 4\nu_i, \quad \tilde{G} = G_2 / G_1, \quad \alpha_n = 2\pi / n;
 \end{aligned}$$

$n$  – число, определяющее тип расположения волокон армирования (например,  $n = 4$  соответствует тетрагональному расположению).

При проведении расчетов экспериментальные данные для характеристик компонентов композита были взяты из работы [10] и адаптированы к применению описаного выше подхода. Для простоты было принято, что достаточная точность достигается при использовании в (3) одного члена ( $n = 1$ ). Для материала армирования имеем следующие характеристики:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= 85,8 \text{ ГПа}, \quad K_\infty = 11,7 \text{ ГПа}, \quad \alpha_K = 0,8, \\
 \lambda_K &= 9 \cdot 10^{-4} c^{-\alpha_K}, \quad G_0 = 29,3 \cdot 10^4 \text{ ГПа}, \\
 G_\infty &= 0,117 \text{ ГПа}, \quad \alpha_G = 0,9, \quad \lambda_G = 1,4 \cdot 10^{-3} c^{-\alpha_G}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $K$  – модуль объемной деформации;  $G$  – модуль сдвига. Нижние индексы «0» и « $\infty$ » соответствуют мгновенным и долговременным значениям. Характеристики матрицы приняты следующими:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= 5,41 \text{ ГПа}, \quad K_\infty = 0,251 \text{ ГПа}, \quad \alpha_K = 0,86, \\
 \lambda_K &= 3 \cdot 10^{-2} c^{-\alpha_K}, \quad G_0 = 2,51 \text{ ГПа}, \quad \alpha_G = 0,69, \\
 G_\infty &= 2,93 \text{ МПа}, \quad \lambda_G = 9 \cdot 10^{-1} c^{-\alpha_G}.
 \end{aligned}$$

**Результаты численного решения.** Рассмотрим случай, когда направление армирования композита совпадает с нормальным по отношению к направлению трещины.

На рис. 3 изображены зависимости длительности начального периода развития трещины от ее полудлины для различных значений  $\tau_{xy}^{\infty}$ . Для расчетов были использованы такие значения: интенсивность внешнего нагружения  $\sigma_y^{\infty} = 4 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_1 = 35 \text{ МПа}$ ,  $\delta_e = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ . Для  $\tau_{xy}^{\infty}$  принимались значения

1 МПа (кривая 1), 1,5 МПа (кривая 2), 2 МПа (кривая 3).

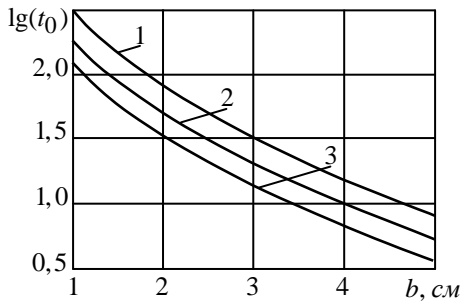


Рис. 3

Предложенным алгоритмом можно воспользоваться для изучения широкого диапазона задач механики разрушения линейно вязкоупругих материалов. Его основными преимуществами являются использование алгебры резольвентных операторов и возможность ее применения в задачах, в которых раскрытие трещины можно определить из упругого решения с помощью

принципа соответствия (принципа Вольтерра).

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано алгоритм чисельного розв'язування задачі про початковий період росту тріщини у в'язкопружному композиті під дією змішаного навантаження. Для опису в'язкопружних властивостей композита використані оператори з ядром Ю. М. Работнова. Наведено приклад розрахунку для композита з в'язкопружними компонентами.

**Ключові слова:** тріщина, довготривале руйнування, дробово-експоненційні ядра, мішане навантаження, оператори Работнова, в'язкопружність

**SUMMARY.** A numerical algorithm is presented to study the initial period of crack growth in a viscoelastic composite under the mixed-mode loading. Viscoelastic properties of the composite are described using linear viscoelasticity operators with Yu. N. Rabotnov's kernel. An example of calculation is given for a composite of viscoelastic components.

**Keywords:** crack, delayed fracture, fractional derivatives and integrals, mixed-mode loading, Rabotnov's operators, viscoelasticity

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Джонс У., Трон В. Непрерывные дроби. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. Каминский А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 312 с.
3. Каминский А.А. Анализ закономерностей докритического стабильного роста трещин в полимерных материалах на основе моделей мезомеханики разрушения. Теория – эксперимент // Прикладная механика, – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 3–60.
4. Каминский А.А., Селиванов М.Ф., Черноиван Ю.А. О докритическом распространении трещины продольного сдвига в вязкоупругом композитном теле // Прикладная механика. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 49–59.
5. Каминський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Визначення ефективних характеристик в'язкопружного композита, релаксація компонентів якого описується експонентами різних дробових порядків // Мат. мет. і фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 1–12
6. Композиционные материалы волокнистого строения / Г.А. Ван Фо Фы, В.М. Гроше-

ва, Е.Н. Денбновецкая и др.– К: Наук. думка, 1970.– 404 с.

7. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости.– М.: Мир, 1974.– 338 с.

8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.– М.: Наука, 1966.– 752 с.

9. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел.– М.: Наука, 1977.– 383 с.

10. Brinson L.C., Knauss W.G. Thermorheologically complex behavior of multi-phase viscoelastic materials // J. Mech. Phys. Solids.– 1990.– Vol. 39.– P. 859–880.

11. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids.– 1960.– Vol. 8.– P. 100–104.

12. Kaminsky A.A. Subcritical crack growth in polymer composite materials / In G. Cherpanov, Ed. Fracture: A Topical Encyclopaedia of Current Knowledge.– Malabar: Krieger, 1998.– P. 758–763.

13. Kaminsky A.A., Selivanov M.F. Stable crack growth of penny-shaped crack in viscoelastic composite material under time-dependent loading // Theor. Appl. Fract. Mech.– 2001.– Vol. 35.– P. 211–218.

14. Kaminsky A.A., Chornoivan Y.A. Closing of wedged crack in orthotropic viscoelastic composite // Int. J. Fract.– 2004.– Vol. 130.– P. 635–649.

15. Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. Determining of three collinear cracks opening displacement using the process zone model // Int. J. Solids and Struct.– 2013.– Vol. 50.– P. 2929–2942.

16. Rossikhin Yu.A. Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids // Appl. Mech. Review.– 2010.– Vol. 63.– P. 1–12.

17. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. Computational optimization of characteristics for composites of viscoelastic components // J. Eng. Math.–2012.– Vol. 74.– P. 91–100.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 15.10.2013*

УДК 539.3

Г. С. КИТ, д-р физ.-мат. наук,  
Н. М. ИВАСЬКО, канд. физ.-мат. наук

## ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ЕГО ГРАНИЦЕ ТЕПЛОАКТИВНОЙ ТРЕЩИНОЙ

*С использованием логарифмического потенциала простого слоя, термоупругого потенциала перемещений и функции напряжений Эри решены двумерные задачи стационарной теплопроводности и термоупругости при плоской деформации полубесконечного тела с перпендикулярной к его границе теплоактивной трещиной (на которой заданы температура или тепловой поток). На границе тела поддерживается нулевая температура. Задачи сведены к интегральным уравнениям с логарифмическим ядром.*

**Ключевые слова:** полуплоскость, термоупругость, теплоактивная трещина, интегральные уравнения с логарифмическим ядром.

Одним из основных методов решения двумерных задач стационарной теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами является метод теории функций комплексного переменного (комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили). Современные эффективные методы определения напряженного состояния многосвязных однородных и кусочно-однородных изотропных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями изложены в монографии [2], в частности с использованием аппарата интегралов типа Коши и комбинированного метода определения комплексных потенциалов предложены подходы решения задач для полуплоскости с отверстиями, трещинами и включениями. Достаточно полный анализ решения двумерных стационарных задач теплопроводности и термоупругости для однородных изотропных тел с трещинами приведен в работах [3, 7–10]. Исследованию плоского термоупругого состояния в окрестности внутренних и краевых трещин в полупространстве при фрикционном нагреве его границы посвящены публикации [1, 4, 5, 12–14]. Задача термоупругости для полуплоскости с периодической системой перпендикулярных к ее границе трещин при заданном параллельном к ним тепловом потоке, когда граница полуплоскости и трещины поддерживаются при постоянных температурах, решена в работе [15] с использованием преобразования Фурье и сингулярных интегральных уравнений. Такая же задача при конвективном охлаждении границы полуплоскости решена в [11].

При решении задач теплопроводности и термоупругости для полуплоскости с теплоактивной трещиной, на которой задана температура или тепловой поток, также можно использовать комплексные потенциалы. Но в данном случае предпочтительно использовать логарифмический потенциал простого слоя, который является мнимой частью интеграла типа Коши. При формулировании задачи теплопроводности постулируется наличие источников тепла на месте трещины, мощность которых при за-

данной температуре определяется из интегрального уравнения с логарифмическим ядром.

В данной статье решены двумерные задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для полуплоскости с перпендикулярной к ее границе теплоактивной трещиной.

**Постановка задачи.** Рассмотрим находящееся в условиях плоской деформации полубесконечное тело (полуплоскость) с перпендикулярной к его поверхности ленточной теплоактивной трещиной, на которой задана температура или тепловой поток. На границе тела поддерживается нулевая температура. Задачу будем решать в три этапа: определим температурное поле, напряженное состояние в сплошной полуплоскости и коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности трещины. В декартовой системе координат  $xOy$  (рис. 1) термические и механические граничные условия на трещине и границе полуплоскости имеют вид

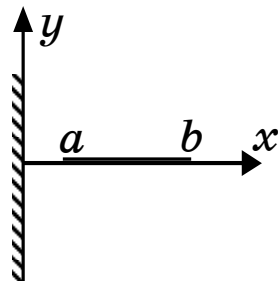


Рис. 1

$$T(x, 0) = T(x), \quad q(x, \pm 0) = -\lambda \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = \pm \frac{w(x)}{2} \quad (a \leq x \leq b), \quad (1)$$

$$T(0, y) = 0, \quad \sigma_{xx}(0, y) = \sigma_{xy}(0, y) = 0. \quad (2)$$

**Решение задачи теплопроводности.** Стационарное температурное поле, обусловленное теплоактивностью трещины, представим логарифмическим потенциалом простого слоя с плотностью  $w(\xi)$ , описывающим мощность тепловых источников на трещине:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_a^b w(\xi) \ln \frac{r_2}{r_1} d\xi, \quad (3)$$

где  $r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(x + \xi)^2 + y^2}$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Известно, что производная логарифмического потенциала простого слоя по нормали к линии, на которой распределен слой, претерпевает разрыв непрерывности при переходе через эту линию. В частности, на трещине

$$q(x, \pm 0) = -\lambda \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = \pm \frac{1}{2} w(x).$$

При заданном значении функции  $w(\xi)$  температура в произвольной точке тела определяется по формуле (3).

Если на трещине задана температура  $T(x)$ , то для определения мощности тепловых источников  $w(\xi)$  из (3) при  $y = 0$  имеем интеграль-

ное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b w(\xi) \ln \left| \frac{\xi+x}{\xi-x} \right| d\xi = \lambda T(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (4)$$

Для построения решения этого уравнения продифференцируем его по  $x$ . Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\xi w(\xi)}{\xi^2 - x^2} d\xi = \lambda T'(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$w(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} \left[ C - 2\lambda \int_a^b \frac{\xi T'(\xi) \sqrt{(b^2 - \xi^2)(\xi^2 - a^2)}}{\xi^2 - x^2} d\xi \right]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение(5), получаем

$$C = b^2 \int_a^b \left[ \frac{E(k')}{K(k')} - 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right] \frac{T(\xi)}{\sqrt{(b^2 - \xi^2)(\xi^2 - a^2)}} d\xi, \quad k' = \frac{a}{b}, \quad (7)$$

где  $K$ ,  $E$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

**Решение задачи термоупругости.** Для определения напряженно-деформированного состояния тела используем термоупругий потенциал перемещений [6]

$$\Phi(x, y) = \frac{m}{8\pi\lambda} \int_a^b w(\xi) \left[ r_2^2 \ln r_2 - r_1^2 \ln r_1 - 4\xi x \right] d\xi, \quad m = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)}, \quad (8)$$

с помощью которого находим напряжения и перемещения по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, & \sigma_{yy} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, & \sigma_{xy} &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, & u_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9)$$

в которых  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения,  $G$  – модуль сдвига.

С учетом (8), (9) и (3) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(x, y) &= -Gm \left[ T(x, y) + \frac{y^2}{2\pi\lambda} \int_a^b w(\xi) \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) d\xi \right], \\ \bar{\sigma}_{yy}(x, y) &= -Gm \left[ T(x, y) - \frac{y^2}{2\pi\lambda} \int_a^b w(\xi) \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) d\xi \right], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xy}(x, y) &= \frac{Gm}{2\pi\lambda} y \int_a^b w(\xi) \left( \frac{x+\xi}{r_2^2} - \frac{x-\xi}{r_1^2} \right) d\xi, \\
\bar{u}_x(x, y) &= \frac{m}{2} \left[ xT(x, y) + \frac{1}{2\pi\lambda} \int_a^b \xi w(\xi) (\ln r_2 r_1 - 1) d\xi \right], \\
\bar{u}_y(x, y) &= \frac{m}{2} yT(x, y).
\end{aligned} \tag{10}$$

На границе полуплоскости при  $x = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx}(0, y) &= 0, \quad \bar{\sigma}_{xy}(0, y) = \frac{Gm}{\pi\lambda} y \int_a^b \frac{\xi w(\xi)}{\xi^2 + y^2} d\xi, \\
\bar{u}_x(0, y) &= \frac{m}{4\pi\lambda} \int_a^b \xi w(\xi) (\ln(\xi^2 + y^2) - 1) d\xi, \quad \bar{u}_y(0, y) = 0.
\end{aligned}$$

Мы получили решение задачи термоупругости для полубесконечного тела, граница которого закреплена гибкой нерастяжимой пленкой ( $u_y = 0$ ,  $\sigma_{xx} = 0$ ).

При исследовании термоупругого состояния полубесконечного тела с трещиной промежуточным этапом является определение напряжений на месте расположения трещины, а следующим – освобождение ее поверхностей от этих напряжений.

Если граница тела свободна от нагрузки ( $\sigma_{xx} = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ), то для снятия касательных напряжений используем функцию напряжений Эри

$$F(x, y) = \frac{mG}{\pi\lambda} x \int_a^b \xi \ln r_2 d\xi,$$

с помощью которой находим

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\sigma}}_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{Gm}{\pi\lambda} x \int_a^b \xi w(\xi) \frac{(x+\xi)^2 - y^2}{r_2^4} d\xi, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{Gm}{\pi\lambda} \int_a^b \xi w(\xi) \frac{r_2^2 (x+2\xi) + 2xy^2}{r_2^4} d\xi, \\
\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(x, y) &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{Gm}{\pi\lambda} y \int_a^b \xi w(\xi) \frac{\xi^2 - x^2 + y^2}{r_2^4} d\xi.
\end{aligned} \tag{11}$$

Остаточные напряжения найдем в виде суммы

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\bar{\sigma}}_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\bar{\sigma}}_{yy}, \quad \sigma_{xy} = \bar{\sigma}_{xy} + \bar{\bar{\sigma}}_{xy}.$$

Как видно из (10) и (11), краевые условия (2) выполняются, поскольку при  $x = 0$   $\sigma_{xx}(0, y) = 0$ , потому что  $\bar{\sigma}_{xx}(0, y) = \bar{\bar{\sigma}}_{xx}(0, y) = 0$ , а

$\sigma_{xy}(0, y) = 0$ , потому что  $\bar{\sigma}_{xy}(0, y) = -\bar{\bar{\sigma}}_{xy}(0, y)$ .

Тогда для нормальных напряжений на месте трещины получим

$$\sigma_{yy}(x, 0) = mG \left( -T(x) + \frac{1}{\pi\lambda} \int_a^b \frac{\xi w(\xi)(2\xi + x)}{(\xi + x)^2} d\xi \right). \quad (12)$$

Освободив область  $a \leq x \leq b$  от этих напряжений, найдем скачок нормальных перемещений берегов трещины  $g(x) = v^+(x) - v^-(x)$  из сингулярного интегрального уравнения [7]

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b Q(\xi, x) g'(\xi) d\xi = -\frac{1-\nu}{G} \sigma_{yy}(x, 0) \quad (a < x < b), \quad (13)$$

в котором  $Q(\xi, x) = \frac{1}{\xi - x} + \frac{1}{\xi + x} + \frac{2\xi}{(\xi + x)^2} - \frac{4\xi^2}{(\xi + x)^3}$ .

Сингулярное интегральное уравнение (13) решим численно с помощью метода механических квадратур. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения значений искомых функций в узлах полиномов Чебышева первого рода

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M U(\xi_m) Q(\xi_m + d, x_r + d) &= \\ &= -\frac{2(1-\nu)}{G} \sigma_{yy}(lx_r + h, 0) \quad (r = \overline{1, M-1}), \\ \sum_{m=1}^M U(\xi_m) &= 0, \quad U(\xi) = g'(\xi) \sqrt{1-\xi^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$ ,  $\xi_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ,  $l = \frac{b-a}{2}$ ,  $h = \frac{a+b}{2}$ ,  $d = \frac{h}{l}$ . Здесь  $l$  – полудлина трещины, а  $h$  – расстояние ее середины от границы.

Коэффициенты интенсивности напряжений найдем по формуле

$$K_1^\pm = \mp \frac{mG\sqrt{l}}{\lambda} \tilde{U}(\pm 1). \quad (15)$$

Здесь  $\tilde{U}(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^{M+1}}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U(\xi_m) \operatorname{ctg}^{\pm 1} \frac{2m-1}{4M} \pi$ .

**Результаты численных исследований.** Рассмотрим пример, когда на трещине заданы постоянные источники тепла  $w(x) = W = \text{const}$ . Тогда по формулам (4) и (12) имеем

$$T(x, 0) = -\frac{W}{2\pi\lambda} \left[ (b-x) \ln|b-x| - (a-x) \ln|a-x| - \right.$$

$$-(b+x)\ln(b+x) + (a+x)\ln(a+x)], \quad (16)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = mG \left[ -T(x, 0) + \frac{W}{\pi\lambda} (2(b-a) - 3x \ln \left( \frac{b+x}{a+x} \right) + \frac{x^2(b-a)}{(b+x)(a+x)}) \right]. \quad (17)$$

На рис. 2 представлены графики распределения на месте трещины температуры  $\bar{T} = T\lambda/W$ , а на рис. 3 – напряжений  $\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}\lambda/(mGW)$  для случаев, когда полудлина трещины  $l$  равна 0,5; 1; 1,5, а расстояние от ее левого конца до границы  $a$  равно соответственно 0,2; 0,5; 1. Из графиков следует, что температура у левого конца трещины меньше, чем у правого, и возрастает при увеличении длины трещины и ее удалении от границы. При близком расположении трещины от границы напряжения у левого конца растягивающие, у правого – сжимающие; при удалении от грани-

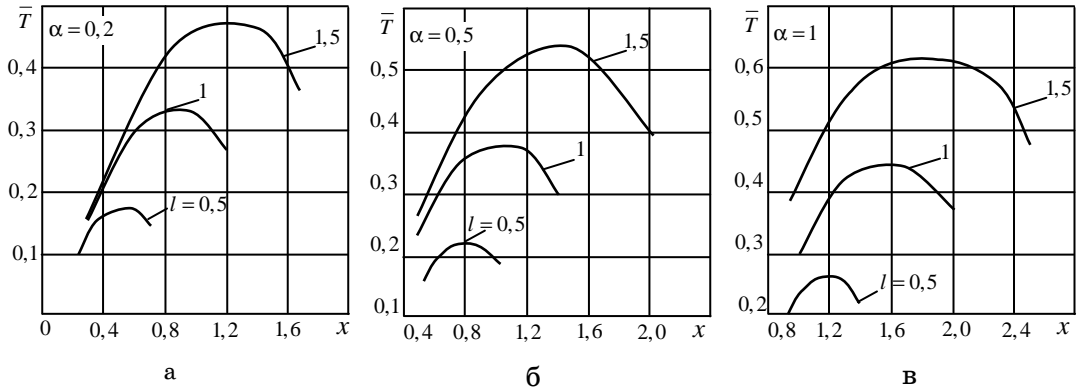


Рис. 2

цы вся трещина попадает в область сжимающих напряжений и она не будет раскрываться. Трещина будет раскрываться только тогда, когда напряжения на ней в основном будут растягивающие.

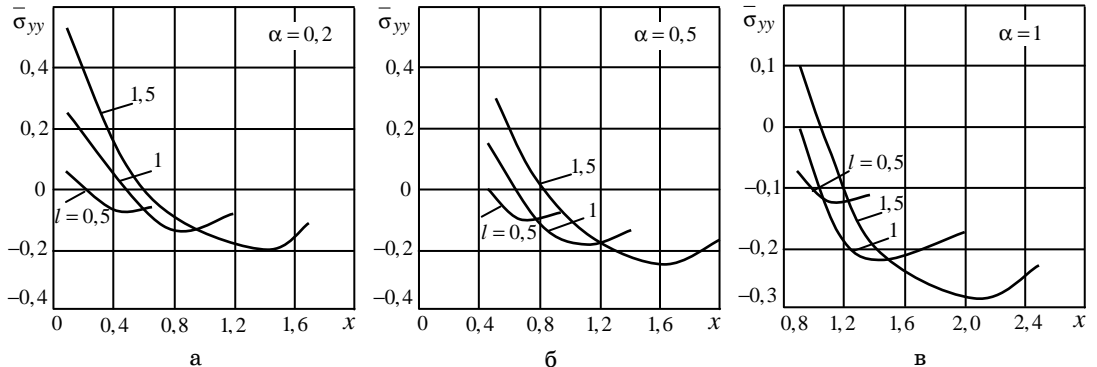


Рис. 3

Рассмотрим теперь случай охлаждения трещины отрицательными источниками тепла  $w(x) = -W = const$ . Тогда приведенные на рис. 2 и рис. 3 температура и напряжения имеют противоположный знак. Для этого случая по формуле (15) вычислены коэффициенты интенсивности напряжений  $\bar{K}_1^\pm = \frac{\lambda}{mGW\sqrt{l}} K_1^\pm$  для правого и левого конца трещины. Графики изменения этих КИН в зависимости от ее удаления от границы  $d = h/l$  представлены на рис. 4 для полудлин трещины  $l$ , равных 0,5; 1;

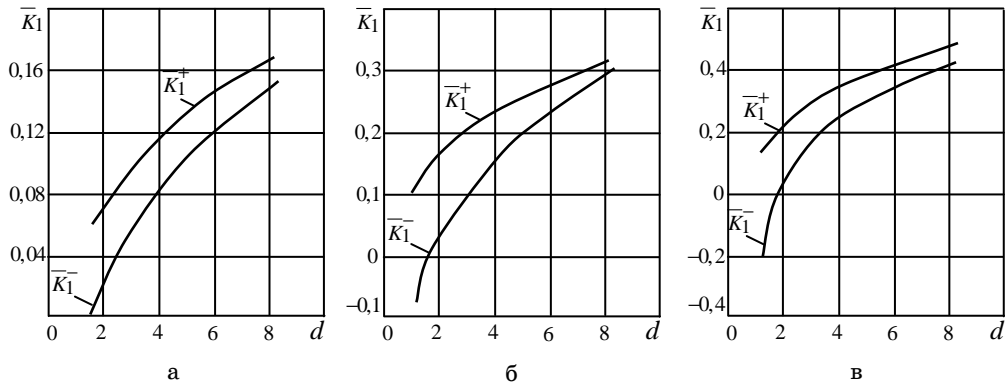


Рис. 4

1,5. Приведенные результаты верны для случая  $\bar{K}_1^- \geq 0$ . Если  $\bar{K}_1^- < 0$ , то в окрестности левого конца трещины ее берега контактируют и тогда задачу нужно решать с учетом этого контакта.

**РЕЗЮМЕ.** З використанням логарифмічного потенціалу простого шару, термопружного потенціалу переміщень і функції напружень Ері розв'язані двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності за плоскої деформації півбезмежного тіла з перпендикулярною до його межі теплоактивною тріщиною (на якій задані температура або тепловий потік). На межі тіла задана нульова температура. Задачі зведено до інтегральних рівнянь з логарифмічним ядром.

**Ключові слова:** півплощина, термопружність, теплоактивна тріщина, інтегральні рівняння з логарифмічним ядром.

**SUMMARY.** Using a logarithmic potential of a simple layer, thermoelastic displacement potential and Airy stress function, the two-dimensional problems of stationary heat conduction and thermoelasticity have been solved for plane deformation of semi-infinity body with thermally active crack perpendicular to its boundary (where temperature or heat flow are given). The body boundary is maintained at zero temperature. The problems are reduced to integral equations with logarithmic kernel.

**Key words:** half-plane, thermoelasticity, thermally active crack, integral equations with logarithmic kernel.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Евтушенко А.А., Зеленьк В.М.* Тепловая задача трения для полупространства с трещиной // Инж.-физ. журнал.– 1999.– Т. 72, № 1.– С. 164–169.
2. *Калогеров С.А., Авдюшина Е.В., Мироненко А.Б.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках.– Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013.– 440 с.

3. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами.– К.: Наук. думка, 1983.– 280 с.
4. Конечны С., Евтушенко А., Зеленьяк В. Влияние формы распределения фрикционного теплового потока на напряженное состояние полупространства с приповерхностным разрезом // Трение и износ.– 2002.– Т. 23, № 2.– С. 115–119.
5. Конечны С., Евтушенко А., Зеленьяк В. Фрикционный нагрев полупространства с краевыми трещинами // Трение и износ.– 2001.– Т. 22, № 1.– С. 39–45.
6. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями.– М.: Физматгиз, 1958.– 167 с.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.– К.: Наук. думка, 1976.– 443 с.
8. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.– К.: Наук. думка, 1981.– 324 с.
9. Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами.– Львів: Растр-7, 2009.– 212 с.
10. Сулим Г.Т. Основы математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями.– Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007.– 716 с.
11. El-Fattah A., Rizk A. Transient stress intensity factors for periodic array of cracks in a half-plane due to convective cooling // J. Therm. Stres.– 2003.– Vol. 26.– P. 443–456.
12. Matysiak S.J., Yevtushenko A.A., Zelenjak V.M. Frictional heating of a half-space with cracks. I. Single or periodic system of subsurface cracks // Tribol. Int.– 1999.– Vol. 32.– P. 237–243.
13. Matysiak S.J., Yevtushenko A.A., Zelenjak V.M. Frictional heating of a half-space with an edge crack // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2000.– Т. 43, № 2.– С. 127–134.
14. Sekine H. Crack problem for a semi-infinite solid with heated bounding surfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech.– 1977.– E44, № 4.– P. 637–643.
15. Ueda S., Ando J. Thermal mechanical response of elastic half-plane with infinite row of parallel cracks under uniform heat flux // JSME Int. J. Series A.– 2006.– Vol. 49, № 2.– P. 250–257.

*Институт прикладных проблем механики  
и математики НАН Украины, г. Львов*

*Поступила 17.10.2013*

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук,  
 М. Т. СОЛОДЯК, канд. физ.-мат. наук,  
 Р. Ф. ТЕРЛЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук,  
 Р. А. ИВАСЬКО, канд. физ.-мат. наук

## ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОТЕРМОМЕХАНИКИ ПОДВИЖНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УСТАНОВИВШИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

*Изложен учитывающий подвижность среды вариант количественного описания во взаимосвязи электромагнитотермомеханических процессов в электропроводных ферромагнитных телах, находящихся во внешних установившихся магнитных полях.*

**Ключевые слова:** магнитотермомеханика, установившееся электромагнитное поле, электропроводные ферромагнитные тела, подвижность среды.

Известные математические модели, описывающие взаимодействие электромагнитного поля (ЭМП) с веществом, как правило, достаточно сложны и, в общем случае, малопригодны для практических расчетов [1, 2, 12, 13]. Поэтому является актуальным построение целевой модели, позволяющей описать взаимосвязь ЭМП и подвижного ферромагнитного материального континуума в зависимости от параметров внешнего ЭМП и электромагнитных свойств материала [3–8].

Пусть рассматриваемое тело находится под воздействием внешнего установившегося ЭМП, заданного значением вектора напряженности магнитного поля на поверхности тела, т.е.

$$\vec{H}^{(ext)}(\vec{r}, t) = \vec{H}_1(\vec{r}_1) \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $\vec{r}_1$  – радиус-вектор точки поверхности,  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $\nu$  – частота;  $t$  – время;  $\vec{H}_1(\vec{r}_1)$  – амплитуда гармонического во времени магнитного поля. Будем учитывать, что уравнения как электродинамики, так и термомеханики являются инвариантными относительно преобразований Галилея [9–11, 14, 15, 24].

Рассмотрим две координатные системы отсчета  $K$  и  $K'$ . Система  $K'$  движется в произвольном направлении относительно системы  $K$  с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Пространственно-временные точки в этих системах обозначим соответственно через  $(\vec{r}, t)$  и  $(\vec{r}', t')$ , а все рассматриваемые величины в системе  $K'$  будем дополнительно обозначать штрихом. В механике сплошной среды собственную систему отсчета  $K'$  связывают с именем Лагранжа, а лабораторную  $K$  – с именем Эйлера. Законы преобразования координаты  $\vec{r}$ , времени  $t$  и операторов дифференцирования по координатам и по времени имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t, & t' &= t, & \vec{\nabla}' &= \vec{\nabla}, & \Delta' &= \Delta, \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \equiv \frac{d}{dt},\end{aligned}\quad (2)$$

где  $\vec{\nabla}$  и  $\Delta$  – соответственно операторы Гамильтона и Лапласа;  $d/dt$  – полная производная по времени [2, 6].

Для построения математической модели электромагнитотермомеханики приведем основные формулы электродинамики и термомеханики медленно движущихся ферромагнитных сред [6–15, 24] (инвариантных относительно преобразований Галилея) в собственной (движущейся) системе отсчета.

Рассмотрим ферромагнитные материалы. Для них характерна нелинейная зависимость между векторами индукции  $\vec{B}'$  (намагниченности  $\vec{M}'$ ) и напряженности  $\vec{H}'$  магнитного поля, описываемая соотношением

$$\vec{B}' = \mu_0 \left( \vec{H}' + \vec{M}'(\vec{H}') \right). \quad (3)$$

Ограничимся рассмотрением изотропных ферромагнитных сред, когда вектор индукции  $\vec{B}'$  (или намагниченности  $\vec{M}'$ ) параллельный вектору напряженности  $\vec{H}'$  магнитного поля, т.е.

$$\begin{aligned}\vec{B}'(\vec{H}') &= \mu_0 \mu(\vec{H}') \vec{H}', \\ \vec{M}'(\vec{H}') &= \chi(\vec{H}') \vec{H}'.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь  $\mu(\vec{H}') \equiv 1 + \chi(\vec{H}')$  и  $\chi(\vec{H}')$  – соответственно относительные магнитные проницаемость и восприимчивость среды;  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Отметим, что типы зависимостей  $\mu(\vec{H}')$  (или  $\chi(\vec{H}')$ ) для различных ферромагнитных материалов достаточно хорошо описаны в работах [17–19].

В отношении электрических свойств ферромагнитные материалы являются обычными диэлектриками, для которых зависимость между векторами индукции  $\vec{D}'$  и напряженности  $\vec{E}'$  электрического поля имеет вид

$$\vec{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}', \quad (5)$$

в котором  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Будем рассматривать электропроводные тела, для которых закон Ома, связывающий плотность тока проводимости  $\vec{j}'$  с напряженностью электрического поля, имеет вид [20]

$$\vec{j}' = \lambda \left( \vec{E}' + \vec{E}'_s \right). \quad (6)$$

Здесь  $\vec{E}'_s = \varphi_0 \vec{\nabla}' \left( \alpha_T T' + \frac{1 - 2\nu_p}{3E_p} \sigma' - \frac{q'}{3q_n} \right)$  – напряженность электрического

поля, созданного полями другой (неэлектромагнитной) физической природы;  $\lambda$  – коэффициент электропроводности;  $T'$  – абсолютная температура;  $\sigma'$  – первый инвариант тензора напряжений  $\hat{\sigma}'$ ;  $q'$  – удельный электрический заряд единицы массы тела;  $\alpha_T$  – температурный коэффициент линейного расширения;  $E_p$  и  $\nu_p$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\varphi_0 = 2\varphi_1$ . Формулы, определяющие величины  $\varphi_1$  и  $q_n$ , приведены в работе [20].

С учетом материального соотношения (5) уравнения Максвелла и закон сохранения электрического заряда для области тела запишутся так:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}' \times \bar{H}' &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \bar{E}'}{\partial t'} + \bar{j}', & \bar{\nabla}' \times \bar{E}' &= -\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t'}, & \frac{\partial(\rho' q')}{\partial t'} + \bar{\nabla}' \cdot \bar{j}' &= 0, \\ \varepsilon_0 \varepsilon \bar{\nabla}' \cdot \bar{E}' &= \rho' q', & \bar{\nabla}' \cdot \bar{B}' &= 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где  $\rho'$  – плотность тела, а символами  $\bar{\nabla}' \times$  и  $\bar{\nabla}' \cdot$  обозначены соответственно операции ротора и дивергенции в собственной системе отсчета.

ЭМП в отношении материального континуума будем считать внешним воздействием, проявляющемся в теле посредством энергетических и силовых факторов взаимодействия. Энергетические характеристики поля определим, используя закон сохранения энергии ЭМП в виде теоремы Умова-Пойнтинга [19]. Тогда для данного случая запасенную в теле энергию  $W'$  ЭМП (с учетом соотношений (3)–(6)) представим в виде

$$W' = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 \varepsilon (\bar{E}')^2 + \bar{H}' \cdot \bar{B}' \right]. \quad (8)$$

Для объемной суммарной мощности тепловыделений  $Q'$  в ферромагнетике, вызванной протеканием электрического тока, а также переманчиванием, найдем [19]:

$$Q' = \bar{j}' \cdot \bar{E}' + \frac{\mu_0}{2} \left( \bar{H}' \cdot \frac{\partial \bar{M}'}{\partial t'} - \bar{M}' \cdot \frac{\partial \bar{H}'}{\partial t'} \right). \quad (9)$$

Силовыми факторами взаимодействия ЭМП с материальной средой являются пондеромоторная сила  $\bar{F}$  и момент силы  $\bar{N}$ . Выражение для плотности пондеромоторной силы с использованием статистической модели электромеханического взаимодействия поля и среды удобно представить в виде [19, 21]

$$\bar{F}' = \bar{F}'_0 + \bar{F}', \quad (10)$$

в котором

$$\bar{F}'_0 = \rho' q' \bar{E}' + \bar{j}' \times \bar{B}' - \quad (11)$$

сила воздействия поля соответственно на свободные электрические заряды и ток проводимости, а



$$\begin{aligned}\vec{F}' = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) & \left[ (\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{E}' + \vec{E}' \times (\vec{E}' \times \vec{\nabla}') \right] + \\ & + (\vec{M}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{B}' + \vec{M}' \times (\vec{\nabla}' \times \vec{B}') -\end{aligned}\quad (12)$$

на электрические (первые два) и магнитные (последние два слагаемых) диполи, отвечающие соответственно за процессы переполаризации и перемагничивания среды.

Пондеромоторную силу, действующую на произвольную область среды, можно свести к силам натяжения, действующим на поверхность этой области [5, 14, 22, 23]

$$\vec{F}' = \vec{\nabla}' \cdot \hat{P}' - \partial \vec{G}' / \partial t', \quad (13)$$

причем  $\hat{P}'$  – тензор натяжений Максвелла, соответствующий пондеромоторной силе  $\vec{F}'$ ;

$$\vec{G}' = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}' \times \vec{B}' - \quad (14)$$

вектор плотности импульса ЭМП в среде.

Пондеромоторную силу можно представить выражением (10), для тензора натяжений Максвелла будем иметь

$$\hat{P}' = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \otimes \vec{E}' + \vec{H}' \otimes \vec{B}' + w' \hat{I}. \quad (15)$$

Здесь

$$w' = \frac{\mu_0}{2} \left[ (\vec{M}')^2 - (\vec{H}')^2 \right] - \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}')^2; \quad (16)$$

$\hat{I}$  – единичный тензор; символом « $\otimes$ » обозначена операция диадного произведения.

Пондеромоторный момент  $\vec{N}$  имеет вид

$$\vec{N}' = \vec{D}' \times \vec{E}' + \vec{B}' \times \vec{H}'. \quad (17)$$

Отметим, что для изотропных материалов, для которых имеют место соотношения (4) и (5), т.е. когда векторы  $\vec{B}' \parallel \vec{H}'$  и  $\vec{D}' \parallel \vec{E}'$  будем иметь  $\vec{N}' = 0$ .

Запишем балансовые соотношения [2, 26] для плотности массы  $\rho'$  и количества движения  $\rho' \vec{v}'$ , а также тензор деформаций  $\hat{e}'$  (по Коши). Тогда

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \cdot (\rho' \vec{v}') = 0, \quad \frac{\partial (\rho' \vec{v}')}{\partial t'} = \vec{\nabla}' \cdot \left( \hat{\sigma}' + \hat{P}' \right) - \frac{\partial \vec{G}'}{\partial t'}; \quad (18)$$

$$\hat{e}' = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla}' \otimes \vec{u}' + \vec{u}' \otimes \vec{\nabla}' + \vec{\nabla}' \otimes \vec{u}' \cdot \vec{u}' \otimes \vec{\nabla}' \right). \quad (19)$$

В механике деформируемого твердого тела скорость  $\vec{v}'$  центра масс свя-

зывают с перемещением  $\bar{u}'$  центра масс соотношением  $\bar{v}' = \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t'}$ . Дополняем приведенные выше соотношения законом Дюгамеля-Неймана

$$\hat{\sigma}' = \frac{E_p}{(1 + \nu_p)(1 - 2\nu_p)} \left\{ (1 - 2\nu_p) \hat{e}' + [\nu_p e' - (1 + \nu_p) \alpha_T (T' - T_0)] \hat{I} \right\} \quad (20)$$

и уравнением теплопроводности [2, 27]

$$k \Delta T' + Q' = \rho' c_e \frac{\partial T'}{\partial t'} + \frac{\alpha_T E_p}{1 - 2\nu_p} T' \frac{\partial e'}{\partial t'} = \rho' c_\sigma \frac{\partial T'}{\partial t'} + \alpha_T T' \frac{\partial \sigma'}{\partial t'}. \quad (21)$$

Здесь  $k$  – коэффициент теплопроводности;  $e' = \sum_{\alpha=1}^3 e'_{\alpha\alpha} = \bar{\nabla}' \cdot \bar{u}'$  – первый инвариант тензора деформаций;  $T_0$  – начальная температура;  $c_e$  и  $c_\sigma$  – удельные теплоемкости соответственно при постоянных деформациях и напряжениях, связанные между собой соотношением [27]:

$$c_e(T') = c_\sigma - \frac{2\alpha_T E_p}{(1 - 2\nu_p)} \frac{T'}{\rho'}. \quad (22)$$

При экспериментальном определении теплоемкостей измеряют теплоемкость  $c_\sigma$ , а  $c_e$  находят теоретически, используя формулу (22).

Приведем законы преобразования рассматриваемых величин электромагнитотермомеханики при переходе от движущейся (штриховой) к неподвижной (нештриховой) системе отсчета.

*Законы преобразования векторов ЭМП и материальные соотношения электродинамики:*

$$\begin{aligned} \bar{H}' &= \bar{H} - \varepsilon_0 \varepsilon \bar{v} \times \bar{E}, & \bar{B}' &= \bar{B}, & \bar{M}' &= \bar{M} + \varepsilon_0 \varepsilon \bar{v} \times \bar{E}, \\ \bar{E}' &= \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}, & \bar{D}' &= \bar{D}, & \bar{D}' &= \bar{D}, & \bar{E}'_s &= \bar{E}_s, \\ \bar{j}' &= \bar{j} - \rho q \bar{v}, & \rho' q' &= \rho q, & \bar{j}' &= \rho q \bar{v} + \lambda (\bar{E} + \bar{E}_s + \bar{v} \times \bar{B}), \\ \bar{B} &= \mu_0 [\bar{H} + \bar{M} (\bar{H} - \varepsilon_0 \varepsilon \bar{v} \times \bar{E})], & \bar{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \end{aligned} \quad (23)$$

*Законы преобразования энергетических и силовых факторов воздействия ЭМП:*

$$\begin{aligned} W' &= W - \bar{v} \cdot \bar{G}, & \bar{G}' &= \bar{G}, & w' &= w + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \bar{v} \cdot \bar{G}, \\ Q' &= Q - \bar{F}_0 \cdot \bar{v} + \Delta Q, & \bar{F}'_0 &= \bar{F}_0, & \bar{F}' &= \bar{F} + \frac{1}{\varepsilon} \bar{\nabla} (\bar{v} \cdot \bar{G}), \\ \bar{N}' &= \bar{N}, & P'_{\alpha\alpha} &= P_{\alpha\alpha} + v_\alpha G_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} \bar{v} \cdot \bar{G}, \end{aligned}$$

$$P'_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + v_{\beta}G_{\alpha} + D_{\alpha}(\vec{v} \times \vec{B})_{\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \quad (24)$$

где

$$\Delta Q = \frac{1}{2}\mu_0 \left[ \vec{H} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{M} - \vec{M} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} \right]. \quad (25)$$

*Законы преобразования термомеханических величин:*

$$T' = T, \quad \rho' = \rho, \quad \vec{u}' = \vec{u}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad \hat{e}' = \hat{e}, \quad \hat{\sigma}' = \hat{\sigma}. \quad (26)$$

*Балансовые соотношения для массы и количества движения:*

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\hat{\sigma} + \hat{P} + \Delta \hat{P}) - \frac{d\vec{G}}{dt}. \quad (27)$$

*Уравнение теплопроводности:*

$$\begin{aligned} \kappa \Delta T + Q - \vec{F}_0 \cdot \vec{v} + \Delta Q = \\ = \rho c_e \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha_T E_p}{1 - 2\nu_p} T \frac{de}{dt} = \rho c_{\sigma} \frac{dT}{dt} + \alpha_T T \frac{d\sigma}{dt}. \end{aligned} \quad (28)$$

К системе уравнений электромагнитотермомеханики (3)–(28) необходимо добавить электродинамические, тепловые и механические начальные, краевые и контактные условия, соответствующие конкретному случаю.

**РЕЗЮМЕ.** Викладено варіант кількісного опису у взаємозв'язку електромагнітотермомеханічних процесів в електропровідних ферромагнітних тілах за дії зовнішніх усталених магнітних полів за врахування рухомості середовища.

**Ключові слова:** магнітотермомеханіка, усталене електромагнітне поле, електропровідні ферромагнітні тіла, рухомість середовища.

**SUMMARY.** The variant of the quantitative description in conjunction of electromagnetothermomechanics processes in electroconductive ferromagnetic solids subjected to external steady magnetic fields taking into account the mobility of the medium is presented.

**Keywords:** magnetothermomechanics, steady electromagnetic field, electroconductive ferromagnetic solids, mobility of the medium.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Богородский А. Ф. Всемирное тяготение. – К.: Наук. думка, 1971. – 352 с.
2. Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – К.: Наук. думка, 1978. – 232 с.
3. Гроот С. Р. де, Сатторп Л. Г. Электродинамика. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
4. Гроот С. Р. де, Мазур П. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
5. Джексон Д. Ж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
6. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 306 с.
7. Колесников П. М. Введение в нелинейную электродинамику. – Минск: Наука и техника, 1971. – 384 с.
8. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Магнитотермоупругость // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1981. – Т. 14. – С. 3–59.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.– М.: Наука, 1973.– 504 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 624 с.
11. Максвелл Дж. К. Избранные сочинения по теории ЭМП.– М.: Гостехиздат, 1954.– 688 с.
12. Моделювання дії електромагнетного поля на термомеханічну поведінку деформівних твердих тіл / О. Р. Гачкевич, М. Т. Солодяк, Р. О. Івасько, В. Я. Бойчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів.– 2009.– Т. 45, № 2.– С. 43–54.
13. Моделювання механічних систем за дії електромагнітних навантажень / О. Гачкевич, М. Солодяк, Р. Івасько, С. Шимур // Машинознавство.– 2001.– № 12 (54).– С. 8–14.
14. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика.– М.: Физматгиз, 1963.– 432 с.
15. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф. Магнитотермоупругость электропроводных тел.– К.: Наук. думка, 1982.– 296 с.
16. Поливанов К. М. Электродинамика движущихся тел.– М.: Энергоиздат, 1982.– 192 с.
17. Поливанов К. М. Вращающий момент в электромагнитных системах и тензор механических напряжений // Изв. вузов. Электромеханика.– 1975.– Т. 1.– С. 3–10.
18. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2-х т.– М.: Наука, 1983.– Т. 1.– 528 с.
19. Седов Л. И., Цыпкин А. Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма.– М.: Наука, 1989.– 272 с.
20. Солодяк М. Т., Івасько Р. О. Рівняння Мінковського в нелінійних намагнічених і поляризованих рухомих середовищах // Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 1999.– Т. 42, № 1.– С. 50–54.
21. Солодяк М. Т. Термодифузійні процеси в електропровідних тілах у зовнішньому періодичному в часі магнетному полі // Мат. методи і фіз.-мех. поля.– 2000.– № 5.– С. 91–98.
22. Тамм И. Е. Основы теории электричества.– М.: Наука, 1989.– 504 с.
23. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика.– М.: Высш. шк., 1990.– 352 с.
24. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.– К.: Наук. думка, 1977.– 248 с.
25. Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды.– Изд-во МГУ, 1988.– 232 с.
26. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология.– М.: Наука, 1974.– 520 с.
27. Hutter K. Wave propagation and attenuation in para- or soft ferromagnetic materials – II. The influence of the direction of the magnetic field // Int. J. Eng. Sci.– 1976.– Vol. 14, № 10-A.– P. 883–894.

*Институт прикладных проблем механики и математики  
НАН Украины, г. Львов  
Политехника Опольская (Польша)*

*Поступила 17.11.2013*

УДК 539.3

О. П. КОЗАЧОК, Б. С. СЛОБОДЯН, канд. физ.-мат. наук,  
Р. М. МАРТЫНЯК, д-р физ.-мат. наук

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕЛЬЕФОМ ПРИ НАЛИЧИИ ЖИДКОСТНЫХ МОСТИКОВ В МЕЖКОНТАКТНЫХ ЗАЗОРАХ

*Смоделировано взаимодействие двух полубесконечных упругих тел, граница одного из которых имеет периодическую систему выемок, при наличии на краях межконтактных зазоров несжимаемой жидкости с учетом поверхностного натяжения жидкости и давления газа в центральных частях зазоров. Сформулированная контактная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно высоты зазоров, имеющему аналитическое решение. Для определения ширины зазоров и участков действия газа получена система двух трансцендентных уравнений, которая решена численно. На графиках представлены зависимости геометрических параметров зазоров, контактного сближения и контактной податливости тел от нагрузки и поверхностного натяжения жидкости.*

**Ключевые слова:** контактное взаимодействие, выемки, межповерхностные зазоры, жидкостные мостики, поверхностное натяжение.

На поверхностях контакта элементов машин и конструкций в реальных условиях эксплуатации могут конденсироваться или адсорбироваться тонкие слои жидкости, которые под действием поверхностного натяжения собираются в наиболее узких местах межконтактных зазоров, где образуют жидкостные мостики между сопряженными поверхностями. Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что во многих практически важных случаях капиллярные эффекты, обусловленные поверхностным натяжением жидкости, существенно влияют на величину области контакта и контактное давление.

Теоретическому исследованию локального контакта упругих тел при наличии жидкостных мостиков между их поверхностями посвящены работы [1, 2, 9–11]. В статьях [5, 6, 8] решены контактные задачи для тел с номинально плоскими поверхностями, имеющими локальные выемки, частично заполненные жидкостью, с учетом ее поверхностного натяжения.

Ниже исследуется контакт двух полубесконечных тел граница одного из которых имеет периодический рельеф, при наличии на краях межповерхностных зазоров жидкостных мостиков с учетом поверхностного натяжения жидкости и давления газа в центральных частях зазоров.

**Постановка задачи.** Рассмотрим взаимодействие двух упругих изотропных полубесконечных тел  $D_1$  и  $D_2$  из разных материалов в условиях плоской деформации. Граница одного из тел прямолинейная, а граница второго имеет неровности в виде периодической системы неглубоких пологих выемок одинаковой формы длины  $2c$  каждая, расположенных с периодом  $d$ . В основной полосе периодов  $-d/2 \leq x \leq d/2$  форма выемки

задается четной непрерывно-дифференцируемой функцией  $r(x)$ , такой, что  $r(x) \ll c$ ,  $r'(x) \ll 1$ ,  $r(\pm c) = 0$ ,  $r'(\pm c) = 0$ . Тела контактируют без трения под действием равномерно распределенного на бесконечности

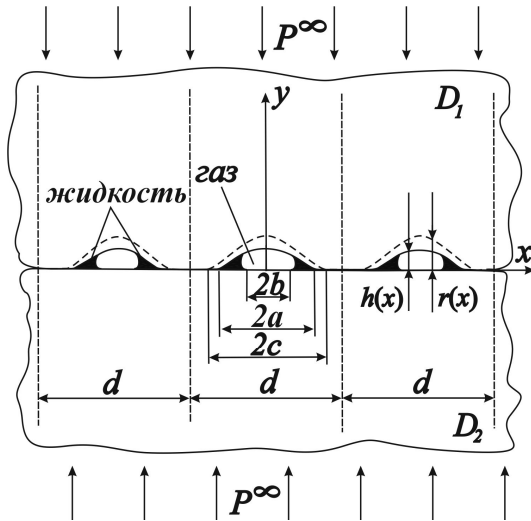


Рис. 1

давления  $P^\infty$ . Вследствие наличия выемок на границе одного из тел между ними возникают периодически расположенные зазоры высоты  $h(x)$  и ширины  $2a$  (рис. 1).

Зазоры на краях содержат симметричные межповерхностные мостики несжимаемой жидкости, полностью смачивающей поверхности тел. Объем жидкости в каждом зазоре равен  $V_0$ . В средней части зазоров шириной  $2b$  между жидкостными мостиками находится газ, давление которого  $P_1$  остается неизменным при нагружении тел.

Мениск (боковая поверхность жидкости, граничащей с газом) в сечении имеет форму дуги окружности некоторого радиуса  $R$ . На менисках действует поверхностное натяжение  $\sigma$ . Вследствие этого давление в жидкости  $P_2$  меньше, чем давление газа  $P_1$ , и определяется формулой Лапласа

$$P_2 = P_1 - \sigma/R. \quad (1)$$

Учитывая полное смачивание жидкостью тел и малую высоту зазоров, будем считать, что мениск является полуцилиндром, радиус которого равен половине высоты зазора в точках  $x = \pm b$  выхода менисков на поверхности тел:  $R = h(b)/2$ . Это позволяет записать формулу Лапласа (1) таким образом:

$$P_2 = P_1 - 2\sigma/h(b). \quad (2)$$

Ширина  $2a$  и высота  $h(x)$  зазоров, а также ширина участков с газом  $2b$  заранее неизвестны и изменяются в процессе нагружения.

Граничные условия сформулированной контактной задачи для полуплоскостей  $D_1$  и  $D_2$  имеют вид:

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad x \in (-a + kd, a + kd), \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -P_1, \quad x \in (-b + kd, b + kd), \quad (4)$$

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -P_2, \quad x \in (-a + kd, -b + kd) \cup (b + kd, a + kd) \quad (5)$$

вдоль зазоров  $x \in (-a + kd, a + kd)$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad (6)$$

$$v^- - v^+ = \begin{cases} 0, & x \in [-d/2 + kd, -c + kd] \cup [c + kd, d/2 + kd], \\ r(x), & x \in [-c + kd, -a + kd] \cup [a + kd, c + kd] \end{cases} \quad (7)$$

на участках контакта  $x \in [-d/2 + kd, -a + kd] \cup [a + kd, d/2 + kd]$ , ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (8)$$

на бесконечности. Здесь  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненты тензора напряжений;  $v$  – составляющая вектора перемещения вдоль оси  $Oy$ ; индексами "+" и "-" обозначены предельные значения функции при стремлении точки к оси  $Ox$  в верхней и нижней полуплоскости ( $y \rightarrow \pm 0$ ).

Для определения ширины зазоров  $2a$  и ширины участков с газом  $2b$  используем условие плавного смыкания берегов зазоров

$$h'(-a) = h'(a) = 0 \quad (9)$$

и условие сохранения количества жидкости в зазорах

$$\int_b^a h(x) dx - \frac{(h(b))^2}{8} \pi = \frac{1}{2} V_0. \quad (10)$$

**Метод решения.** Используя метод функций межконтактных зазоров [3, 4], решение сформулированной контактной задачи представим через высоту зазоров  $h(x)$ , для определения которой получим сингулярное интегральное уравнение (СИУ) с ядром Гильберта:

$$\int_{-a}^a h'(t) ctg \left( \frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = \frac{Kd}{2} (P^\infty - P(x)) + \int_{-c}^c r'(t) ctg \left( \frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \quad x \in [-a, a], \quad (11)$$

где

$$P(x) = \begin{cases} P_1, & |x| \leq b \\ P_1 - 2\sigma / h(b), & b < |x| \leq a \end{cases}, \quad K = 2 \left( \frac{1 - v_1}{G_1} + \frac{1 - v_2}{G_2} \right);$$

$G_n$ ,  $v_n$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона полуплоскости  $D_n$  ( $n = 1, 2$ ).

Произведя замену переменных  $\xi = tg(\pi x/d)$ ,  $\eta = tg(\pi t/d)$ ,  $\alpha = tg(\pi a/d)$ ,  $\gamma = tg(\pi c/d)$ ,  $\beta = tg(\pi b/d)$ , СИУ (11) трансформируем в СИУ

с ядром Коши

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{1}{1 + \xi^2} \frac{d}{\pi} K(P^\infty - P(\xi)) + \frac{2}{\pi} \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad x \in [-\alpha, \alpha]. \quad (12)$$

Для дальнейшего исследования контакта тел с регулярным рельефом необходимо конкретизировать форму выемок. Пусть она описывается функцией

$$r(x) = A \left( 1 - tg^2 \left( \frac{\pi x}{d} \right) / tg^2 \left( \frac{\pi c}{d} \right) \right)^{3/2},$$

которая в новых переменных имеет вид

$$r(\xi) = A \left( 1 - \xi^2 / \gamma^2 \right)^{3/2},$$

где  $A$  – максимальная высота выемок. В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{1}{1 + \xi^2} \frac{d}{\pi} K(P^\infty - P(\xi)) + \frac{6A}{\gamma} \left( \frac{\xi^2}{\gamma^2} - \frac{1}{2} \right), \quad x \in [-\alpha, \alpha]. \quad (13)$$

Определяя ограниченное решение СИУ (13), удовлетворяющее условиям (9), находим функцию  $h'(\xi)$ :

$$h'(\xi) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{2\pi} \left[ \frac{6A\pi}{\gamma^3} \xi - \frac{Kd(P^\infty - P_1)\xi}{\sqrt{\alpha^2 + 1}(1 + \xi^2)} + \frac{2K\sigma d}{\pi h(\beta)} \left( \int_{-\alpha}^{-\beta} + \int_{\beta}^{\alpha} \right) \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}(\eta - \xi)} \right].$$

Разбивая в интеграле, содержащемся в правой части последней формулы, интервалы интегрирования  $[-\alpha, -\beta]$ ,  $[\beta, \alpha]$  на  $L$  отрезков, и приравнивая на каждом этом отрезке подинтегральную функцию  $1/(1 + \eta^2)$  ее значению в центральной точке отрезка, получаем аналитическое выражение производной высоты зазора

$$h'(\xi) = \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \left\{ \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^L F_i^{(n)} \left[ \Gamma(\alpha, \xi, x_{i+1}^{(n)}) - \Gamma(\alpha, \xi, x_i^{(n)}) \right] \right\} - \frac{3A}{\gamma^3} \xi \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} + \frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi\sqrt{\alpha^2 + 1}} \frac{\xi \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)}, \quad (14)$$

где



$$\Gamma(\alpha, \xi, t) = \ln \frac{\alpha^2 - t\xi + \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - t^2)}}{\alpha^2 - t\xi - \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - t^2)}}, \quad x_i^{(1)} = -\alpha + \frac{(-\beta + \alpha)(i-1)}{L-1},$$

$$x_i^{(2)} = \beta + \frac{(\alpha - \beta)(i-1)}{L-1}, \quad F_i^{(n)} = \left( 1 + \left( \frac{x_i^{(n)} + x_{i+1}^{(n)}}{2} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (n = 1, 2).$$

Интегрируя функцию (14) с учетом условия  $h(\pm b) = 0$ , находим высоту зазора

$$h(\xi) = \frac{A}{\gamma^3} (\alpha^2 - \xi^2)^{3/2} + \frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} - \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \left\{ \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^L F_i^{(n)} \left[ (\xi - x_{i+1}^{(n)}) \Gamma(\alpha, \xi, x_{i+1}^{(n)}) + 2\sqrt{\alpha^2 - (x_{i+1}^{(n)})^2} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \arcsin \left( \frac{\xi}{\alpha} \right) - (\xi - x_i^{(n)}) \Gamma(\alpha, \xi, x_i^{(n)}) - 2\sqrt{\alpha^2 - (x_i^{(n)})^2} \arcsin \left( \frac{\xi}{\alpha} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Ограниченное решение СИУ (13) существует, если его правая часть удовлетворяет дополнительному условию [8], из которого получаем уравнение

$$\frac{3A\pi}{\gamma} \left( \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - 1 \right) + \frac{Kd}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \left[ P^\infty - P_1 + \frac{2\sigma}{h(\beta)} - \frac{4\sigma}{\pi h(\beta)} \arcsin \left( \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \right] = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) вместе с уравнением, получаемым после подстановки функции  $h(\xi)$  (15) в условие сохранения количества жидкости в зазоре (10), составляют систему двух трансцендентных уравнений для определения ширины зазоров  $2b$  и ширины  $2a$  участков границы тел, находящихся под давлением газа. Эта система уравнений решается численно.

Для инженерных расчетов контактного взаимодействия тел с регулярным рельефом особый интерес представляют такие эффективные контактные параметры, как контактное сближение и контактная податливость. Контактное сближение  $\Delta v^\infty$  выражается через высоту межповерхностных зазоров по формуле

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (r(x) - h(x)) dx.$$

Эффективная контактная податливость  $k$  определяется как производная контактного сближения по внешней нагрузке:  $k^*(P^\infty) = d(\Delta v^\infty) / dP^\infty$ .

**Анализ результатов численных исследований.** Были проведены расчеты для безразмерных величин: максимальной высоты выемки  $\tilde{A} = A/d$ ; полуширины выемки  $\tilde{c} = c/d$ ; высоты межконтактного зазора  $\tilde{h} = h/d$ ; полуширины участка действия газа  $\tilde{b} = b/d$ ; полуширины межконтактного зазора  $\tilde{a} = a/d$ ; поверхностного натяжения жидкости  $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$ ; давления на бесконечности  $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$ ; давления газа  $\tilde{P}_1 = KP_1$ ; контактной податливости  $\tilde{k}^* (\tilde{P}^\infty) = d(\Delta\tilde{v}^\infty) / d\tilde{P}^\infty$ ; контактного сближения  $\Delta\tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$ ; объема жидкости в зазоре  $\tilde{V}_0 = V_0/V$ , где  $V$  – объем выемки. Диапазон изменения прилагаемой нагрузки  $\tilde{P}_{\min}^\infty < \tilde{P}^\infty < \tilde{P}_{\max}^\infty$  выбирался таким образом:  $\tilde{P}_{\min}^\infty$  – значение нагрузки, при которой ширина зазора равна ширине выемки ( $\tilde{a} = \tilde{c}$ );  $\tilde{P}_{\max}^\infty$  – значение нагрузки, при которой жидкостные мостики смыкаются ( $\tilde{b} = 0$ ). Численный анализ осуществлен для полуширины выемки  $\tilde{c} = 0.25$ , максимальной высоты выемки  $\tilde{A} = 0.001$ , давления газа  $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$  и объема жидкости  $\tilde{V}_0 = 0.1$ .

На рис. 2 представлены графики зависимости полуширины зазоров  $\tilde{a}$  от внешнего давления  $\tilde{P}^\infty$  для разных значений поверхностного натяжения жидкости  $\tilde{\sigma}$  ( $\tilde{\sigma} = 0, 5 \cdot 10^{-8}, 10^{-7}$ ). Видно, что увеличение приложенной нагрузки и поверхностного натяжения жидкости приводит к уменьшению ширины межконтактных зазоров.

Влияние поверхностного натяжения жидкости на форму межконтактных зазоров в случае фиксированной внешней нагрузки  $\tilde{P}^\infty = 0.004$  проиллюстрировано на рис. 3. Штриховая кривая изображает форму вы-

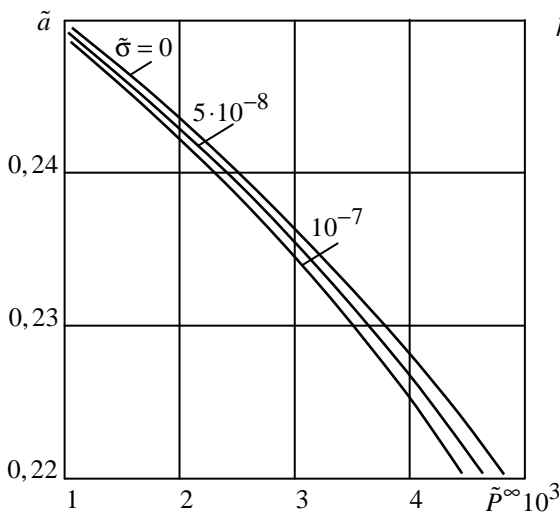


Рис. 2

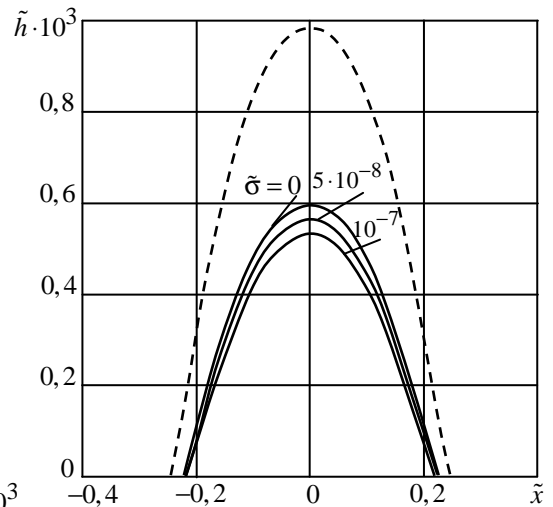


Рис. 3

емок  $\tilde{r}(\tilde{x})$ . Как видно из рис. 3, при увеличении поверхностного натяжения жидкости высота зазоров уменьшается.

На рис. 4 и рис. 5 изображены зависимости сближения тел  $\Delta\tilde{v}^\infty$  и эффективной контактной податливости  $\tilde{k}^*$  от внешнего давления и по-

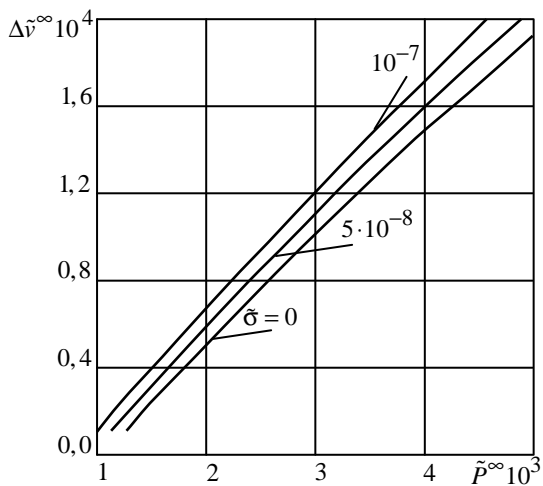


Рис. 4

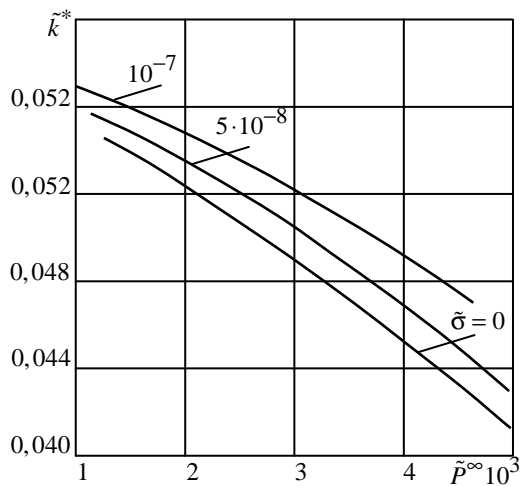


Рис. 5

верхностного натяжения жидкости. Видно, что увеличение нагрузки вызывает увеличение сближения тел и уменьшение контактной податливости. Увеличение же поверхностного натяжения жидкости приводит к одновременному возрастанию сближения и контактной податливости тел.

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект Ф 54.1/042).

**РЕЗЮМЕ.** Змодельовано взаємодію двох півбезмежних пружних тіл, межа одного з яких містить періодичну систему виїмок, за наявності на краях міжконтактних зазорів нестисливої рідини з урахуванням поверхневого натягу рідини і тиску газу в центральній частині зазорів. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти зазорів, розв'язок якого визначено аналітично. Для визначення ширини зазорів і ділянок дії газу отримано систему трансцендентних рівнянь, що розв'язуються числово. На графіках проілюстровано залежності геометричних параметрів зазорів, контактної підатливості тіл від навантаження і поверхневого натягу рідини.

**Ключові слова:** контактна взаємодія, виїмки, міжповерхневі зазори, рідинні містки, поверхневий натяг.

**SUMMARY.** The interaction between two semi-infinite elastic bodies, one of which has boundary with an array of periodically arranged grooves, in the presence of an incompressible liquid at the edges of intercontact gaps has been modeled taking into account surface tension of the liquid and the gas pressure in the central part of the gaps. The formulated contact problem has been reduced to a singular integral equation for a height of the gaps, which has been solved analytically. To determine a width of the gaps and a width of zones of gas action, a system of two transcendental equations has been obtained. It has been solved numerically. The graphs show dependences of the geometric parameters of the gaps, the contact approach and the contact compliance on load and surface tension of the liquid.

**Keywords:** contact interaction, grooves, intercontact gaps, liquid bridges, surface tension.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикладная математика и механика.– 2001.– Т. 65, № 2.– С. 279–289.
2. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // Прикладная математика и механика.– 1999.– Т. 63, № 1.– С. 128–137.
3. Кит Г.С., Мартыняк Р.М., Мачишин И.М. Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикладная механика.– 2003.– Т. 39, № 3.– С. 52–60.
4. Мартыняк Р.М. Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 1998.– Т. 41, № 4.– С. 144–149.
5. Мартыняк Р.М., Слободян Б.С. Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2006.– Т. 49, № 1.– С. 164–173.
6. Мартыняк Р.М., Слободян Б.С., Чижик С.А. Контактна взаємодія тіл за наявності в міжповерхневому зазорі ідеального газу та рідинних містків // Фіз.-мат. модел. та інформаційні технології.– 2013.– Вип. 18.– С. 189–197.
7. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968.– 514 с.
8. Слободян Б.С. Тиск пружного тіла на жорстку основу з виїмкою, частково заповненою рідиною, що не змочує їх поверхні // Фіз.-хім. механіка матеріалів.–2011.– Т. 47, № 4.– С. 122–128.
9. Ando Y. Effect of capillary formation on friction and pull-off forces measured on submicron-size asperities // Tribology Letters.– 2005.– Vol. 19, № 1.– P. 29–36.
10. Peng Y.F., Li G.X. An elastic adhesion model for contacting cylinder and perfectly wetted plane in the presence of meniscus // Trans. ASME. Journal of Tribology.– 2007.– Vol. 129.– P. 231–234.
11. Zheng Jie, Streutor J.L. A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribology Letters.– 2004.– Vol. 16, № 1–2.– P. 1–9.

*Институт прикладных проблем механики и математики  
НАН Украины, г. Львов*

*Поступила 20.11.2013*

УДК 539.376

*В. П. ГОЛУБ*, д-р техн. наук,  
*Б. П. МАСЛОВ*, д-р физ.-мат. наук,  
*Ю. М. КОБЗАРЬ*, канд. физ.-мат. наук

## **К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

*Установлены зависимости между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и релаксации изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении. Определяющее уравнение вязкоупругости выбрано в форме суперпозиции уравнений сдвиговой и объемной ползучести. Ядра наследственности задаются дробно-экспоненциальными функциями Работнова.*

**Ключевые слова:** *линейная вязкоупругость, изотропные материалы, сложное напряженное состояние, ядра ползучести, ядра релаксации, дробно-экспоненциальные ядра.*

Механические характеристики вязкоупругих тел в наследственной теории вязкоупругости задаются набором упругих постоянных и параметров ядер наследственности [1, 2]. Все необходимые механические характеристики находятся, как известно, по результатам математической обработки соответствующих экспериментальных данных. Особенно актуальной является задача определения параметров ядер наследственности и включает определение параметров ядер ползучести и ядер релаксации.

При одноосном напряженном состоянии параметры ядер наследственности определяются непосредственно по результатам аппроксимации данных прямых измерений деформаций или напряжений заранее выбранными функциями, задающими ядра. Результаты измерений представляются в форме кривых ползучести или кривых релаксации. Детальный анализ методов определения параметров ядер наследственности линейно и нелинейно-вязкоупругих тел при одноосном напряженном состоянии приведен в [1, 3–6].

Задача определения механических характеристик вязкоупругих тел при сложном напряженном состоянии сводится, как правило, к установлению зависимости между ядрами наследственности при сложном и одномерном напряженных состояниях [1, 3, 6]. Одномерное напряженное состояние реализуется непосредственно в эксперименте и рассматривается как базовое. Решение задачи включает формулировку закона деформирования при сложном напряженном состоянии, выбор вида базового одномерного напряженного состояния и выбор измеряемых в базовом эксперименте функций.

В работе [7] для изотропных линейно-вязкоупругих материалов установлена зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и ядрами продольной и поперечной ползучести, построенными по результа-

там испытаний на одноосное растяжение. Этот подход в работе [8] обобщен на изотропные нелинейно-вязкоупругие материалы исходя из нелинейной модели вязкоупругости типа модели Работнова. Трудности практической реализации такого подхода связаны с отсутствием данных измерений деформаций поперечной ползучести.

В настоящей работе устанавливается зависимость между ядрами ползучести, задающими сдвиговые и объемные свойства изотропных линейно-вязкоупругих тел при сложном напряженном состоянии, и ядрами продольной и сдвиговой ползучести, построенными по результатам испытаний на ползучесть при одноосном растяжении и чистом кручении.

**1. Постановка задачи.** Определяющие уравнения линейной теории вязкоупругости Больцмана-Вольтерра, задающие зависимость между деформациями, напряжениями и временем, при сложном напряженном состоянии могут быть представлены в виде уравнений для сдвигов и уравнений объемного деформирования. Определяющие уравнения ползучести записываются в виде [2, 7]

$$\begin{aligned} e_{ij}(t) &= \frac{s_{ij}(t)}{2G} + \frac{\lambda_s}{2G} \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \varepsilon_v(t) &= \frac{\sigma_0(t)}{B} + \frac{\lambda_v}{B} \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.1)$$

решением которых являются уравнения релаксации

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G e_{ij}(t) - 2G \lambda_s \int_0^t R_s(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \sigma_0(t) &= B \varepsilon_v(t) - B \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varepsilon_v(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $e_{ij}(t)$  – компоненты девиатора тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}(t)$ ;  $s_{ij}(t)$  – компоненты девиатора тензора напряжений  $\sigma_{ij}(t)$ ;  $\varepsilon_v(t)$  – объемная деформация;  $\sigma_0$  – среднее напряжение;  $K_s(t-\tau)$ ,  $R_s(t-\tau)$  – ядра сдвиговой ползучести и релаксации;  $K_v(t-\tau)$ ,  $R_v(t-\tau)$  – ядра объемной ползучести и релаксации;  $G$  – модуль сдвига;  $B$  – объемный модуль;  $\lambda_s$ ,  $\lambda_v$  – реологические параметры.

В качестве базовых экспериментов используются испытания образцов материала на ползучесть при одноосном растяжении и чистом кручении и постоянных значениях напряжений. Одномерные модели, описывающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем изотропных линейно-вязкоупругих материалов в базовых экспериментах, задаются уравнениями

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau,$$

$$\gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\lambda_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau)\tau_{21}(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

которые при  $\sigma_{11} = const$  и  $\sigma_{21} = const$  сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}}{E} \left[ 1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right], \\ \gamma_{21}(t) &= \frac{\tau_{21}}{G} \left[ 1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma_{11}(t)$  и  $\tau_{21}(t)$  – одноосные растягивающие напряжения и касательные напряжения кручения;  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\gamma_{21}(t)$  – одноосные продольные и угловые деформации;  $K_{11}(t-\tau)$  и  $K_{21}(t-\tau)$  – ядра продольной и сдвиговой ползучести;  $\lambda_{11}$  и  $\lambda_{21}$  – реологические параметры;  $E$  – модуль упругости.

Ядра ползучести  $K(t-\tau)$  в (1.1)–(1.4) и релаксации  $R(t-\tau)$  в (1.2) аппроксимируются дробно-экспоненциальными функциями [2]

$$\begin{aligned} K(t-\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \\ R(t-\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры ядер ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ );  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функция Эйлера.

Задача заключается в установлении зависимости между ядрами ползучести  $K_s(t-\tau)$ ,  $K_v(t-\tau)$  и релаксации  $R_s(t-\tau)$ ,  $R_v(t-\tau)$  материалов при сложном напряженном состоянии и ядрами ползучести  $K_{11}(t-\tau)$ ,  $K_{21}(t-\tau)$  при одноосном растяжении и чистом кручении и в определении параметров ядер, задаваемых дробно-экспоненциальными функциями.

**2. Идентификация ядер наследственности.** Процесс деформирования при сложном напряженном состоянии задается уравнениями ползучести (1.1) и уравнениями релаксации (1.2). Идентификации подлежат ядра сдвиговой  $K_s(t-\tau)$  и объемной  $K_v(t-\tau)$  ползучести и ядра сдвиговой  $R_s(t-\tau)$  и объемной  $R_v(t-\tau)$  релаксации.

*2.1. Зависимость между ядрами наследственности.* Для установления зависимости между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и релаксации и ядрами ползучести при одноосном растяжении учтем, что для компонент тензора деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}(t)$ , которые можно представить в виде суперпозиции компонент сдвиговой и объемной ползучести в (1.1), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G} \left[ s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right] + \\ + \frac{1}{3B} \delta_{ij} \left[ \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

которое при одноосном растяжении постоянными напряжениями  $\sigma_{11}$  приводится к виду

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{3G} \left[ 1 + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_{11}}{9B} \left[ 1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.2)$$

или, с учетом соотношения [5]

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9B},$$

к уравнению

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[ 1 + \frac{E}{3G} \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) d\tau + \frac{E}{9B} \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right]. \quad (2.3)$$

Здесь принято

$$s_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{11}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{9B} \sigma_{11}.$$

Из сопоставления уравнения (2.3) и первого уравнения в (1.4) следует соотношение

$$\lambda_{11} K_{11}(t-\tau) = \frac{E}{3G} \lambda_s K_s(t-\tau) + \frac{E}{9B} \lambda_v K_v(t-\tau), \quad (2.4)$$

устанавливающее зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и ядром ползучести при одноосном растяжении.

**2.2. Ядра сдвиговой ползучести и релаксации.** Для идентификации ядер сдвиговой ползучести  $K_s(t-\tau)$  и релаксации  $R_s(t-\tau)$  в качестве базового достаточно рассмотреть эксперимент на чистое кручение и использовать соответствующее ему в (1.4) определяющее уравнение.

Действительно, при чистом кручении из девяти компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  только две касательные компоненты  $\sigma_{21} = \sigma_{12} \neq 0$ , а из девяти компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  только две сдвиговые компоненты  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \gamma_{21}/2 \neq 0$ , а остальные компоненты равны нулю. В этом случае для девиатора тензора напряжений  $s_{ij}(t)$  в (1.1) получаем



$$s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \sigma_{21}(t) & 0 \\ \sigma_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \rightarrow s_{21}(t) = \sigma_{21}(t), \quad (2.5)$$

а для компонент девиатора тензора деформаций  $e_{ij}(t)$  –

$$e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \delta_{ij}\varepsilon_0(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \varepsilon_{21}(t) & 0 \\ \varepsilon_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \rightarrow e_{21}(t) = \varepsilon_{21}(t), \quad (2.6)$$

поскольку  $\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = 0$  и  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{B} = 0$ .

Соотношения (2.5) и (2.6) показывают, что при чистом кручении уравнение сдвиговой ползучести в девиаторной форме в (1.1) и одномерное уравнение сдвиговой ползучести в (1.4) приводят к одним и тем же значениям деформаций сдвиговой ползучести  $\varepsilon_{21}(t)$ . Отсюда следует, что

$$\lambda_s = \lambda_{21}; \quad K_s(t - \tau) = K_{21}(t - \tau); \quad R_s(t - \tau) = R_{21}(t - \tau) \quad (2.7)$$

и определяющие уравнения сдвиговой ползучести и релаксации при сложном напряженном состоянии записываются в виде

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G} + \frac{\lambda_{21}}{2G} \int_0^t K_{21}(t - \tau) s_{ij}(\tau) d\tau, \\ s_{ij}(t) = 2G e_{ij}(t) - 2G \lambda_{21} \int_0^t R_{21}(t - \tau) e_{ij}(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где параметры ядер  $K_{21}(t - \tau)$  и  $R_{21}(t - \tau)$  определяются на основе результатов испытаний на ползучесть при чистом кручении.

**2.3. Ядра объемной ползучести и релаксации.** Ядро объемной ползучести  $K_v(t - \tau)$  определяется из соотношения (1.4) с учетом равенства между ядрами сдвиговой ползучести при сложном напряженном состоянии и чистом кручении (2.7).

Подставляя (2.7) в (1.4), для ядра объемной ползучести  $K_v(t - \tau)$  получаем

$$\lambda_v K_v(t - \tau) = \frac{3}{1 - 2\nu} \lambda_{11} K_{11}(t - \tau) - \frac{2(1 + \nu)}{1 - 2\nu} \lambda_{21} K_{21}(t - \tau), \quad (2.9)$$

где  $\nu = \frac{E}{2G} - 1$  – коэффициент Пуассона.

В этом случае определяющие уравнения объемной ползучести и релаксации при сложном напряженном состоянии записываются в виде

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\sigma_0(t)}{B} + \frac{1}{B} \int_0^t \left[ \frac{3}{1-2\nu} \lambda_{11} K_{11}(t-\tau) - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \lambda_{21} K_{21}(t-\tau) \right] \sigma_0(\tau) d\tau,$$

$$\sigma_0(t) = B\varepsilon_v(t) - B\lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varepsilon_v(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

в котором ядро объемной релаксации  $R_v(t-\tau)$  является резольventой ядра объемной ползучести  $K_v(t-\tau)$ .

Практический интерес представляет также задача установления непосредственной зависимости между ядром объемной релаксации  $R_v(t-\tau)$  при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной  $K_{11}(t-\tau)$  и сдвиговой  $K_{21}(t-\tau)$  ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении. Для этого воспользуемся фундаментальным свойством резольventных операторов вязкоупругости Работнова [2], которое в случае использования ядер наследственности (1.5) может быть представлено соотношением

$$1 - \lambda R(t-\tau, \beta) = [1 + \lambda K(t-\tau, \lambda + \beta)]^{-1}, \quad (2.11)$$

где принято, что параметр  $\beta$  оказывает более существенное влияние на процессы ползучести и релаксации по сравнению с параметром  $\alpha$ .

Поскольку оператор объемной ползучести с ядром (2.9) задается линейным агрегатом 2-х резольventных операторов, то фундаментальное соотношение (2.11) для обращения линейного агрегата резольventных операторов можно представить в виде

$$1 - \lambda_v R_v(t-\tau, \beta) = 1 - \sum_{r=1}^2 X_r K(t-\tau, y_r) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^2 a_n K(t-\tau, b_n) \right]^{-1}. \quad (2.12)$$

Здесь  $K(\cdot)$  – ядра ползучести, задаваемые аналогично ядру (2.9) в виде суммы ядер продольной  $K_{11}(\cdot)$  и сдвиговой  $K_{21}(\cdot)$  ползучести;

$$a_1 = -\frac{3}{1-2\nu} \lambda_{11}, \quad a_2 = 2\frac{1+\nu}{1-2\nu} \lambda_{21}, \quad b_1 = \beta_{11}, \quad b_2 = \beta_{21}. \quad (2.13)$$

При этом  $\lambda_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\lambda_{21}$ ,  $\beta_{21}$  – параметры ядер ползучести и релаксации в (1.5), определяемые в базовых экспериментах.

В итоге для ядра объемной релаксации  $R_v(\cdot)$ , исходя из (2.12), получаем соотношение

$$\lambda_v R_v(t-\tau) = \frac{(y_1 - b_1)(b_2 - y_1)}{y_1 - y_2} K_{11}(t-\tau) + \frac{(y_2 - b_2)(y_2 - b_1)}{y_1 - y_2} K_{21}(t-\tau), \quad (2.14)$$

в котором реологические параметры  $y_1$  и  $y_2$  определяются из совместного решения уравнений

$$1 - \frac{a_1}{b_1 - y} - \frac{a_2}{b_2 - y} = 0, \quad 1 - \frac{x_1}{b_n - y_1} - \frac{x_2}{b_n - y_2} = 0 \quad (n = 1, 2),$$

найденных приведением уравнения (2.12) к общему знаменателю.

**3. Определение параметров ядер наследственности.** Параметры ядер сдвиговой и объемной ползучести и релаксации в определяющих уравнениях (1.1) и (1.2) находятся на основе соотношений (2.7), (2.9) и (2.14), связывающих эти ядра с ядрами продольной и сдвиговой ползучести, задаваемых в одномерных базовых экспериментах.

*3.1. Определение параметров ядер ползучести в базовых экспериментах.* В качестве базовых экспериментов рассматриваются испытания тонкостенных трубчатых образцов на ползучесть при одноосном растяжении и чистом кручении и постоянных значениях приложенных напряжений. По данным испытаний на одноосное растяжение определяются параметры ядер продольной ползучести  $K_{11}(t - \tau)$ , а на чистое кручение – параметры ядер сдвиговой ползучести  $K_{21}(t - \tau)$ .

Параметры ядер продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении определяются по результатам аппроксимации экспериментальных значений функций ползучести соответствующими аналитическими выражениями ядер ползучести. Задача, исходя из (1.4) и (1.5), сводится к минимизации собственных функционалов [9]

$$F(\alpha_{11}, \beta_{11}, \lambda_{11}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\varepsilon_{11}(\sigma_k, t_i)}{\sigma_k} - \frac{1}{E} \left[ 1 + \lambda_{11} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{11})^n t^{(1+n)(1+\alpha_{11})}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_{11})]} \right] \right\}^2, \quad (3.1)$$

$$F(\alpha_{21}, \beta_{21}, \lambda_{21}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\gamma_{21}(\tau_k, t_i)}{\tau_k} - \frac{1}{G} \left[ 1 + \lambda_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{21})^n t^{(1+n)(1+\alpha_{21})}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_{21})]} \right] \right\}^2. \quad (3.2)$$

Здесь  $\sigma_k, \tau_k$  – набор постоянных значений нормальных и касательных напряжений;  $\varepsilon_{11}, \gamma_{21}$  – значения продольных линейных и угловых деформаций ползучести;  $t_i$  – временные интервалы разбиения функции ползучести;  $i$  – число интервалов разбиения;  $\alpha_{11}, \beta_{11}, \lambda_{11}$  – параметры ядер продольной ползучести;  $\alpha_{21}, \beta_{21}, \lambda_{21}$  – параметры ядер сдвиговой ползучести.

*3.2. Определение параметров ядер сдвиговой и объемной ползучести.* Из условия (2.7) следует, что параметры  $\alpha_s, \beta_s, \lambda_s$  ядер сдвиговой ползучести  $K_s(t - \tau)$  при сложном напряженном состоянии, исходя из усло-

вия (2.7), совпадают с параметрами  $\alpha_{21}$ ,  $\beta_{21}$ ,  $\lambda_{21}$  ядер сдвиговой ползучести при чистом кручении, так что

$$\alpha_s = \alpha_{21}; \quad \beta_s = \beta_{21}; \quad \lambda_s = \lambda_{21}. \quad (3.3)$$

Методика определения последних изложена в разделе 3.1.

Параметры  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$ ,  $\lambda_v$  ядер объемной ползучести  $K_v(t - \tau)$  при сложном напряженном состоянии определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер  $K_{vj}(t)$  дробно-экспоненциальной функцией (1.5). Дискретные значения ядер  $K_{vj}(t)$  рассчитываются по уравнению (2.9) для нескольких моментов времени  $t_j$ .

В области сингулярности ( $t \rightarrow 0$ ) дискретные значения ядер объемной ползучести учитываются с помощью весовых функций [10]. В этом случае задача определения параметров ядер объемной ползучести сводится к минимизации функционала

$$F(\alpha_v, \beta_v, \lambda_v) = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) \left[ K_v(t_j) - \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n \left\{ K_v(t_j) - \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v) \right\}^2, \quad (3.4)$$

где для весовой функции  $p_j(t)$  имеет место равенство

$$p_j(t) = \left\{ 1 + \left[ \frac{K_v(t_j) - \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v)}{K_v(t_*) - \lambda_v K_v(t_*, \alpha_v, \beta_v)} \right]^m \right\}^{-1},$$

причем  $p_j(t) \rightarrow 0$  при  $\lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v) \rightarrow \infty$  и  $p_j(t) = 1$ , если  $K_v(t_j) = \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v)$ . Здесь  $K_v(t_j)$  – набор дискретных значений ядер объемной ползучести;  $K_v(t, \alpha_v, \beta_v)$  – функция, задающая ядро объемной ползучести аналитически;  $t_*$  – некоторый критический момент времени, ограничивающий область проявления динамических эффектов;  $n_*$  – число дискретных значений ядер ползучести в области  $\{0, t_*\}$ ;  $m$  – порядок моментов разностей ( $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

*3.3. Определение параметров ядер сдвиговой и объемной релаксации.* Ядра релаксации  $R_s(t - \tau)$  и  $R_v(t - \tau)$  в (1.2) являются резольвентами ядер ползучести  $K_s(t - \tau)$  и  $K_v(t - \tau)$  в (1.1). Эти ядра связаны интегральным соотношением

$$-K(t) + R(t) = \lambda \int_0^t K(t - \tau) R(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

из которого следует, что ядро релаксации  $R(t)$  может быть построено по ядру ползучести  $K(t)$ , а параметры соответствующих ядер будут совпадать.

Параметры  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$ ,  $\lambda_v$  ядер объемной релаксации  $R_v(t - \tau)$  в (1.2) могут быть также определены по результатам аппроксимации дискретных значений ядер  $\bar{R}_{vj}(t)$  дробно-экспоненциальной функцией (1.5). Дискретные значения ядер  $\bar{R}_{vj}(t)$  вычисляются по уравнению (2.14) для нескольких моментов времени  $t_j$ .

Задача определения параметров ядер объемной релаксации, по аналогии с задачей нахождения параметров ядер объемной ползучести, согласно (3.4), сводится к минимизации функционала

$$F(\bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v, \bar{\lambda}_v) = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) \left[ \bar{R}_v(t_j) - \lambda_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_*}^n \left\{ \bar{R}_v(t_j) - \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v) \right\}^2, \quad (3.6)$$

где весовая функция  $p_j(t)$  задается соотношением

$$p_j(t) = \left\{ 1 + \left[ \frac{\bar{R}_v(t_j) - \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)}{\bar{R}_v(t_*) - \bar{\lambda}_v R_v(t_*, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)} \right]^m \right\}^{-1},$$

причем  $p_j(t) \rightarrow 0$  при  $\bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v) \rightarrow \infty$  и  $p_j(t) = 1$ , если  $\bar{R}_v(t_j) = \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)$ . Здесь  $\bar{R}_v(t_j)$  – набор дискретных значений ядер объемной релаксации;  $R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)$  – функция, задающая ядро объемной релаксации аналитически. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (3.4).

**4. Экспериментальная апробация.** Метод определения параметров ядер сдвиговой и объемной ползучести при сложном напряженном состоянии, изложенный в разделах 2 и 3, апробирован экспериментально на задаче расчета деформаций ползучести тонкостенных трубчатых образцов при нагружении растяжением с кручением.

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}(t)$  представим в виде

$$\sigma_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

где  $\sigma_{11}$  – нормальное растягивающее напряжение;  $\tau_{21}$  – касательное напряжение кручения;  $h(t)$  – единичная функция Хевисайда.

Деформации продольной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  и деформации сдвиговой

ползучести  $\varepsilon_{21}(t)$  найдем на основе определяющего уравнения (2.1). Из (2.1) с учетом (1.5) и (4.1) получаем равенства

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{3G} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_s)^n (t)^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + \frac{1}{9B} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_v)^n (t)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}; \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \tau_{21} \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_s)^n (t)^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\}, \quad (4.3)$$

где

$$s_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{11}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}, \quad s_{21} = \tau_{21}.$$

Рассматривались продольная и сдвиговая ползучесть тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена низкого давления. В таблице приве-

$E$ , МПа	$G$ , МПа	$B$ , МПа	$\nu$	$K_{11}(t), R_{11}(t)$ , час <sup>-1</sup>			$K_s(t), R_s(t)$ , час <sup>-1</sup>			$K_v(t), R_v(t)$ , час <sup>-1</sup>		
				$\alpha_{11}$	$\beta_{11}$	$\lambda_{11}$	$\alpha_s$	$\beta_s$	$\lambda_s$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\lambda_v$
981	336	4088	0,46	-0,57	0,95	8,96	-0,45	1,78	10,45	-0,80	1,35	87,87

дены значения упругих постоянных и значения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности, вычисленные по изложенной в разделе 3 методике. Экспериментальные данные заимствованы из работы [11].

Результаты расчетов деформаций продольной и сдвиговой ползучести тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена низкого давления для различной комбинации нормальных и касательных напряжений, выполненных по уравнениям (4.2) и (4.3) с использованием приведенных в таблице значений упругих постоянных и параметров ядер ползучести, представлены на рис. 1 в форме кривых ползучести. Кривые продольной (—) и сдвиговой (---) ползучести построены при напряжениях  $\sigma_{11} = 2,96 \text{ МПа}$  и  $\tau_{21} = 1,48 \text{ МПа}$  (кривые 1) и напряжениях  $\sigma_{11} = 1,96 \text{ МПа}$  и  $\tau_{21} = 1,96 \text{ МПа}$  (кривые 2). Выбранные комбинации нормальных и касательных напряжений удовлетворяют фиксированному значению интенсивности напряжений  $\sigma_i = 3,92 \text{ МПа}$  с углами вида напряженного состояния  $\psi_1 = -0,707$  и  $\psi_2 = -0,447$ .

По результатам расчетов деформаций продольной  $\varepsilon_{11}(t)$ , поперечной  $\varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) = \nu \varepsilon_{11}(t)$  и сдвиговой  $\varepsilon_{21}(t)$  ползучести вычислены значения интенсивности напряжений  $\sigma_i$ . Результаты расчетов (штриховые линии) сопоставлены на рис. 2 с экспериментальными данными (точки) при зна-

ченнях  $\sigma_i = 2,59 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{11} = 1,96 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{21} = 0,98 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_i = 3,92 \text{ МПа}$  (кривая 1);  $\sigma_{11} = 2,96 \text{ МПа}$ ,  $\tau_{21} = 1,48 \text{ МПа}$  и  $\sigma_{11} = \tau_{21} = 1,96 \text{ МПа}$  и  $\sigma_i = 5,88 \text{ МПа}$  (кривая 2);  $\sigma_{11} = \tau_{21} = 1,94 \text{ МПа}$  (кривая 3). Результаты расчетов, как видно, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными в области малых значений  $\sigma_i$ . Макси-

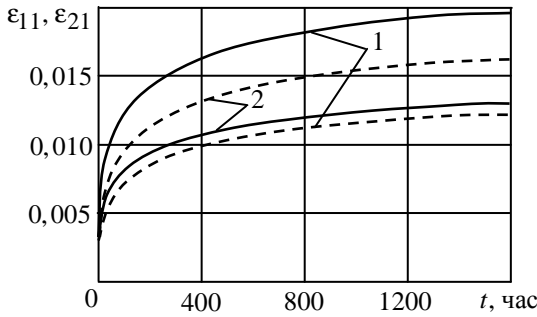


Рис. 1

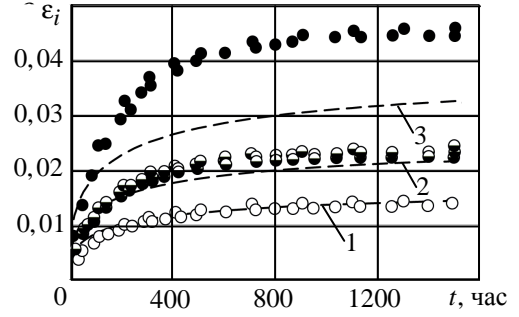


Рис. 2

мальная погрешность не превышает 15%. В области больших значений  $\sigma_i$  погрешность достигает 50% и связана с проявлением нелинейности вязкоупругих свойств.

**РЕЗЮМЕ.** Встановлено залежності між ядрами зсувної та об'ємної повзучості та релаксації ізотропних лінійно-в'язкоупругих матеріалів за умов складного напруженого стану та ядрами повздовжньої та зсувної повзучості за умов одновісного розтягу та чистого скручення. Визначальні рівняння в'язкоупругості обрано у формі суперпозиції рівнянь зсувної та об'ємної повзучості. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційними функціями Работнова.

**Ключові слова:** лінійна в'язкоупругість, ізотропні матеріали, складний напружений стан, ядра повзучості, ядра релаксації, дробово-експоненційні ядра.

**SUMMARY.** The functions between kernels of shear and volumetric creep and relaxation of isotropic linear-viscoelastic materials under the complex stress state and kernels of longitudinal and shear creep under the uniaxial tension and pure torsion have been stated. The constitutive equations of the viscoelasticity theory have been chosen in the form of the superposition of shear and volumetric creep equations. The heredity kernels are given by the Rabotnov's fractional-exponential functions.

**Key words:** linear viscoelasticity, isotropic materials, the complex stress state, creep kernels, relaxation kernels, fractional-exponential kernels.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Васюков Б. С. Некоторые вопросы ползучести полиэтиленовых труб // Прочность материалов и конструкций: Тр. ЛПИ. № 278. – Л.: Машиностроение, 1967. – С. 13–19.
2. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С. Определение параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 5(51). – С. 26–35.
3. Голуб В. П., Фернати П. В., Ляшенко Я. Г. К задаче определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности линейных вязкоупругих материалов // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 12–25.

4. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Рагулина В. С. Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций // Теорет. и прикладная механика.– 2009.– Вып. 46.– С. 70–80.
5. Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении.– М.: Машиностроение, 1977.– 248 с.
6. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости.– М.: Наука, 1970.– 240 с.
7. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация.– М.: Высшая шк., 1976.– 277 с.
8. Колтунов А. А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) // Механика полимеров.– 1969.– № 4.– С. 754–758.
9. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости.– М.: Мир, 1974.– 340 с.
10. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.– М.: Наука, 1977.– 384 с.
11. Findley W. N., Lai J. S., and Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials.– Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976.– 367 p.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 12.10.2013*



УДК 539.376

Я. В. ПАВЛЮК, канд. тех. наук, А. В. РОМАНОВ, канд. тех. наук,  
П. В. ФЕРНАТИ, канд. тех. наук.

## МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

*Рассмотрен метод определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости Работнова. Отмечена неоднозначность минимизации функционала, содержащего в качестве переменных, как параметры ядра наследственности, так и численные значения изохронны для начального момента времени. Также отмечена неинвариантность этой изохроны относительно структуры ядра. Показано преимущество модификации представленного метода, позволяющего устранить данную неоднозначность за счет введения в условие подобия изохрон, положенного в основу модели Работнова, стандартной экспериментальной диаграммы мгновенного растяжения, как изохроны для нулевого момента времени.*

**Ключевые слова:** нелинейная вязкоупругость, ядро наследственности, подобие изохронных диаграмм, диаграммы мгновенного растяжения, минимизация функционала.

Одной из наиболее перспективных, допускающих большую гибкость при описании вязкоупругих свойств реальных материалов как, например, некоторых полимеров, в том числе армированных, стеклопластиков, металлов, а также горных пород, представляется нелинейная модель вязкоупругости Ю. Н. Работнова [2]. В этой модели предложена методика, апробированная на большом количестве различных материалов, методика, согласно которой параметры модели определяются путем минимизации функционала, содержащего в качестве переменных как параметры ядра наследственности, так и ряд значений гипотетической изохроны для нулевого момента времени, что приводит из-за большого числа переменных к неоднозначности его минимизации. В работе [4] предложено развитие этой модели, где вместо гипотетической изохроны для нулевого момента времени используется стандартная экспериментальная диаграмма мгновенного растяжения.

В данной работе представлен сравнительный анализ классического метода Работнова и его модификации, устраняющей неоднозначность определения параметров модели.

**1. Постановка задачи.** Определяющее уравнение в нелинейной теории вязкоупругости Ю. Н. Работнова задается интегральным уравнением [2]

$$\phi(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon(t)$  – полная деформация, которая включает упругую составляющую

$\varepsilon^e$  и деформацию ползучести  $\varepsilon^c(t)$  в момент времени  $t$ ;  $\sigma(t)$  – действующее напряжение в момент времени  $t$ ;  $\phi(\cdot)$  – функция, которая задает изохронную диаграмму мгновенного деформирования для  $t = 0$ ;  $K(t - \tau)$  – ядро ползучести;  $\lambda$  – реологический параметр ( $\lambda > 0$ );  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – время, которое предшествует моменту наблюдения.

В основе модели (1.1) и метода определения ее параметров положена гипотеза подобия изохронных диаграмм ползучести. Условие подобия задается соотношением

$$\phi_t(\varepsilon_i(0)) = [1 + G(t_j)]\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (1.2)$$

которое задает подобие в плоскости  $(\phi, \varepsilon)$  для каждого из фиксированных уровней деформаций  $\varepsilon_i(t)$  в интервале  $i = \overline{1, \ell}$  по параметру  $t_j$ . Здесь  $1 + G(t_j)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – функция подобия, которая определяется для каждой изохронной диаграммы ползучести;  $\phi_t(\cdot)$  – функции, которые задают напряжение  $\sigma$  по изохронным диаграммам ползучести для каждого из моментов времени  $t_j$ .

В качестве альтернативной методики определения параметров модели рассматривается методика, предложенная в [1] и основанная на модифицированной гипотезе подобия, согласно которой в условие подобия входит экспериментальная диаграмма растяжения, как изохрона для нулевого момента времени. В этом случае условие подобия представляется в виде

$$\phi_0(\varepsilon_i(0)) = [1 + G(t_j)]\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (1.3)$$

где  $\phi_0(\cdot)$  – функция, аппроксимирующая экспериментальную диаграмму мгновенного растяжения. Независимая от времени нелинейность процессов ползучести и релаксации в (1.1) определяется нелинейной функцией  $\phi(\varepsilon(t))$ , задаваемой в работе кубическим сплайном

$$\phi(\varepsilon) = a_0 + a_{1,j}\varepsilon + a_{2,j}\varepsilon^2 + a_{3,j}\varepsilon^3, \quad (1.4)$$

а обратная ей функция  $\psi(\sigma)$  – сплайном

$$\psi(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3, \quad (1.5)$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3$  и  $b_0, b_1, b_2, b_3$  – коэффициенты сплайна. В качестве ядра наследственности используется дробно-экспоненциальная функция

$$K(t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1 + \alpha)(1 + n)]}, \quad (1.6)$$

которая используется в данной работе, как ядро ползучести. Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, причем  $-1 < \alpha < 0$ , а  $\beta > 0$ .

В данной работе проведем сравнительный анализ метода Ю. Н. Работнова и метода, основанного на гипотезе единой изохронной

диаграммы ползучести, включающей экспериментальную диаграмму растяжения как изохроны для нулевого момента времени. С этой целью определены параметры дробно-экспоненциальных ядер наследственности для ряда нелинейно-вязкоупругих материалов согласно двум рассмотренным методам и выполнена их экспериментальная апробация путем определения кривых ползучести.

В качестве объектов исследования выбраны полипропилен, микропластик, политетрафторэтилен (ПТФЭ), нейлон FM 10001 и плексиглас. Экспериментальные данные заимствованы соответственно из работ [3–6, 8].

## 2. Метод основанный на подобии изохронных диаграмм ползучести.

Подобие изохронных диаграмм ползучести предполагает, что любую изохрону можно совместить с другой изохроной, если умножить ее ординаты на коэффициент подобия, зависящий от времени.

*2.1. Метод определения параметров модели.* Определяющее уравнение (1.1) теории является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтерра-Фреше и содержит две функции  $\phi(\cdot)$  и  $K(\cdot)$ , подлежащие определению из эксперимента.

Задача определения дискретных значений функции  $\phi(\varepsilon_i, t_j = 0)$ , параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  дробно-экспоненциального ядра ползучести (1.6) и реологического параметра  $\lambda$ , исходя из условия подобия (1.2), сводится, согласно методу Работнова Ю.Н. [2], к минимизации функционала

$$\Phi(\alpha, \beta, \lambda, \overline{\phi_t(\varepsilon_i, t_j = 0)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k (\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) - \overline{\phi_t(\varepsilon_i, t_j = 0)}) / \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (\tau_j)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right]^2, \quad (2.1)$$

где  $\overline{\phi_t(\varepsilon_i, t_j = 0)}$  – осредненные дискретные значения диаграммы мгновенного деформирования, а в качестве ядра наследственности использована дробно-экспоненциальная функция (1.6).

*2.2. Численная реализация метода.* Функционал (2.1) содержит в качестве аргументов реологические параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  и ряд значений функции  $\overline{\phi_t(\varepsilon_i, t_j = 0)}$  для нескольких уровней деформации  $\varepsilon_i$ , количество которых в данной работе равно 5, индекс  $i$  в (2.1) изменяется от 1 до 5 и, соответственно, функционал (2.1) содержит 8 неизвестных параметров. Минимизация функционала осуществляется с использованием итерационного метода Левенберга-Маркардта [7].

Реализация метода осуществляется в работе на примере ползучести полипропилена при  $\theta = 30^\circ\text{C}$  и микропластика при  $\theta = 20^\circ\text{C}$ . Значения реологических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  и набор дискретных значений функции  $\overline{\phi_t(\varepsilon_i, t_j = 0)}$ , найденных для исследованных материалов в результате минимизации функционала (2.1) приведены в табл. 1. В этой таблице также приведены значения коэффициентов функции  $\psi(\sigma)$  для исследо-

Таблица 1

Полипропилен				Микропластик			
$\varepsilon_i$	$\overline{\phi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$ МПа	Параметры модели		$\varepsilon_i$	$\overline{\phi(\varepsilon_i, t_j = 0)}$ МПа	Параметры модели	
0	0	$\alpha$	-0,565	0	0	$\alpha$	-0,7172
0,01	6,29	$\beta$ , час <sup>-(<math>\alpha+1</math>)</sup>	-0,122	0,001	120,5	$\beta$ , час <sup>-(<math>\alpha+1</math>)</sup>	-0,04385
0,02	11,93	$\lambda$ , час <sup>-(<math>\alpha+1</math>)</sup>	0,138	0,010	1018	$\lambda$ , час <sup>-(<math>\alpha+1</math>)</sup>	0,04385
0,03	16,3	$b_1$	0,00188	0,020	1859	$b_1$	$8,18 \cdot 10^6$
0,04	19,51	$b_2$	$-6,4 \cdot 10^5$	0,025	2269	$b_2$	$1,92 \cdot 10^9$
0,05	21,81	$b_3$	$3,8 \cdot 10^6$	0,030	2670	$b_3$	$-2,9 \cdot 10^{13}$

ванных материалов. На рис. 1 штриховыми линиями нанесены аппроксимации сплайном (1.2) дискретных значений  $\phi_t(\varepsilon_i, t_j = 0)$  диа-

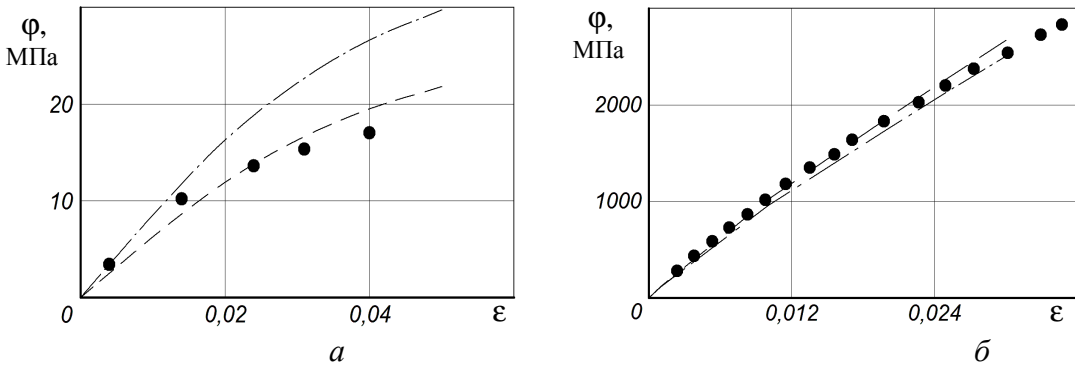


Рис. 1.

грамм мгновенного деформирования для полипропилена (а) и для микропластика (б), вычисленные на основе (2.1). Точками нанесены экспериментальные значения диаграмм мгновенного деформирования.

**2.3. Экспериментальная апробация метода.** Зависимость деформации  $\varepsilon$  от времени  $t$  при нагружении постоянными напряжениями  $\sigma_k$  на основе (1.1) с учетом (1.5) и (1.6) записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \sum_{s=0}^H b_s \left\{ \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) \sigma_k \right\}^s. \quad (2.2)$$

Значения деформаций ползучести  $\varepsilon(t)$ , вычисленные по уравнению (2.2) с использованием значений коэффициентов  $b_i$  и параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\lambda$ , приведенных в табл. 1, сопоставлены на рис. 2 с экспериментальными данными для полипропилена при  $\sigma_k = 3,4$  (○), 10,2 (◐), 13,6 (◑), 15,3 (◒), 17,0 (●) МПа (а) и микропластика при  $\sigma_k = 331$  (○), 1000 (◐), 1660 (◑),

2330 (●) МПа. (б). Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, экспериментальные данные – точками.

На рис. 1, в качестве примера, штрихпунктирными линиями нанесены диаграммы мгновенного деформирования, рассчитанные исходя из минимизации функционала (2.1) где в качестве ядра наследственности выбрано ядро Абеля [1]. Расхождение между значениями  $\varphi_t[\varepsilon(0)]$ , для микропластика (рис. 1,б) оказалось, как видно, несущественным. Однако для полипропилена это расхождение достигает 35%. Характерно, что различие в восстановленных диаграммах мгновенного деформирования практически не сказывается на точности расчетов деформаций ползучести при постоянных напряжениях (расчеты с использованием ядра Абеля

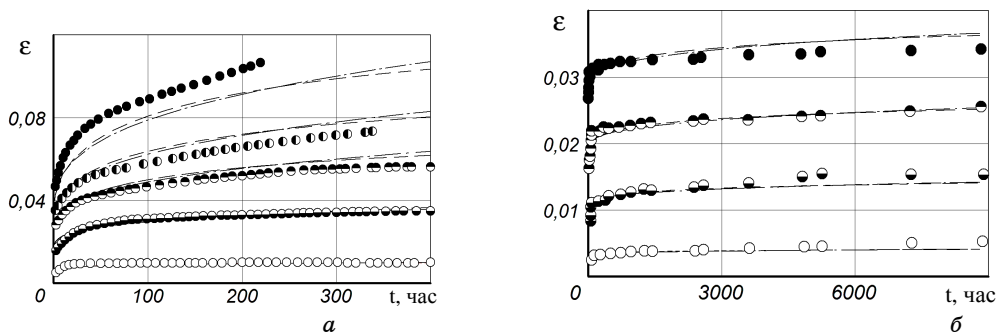


Рис. 2.

показаны на рис. 2 штрихпунктирными линиями). Это расхождение может оказать влияние на точность расчетов деформаций ползучести при сложных режимах нагружения.

**3. Метод основанный на гипотезе единой изохронной диаграммы.** Согласно данного метода параметры модели находятся в два этапа. На первом этапе находятся параметры функции аппроксимирующей экспериментальную диаграмму растяжения, на втором находятся реологические параметры путем аппроксимации численных значений функции подобия.

**3.1. Метод определения параметров модели.** Существование единой изохронной диаграммы деформирования в соответствии с (1.3) может быть обосновано приведением исходных изохронных диаграмм ползучести к диаграмме мгновенного деформирования с помощью усредненной функции подобия  $\overline{1 + G(t_j)}$ . Величина  $\overline{1 + G(t_j)}$  определяется из соотношения

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^l (\phi_0(\varepsilon_i, 0) \phi_t(\varepsilon_i, t_j))}{\sum_{i=1}^l (\phi_t(\varepsilon_i, t_j))^2}, \quad (3.1)$$

где  $\phi_0(\varepsilon_i, 0)$  – функция, определенная путем аппроксимации экспериментальной диаграммы мгновенного растяжения.

В качестве примера на рис. 3 приведена единая изохронная диаграмма деформирования, построенная согласно (1.3) для микропластика (а) и ПТФЭ (б). Приведенные изохронные диаграммы ползучести, полу-

ченные с помощью усредненной функции подобия (3.1), показаны квадратами. Толстыми сплошными линиями показаны аппроксимации диаграммы мгновенного деформирования  $\phi_0(\varepsilon)$  уравнением (1.4). Приведенные изохронные диаграммы ползучести укладываются, как видно в узкий

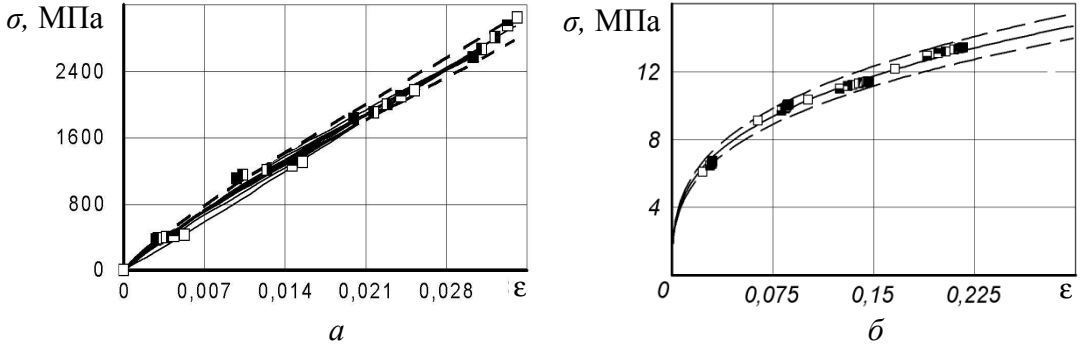


Рис.3

пучок. Разброс приведенных изохронных диаграмм ползучести относительно аппроксимации диаграммы мгновенного деформирования практически не превышает  $\delta = \pm 5\%$  (штриховые линии).

Задача определения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  дробно-экспоненциального ядра ползучести (1.6) и реологического параметра  $\lambda$ , исходя из условия подобия (1.3), сводится к минимизации функционала

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \left\{ \overline{(1 + G(t_j))_{\text{exp}}} - \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1 + \alpha)(1 + n)]} \right] \right\}^2, \quad (3.2)$$

который в качестве переменных содержит только реологические параметры.

**3.2. Численная реализация метода.** Минимизация функционала (3.2) осуществляется с использованием итерационного метода Ливенберга-Маркардта [7]. Значение найденных таким образом параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\lambda$  для исследованных материалов приведенные в табл. 2, а значения коэффициентов сплайн аппроксимации, задающих обращенную диаграмму мгновенного деформирования (1.5), в табл. 3.

Таблица 2

Материалы	Параметры ядра		
	$\alpha$	$\beta, \varphi^{-(1+\alpha)}$	$\lambda, \varphi^{-(1+\alpha)}$
Микропластик	-0,702	0,500	0,0322
ПТФЭ	-0,632	0,038	0,0123
Нейлон FM 10001	-0,555	0,662	0,8730
Плексиглас	-0,591	0,014	0,0200

**3.3. Экспериментальная апробация метода.** Значение деформаций ползучести нелинейно вязкоупругих материалов, вычисленных по уравнению (2.2) с использованием приведенных в табл. 2, 3 значений пара-

метров. На рис. 4 сопоставлены с экспериментальными данными для микропластика (а), ПТФЭ (б), нейлоновых волокон (в), плексигласа (в). Ре-

зультаты расчета нанесены штриховыми линиями, экспериментальные данные – точками.

Таблица 3

Материал	$j$	$E_j$	$b_0$ , МПа	$b_1$ , МПа	$b_2$ , МПа	$b_3$ , МПа
Микропластик	0	0	0	$1,33 \cdot 10^{-14}$	$1,38 \cdot 10^{-9}$	$8,25 \cdot 10^{-6}$
	1	0,1				
ПТФЭ	0	0	0	$1,99 \cdot 10^{-3}$	$-1,40 \cdot 10^{-4}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$
	1	0,3				
Нейлон FM 10001	0	0	0	$8,09 \cdot 10^{-6}$	0,000423	$8,63 \cdot 10^{-7}$
	1	0,01				
Плексиглас	0	0	0	0,331	$3,89 \cdot 10^{-6}$	$8,65 \cdot 10^{-9}$
	1	0,018				

Экспериментальные значения ползучести для микропластика получены при напряжениях  $\sigma_k$  равных 331 (○), 1000 (◐), 1660 (◑), 2330 (●) МПа, для ПТФЭ при напряжениях  $\sigma_k$  равных 5 (○), 7,5 (◐), 8,5 (◑), 10 (●) МПа, для нейлоновых волокон FM 10001 при  $\sigma_k$  равных 6,2 (○), 12,41 (●) МПа и для плексигласа при напряжениях  $\sigma_k$  равных 11 (○), 13,78 (◐), 17,23 (◑), 18,58 (◒), 20 (◓), 22,44 (◔), 25,51 (●) МПа. Максимальная погрешность между результатами расчета и экспериментальными данными составила 13,8% и получена для ПТФЭ.

Таким образом использование в качестве изохроны для нулевого

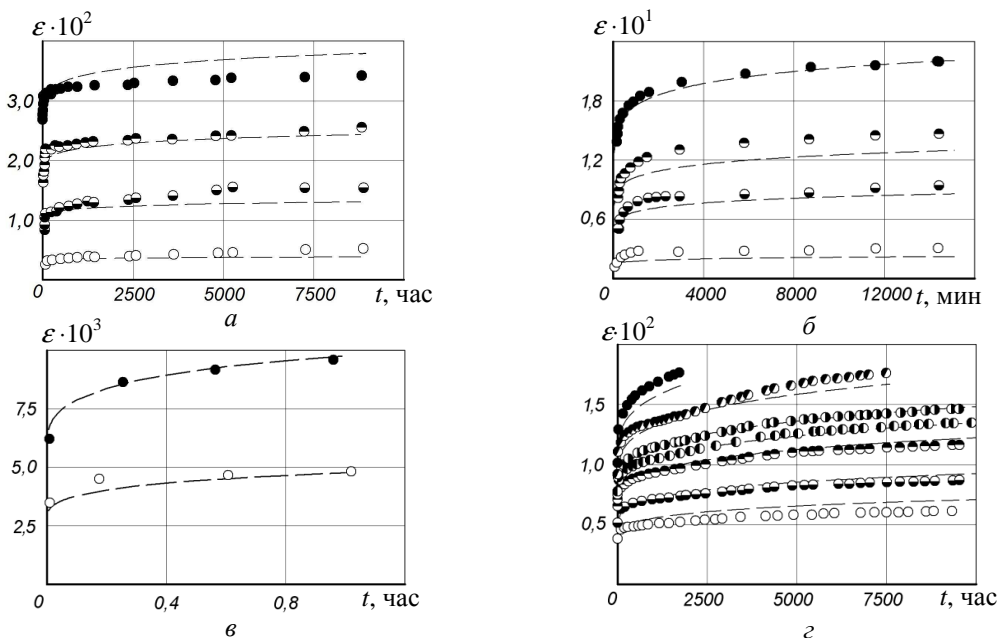


Рис.4

момента времени стандартной экспериментальной диаграммы мгновенного растяжения, отражающей, важные механические свойства материала, позволяет с одной стороны устранить при определении параметров ядер наследственности неоднозначность минимизации функционала, а с другой избежать неинвариантности этой изохроны относительно структуры ядра.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто метод визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості в нелінійній теорії в'язкопружності Работнова. Відзначена неоднозначність мінімізації функціоналу, що містить в якості змінних, параметри ядра спадковості і числові значення ізохрон для початкового моменту часу. Також відзначено неінваріантність цієї ізохроні відносно структури ядра. Показано перевагу модифікації запропонованого методу, який дозволяє усунути дану неоднозначність за рахунок введення в умову подібності ізохрон, покладеного в основу моделі Работнова, стандартної експериментальної діаграми миттєвого розтягу, як ізохроні для нульового моменту часу.

**Ключові слова:** нелінійна в'язкопружність, ядро спадковості, подібність ізохронних діаграм, діаграми миттєвого розтягу, мінімізація функціоналу.

**SUMMARY.** Method for determining the parameters of fractional exponential heredity kernels in nonlinear elasticity theory of Rabotnov is considered. Distinguished ambiguity of minimization a functional containing as variables as parameters to the kernel of heredity, and the numerical values for isochronous of initial-value time. Advantages of non-invariance to the kernel structure isochrones are analyzed. Proposed method modification allows to resolve ambiguity by introducing the condition of similarity of isochrones that underlies of Rabotnov model, the standard experimental diagrams instant stretching as isochrones for null time.

**Key words:** nonlinear viscoelasticity, heredity kernel, similarity of isochronous charts, chart of instant stretching, functionality minimization.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В. Об одном подходе к построению реологической модели среды с упрочнением // Прикладная механика.– 2004.– Т. 40 №7.– С. 81–91.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.– М.: Наука, 1977.– 384 с.
3. Павлов П. А. Кодакова О. Н. Ползучесть полиэтилена при плоском напряженном состоянии в условиях нестационарного нагружения // Механика конструкционных материалов.– 1980.– № 5.– С. 793–801.
4. Соколов Е. А., Максимов Р. Д. Возможности предсказания ползучести армированного полимерными волокнами пластика по свойствам компонентов // Механика полимеров.– 1978.– № 6.– С. 1005–1012.
5. Marin J., Pao Yoh-Han. On the accuracy of extrapolated creep-test relations for plexiglass subjected to various stresses // Trans. Of the ASME, October, 1952.– Vol. 74.– № 7.– P. 1231–1240.
6. Marin J., Webber A. C., Weissmann G. F. Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion // Proc. ASTM.– 1954.– Vol. 54.– P. 1313–1343.
7. More J. J. Garbow B. S., Hillstrom K. E. Users guide to minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74.– 1980.– P. 640–650.
8. Ward I. M., Onat E. T. Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene // J. Mech. Phys. Solids.– 1963.– Т. 11, N4.– P. 217–229.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 15.10.2013*



УДК 539.3

*В. С. КИРИЛЮК*, д-р физ.-мат. наук,  
*О. И. ЛЕВЧУК*, канд. физ.-мат. наук

### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ВЫДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА ПРИ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ ДВУХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

*Решена задача Герца о контактном взаимодействии двух электроупругих трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения при трении скольжения. Задача сведена к решению интегрального уравнения. В замкнутом виде найдено выражение для контактного давления, получены соотношения для определения неизвестных значений полюсов площадки контакта электроупругих тел эллиптической формы. Установлено влияние тепловыделения при трении скольжения на распределение контактного давления, геометрию и размеры площадки контакта двух пьезоэлектрических тел. Как частный случай, из полученных выражений следуют параметры контакта двух трансверсально-изотропных упругих тел при трении скольжения.*

**Ключевые слова:** термоэлектроупругость, пьезоэлектрическое тело, контактная задача, трение скольжения, тепловыделение, параметры контакта.

Контактное взаимодействие упругих изотропных тел изучено в работах многих авторов. Важные результаты исследований в этой области содержатся в монографиях [2, 4, 9] и статьях [8, 11]. Выделение тепла, возникающее на поверхностях тел при трении их поверхностей, а также внешние температурные воздействия в отдельных случаях приводят к значительному нагреву контактирующих тел, изменению распределения контактного давления и самой области контакта. Контактные задачи для изотропных упругих тел с учетом температурных воздействий рассмотрены в работах [3, 8] и др. Задача Герца в трехмерной постановке, учитывающая тепловыделение при трении скольжения упругих изотропных тел, решена в [1]. Для трансверсально-изотропных упругих тел контактное взаимодействие при учете температурных воздействий изучено в работах [5, 10], а для электроупругих трансверсально-изотропных тел – в [6, 12]. При этом в работах [5, 6] контактное взаимодействие трансверсально-изотропных упругих и электроупругих тел с учетом выделения тепла исследовано на основе предположения об известном распределении температурного поля в области контакта, а в работе [7] – с учетом тепловыделения при трении скольжения упругих тел. В то же время, задача о контактном взаимодействии двух электроупругих трансверсально-изотропных тел, принимающая в расчет тепловыделение при трении скольжения пьезоэлектрических тел, не рассматривалась.

В настоящей работе дано решение трехмерной контактной задачи термоэлектроупругости для двух электроупругих трансверсально-изотропных тел с учетом тепловыделения при трении скольжения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим два пьезоэлектрических тела, ог-

раниченных выпуклыми поверхностями и соприкасающихся в точке 0. Будем считать, что оси  $z_1^{(1)}$ ,  $z_2^{(2)}$ , проведенные из общей точки касания вглубь тел, являются осями симметрии электроупругих трансверсально-изотропных тел, поверхности пьезоэлектрических тел не содержат электродных покрытий. На основе подхода Герца электроупругие тела заменим электроупругими полупространствами, а площадку контакта будем разыскивать в виде эллиптической области с неизвестными полуосями. Как и в случае упругих изотропных и трансверсально-изотропных тел [1, 7], будем считать, что в каждой точке площадки контакта сумма интенсивности тепловых потоков, направленных в каждое тело, равна интенсивности тепловыделения за счет трения, на поверхностях контакта равны друг другу значения температур, а тепловые потоки на свободных поверхностях контактирующих тел равны нулю.

Граничные условия для нахождения распределения стационарного температурного поля, возникающего при трении скольжения электроупругих тел, принимают вид

$$k_{33}^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial z_1^{(1)}} + k_{33}^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial z_2^{(2)}} = -\frac{vfp}{J}, \quad T_1 = T_2 \text{ при } (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z_1^{(1)}} = \frac{\partial T_2}{\partial z_2^{(2)}} = 0 \text{ при } (x, y) \notin \Omega, \quad (2)$$

где  $T_1, T_2$  – значения температур,  $v$  – скорость относительного скольжения тел,  $f$  – коэффициент трения,  $J$  – механический эквивалент тепла,  $p$  – давление на площадке контакта  $\Omega$ .

Для силовых и электрических полей (при неэлектродированных поверхностях пьезоэлектрических тел) на границе раздела имеем

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad D_z = 0, \quad z = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega. \quad (3)$$

На площадке контакта  $\Omega$

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = -p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Здесь  $p(x, y)$  – неизвестное контактное давление, которое зависит от силы вдавливания тел и связано с температурным полем, возникающем при трении скольжения тел.

Условие в перемещениях принимает вид

$$u_z(x, y) = u_z^{(1)}(x, y, 0) + u_z^{(2)}(x, y, 0) = \delta - \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

где  $\delta$  – сближение упругих тел, определяемое в процессе решения задачи,  $\phi_i(x, y)$  – уравнения поверхностей электроупругих тел.

Уравнение стационарной теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + n_4 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

в котором  $n_4 = \lambda_{33} / \lambda_{11}$  – отношение коэффициентов теплопроводности в

направлениях  $Oz$  и  $Ox$ . Температурное поле является гармонической функцией в системе координат  $(x, y, z_4)$ , где  $z_4 = z n_4^{-1/2}$ . Граничные условия (1), (2) в соответствующих координатах могут быть записаны в виде

$$\frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\sqrt{n_4^{(1)}}} \frac{\partial T_1}{\partial z_4^{(1)}} + \frac{\lambda_{33}^{(2)}}{\sqrt{n_4^{(2)}}} \frac{\partial T_2}{\partial z_4^{(2)}} = -\frac{vfp}{J}, \quad T_1 = T_2 \text{ при } (x, y) \in \Omega; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z_4^{(1)}} = \frac{\partial T_2}{\partial z_4^{(2)}} = 0, \text{ при } (x, y) \notin \Omega. \quad (6)$$

Температурные поля в каждом из полупространств, выраженные через контактное давление, представим в виде потенциалов простого слоя

$$T_i(x, y, z_4^{(i)}) = \frac{vf}{2\pi \left( \lambda_{33}^{(1)} / \sqrt{n_4^{(1)}} + \lambda_{33}^{(2)} / \sqrt{n_4^{(2)}} \right) J} \times \\ \times \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z_4^{(i)})^2}}. \quad (7)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что температурные поля, определяемые в каждом из полупространств по формулам (7), удовлетворяют уравнениям теплопроводности и граничным условиям (1), (2).

Уравнения стационарной термоэлектростатической упругости для пьезоэлектрического тела относительно перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и электрического потенциала  $\Psi$  (при отсутствии массовых сил, сосредоточенных зарядов и источников тепла в теле) имеют вид [12]

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = \beta_{11} T_{,x}, \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + \\ + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = \beta_{11} T_{,y}, \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = \beta_{33} T_{,z}, \\ (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \\ - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = -p_3 T_{,z}. \\ k_{11}(T_{,11} + T_{,22}) + k_{33} T_{,33} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $c_{11}^E$ ,  $c_{12}^E$ ,  $c_{13}^E$ ,  $c_{33}^E$ ,  $c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}$ ,  $e_{15}$ ,  $e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S$ ,  $\varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости;  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{33}$  – коэффициенты теплопроводности;  $\beta_{11}$ ,  $\beta_{33}$  – коэффициенты температур-

ных напряжений;  $p_3$  – пирозлектрическая постоянная.

Решение системы уравнений (8) согласно [12] выразим через пять следующих потенциальных функции  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) таким образом:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,x} + \Phi_{5,y}, & u_y &= \sum_{j=1}^4 \Phi_{j,y} - \Phi_{5,x}, \\ u_z &= \sum_{j=1}^4 k_j \Phi_{j,z}, & \Psi &= \sum_{j=1}^4 l_j \Phi_{j,z}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k_i$ ,  $l_i$  – постоянные, которые будут определены позже. При этом функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 5); \quad (10)$$

$v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями алгебраического уравнения [12]:

$$\begin{aligned} v^3(A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2(A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\ + v(A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_5 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E). \quad (12)$$

Значения  $k_j$ ,  $l_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в формулах (9) связаны с величинами  $v_j$  соотношениями

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (13)$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j, \quad d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Функция  $\Phi_4$  одновременно удовлетворяет двум уравнениям

$$\Phi_{4,zz} = \frac{m}{k^2} T, \quad \Phi_{4,xx} + \Phi_{4,yy} + k^2 \Phi_{4,zz} = 0, \quad (15)$$

где  $k^2 = \lambda_{33} / \lambda_{11}$  (отношение коэффициентов теплопроводности), а  $m$  – неизвестная постоянная. Значения  $k_j$ ,  $l_j$  представим в виде

$$\begin{aligned} k_j &= \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]}; \\ l_j &= \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})]} \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения неизвестных постоянных  $k_4$ ,  $l_4$  получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{aligned}
& (\beta_{33}(c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11}c_{33}^E + \beta_{11}c_{44}^E k^2) k_4 + (\beta_{33}(e_{15} + e_{31}) - \beta_{11}e_{33} + \\
& \quad + \beta_{11}e_{15} k^2) l_4 + (\beta_{33}(c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11}(c_{44}^E + c_{13}^E) k^2) = 0, \\
& (-p_3(c_{13}^E + c_{44}^E) - \beta_{11}e_{33} + \beta_{11}e_{15} k^2) k_4 + (-p_3(e_{15} + e_{31}) + \beta_{11}\varepsilon_{33}^S - \\
& \quad - \beta_{11}\varepsilon_{11}^S k^2) l_4 + (-p_3(c_{44}^E - c_{11}^E k^2) + \beta_{11}(e_{15} + e_{31}) k^2) = 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

Для  $m$  получаем выражение

$$m = \frac{\beta_{11} k^2}{c_{44}^E + (c_{13}^E + c_{44}^E) k_4 + (e_{15} + e_{31}) l_4 - c_{11}^E k^2}. \quad (18)$$

**Метод решения.** Для каждого из полупространств воспользуемся суперпозицией состояний. Для первого функцию  $\Phi_4$  возьмем в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_4^{(1,i)}(x, y, z_4^{(i)}) = F(x, y, z_4^{(i)}) = & \frac{vfm}{2\pi \left( \frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\sqrt{n_4^{(1)}}} + \frac{\lambda_{33}^{(2)}}{\sqrt{n_4^{(2)}}} \right) \mathcal{J}} \times \\
& \times \left[ \iint_S p(\xi, \eta) [z_4^{(i)} \ln(r_4^{(i)} + z_4^{(i)}) - r_4^{(i)}] d\xi d\eta \right]. \quad (19)
\end{aligned}$$

Здесь  $r_4^{(i)} = \sqrt{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z_4^{(i)})^2]}$ . При этом также положим

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{(1)}(x, y, z_1) = \alpha_1 F(x, y, z_1), \quad \Phi_2^{(1)}(x, y, z_2) = \alpha_2 F(x, y, z_2), \\
\Phi_3^{(1)}(x, y, z_3) = \alpha_3 F(x, y, z_3), \quad \Phi_5^{(1)} = 0, \quad (20)
\end{aligned}$$

и для определения постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  находим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{a_1}{\sqrt{v_1}} + \alpha_2 \frac{a_2}{\sqrt{v_2}} + \alpha_3 \frac{a_3}{\sqrt{v_3}} + \alpha_4 a_4 = 0, \\
\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + a_4 = 0, \quad \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 + d_4 = 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

При таком выборе  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)}|_{z=0} = D_z^{(1)}|_{z=0} = 0, \quad z = 0, \\
u_z^{(1)}|_{z=0} = \frac{vf}{\left( \lambda_{33}^{(1)} / \sqrt{n_4^{(1)}} + \lambda_{33}^{(2)} / \sqrt{n_4^{(2)}} \right) \mathcal{J}} \frac{\gamma_{Displacement}^{Piezo}}{2\pi} * \\
* \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln \left( \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (22)
\end{aligned}$$

и для  $\gamma_{Displacement}^{Piezo}$  получаем выражение

$$\gamma_{Displacement}^{Piezo} = m \left[ k_1 \frac{\alpha_1}{\sqrt{\nu_1}} + k_2 \frac{\alpha_2}{\sqrt{\nu_2}} + k_3 \frac{\alpha_3}{\sqrt{\nu_3}} + k_4 \frac{1}{\sqrt{\nu_4}} \right].$$

При переходе к трансверсально-изотропному и изотропному материалам получаем

$$\gamma_{Displacement}^{Piezo} \rightarrow \gamma_{Displacement}^{Trans} \rightarrow (1 + \nu)\alpha,$$

где  $\gamma_{Displacement}^{Trans}$  – известная величина [7].

Для второго состояния суперпозиции выберем потенциальные функции в виде

$$\Phi_i^{(2)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \beta_i^* \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i = 1, 2, 3) \quad (23)$$

в котором  $\rho_i = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z_i^2}$ ,  $\beta_i^*$  – постоянные. Также положим  $\Phi_4^{(2)} = \Phi_5^{(2)} = 0$ . В результате суперпозиции состояний получим интегральное уравнение для нахождения неизвестного контактного давления:

$$\begin{aligned} \delta - \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y) = & \frac{(\beta_1^* + \beta_2^*)}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln R d\xi d\eta + \\ & + \frac{(A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R}, \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\Omega$  – неизвестная область контакта,

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

$$\beta^* = \frac{\nu f}{\left( \frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\sqrt{n_4^{(1)}}} + \frac{\lambda_{33}^{(2)}}{\sqrt{n_4^{(2)}}} \right) \mathbf{J}} \gamma_{Displacement}^{Piezo}.$$

Для каждого из материалов значение  $A^{Piezo}$  находим в виде

$$A^{Piezo} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{\nu_j}. \quad (25)$$

При этом для определения  $\alpha_j^*$  получаем систему трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* \left( c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right) &= 1, \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* \left( c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right) / \sqrt{\nu_j} &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) = 0. \quad (26)$$

При переходе от электроупругого материала к трансверсально-изотропному упругому материалу получаем

$$\beta^* \rightarrow \beta^{**} = \frac{vf}{\left( \frac{\lambda_{33}^{(1)}}{\sqrt{n_4^{(1)}}} + \frac{\lambda_{33}^{(2)}}{\sqrt{n_4^{(2)}}} \right) J} \gamma_{Displacement}^{Trans},$$

$$A^{Piezo} \rightarrow A^{Trans} = \frac{c_{11}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)} \sqrt{\frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})}{c_{11}c_{44}}} + 2\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}. \quad (27)$$

Переходя в полученных выражениях к чисто упругому трансверсально-изотропному материалу, приходим к интегральному уравнению

$$\delta - \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y) = \frac{(\beta_1^* + \beta_2^*)}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln R d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{(A_1^{Trans} + A_2^{Trans})}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (28)$$

что полностью согласуется с результатами работы [7].

Ограничиваясь для задачи электроупругости лишь локальными эффектами в соответствии с подходом Герца, имеем

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \frac{(A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{R} +$$

$$+ \frac{(\beta_1^* + \beta_2^*)}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln R d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (29)$$

Замкнутое решения задачи находим (как и в классической задаче Герца), предполагая, что областью контакта является площадка эллиптической формы, ограниченная эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a \geq b, \quad b = \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad (30)$$

где  $a$ ,  $b$  – неизвестные полуоси эллипса,  $e$  – его эксцентриситет.

Решение интегрального уравнения (29) разыскиваем в виде

$$p(x, y) = p_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (31)$$

После подстановки (31) в уравнение равновесия получаем

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}. \quad (32)$$

Далее

$$p(x, y) = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (33)$$

Максимальное значение давления  $p_{\max}$ , как и в классическом случае, достигается в центре эллиптической площадки контакта  $p_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}$ .

После подстановки выражения (31) в интегральное уравнение имеем

$$\delta - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} = \frac{(A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})}{2} p_0 (I_0 - I_1 x^2 - I_2 y^2) + (\beta_1^* + \beta_2^*) \left[ A + \frac{1}{3} p_0 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right], \quad (34)$$

где

$$I_0 = bK(e), \quad I_1 = \frac{b}{e^2 a^2} [K(e) - E(e)], \quad I_2 = \frac{b}{e^2 a^2} \left[ \frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right];$$

$K(e)$ ,  $E(e)$  – полные интегралы первого и второго рода.

Для нахождения геометрических размеров площадки контакта из уравнений (34) получаем систему уравнений, которая для задачи с тепловыделением существенно отличается от системы уравнений для классической задачи Герца

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R_1} &= \frac{1}{2} (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) p_0 I_1 - \frac{1}{3} (\beta_1^* + \beta_2^*) p_0 \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \\ \frac{1}{2R_2} &= \frac{1}{2} (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) p_0 I_2 - \frac{1}{3} (\beta_1^* + \beta_2^*) p_0 \frac{a^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

После введения обозначения  $\gamma^* = (\beta_1^* + \beta_2^*) / (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= p_0 (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) \left( I_1 - \frac{2}{3} \gamma^* \frac{1 - e^2}{2 - e^2} \right), \\ \frac{1}{R_2} &= p_0 (A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo}) \left( I_2 - \frac{2}{3} \gamma^* \frac{1}{2 - e^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Для нахождения геометрических размеров площадки контакта получаем

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(K(e) - E(e)) - \gamma^* a \varepsilon (1 - e^2)}{(E(e) / (1 - e^2) - K(e)) - \gamma^* a \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{2}{3} \frac{e^2}{(2 - e^2) \sqrt{1 - e^2}},$$

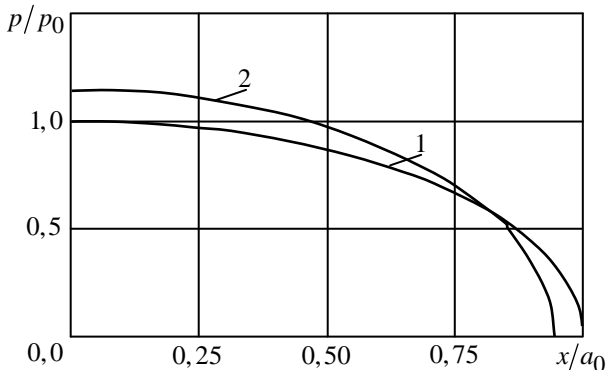


$$a = [P(A_1^{Piezo} + A_2^{Piezo})^{1/3}] \alpha_a,$$

$$\alpha_a = \left\{ \frac{3}{2\pi} \left[ \frac{1}{e^2} (K(e) - E(e)) - \frac{2}{3} \gamma^* a \frac{\sqrt{1-e^2}}{2-e^2} \right] \right\}^{1/3}. \quad (37)$$

Определение площадки контакта для двух электроупругих трансверсально-изотропных тел можно проводить аналогично случаю контакта упругих трансверсально-изотропных тел с учетом трения скольжения [7] или изотропных упругих тел [1]. Для этого по формулам (36) можно вначале определить эксцентриситет эллипса  $e$ , затем согласно выражениям (36) – вычислить значение большей полуоси площадки контакта  $\alpha$ . Как и при контакте упругих тел с тепловыделением при трении скольжения [1, 7], нахождение значений  $e$  и  $a$  можно проводить методом итераций.

**Анализ результатов численных исследований.** В расчетном примере положим  $R_1 / R_2 = 0,68$ ,  $\gamma^* a_0 = 0$ . В результате вычислений на основе данных работы [1] получаем  $e_0^2 = 0,4$  и  $\alpha_0 = 0,767$ . При том же отношении главных кривизн электроупругих тел  $R_1 / R_2 = 0,68$  учтем выделение тепла за счет трения при проскальзывании, положив  $\gamma^* \alpha_0 = 0,5$ . В качестве начального приближения используем геометрию площадки контакта из задачи без тепловыделения. После проведенных вычислений находим распределение контактного давления и размеры площадки контакта. На рисунке кривая 1 отвечает случаю контактного взаимодействия электроупругих тел без учета тепловыделения, кривая 2 – контакту с учетом тепловыделения при трении скольжения. Видно, что тепловыделение влияет на геометрию площадки контакта (изменяется отношение полуосей эллипса) и ее размеры (при тепловыделении они уменьшаются), а также на распределение контактного давления, значение которого увеличивается в центре области контакта.



Как частный случай из полученных результатов следуют характеристики контакта двух упругих трансверсально-изотропных тел с тепловыделением при трении скольжения [7].

**РЕЗЮМЕ.** Розв'язано задачу Герца про контактну взаємодію двох електропружних тіл з врахуванням виділення тепла при терті проковзування. Задачу зведено до розв'язку інтегрального рівняння. У замкненому вигляді знайдено вираз для контактного тиску, отримано співвідношення для визначення невідомих значень півосей площадки контакту еліптичної форми. Встановлено вплив тепловиділення при терті проковзування на розподіл контактного тиску, геометрію та розміри площадки контакту двох п'єзоелектричних тіл. Як частинний випадок з отриманих виразів впливають параметри контакту двох трансверсально-ізотропних пружних тіл при терті проковзування.

**Ключові слова:** термоелектропружність, п'єзоелектричне тіло, контактна задача, тертя при проковзуванні, тепловиділення, параметри контакту.

**SUMMARY.** Hertz's problem on the contact interaction of two electroelastic transversally-isotropic elastic bodies with accounting of heat generation under sliding friction was solved. The problem was reduced to solving of the integral equation. The expression of contact pressure was found in explicit form, there were obtained the relations for determination of unknown of half-axes of contact region of elliptical shape. There was established the influence of heat generation under sliding friction on distribution of contact pressure, geometry and sizes of contact region two piezoelectric bodies. The contact parameters for two transversally isotropic elastic bodies under sliding friction follow from obtained expressions as the particular case.

**Key words:** *thermoelectroelasticity, piezoelectric body, contact problem, sliding friction, heat generation, contact pressure, contact parameters.*

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бородачев Н. М., Тариков Г. П.* Задача Герца с учетом тепловыделения при трении скольжения // Изв. РАН. Механика твердого тела.– 2004.– № 6.– С. 45–52.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.– М.: Наука, 1980.– 304 с.
3. *Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.* Стационарный термоупругий контакт двух цилиндров с фрикционным теплообразованием // Трение и износ.– 1996.– Т. 17, № 3.– С. 312–319.
4. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия.– М.: Мир, 1989.– 509 с.
5. *Кирилук В. С., Левчук О.И.* Контактная задача для двух трансверсально-изотропных упругих тел с учетом тепловыделения // Теорет. и прикладная механика.– 2011.– Вып. 2(48).– С. 13–21.
6. *Кирилук В. С., Левчук О.И.* Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения // Теорет. и прикладная механика.– 2011.– Вып. 3(49).– С. 28–37.
7. *Кирилук В. С., Левчук О.И.* Контактная задача Герца с учетом выделения тепла при трении скольжения двух трансверсально-изотропных упругих тел // Теорет. и прикладная механика.– 2012.– Вып. 4(50).– С. 38–45.
8. *Коровчинский М. В.* Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения // Контактная прочность машиностроительных материалов.– М.: Наука, 1964.– С. 5–24.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости.– М.: Наука, 1970.– 939 с.
10. *Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф., Соколовский Я. И.* Термоупругая контактная задача о вдавливании нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство // Прикладная механика.– 1996.– Т. 32, № 11.– С. 38–45.
11. *Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitskii V. B.* Contact Problems for Prestressed Elastic Bodies and Rigid and Elastic Punches // Int. Appl. Mech.– 2004.– Vol. 40, № 7.– P. 744–765.
12. *Podil'chuk Yu. N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // Int. Appl. Mech.– 2003.– Vol. 39, № 2.– P. 132–170.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

*Поступила 15.10.2013*

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук

**КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ТЕОРИИ ИЗГИБА  
МНОГОСВЯЗНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ**

*Получены и исследованы общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных изотропных плит, даны аналитические решения задач для круговой и кольцевой плиты под действием изгибающих моментов на контурах и равномерно распределенных по основанию усилий.*

*Ключевые слова:* многосвязная плита, комплексные потенциалы, общее представление функций, круговое кольцо, равномерное давление по основанию.

Несмотря на большую практическую потребность изучения напряженно-деформированного состояния многосвязных пластин, находящихся в условиях изгиба, до сих пор исследований в этом направлении выполнено мало. Хотя основы теории изгиба плит были разработаны еще в середине XIX века в работах Геринга [10] и Буссенеска [19], а несколько позже Губером [11] предложены приближенные теории изгиба, фундаментальные результаты с применением теории функций комплексного переменного были получены лишь в 30-е годы XX века в работах [5, 6]. Для многосвязных плит некоторые подходы решения задач предложены в [3, 4, 7]. Однако комплексные потенциалы даже для изотропных плит не были исследованы в полной мере, что не позволило до настоящего времени построить решения многих задач. В статье [1] были получены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных анизотропных плит.

В данной статье на основе результатов работ [1, 2] получены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных изотропных плит, даны точные аналитические решения задач об изгибе круговой плиты и кругового кольца под действием распределенных изгибающих моментов на контурах или распределенных по основанию усилий.

**1. Краевая задача об изгибе изотропной плиты.** Рассмотрим тонкую изотропную пластинку-плиту постоянной толщины  $2h$ , отнесенную к прямоугольной системе координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxy$  которой совместим со срединной плоскостью. Плита под действием внешних поперечных сил и изгибающих моментов, приложенных к боковой поверхности, и нормальных усилий  $q(x, y)$ , распределенных по верхнему основанию, находится в состоянии изгиба так, что срединная плоскость искривляется без растяжения-сжатия.

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой плиты при использовании гипотез прикладной теории изгиба плит сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных [1, 5, 6]

$$\nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y)/D, \quad (1.1)$$

где  $w(x, y)$  – функция прогиба срединной поверхности плиты;  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – двумерный оператор Лапласа;  $D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0$ ;  $D_0 = \frac{2h^3}{3}$ ;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Дифференциальное уравнение (1.1) нужно решать при соответствующих граничных условиях на контурах области  $S$ , занимаемой срединной плоскостью плиты и ограниченной контурами  $L_1$ . После решения этого уравнения функция прогиба  $w(x, y)$  будет известна и по ней можно найти изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы по формулам [1]

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ H_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & N_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, & N_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а по последним вычислять напряжения на основных площадках

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x}{D_0} z, & \sigma_y &= \frac{M_y}{D_0} z, & \tau_{xy} &= \frac{H_{xy}}{D_0} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{N_x}{2D_0} (h^2 - z^2), & \tau_{yz} &= \frac{N_y}{2D_0} (h^2 - z^2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия для решения уравнения (1.1) зависят от условий загрузки и закрепления контуров  $L_1$ .

В случае загруженного усилиями и моментами контура граничные условия имеют вид [1, 5, 6]

$$M_n = m_l(s), \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = p_l(s), \quad (1.4)$$

из которых следует, что [1]

$$\begin{aligned} (M_x + iH_{xy}) \cos nx + i(M_y - iH_{xy}) \cos ny + N_{xy} (-\cos ny + i \cos nx) = \\ = [f_l(s) + c_l - im_l(s)] (-\cos ny + i \cos nx), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$N_{xy} = \int_0^s N_n ds, \quad N_n = N_x \cos nx + N_y \cos ny, \quad f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds, \quad (1.6)$$

$m_l(s)$ ,  $p_l(s)$  – заданные по контуру  $L_1$  распределенные изгибающие моменты и поперечные силы;  $c_l$  – вещественная постоянная; при этом в случае свободного от загрузок неподкрепленного контура в этих условиях нужно принять  $m_l(s) = p_l(s) = f_l(s) = 0$ .

Если на контуре  $L_l$  заданы прогиб  $w_l^*(s)$  и угол наклона  $w_{nl}^* = (dw/dn)_l^*$  изогнутой срединной поверхности к плоскости  $Oxy$  (нормальная производная от прогиба), то граничные условия имеют вид

$$w = w_l^*(s), \quad \frac{dw}{dn} = w_{nl}^* \quad (1.7)$$

и их можно записать в форме [1]

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ \frac{\partial w_l^*}{\partial x} \cos ny + \frac{\partial w_l^*}{\partial y} \cos nx + i w_{nl}^* \right] (\cos ny - i \cos nx). \quad (1.8)$$

При этом для жёсткого защемления края  $w_l^* = 0$ ,  $(dw/dn)_l^* = 0$  и из (1.8) следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (1.9)$$

Если же край плиты жестко подкреплён и он при деформации может поворачиваться как жесткое целое, то точки контура будут находиться в одной плоскости, т.е. функция прогиба на контуре  $L_l$  должна удовлетворять условию  $w = c_{1l}x + c_{2l}y + c_{0l}$ , откуда следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = c_{1l} + i c_{2l}. \quad (1.10)$$

Здесь  $c_{1l}$  и  $c_{2l}$  – вещественные постоянные, равные углам поворота жесткого контура относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно.

В случае опертого края, нагруженного изгибающими моментами  $M_n = m_l(s)$ , условия на границе  $L_l$  записываются в виде [1]

$$w = 0, \quad M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny = m_l(s), \quad (1.11)$$

причем в случае незагруженного опертого края нужно принять  $m_l(s) = 0$ .

Если по контуру  $L_l$  имеет место идеальный контакт плиты с областью  $S$  и упругого включения с областью  $S^l$ , то точки контакта плит перемещаются совместно, в них равны друг другу нормальные напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_n^{(l)}$  и действие плиты равно противодействию включения, поэтому в этих точках равны друг другу прогибы плиты и изгибающие моменты, а углы поворотов по нормальям и перерезывающие силы равны по значению и противоположны по знаку т.е. имеют место равенства [1]

$$M_n = M_n^{(l)}, \quad N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = -N_n^{(l)} - \frac{\partial H_{ns}^{(l)}}{\partial s^{(l)}},$$

$$w = w^{(l)}, \quad \frac{dw}{dn} = -\frac{dw^{(l)}}{dn^{(l)}}, \quad (1.12)$$

причем здесь и далее величины с индексом  $(l)$  вверху относятся к включению  $S^l$ , без такого индекса – к плите-матрице. Условия (1.12) можно записать и в виде [1]

$$\begin{aligned} & (M_x + iH_{xy})\cos nx + i(M_y - iH_{xy})\cos ny + N_{xy}(-\cos ny + i\cos nx) = \\ & = (M_x^{(l)} + iH_{xy}^{(l)})\cos nx + i(M_y^{(l)} - iH_{xy}^{(l)})\cos ny + N_{xy}^{(l)}(-\cos ny + i\cos nx) + \\ & + c_l(-\cos ny + i\cos nx), \\ & \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} + i\frac{\partial w^{(l)}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе изотропной плиты приводится к решению дифференциального уравнения (1.1) при соответствующих граничных условиях (1.5), (1.8), (1.11) или (1.13).

**2. Комплексные потенциалы.** Общее решение однородного дифференциального уравнения (1.1) выберем в виде функции  $F(x+\mu y)$  от линейной формы  $z = x + \mu y$ . Подставив эту функцию в уравнение (1.1) и приняв во внимание, что производная  $F^{IV}(x+\mu y)$  не может равняться нулю для произвольных  $x$  и  $y$ , приходим к выводу, что равен нулю коэффициент в получаемом равенстве:

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0. \quad (2.1)$$

Это, так называемое характеристическое уравнение для изгиба изотропной плиты имеет двукратные корни  $i, -i$ . Поэтому решением однородного уравнения (1.1) будет функция [2, 8]

$$w_1 = \operatorname{Re} \left[ \bar{z}\varphi(z) + \int \psi(z) dz \right], \quad (2.2)$$

а общее решение неоднородного уравнения (1.1) примет вид

$$w = w_0 + \operatorname{Re} \left[ \bar{z}\varphi(z) + \int \psi(z) dz \right], \quad (2.3)$$

где  $w_0(x, y)$  – частное решение неоднородного уравнения (1.1);  $\varphi(z), \psi(z)$  – произвольные аналитические функции комплексного переменного  $z = x + iy$ .

Учитывая соотношения [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}}, & \frac{\partial w_1}{\partial y} &= i \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} \right), \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} + i\frac{\partial w_1}{\partial y} &= 2\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} - i\frac{\partial w_1}{\partial y} &= 2\frac{\partial w_1}{\partial z} = \overline{\varphi(z)} + \bar{z}\varphi'(z) + \psi(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 w_1 &= 4 \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial \bar{z}} = 2 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right], \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 w_1 &= 8 \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^2 \partial \bar{z}} = 4 \varphi''(z)\end{aligned}\quad (2.4)$$

и подставляя функцию (2.3) в равенства (1.2), (1.6), получаем

$$\begin{aligned}M_x + M_y &= -D(1+\nu)\nabla^2 w = M_{x0} + M_{y0} - 4D(1+\nu)\operatorname{Re}\varphi'(z), \\ M_y - M_x + 2iH_{xy} &= D(1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 w = \\ &= M_{y0} - M_{x0} + 2iH_{xy0} + 2D(1-\nu)\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right];\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}N_x &= N_{x0} - 2D\left[\varphi''(z) + \overline{\varphi''(z)}\right], \\ N_y &= N_{y0} - 2iD\left[\varphi''(z) - \overline{\varphi''(z)}\right], \\ N_n &= N_{n0} + 2iD\left[\varphi''(z)\frac{dz}{ds} - \overline{\varphi''(z)}\frac{d\bar{z}}{ds}\right], \quad N_{n0} = N_{x0}\frac{dy}{ds} - N_{y0}\frac{dx}{ds}, \\ N_{xy} &= N_{xy0} + 2iD\left[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}\right], \quad N_{xy0} = \int_0^s N_{x0}dy - N_{y0}dx;\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + i\frac{\partial w_0}{\partial y} + \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\right].\quad (2.7)$$

Здесь  $M_{x0}$ ,  $M_{y0}$ ,  $H_{xy0}$ ,  $N_{x0}$ ,  $N_{y0}$  – моменты и перерезывающие силы от частного решения  $w_0(x, y)$ , для которых имеют место формулы (1.2), в которых  $w$  нужно заменять на частное решение  $w_0$ .

Комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  должны удовлетворять определенным граничным условиям, следующим из условий (1.5), (1.8), (1.11), (1.13).

Если край плиты загружен распределенными моментами  $m_l(s)$  и усилиями  $p_l(s)$ , то на нем должны выполняться граничные условия (1.5), из которых с учетом равенств  $\cos nx = dy/ds$ ,  $\cos ny = -dx/ds$  получаем

$$\left(M_x + iH_{xy}\right)dy - i\left(M_y - iH_{xy}\right)dx + N_{xy}dz = \left[f_l(s) + c_l - im_l(s)\right]dz. \quad (2.8)$$

На основании (2.5) и (2.6) находим

$$\begin{aligned}M_x + iH_{xy} &= M_{x0} + iH_{xy0} + D\left\{-(1+\nu)\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] - \right. \\ &\quad \left. -(1-\nu)\left[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\right]\right\}, \\ M_y - iH_{xy} &= M_{y0} - iH_{xy0} + D\left\{-(1+\nu)\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + \right.\end{aligned}$$

$$+(1-\nu)\left[\overline{z\phi''(z)+\psi'(z)}\right] \}. \quad (2.9)$$

Учитывая выражения (2.9), из граничных условий (2.8) получим

$$\begin{aligned} D(3+\nu)\phi'(z)dz - D(1-\nu)\overline{\phi'(z)}dz - D(1-\nu)\left[\overline{z\phi''(z)+\psi'(z)}\right]d\bar{z} - \\ - (M_{y0} - iH_{xy0})dx - i(M_{x0} + iH_{xy0})dy - iN_{xy0}dz = \\ = -i[f_l(s) + c_l - im_l(s)]dz. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Проинтегрировав это равенство по дуге контура  $s$ , будем иметь

$$\begin{aligned} D(3+\nu)\phi(z) - D(1-\nu)\left[\overline{z\phi'(z)+\psi(z)}\right] = \\ = \int_0^s (M_{y0} - iH_{xy0})dx + i(M_{x0} + iH_{xy0})dy + i \int_0^s N_{xy0} dz - \\ - \int_0^s (m_l + if_l)(dx + idy) - ic_l z + c_l^*. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, на нагруженном контуре граничные условия для комплексных потенциалов имеют вид

$$\begin{aligned} \text{ж}\phi(t) - t\overline{\phi'(t)} - \overline{\psi(t)} = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s (M_{y0} - iH_{xy0})dx + i(M_{x0} + iH_{xy0})dy + \\ + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0}(dx + idy) - \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s (m_l + if_l)(dx + idy) - ic_l z + c_l^*, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\text{ж} = (3+\nu)/(1-\nu)$ ;  $c_l$  и  $c_l^*$  – вещественная и комплексная постоянные.

Для нагруженного контура в (2.12) нужно принять  $m_l(s) = p_l(s) = f_l(s) = 0$ .

Если на краю заданы прогиб и угол поворота по нормали, то на основании (1.8) и (2.7) граничные условия на краю примут вид

$$\begin{aligned} \phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} = - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \\ + \left[ \frac{\partial w_l^*}{\partial x} \cos ny + \frac{\partial w_l^*}{\partial y} \cos nx + iw_{nl}^* \right] (\cos ny - i \cos nx). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для жестко защемленного края из условий (2.13) найдем

$$\phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} = - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} \right). \quad (2.14)$$

В случае опертого края

$$\text{Re} \left[ \overline{z\phi(z)} + \int \psi(z)dz \right] = -w_0,$$



$$M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny = m_l(s), \quad (2.15)$$

где  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $H_{xy}$  – величины, легко определяемые из соотношений (2.5).

Пусть в отверстие плиты с контуром  $L_l$  без предварительного натяжения вклеено или впаяно упругое включение из другого материала такой же толщины. В этом случае первое граничное условие (1.13) на основании (2.11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & D(3+\nu)\varphi(z) - D(1-\nu)\left[ z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] - \\ & - D^{(l)}(3+\nu^{(l)})\varphi^{(l)}(z) + D^{(l)}(1-\nu^{(l)})\left[ z\overline{\varphi'^{(l)}(z)} + \overline{\psi^{(l)}(z)} \right] = \\ & = \int_0^s \left[ (M_{y0} - iH_{xy0})dx + i(M_{x0} + iH_{xy0})dy \right] + i \int_0^s N_{xy0}(dx + idy) - \\ & - \int_0^s \left[ (M_{y0}^{(l)} - iH_{xy0}^{(l)})dx + i(M_{x0}^{(l)} + iH_{xy0}^{(l)})dy \right] - i \int_0^s N_{xy0}^{(l)}(dx + idy) - ic_l z + c_l^*. \end{aligned}$$

Поделив это равенство на  $D(1-\nu)$  и добавив с учетом (2.13) второе условие (1.13), для случая контакта плиты с упругим включением окончательно получим

$$\begin{aligned} & ж\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} - \eta^{(l)}\left[ ж^{(l)}\varphi^{(l)}(t) - t\overline{\varphi'^{(l)}(t)} - \overline{\psi^{(l)}(t)} \right] = \\ & = \frac{1}{D(1-\nu)}\left[ \int_0^s (M_{y0} - iH_{xy0})dx + i(M_{x0} + iH_{xy0})dy + i \int_0^s N_{xy0}(dx + idy) \right] - \\ & - \frac{1}{D(1-\nu)}\left[ \int_0^s (M_{y0}^{(l)} - iH_{xy0}^{(l)})dx + i(M_{x0}^{(l)} + iH_{xy0}^{(l)})dy + i \int_0^s N_{xy0}^{(l)}(dx + idy) \right] - \\ & - ic_l z + c_l^*, \\ & \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - \varphi^{(l)}(t) - t\overline{\varphi'^{(l)}(t)} - \overline{\psi^{(l)}(t)} = \\ & = -\left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial x} + i \frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\eta^{(l)} = \frac{D^{(l)}(1-\nu^{(l)})}{D(1-\nu)}$ .

Таким образом, удовлетворяя граничным условиям в одной из представленных выше форм, найдем комплексные потенциалы. После чего изгибающий момент и перерезывающая сила вычисляются соответственно по формулам (2.5), (2.6).

**Общие представления комплексных потенциалов для многосвязных областей.** Пусть срединная плоскость плиты занимает многосвязную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий

$L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) (рис. 1). В этой многосвязной области все основные характеристики изгиба (прогиб, углы поворотов относительно осей координат, моменты, перерезывающие силы, напряжения) по своей физической сути непрерывны и однозначны. Эти характеристики выражаются через функции  $w_0(x, y)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  и их производные. В указанной области  $S$  теми же свойствами непрерывности и однозначности обладают функция  $w_0(x, y)$  и ее соответствующие производные. Что же касается функций  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ , они и их производные определены в многосвязной области  $S$  как функции комплексного переменного  $z$ , на основе непрерывности основных характеристик изгиба являются непрерывными в области  $S$  вплоть до границы. Но из однозначности основных характеристик изгиба не следует однозначность этих функций и их производных. В общем случае они могут быть многозначными, но характер их многозначности не может быть произвольным.

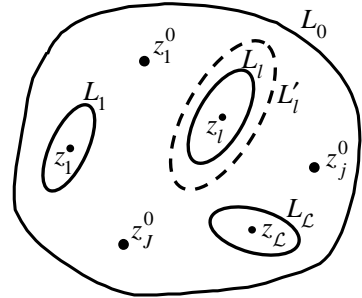


Рис. 1

Рассмотрим в области  $S$  произвольный замкнутый контур  $L_l'$ , охватывающий контур только одного отверстия  $L_l$ . Обозначим приращения соответствующих величин при полном обходе по  $L_l'$  через  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\varphi'$ ,  $\Delta\varphi''$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\psi'$ . Учитывая формулы (2.5)–(2.7), из однозначности моментов и перерезывающих сил и углов поворотов, с учетом однозначности величин от частного решения  $w_0(x, y)$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Delta\varphi' = 0, \quad \Delta\varphi'' = 0, \quad \Delta\psi' = 0 \\ \Delta\varphi + z \Delta\overline{\varphi'} + \Delta\overline{\psi} = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Из условия равенства нулю вещественной части приращения функции  $\varphi'(z)$  и аналитичности этой функции следует, что ее мнимая часть может получить постоянное приращение, т.е. вся функция может получать чисто мнимое приращение  $2\pi i A_l$ , где  $A_l$  – вещественная постоянная. Среди элементарных функций только  $\ln(z - z_l)$ , где  $z_l$  принадлежит внутренности контура  $L_l$ , при полном обходе по контуру  $L_l'$  получает чисто мнимое приращение  $2\pi i$ . Распространив этот вывод на все отверстия, для  $\varphi'(z)$  получим [2]

$$\varphi'(z) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_l \ln(z - z_l) + \varphi'_{00}(z).$$

Здесь  $\varphi'_{00}(z)$  – функция, однозначная в многосвязной области  $S$ . Проинтегрировав последнюю, найдем общее представление функции

$$\varphi(z) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (zA_l + B_l) \ln(z - z_l) + \varphi_0(z), \quad (2.18)$$

где  $B_l$  – комплексная постоянная,  $\varphi_0(z)$  – функция, однозначная в области  $S$ .

Из условия  $\Delta\psi' = 0$  следует однозначность функции  $\psi'(z)$ , что при интегрировании приводит к выражению

$$\psi(z) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} C_l \ln(z - z_l) + \psi_0(z), \quad (2.19)$$

где  $C_l$  – комплексная постоянная;  $\psi_0(z)$  – функция, однозначная в области  $S$ .

Учитывая, что теперь

$$\Delta\varphi = 2\pi i(zA_l + B_l), \quad \Delta\varphi' = 2\pi i A_l, \quad \Delta\psi = 2\pi i C_l, \quad (2.20)$$

из последнего равенства системы (2.17) найдем

$$C_l = \bar{B}_l \quad (2.21)$$

Таким образом, функции (2.18) и (2.19) с учетом (2.21) при произвольных вещественных  $A_l$  и комплексных  $B_l$  обеспечивают однозначность всех основных характеристик изгиба плиты, кроме функции прогиба. Неизвестные вещественные  $A_l$  и комплексные  $B_l$  постоянные найдем из механических условий равновесия,

Выберем в области многосвязной  $S$  контур  $L'_l$ , полностью окружающий только контур отверстия  $L_l$ . Из условия равновесия части плиты  $S'_l$ , ограниченной контурами  $L_l$  и  $L'_l$  имеем равенства

$$P'_l + P_{0s'} + P_l = 0, \quad M'_{xl} - iM'_{yl} + (M_{xl} - iM_{yl}) + (M_{x0s'} - iM_{y0s'}) = 0,$$

в которых  $P_l$ ,  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$  – главный вектор и компоненты главного момента известных внешних воздействий на контуре  $L_l$ . Аналогичные величины со штрихом вверху относятся к внутренним воздействиям по контуру  $L'_l$ , а с индексом  $0S'_l$  внизу – к величинам от распределенных усилий  $q(x, y)$  по площади кольца  $S'_l$ . В предельном случае, когда  $L'_l \rightarrow L_l$ , т. е. площадь  $S'_l \rightarrow 0$ , из последних равенств следует

$$P'_l = -P_l, \quad M'_{xl} - iM'_{yl} = -(M_{xl} - iM_{yl}) \quad (2.22)$$

Для главного вектора и компонент главного момента внутренних усилий по контуру  $L'_l$  имеем [1, 6]

$$P_n = -\left( N_y \frac{dx}{ds} - N_x \frac{dy}{ds} \right),$$

$$\begin{aligned}
M_{xn} &= -(yN_y - M_y) \frac{dx}{ds} + (yN_x - H_{xy}) \frac{dy}{ds}, \\
M_{yn} &= (xN_y - H_{xy}) \frac{dx}{ds} - (xN_x - M_x) \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

На основе (2.6) из первой формулы (2.23) получаем

$$P_n = \int N_n ds = P_{n0} + 2iD \left[ \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} \right].$$

Вычислив  $P'_l$  как приращение  $P_n$  при обходе по замкнутому контуру  $L'_l$  (при этом  $P_{n0}$  не получает приращения), найдем  $P'_l = -8\pi A_l$ . Тогда на основе первой формулы (2.22) найдем

$$A_l = \frac{P_l}{8\pi D}. \tag{2.24}$$

Из формул (2.23) имеем

$$M_{xn} - iM_{yn} = (M_{yn} + iH_{xyn}) \frac{dx}{ds} - i(M_{xn} - iH_{xyn}) \frac{dy}{ds} + i(x - iy)N_n,$$

что с учетом (2.6) и (2.9) приводит к равенству

$$\begin{aligned}
M_{xn} - iM_{yn} &= M_{x0n} - iM_{y0n} + D \left[ -(1+\nu) \left( \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right) \frac{d\bar{z}}{ds} + \right. \\
&\quad \left. + (1-\nu) \left( \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) \right) \frac{dz}{ds} - 2i \left( \bar{z}\varphi''(z) \frac{dz}{ds} - \bar{z}\overline{\varphi''(z)} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Проинтегрировав (2.25) с учетом того, что интегралы от функций со значком нуль по замкнутому контуру  $L'_l$  равны нулю, получим равенство

$$\begin{aligned}
M'_{xl} - iM'_{yl} &= M'_{x0l} - iM'_{y0l} + D \left\{ -(3+\nu) \overline{\varphi(z)} + (1-\nu) \psi(z) - \right. \\
&\quad \left. -(1+\nu) \bar{z}\varphi'(z) + 2\bar{z}\overline{\varphi'(z)} \right\}_{L'_l},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

в котором  $M'_{xl}$ ,  $M'_{yl}$  – компоненты главного вектора внутренних усилий по контуру  $L'_l$ , под  $[R]_{L'_l}$  понимается приращение  $R$  при полном обходе по контуру  $L'_l$ . Вычислив приращения от обеих частей (2.26) и приняв во внимание вторую формулу из (2.22), найдем

$$-(3+\nu)\Delta\bar{\varphi} + (1-\nu)\Delta\psi - (1+\nu)\bar{z}\Delta\varphi' + 2\bar{z}\overline{\Delta\varphi'} = -\frac{M_{xl} - iM_{yl}}{D} \tag{2.27}$$

Подставив в (2.27) выражения (2.20) с учетом (2.21), окончательно получим

$$B_l = -\frac{M_{yl} - iM_{xl}}{8\pi D} \tag{2.28}$$

Следовательно, для конечной многосвязной области комплексные потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \psi_0(z),\end{aligned}\quad (2.29)$$

где  $A_l, B_l$  – постоянные, определяемые по формулам (2.24) и (2.28);  $z_l$  – аффикс произвольной точки внутри контура  $L_l$ .

Принимая во внимание вид функций (2.29) и значение интеграла

$$\int \psi(z) dz = (z \bar{B}_l - z_l \bar{B}_l + b_{-l/\psi_0}) \ln(z - z_l) + \psi_{00}(z),$$

где  $b_{-l/\psi_0}$  – вычет функции  $\psi_0(z)$  в точке  $z_l$ ,  $\psi_{00}(z)$  – голоморфная в области  $S$  функция, из однозначности функции прогиба (2.2) будем иметь

$$2 \operatorname{Re} \left[ \bar{z} \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right]_{L_l} = 2 \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \left[ \bar{z} z A_l + \bar{z} B_l + z \bar{B}_l - z_l \bar{B}_l + b_{-l/\psi_0} \right] \right\}. \quad (2.30)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Re} [i \bar{z} z A_l] = 0, \quad \operatorname{Re} [i (\bar{z} B_l + z \bar{B}_l)] = 0,$$

из (2.30) будем иметь

$$\operatorname{Re} [i (b_{-l/\psi_0} - z_l \bar{B}_l)] = 0. \quad (2.31)$$

Пусть, кроме заданных на контурах  $L_l$  усилий и моментов и усилий  $q(x, y)$ , распределенных по верхнему основанию плиты, в точках  $z_1^0, \dots, z_R^0$  действуют сосредоточенные силы  $P_1^0, \dots, P_R^0$  и сосредоточенные моменты  $(M_{x1}^0, M_{y1}^0), \dots, (M_{xR}^0, M_{yR}^0)$ . Сосредоточенную силу и сосредоточенный момент в точке  $z_r^0$  можно рассматривать как предельный случай действия распределенных усилий и моментов по контуру кругового отверстия с центром в этой точке, когда радиус отверстия стремится к нулю, а главный вектор и главный момент остаются постоянными и равными  $P_r^0$  и  $(M_{xr}^0, M_{yr}^0)$ . В связи с этим комплексные потенциалы (2.29) будут содержать дополнительные логарифмические слагаемые, которые получатся по приведенным выше соотношениям, если принять  $P_l = P_r^0$ ,  $M_{xl} = M_{xr}^0$ ,  $M_{yl} = M_{yr}^0$ . При этом  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  будут функциями, голоморфными всюду в области  $S$ , за исключением, быть может, точек приложения сосредоточенных нагрузок  $z_r^0$ . Выясним характер поведения этих функций в окре-

стности точки  $z_r^0$ . Учитывая условие ограниченности функции прогиба в точках  $z_r^0$  и условие (2.31), получаем

$$b_{-1r}\psi_0 = z_r^0 \bar{B}_r^0. \quad (2.32)$$

Следовательно, функция  $\psi_0(z)$  в точке  $z_r^0$  имеет полюс первого порядка с вычетом  $b_{-1r}\psi_0$ , определяемым формулой (2.32).

Таким образом, в случае изгиба конечной многосвязной плиты при наличии и сосредоточенных воздействий функции имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R (A_r^0 z + B_r^0) \ln(z - z_r^0) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R \left[ \bar{B}_r^0 \ln(z - z_r^0) + \frac{z_r^0 \bar{B}_r^0}{z - z_r^0} \right] + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где

$$A_r^0 = \frac{P_r^0}{8\pi D}, \quad B_r^0 = -\frac{M_{yr}^0 - iM_{xr}^0}{8\pi D}; \quad (2.34)$$

$\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  – функции, голоморфные в рассматриваемой многосвязной области  $S$ , включая точки приложения сосредоточенных сил и моментов.

В случае бесконечной плиты функции опять будут иметь вид (2.33). Но  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  теперь будут голоморфными всюду, кроме бесконечно удаленной точки. В окрестности этой точки

$$\begin{aligned} \ln(z - z_l) &= \ln z + \frac{z_l}{z} + \frac{z_l^2}{z^2} + \dots, \quad \ln(z - z_r^0) = \ln z + \frac{z_r^0}{z} + \frac{(z_r^0)^2}{z^2} + \dots, \\ (\varphi_0(z), \psi_0(z)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k) z^k, \\ \varphi'(z) &= A \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} + O(1), \\ \varphi''(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} + O(1/z), \\ \psi'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k-2} + O(1), \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$A = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_l + \sum_{r=1}^R A_r^0 = \frac{1}{8\pi D} \left[ \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} P_l + \sum_{r=1}^R P_r^0 \right].$$

Из ограниченности моментов в точке  $z = \infty$  при отсутствии усилий  $q(x, y)$  следует, что

$$A=0, \quad a_k = b_k = 0 \text{ при } k \geq 2,$$

т.е. главный вектор всех сил, приложенных к контурам отверстий и сосредоточенных сил во внутренних точках должен равняться нулю и функции  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  в точке  $z = \infty$  могут иметь полюс не выше первого порядка. Эти условия дополним равенством нулю главного вектора внешних сил в точке  $z = \infty$ :

$$P - P_0 = 2iD(a_1 - \bar{a}_1) = 0,$$

из которого следует, что  $a_1$  – вещественная величина.

Обозначая коэффициенты разложений  $a_1 = \Gamma_1$ ,  $b_1 = \Gamma_2$  и выделив из  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  их главные части в окрестности точки  $z = \infty$ , для общего случая (и конечной, и бесконечной плиты) получим следующие представления функций:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma_1 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_r^0 z + B_r^0) \ln(z - z_r^0) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma_2 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} \left[ \bar{B}_r^0 \ln(z - z_r^0) + \frac{z_r^0 \bar{B}_r^0}{z - z_r^0} \right] + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $A_l$ ,  $B_l$ ,  $A_r^0$ ,  $B_r^0$  – постоянные, определяемые формулами (2.24), (2.28), (2.34);  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  – функции, голоморфные в многосвязной области (конечной или бесконечной), причем в случае бесконечной области они в точке  $z = \infty$  имеют полюс нулевого порядка. В этих формулах  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  – константы, равные нулю в случае конечной области, а для бесконечной области их определим из условий на бесконечности, где могут быть заданными значения моментов

$$M_x = M_x^\infty, \quad M_y = M_y^\infty, \quad H_{xy} = H_{xy}^\infty. \quad (2.37)$$

Учитывая выражения (2.5) и (2.35), из условий на бесконечности (2.37), получим равенства

$$M_x^\infty + M_y^\infty = -4D(1+\nu)\Gamma_1, \quad M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty = 2D(1-\nu)\Gamma_2,$$

из которых следует, что

$$\Gamma_1 = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma_2 = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)}. \quad (2.38)$$

Таким образом, в самом общем случае выражения для комплексных потенциалов имеют вид (2.36). При этом в случае конечной плиты  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  равны нулю, для бесконечной плиты они вычисляются по формулам (2.38). Неизвестными в представлениях являются только функции  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$ . Для случая конечной плиты эти функции являются голоморфными в конечной многосвязной области  $S$ , ограниченной внешним контуром

$L_0$  и контурами отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, L}$ ); для бесконечной плиты функции  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  голоморфны в бесконечно многосвязной области, ограниченной контурами отверстий  $L_l$ , включая точку  $z = \infty$ , где они могут иметь полюс нулевого порядка.

На основе полученных соотношений приведем примеры решения некоторых задач.

**3. Изгиб круговой плиты под действием равномерного давления по верхнему основанию.** Рассмотрим круговую плиту (рис. 2) с контуром  $L_0$

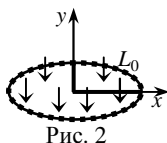


Рис. 2

и радиусом  $R_0$ . Плита по контуру  $L_0$  жестко заделана, по верхнему основанию действует равномерное давление интенсивности  $q_0$ .

В данном случае частное решение дифференциального уравнения (1.1) можно выбрать в форме

$$w_0(x, y) = d_0(x^2 + y^2)^2 = d_0 z^2 \bar{z}^2, \quad (3.1)$$

где  $d_0$  – постоянная. Подставляя функцию (3.1) в дифференциальное уравнение (1.1) и учитывая, что в данном случае  $q(x, y) = q_0$ , получим, что  $d_0 = q_0/64D$ . На основе (1.2) и (3.1) находим

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} = 4d_0 z^2 \bar{z}; \quad (3.2)$$

$$M_{x0} = -8D(1+\nu)d_0 z \bar{z} - 4D(1-\nu)d_0 \operatorname{Re} \bar{z}^2,$$

$$M_{y0} = -8D(1+\nu)d_0 z \bar{z} + 4D(1-\nu)d_0 \operatorname{Re} \bar{z}^2,$$

$$N_{x0} = -32Dd_0 \operatorname{Re} z, \quad N_{y0} = -32Dd_0 \operatorname{Im} z$$

$$H_{xy0} = 4D(1+\nu)d_0 \operatorname{Im} \bar{z}^2, \quad (3.3)$$

Что же касается комплексных потенциалов  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$ , голоморфных в круге, выберем их в виде рядов Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad (3.4)$$

где  $a_k$ ,  $b_k$  – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий (2.15) на контуре  $L_0$ . Учитывая выражения (3.2), (3.3) и то, что на этом контуре  $z = R_0 \sigma$ ,  $\sigma = e^{i\vartheta}$ , где  $\vartheta$  – центральный угол, отсчитываемый от оси  $Ox$  против часовой стрелки,  $x^2 + y^2 = R_0^2$ , граничные условия на контуре  $L_0$  перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ a_k R_0^k \sigma^k + \frac{k \bar{a}_k R_0^k}{\sigma^{k-2}} + \frac{\bar{b}_k R_0^k}{\sigma^k} \right\} = -4d_0 R_0^3 \sigma. \quad (3.5)$$



Применяя метод рядов, из (3.5) получим

$$a_1 = -2d_0R_0^2, \quad b_1 = a_k = b_k = 0 \quad (k \geq 2). \quad (3.6)$$

Тогда функции примут вид

$$\varphi(z) = a_1z, \quad \psi(z) = 0 \quad (3.7)$$

Для моментов (2.5) в точке получим

$$\begin{aligned} M_n + M_s = M_x + M_y &= -16D(1+\nu)d_0z\bar{z} - 4D(1+\nu)a_1 \\ M_s - M_n + 2iH_{ns} &= e^{2i\vartheta} [M_y - M_x + 2iH_{xy}] = 8D(1-\nu)d_0\bar{z}^2 e^{2i\vartheta}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\vartheta$  – угол между осями  $Ox$  и  $On$ .

В данной, как и во всех следующих задачах, как следует из способа нагружения, значения моментов  $M_n$  и  $M_s$  не зависят от углов и, следовательно, достаточно вычислить их значения при  $y=0$ , когда  $M_n = M_x$ ,  $M_s = M_y$ . Имеем

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= -16D(1+\nu)d_0x^2 + 8D(1+\nu)d_0R_0^2 \\ M_y - M_x &= 8D(1-\nu)d_0x^2, \quad H_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Наибольших значений эти величины достигают при  $z = R_0$ , т. е. на контуре диска, и они соответственно равны  $M_x = -0,125$ ,  $M_y = -0,015$ .

**4. Изгиб кругового кольца.** Рассмотрим изотропное круговое кольцо (рис. 3) с внешним и внутренним контурами  $L_0$ ,  $L_1$ , радиусами  $R_0$ ,  $R_1$  соответственно.

Пусть вначале основания кольца свободны от усилий, а на контурах  $L_0$  и  $L_1$  действуют изгибающими моментами интенсивностей  $m_0$  и  $m_1$  соответственно. В данном случае функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  голоморфны в круговом кольце и их можно разложить в ряды Лорана вида

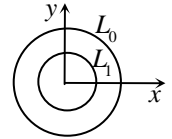


Рис.3

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad (4.1)$$

где  $a_k$ ,  $b_k$  – неизвестные постоянные. Подставляя эти функции в граничные условия (2.12) на контурах  $L_0$ ,  $L_1$  и учитывая, что на контурах  $z = R_l \sigma$ ,  $\sigma = e^{i\vartheta}$ , граничные условия на  $L_0$  и  $L_1$  перепишем в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ a_k R_l^k \sigma^k \mathfrak{J} - \frac{k \bar{a}_k R_l^k}{\sigma^{k-1}} - \frac{\bar{b}_k R_l^k}{\sigma^k} \right\} = -\frac{m_l R_l \sigma}{D(1-\nu)} + c_0^* \quad (l=0, 1). \quad (4.2)$$

Из последнего равенства, применяя метод рядов, получим систему

$$\mathfrak{J} R_l^k a_k - (2-k) a_{2-k} R_l^{2-k} - b_{-k} R_l^{-k} = -\frac{m_l R_l}{D(1-\nu)} \delta_k^l,$$

$$\text{ж } R_l^{-k} a_{-k} - (2+k) a_{2+k} R_l^{2+k} - b_k R_l^k = 0, \quad \text{Re}(2\pi i b_{-1}) = 0. \quad (4.3)$$

Решая эту систему, получим, что все коэффициенты равны нулю, кроме  $a_1$  и  $b_{-1}$ , для которых найдем формулы

$$a_1 = \frac{m_1 R_1^2 - m_0 R_0^2}{D(1+\nu)(R_0^2 - R_1^2)}, \quad b_{-1} = \frac{R_1^2 R_0^2 (m_1 - m_0)}{D(1-\nu)(R_0^2 - R_1^2)}. \quad (4.4)$$

Тогда для функций (4.1) и моментов при  $y=0$  получим

$$\varphi(z) = a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}, \quad (4.5)$$

$$M_x + M_y = -4D(1+\nu)a_1, \quad M_y - M_x = -2D(1-\nu)\frac{b_{-1}}{x^2} \quad H_{xy} = 0 \quad (4.6)$$

Проведены вычисления значений моментов, когда внутренний контур не загружен ( $m_1 = 0$ ). Значения  $M_s$  ( $M_y$ ) с точностью до значения  $m_0$  для отношений  $R_1/R_0$ , равных 0,1; 0,5; 0,8; 0,9, на внешнем контуре (при  $x=R_0$ ) получились соответственно такими: 1,020; 1,666; 4,555; 9,526. Для тех же отношений значения  $M_s$  на внутреннем контуре (при  $z=R_1$ ) получились такими: 2,021; 2,667; 5,556; 10,527. Как видно, с увеличением  $R_1/R_0$  (с уменьшением ширины кольца) значения  $M_s$  на обоих контурах резко растут, приближаясь друг к другу.

Пусть теперь рассмотренное изотропное круговое кольцо по верхнему основанию находится под действием равномерного давления интенсивности  $q_0$  и оба контура кольца жестко подкреплены (один из них жестко заделан). В данном случае функции  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  опять имеют вид (4.1), а частное решение дифференциального уравнения (1.1) можно выбрать в виде (3.1). Из граничных условий (2.15) на контурах кольца, учитывая, что на них  $z = R_l \sigma$ ,  $\sigma = e^{i\theta}$ ,  $x^2 + y^2 = R_l^2$ , методом рядов найдем постоянные  $a_k$  и  $b_k$ . Окончательно для функций и моментов при  $y=0$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}, \\ M_x + M_y &= -16D(1+\nu)d_0 x^2 - 4D(1+\nu)a_1, \\ M_y - M_x &= 2D(1-\nu)x^2 \left[ 4d_0 - \frac{b_{-1}}{x^4} \right], \quad H_{xy} = 0 \end{aligned}$$

где

$$a_1 = -2d_0(R_0^2 + R_1^2), \quad b_{-1} = 4d_0 R_0^2 R_1^2, \quad (4.7)$$

Как и в предыдущем случае, с точностью до значения  $q_0$  вычислены моменты  $M_s$ . Для отношений  $R_1/R_0$ , равных 0,1; 0,5; 0,8; 0,9, на внеш-

нем контуре (при  $x=R_0$ ) получились значения: -0,015; -0,011; -0,005; -0,003; на внутреннем контуре (при  $x=R_1$ ) получились значения: 0,015; 0,011; 0,005; 0,003. Как видно, в данном случае с уменьшением ширины кольца значения моментов также уменьшаются.

Пусть теперь при действии распределенных по верхнему основанию кольца постоянного давления  $q_0$  внешний контур жестко заделан, внутренний не подкреплен. В этом случае для внутреннего контура нужно вычислить входящие в граничные условия (2.12) интегралы

$$J_0 = \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s (M_{y0} - iH_{xy0}) dx + i(M_{x0} + iH_{xy0}) dy + \\ + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{xy0} (dx + i dy),$$

которые оказываются равными нулю.

Для функций (4.1) получаются выражения

$$\varphi(z) = \frac{a_{-3}}{z^3} + a_1 z + a_5 z^5, \quad \psi(z) = \frac{b_{-5}}{z^5} + \frac{b_{-1}}{z} + b_3 z^3, \quad (4.8)$$

где  $a_{-3}$ ,  $a_1$ ,  $a_5$ ,  $b_{-5}$ ,  $b_{-1}$ ,  $b_3$  находятся из решения системы.

$$a_k R_1^k \mathfrak{J} - (2-k) a_{2-k} R_1^{2-k} - b_{-k} R_1^{-k} = \left[ -\frac{m_1 R_1}{D(1-\nu)} + \frac{d_0 R_1^3 (5\nu+3)}{(\nu-1)} \right] \delta_k^1, \\ a_k R_0^k + (2-k) a_{2-k} R_0^{2-k} + b_{-k} R_0^{-k} = -4d_0 R_0^3 \delta_k^1, \\ a_{-k} R_1^{-k} \mathfrak{J} - (k+2) a_{k+2} R_1^{k+2} - b_k R_1^k = -\delta_k^3 \frac{d_0 R_1^3 (3\nu+5)}{3(\nu-1)}, \\ a_{-k} R_0^{-k} + (k+2) a_{k+2} R_0^{k+2} + b_k R_0^k = 0, \\ \operatorname{Re}(2\pi i b_{-1}) = 0.$$

Для моментов (2.5) получим

$$M_x + M_y =, \quad M_y - M_x =, \quad H_{xy} = 0 \\ M_y = D \{ -8d_0(1+\nu) z\bar{z} - 2(1+\nu) \operatorname{Re}(-3a_{-3}z^{-4} + a_1 + 5a_5z^4) + 4d_0(1-\nu) \operatorname{Re} z^2 \\ + (1-\nu) \operatorname{Re} [ \bar{z} (12a_{-3}z^{-5} + 20a_5z^3) + 3b_3z^2 - 5b_{-5}z^6 - b_{-1}z^{-2} ] \}, \\ M_x = -16d_0 D(1+\nu) z\bar{z} - 4D(1+\nu) \operatorname{Re}(-3a_{-3}z^{-4} + a_1 + 5a_5z^4) - M_y,$$

Как и в предыдущем случае вычислены значения  $M_s$  ( $M_y$  при  $y=0$ ). Для отношений  $R_1/R_0$ , равных 0,1; 0,5; 0,8; 0,9 на внешнем контуре получились такими: -0,015; 0,060; -0,010; -0,005; на внутреннем контуре получаются такими: 0,135; -0,016; 0,010; 0,002.

**РЕЗЮМЕ** Отримані та дослідженні загальні представлення комплексних потенціалів теорії вигину багатозв'язних ізотропних плит, наведені аналітичні розв'язки задач для кругової і кільцевої плити під дією згинаючих моментів на контурах і рівномірно розподілених по основі зусиль.

**Ключові слова:** багатозв'язна плита, комплексні потенціали, загальне представлення функцій, кругове кільце, рівномірний тиск по основі.

**SUMMARY** General representations of complex potentials of bending theory for multiply isotropic plates are obtained and studied, analytical solution of problem for circular and annular plate under the action of bending moments on the contours and evenly distributed over the bottom of effort are given.

**Keywords:** multiply plate, complex potentials, general representation of the functions, circular ring, uniform pressure over the substrate.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит // Теорет. и прикладная механика.– 2012.– Вып. 4 (50).– С. 113–132.
- 2 Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках.– Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013.– 440 с.
- 3 Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями.– К., Донецк: Вища шк., 1976.– 200 с.
- 4 Космодамианский А. С., Иванов Г. М. Изгиб тонких многосвязных плит.– Донецк, 1973.– 256 с.
- 5 Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.– М.: Гостехиздат, 1957.– 463 с.
- 6 Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // Прикладная математика и механика.– 1938.– Т. 2, вып. 2.– С. 181–209.
- 7 Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел.– 1967.– Вып. 3.– С. 97–127.
- 8 Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.– М.: Наука, 1966.– 708 с.
- 9 Boussinesque M. J. Compliments a une etude sur la theorie de lequilibre et du mouvement des solides elastiques // J. Math, pures et appl., ser. 3, Vol. 5, 1879.– P. 163–194 and 329–344.
- 10 Gehring F. De Aequationibus Differentialibus, quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur. Ph.D. dissertation, Berlin, 1860.
- 11 Huber M. T. Teoria plyt prostokatnie-ryznokierunkowych.– Lwow, 1921.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 10.09.2013*

УДК 539.3

Г. Т. СУЛИМ, д-р физ.-мат. наук,  
М. М. ТОМАШИВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук,  
Я. М. ПАСТЕРНАК, канд. физ.-мат. наук

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

*С использованием теории аналитических функций и формализма Стро построены интегральные зависимости и интегральные уравнения типа Сомильяны плоской задачи термоупругости для анизотропной полуплоскости, содержащей отверстия, трещины и тонкие деформируемые инородные включения. Все возможные комбинации однородных механических и тепловых краевых условий на границе полупространства учтены в ядрах построенных интегральных соотношений. Полученные интегральные представления введены в модифицированный метод граничных элементов. Представленные численные примеры показывают обоснованность, эффективность и высокую точность полученных расчетных схем и уравнений.*

*Ключевые слова:* термоупругость, метод граничных элементов, тонкое включение, трещина, отверстие, анизотропия, полуплоскость.

Композиционные материалы широко используются в современных инженерных конструкциях вследствие множества их полезных свойств, позволяющих, в частности, уменьшить массу при сохранении прочности и жесткости продукта. Все композиты являются анизотропными, что порождает необходимость развития аналитических и численных подходов к анализу прочности и надежности анизотропных конструктивных элементов, в том числе при изучении коэффициентов интенсивности напряжений для вершин трещин и других остроугольных дефектов. Так в работах [1, 2] построены эффективные аналитико-численные методы анализа термоупругого состояния анизотропных сред с дефектами посредством рассмотрения соответствующих комплексных потенциалов типа Лехницкого.

Среди численных подходов, используемых при решении соответствующих задач, методы интегральных уравнений, в частности метод граничных элементов (МГЭ), отличаются высокой точностью и производительностью [4, 5]. Но при дополнительном учете тепловых явлений в интегральных уравнениях возникают дополнительные члены с объемными интегралами, которые практически сводят на нет преимущества МГЭ. Для случая изотропных твердых тел, эти объемные интегралы могут быть преобразованы к граничным [8], а в случае анизотропных тел такое преобразование является сложной задачей [9–13]. В работе [9] для плоской задачи термоупругости объемный температурный интеграл был сведен к контурному в действительной области, что позволяет расширить возможности основанного на методах теории функции комплексного переменного и формализме Стро подхода [10] для получения интегральных формул и уравнений в случае анизотропного термоупругого полупространства с отверстиями, трещинами и тонкими деформируемыми включениями. Что сделано в настоящей статье.

**Постановка и схема решения задачи.** Рассмотрим анизотропное термоупругое полупространство  $x_2 > 0$ , связанное с неподвижной прямоугольной системой координат  $Ox_1x_2x_3$ . Согласно [7, 14] уравнения равновесия, баланса тепла и определяющие соотношения плоской деформации линейно термоупругого тела и плоской стационарной теплопроводности можно записать в таком унифицированном виде:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad h_{i,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,m} - \beta_{ij}\theta, \quad h_i = -k_{ij}\theta_{,j}. \quad (2)$$

Здесь  $u_i$  – компоненты вектора смещений;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $h_i$  – компоненты вектора плотности теплового потока;  $\theta$  – изменение температуры по сравнению с отсчетной;  $C_{ijkl}$  – упругие постоянные;  $k_{ij}$  – коэффициенты теплопроводности;  $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{km}$  ( $i, j, k, m = 1, \dots, 3$ ) – модули теплового расширения (коэффициенты тепловых напряжений);  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты теплового расширения. Тензоры с компонентами  $C_{ijkl}$ ,  $k_{ij}$ , и  $\beta_{ij}$  являются симметричными.

Согласно расширенному формализму Стро [7, 14] общее решение уравнений (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{Re} \{g'(z_t)\}, \quad \vartheta = 2k_t \operatorname{Im} \{g'(z_t)\}, \\ h_1 &= -\vartheta_{,2}, \quad h_2 = \vartheta_{,1}, \quad k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}; \\ \mathbf{u} &= 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)], \quad \boldsymbol{\varphi} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)], \\ \sigma_{i1} &= -\varphi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \varphi_{i,1}; \\ z_t &= x_1 + p_t x_2; \quad z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2; \\ \mathbf{f}(z_*) &= [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]^T, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\vartheta$  – функция теплового потока;  $g(z_t)$ ,  $F_\alpha(z_\alpha)$  – определенные аналитические функции своих аргументов;  $p_t$  – комплексная постоянная, являющаяся корнем (с положительной мнимой частью) характеристического уравнения теплопроводности  $k_{22}p_t^2 + 2k_{12}p_t + k_{11} = 0$ . Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ , постоянные  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 3$ ) определяются из задачи на собственные значения формализма Стро по значениям  $C_{ijkl}$ ,  $k_{ij}$ , и  $\beta_{ij}$ .

Комплексные потенциалы Стро, а также вектор-функции смещений и напряжений связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(z_*) &= \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^T \mathbf{u}^t - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}^t, \\ \mathbf{u}^t &= 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{c}g(z_t) \}, \quad \boldsymbol{\varphi}^t = 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{d}g(z_t) \}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом интегральной формулы Коши [3] комплексные потенциалы Стро внутри полупространства с отверстиями  $\Gamma$  можно представить в виде

$$\mathbf{f}(z_*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\langle \frac{d\tau_*}{\tau_* - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(\tau_*) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*} \right\rangle \mathbf{f}(x_1) \quad (\text{Im } z_* > 0), \quad (5)$$

где

$$\langle F_*(z_*) \rangle = \text{diag} [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]^T.$$

После использования уравнений (4) формула (5) дает возможность связать значения комплексных потенциалов внутри полупространства с краевыми значениями функций смещений, напряжений, температуры и теплового потока на контурах  $\Gamma$  и границе полупространства.

При этом основной задачей теперь является исключение несобственных интегралов вдоль бесконечной границы полупространства из интегральных представлений с учетом соответствующих краевых условий. В работе [10] представлены соответствующие преобразования для теплоизолированной и свободной от механических нагрузок границы полупространства. В этой работе получены соответствующие интегральные представления комплексных потенциалов Стро для других возможных краевых условий на границе полупространства.

Учитывая условия теплоизолированности границы ( $\vartheta(x_1) = 0$ ) или границы с нулевой температурой ( $\theta(x_1) = 0$ ), а также свободного от механического воздействия ( $\varphi(x_1) = 0$ ) или жестко заделанного ( $\mathbf{u}(x_1) = 0$ ) полупространства, получаем интегральные представления температуры и теплового потока для четырех случаев краевых задач

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= 2 \text{Re} \left\{ g'(Z_t(\xi)) \right\} = \int_{\Gamma} \left[ \Theta^{hs*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{hs*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \\ h_i(\xi) &= 2k_t \text{Im} \left\{ (\delta_{2i} - \delta_{1i} p_t) g''(Z_t(\xi)) \right\} = \int_{\Gamma} \Theta_i^{hs**}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ &\quad - \int_{\Gamma} H_i^{hs**}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

где ядра имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Theta^{hs*}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{2\pi k_t} \left[ \ln |Z_t(\mathbf{x} - \xi)| - \text{Ind}\{\vartheta, \theta\} \ln |\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_t(\xi)| \right], \\ Z_*(\mathbf{x}) &= x_1 + p_* x_2; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} H^{hs*} &= -k_{ij} n_i(\mathbf{x}) \Theta_j^{hs*}(\mathbf{x}, \xi), \\ \Theta_i^{hs**} &= -k_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \Theta^{hs*}(\mathbf{x}, \xi), \quad H_i^{hs**} = -k_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j} H^{hs*}(\mathbf{x}, \xi). \end{aligned} \quad (8)$$

Для интегральных представлений вектора смещений и тензора напряжений с учетом (4) получаются формулы

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{U}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{r}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \\
\sigma_j(\xi) &= \int_{\Gamma} \mathbf{D}_j^{hs}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{S}_j^{hs}(\mathbf{x}, \xi) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\
&\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{q}_j^{hs}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{w}_j^{hs}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \tag{9}
\end{aligned}$$

в которых ядра определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \langle \ln Z_*(\mathbf{x} - \xi) \rangle \mathbf{A}^T + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^3 \langle \ln(\bar{Z}_{\beta}(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{F} \mathbf{I}_{\beta} \bar{\mathbf{A}}^T \right], \\
T_{pi}(\mathbf{x}, \xi) &= C_{ijkm} n_j(\mathbf{x}) \mathbf{U}_{pk,m}^{hs}(\mathbf{x}, \xi); \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{1}{\pi k_t} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \langle f^*(Z_*(\mathbf{x} - \xi)) \rangle (\mathbf{A}^T \text{Im}[\mathbf{d}] + \mathbf{B}^T \text{Im}[\mathbf{c}]) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\pi k_t} \text{Im} \left[ \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{A} \langle f^*(\bar{Z}_{\beta}(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{F} \mathbf{I}_{\beta} (\bar{\mathbf{A}}^T \text{Im}[\mathbf{d}] + \bar{\mathbf{B}}^T \text{Im}[\mathbf{c}]) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi k_t} \text{Re} \left[ \mathbf{c} \left[ f^*(Z_t(\mathbf{x} - \xi)) - \text{Ind}\{\vartheta, \theta\} f^*(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_t(\xi)) \right] \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi k_t} \text{Im} \left[ \mathbf{A} \langle f^*(\bar{Z}_t(\mathbf{x}) - Z_*(\xi)) \rangle \mathbf{V} \nu \right],
\end{aligned}$$

$$r_i^{hs}(\mathbf{x}, \xi) = k_{pq} \nu_{i,q}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) n_p(\mathbf{x}); \tag{11}$$

$$q_{ij}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} r_m^{hs}(\mathbf{x}, \xi) + \beta_{ij} H^{hs*}(\mathbf{x}, \xi),$$

$$w_{ij}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} \nu_m^{hs}(\mathbf{x}, \xi) - \beta_{ij} \Theta^{hs*}(\mathbf{x}, \xi),$$

$$D_{ijk}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} U_{mk}^{hs}(\mathbf{x}, \xi),$$

$$D_{ijk}^{hs}(\mathbf{x}, \xi) = C_{ijmp} \frac{\partial}{\partial \xi_p} U_{mk}^{hs}(\mathbf{x}, \xi). \tag{12}$$

Здесь

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{B}^{-1} \bar{\mathbf{B}}, & \varphi(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0 \text{ или } \varphi(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0, \\ \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{A}}, & \mathbf{u}(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0 \text{ или } \mathbf{u}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \end{cases} \tag{13}$$



$$v = \begin{cases} -2i, & \varphi(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0 \text{ или } \mathbf{u}(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0, \\ -2, & \varphi(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0 \text{ или } \mathbf{u}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{Ind}\{\vartheta, \theta\} = \begin{cases} 1, & \theta(x_1) = 0, \forall x_2 = 0, \\ -1, & \vartheta(x_1) = 0, \forall x_2 = 0; \end{cases} \quad (15)$$

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \mathbf{B}^{-1} \text{Re}[\mathbf{d}], & \varphi(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0, \\ \mathbf{A}^{-1} \text{Im}[\mathbf{c}], & \mathbf{u}(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0, \\ \mathbf{B}^{-1} \text{Im}[\mathbf{d}], & \varphi(x_1) = 0, \theta(x_1) = 0, \\ \mathbf{A}^{-1} \text{Re}[\mathbf{c}], & \mathbf{u}(x_1) = 0, \vartheta(x_1) = 0; \end{cases} \quad (16)$$

Краевые условия на контурах  $\Gamma$  задают только половину из компонент функций  $\theta(\mathbf{x})$ ,  $h_n(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ . Для гладких замкнутых контуров  $\Gamma$  в термоупругом полупространстве их следует дополнить [3] следующими интегральными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \theta(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \Theta^{hs*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} H^{hs*}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) &= \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{hs}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{hs}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \\ &+ \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{r}^{hs}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \theta(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \mathbf{v}^{hs}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) h_n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (17)$$

где RPV означает величину несобственного интеграла; CPV – главное значение интеграла.

При решении задач для тел с математическими разрезами, когда отдельные замкнутые контуры  $\Gamma_j$  линии  $\Gamma$  становятся берегами математических разрезов  $\Gamma_{Cj}$  (простых разомкнутых дуг), интегральные уравнения (17) вырождаются, поэтому следует применять теорию дуальных гиперсингулярных интегральных уравнений [3]. Полученную систему интегральных уравнений можно решить модифицированным методом граничных элементов [9].

Зная функции скачков напряжений и перемещений в вершине тонкого включения, обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) вычислим по формулам [10]

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (18)$$

где  $\mathbf{k}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}]^T$ ,  $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}^{(2)}]^T$ ;  $K_{ij}$  – обобщенные КИН [6] (в случае трещины  $K_{11} = K_I$ ,  $K_{21} = K_{II}$ ,  $K_{31} = K_{III}$ ,  $K_{i2} = 0$ );  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T$  – действительный тензор Barnett-Lothe [7, 14].

**Численные результаты и их анализ.** На основе построенных интегральных уравнений разработан численный алгоритм МГЭ для решения плоских задач термоупругости для анизотропного полупространства (полуплоскости) с тонкими включениями. Численный алгоритм верифицирован путем решения известных задач для тел с трещинами или тонкими жесткими включениями [1, 4, 5]. Во всех этих случаях алгоритм показал высокую точность и эффективность (последняя измерялась количеством граничных элементов, необходимых для получения асимптотики численной сходимости результатов).

Решена также новая задача термоупругости (обобщенное плоское напряженное состояние) для анизотропной полуплоскости с тонкой термоупругой изотропной неоднородностью длиной  $2a$  и полутолщиной  $h = 0,01a$ . На бесконечности вдоль оси  $Ox_1$  задан однородный тепловой поток  $h_0$ . Полуплоскость изготовлена из анизотропного стеклопластика со следующими свойствами

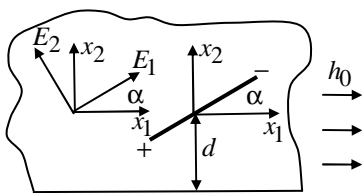
$$E_1 = 55 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 21 \text{ ГПа}, \quad G_{12} = 9,7 \text{ ГПа}, \quad \nu_{12} = 0,25,$$

$$\alpha_{11} = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \alpha_{22} = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad k_{11} = 3,46 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$k_{22} = 0,35 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К}).$$

Значение постоянных материала представлены в направлении главных осей анизотропии. Относительную жесткость неоднородности характеризует параметр  $k = G^i / G_{12}$ , где  $G^i$  – модуль сдвига материала неоднородности;  $\lambda = a / d$  – параметр, определяющий расстояние  $d$  от центра включения до поверхности полупространства. Для разбиения поверхности включения оказалось достаточным использовать 20 квадратичных граничных элементов, включая два специальные конечные.

На рис. 1 изображены графики изменения нормированных величиной  $K_0 = h_0 \cdot a \sqrt{\pi a} \cdot E_1 \cdot \alpha_{11} / k_{11}$  значений обобщенных КИН  $K_{ij}$  в зависимости от относительной жесткости  $k$  включения при различных значениях параметра  $\lambda$  и двух характерных способах ориентации включения причем, неоднородность из физических соображений была ориентирована вдоль волокон анизотропного материала, т. е. при изменении угла наклона неоднородности  $\alpha$  ориентация главных осей анизотропии материала к отсчетным координатам изменялась на тот же угол, как изображено на рисунке. Предполагалось, что материал включения не проводит тепло (рис. 1) или его идеально проводит (рис. 2). КИН  $K_{22}$ , характеризующие интенсивность сдвиговых напряжений на продолжении неоднородности, для теплоизолированных включений достигают наибольших значений при  $\alpha = \pi / 2$ . Приближение включения к границе полуплоскости вызывает в случае теплопроводных включений уменьшение КИН и их рост в случае включений теплоизолированных.



ориентирована вдоль волокон анизотропного материала, т. е. при изменении угла наклона неоднородности  $\alpha$  ориентация главных осей анизотропии материала к отсчетным координатам изменялась на тот же угол, как изображено на рисунке.

Предполагалось, что материал включения не проводит тепло (рис. 1) или его идеально проводит (рис. 2). КИН  $K_{22}$ , характеризующие интенсивность сдвиговых напряжений на продолжении неоднородности, для теплоизолированных включений достигают наибольших значений при  $\alpha = \pi / 2$ . Приближение включения к границе полуплоскости вызывает в случае теплопроводных включений уменьшение КИН и их рост в случае включений теплоизолированных.

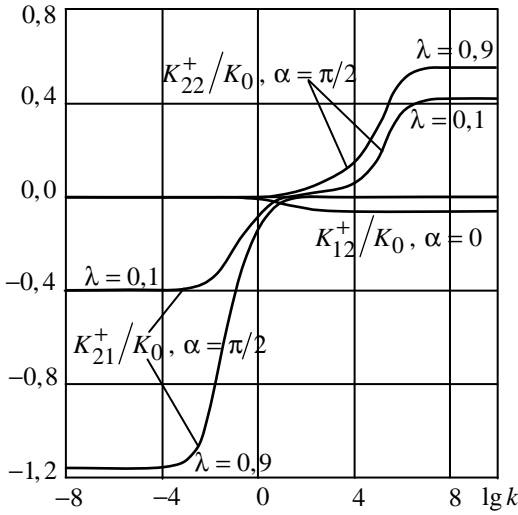


Рис. 1

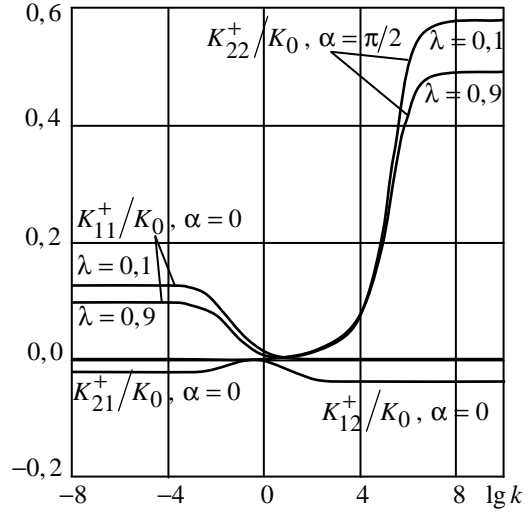


Рис. 2

В табл. 1 представлены результаты вычислений КИН для различных значений  $\lambda$  в случае теплообмена между берегами трещины ( $k = 10^{-10}$ ) при  $\alpha = 0$ . Если неоднородность перпендикулярна к границе полупространства ( $\alpha = \pi/2$ ), то при тех же условиях все КИН будут равны нулю.

Табл. 2 содержит результаты для случая, когда трещина расположена под углом  $\pi/2$  к поверхности и между ее берегами не происходит те-

Таблица 1

$\lambda$	$\frac{K_I^-}{K_0}$	$\frac{K_{II}^-}{K_0}$	$\frac{K_I^+}{K_0}$	$\frac{K_{II}^+}{K_0}$
0,1	-0,1252	-0,0046	0,1252	-0,0046
0,2	-0,1265	-0,0089	0,1235	-0,0089
0,3	-0,1208	-0,0126	0,1208	-0,0126
0,4	-0,1175	-0,0158	0,1175	-0,0158
0,5	-0,1137	-0,0182	0,1137	-0,0182
0,6	-0,1097	-0,0200	0,1097	-0,0200
0,7	-0,1056	-0,0213	0,1056	-0,0213
0,8	-0,1015	-0,0220	0,1015	-0,0220
0,9	-0,0974	-0,0224	0,0974	-0,0224

Таблица 2

$\lambda$	$\frac{K_I^-}{K_0}$	$\frac{K_{II}^-}{K_0}$	$\frac{K_I^+}{K_0}$	$\frac{K_{II}^+}{K_0}$
0,1	0,0000	0,3399	0,0000	-0,3951
0,2	0,0000	0,3149	0,0000	-0,4270
0,3	0,0000	0,2908	0,0000	-0,4635
0,4	0,0000	0,2670	0,0000	-0,5065
0,5	0,0000	0,2428	0,0000	-0,5590
0,6	0,0000	0,2174	0,0000	-0,6263
0,7	0,0000	0,1894	0,0000	-0,7192
0,8	0,0000	0,1564	0,0000	-0,8635
0,9	0,0000	0,1113	0,0000	-1,1553

плообмен. В отличие от предыдущего случая все КИН равны нулю тогда, когда включение параллельно к границе полуплоскости.

**РЕЗЮМЕ.** Використовуючи теорію аналітичних функцій і формалізм Стро, побудовано інтегральні формули та інтегральні рівняння типу Сомільяни плоскої задачі термопружності для анізотропної півплощини, що містить отвори, тріщини і тонкі сторонні включення. Для всіх можливих комбінацій механічних і теплових умов на межі півплощини подано вигляд ядер інтегральних рівнянь. Отримані інтегральні подання введені в

модифікований метод граничних елементів. Приклади числових розрахунків для тонкого деформівного включення засвідчили обґрунтованість, ефективність і точність отриманих рівнянь.

**Ключові слова:** термопружність, метод граничних елементів, тонке включення, тріщина, отвір, анізотропія, півплощина.

**SUMMARY.** Using the theory of analytic functions and the Stroh formalism this paper develops boundary integral equations and the Somigliana type integral formulae for an anisotropic thermoelastic half-space. For an arbitrary combination of homogeneous mechanical and thermal conditions at the boundary of a half-space it derives closed-form expressions for the kernels of integral equations. Obtained integral relations are introduced into the modified boundary element approach. Presented numerical examples show the validity, efficiency and accuracy of the obtained equations.

**Keywords:** thermoelastic, boundary element method, thin inclusion, crack, hole, anisotropic, half-plane.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Качан Ю. Б. Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами, упругими и жесткими включениями // Теорет. и прикладная механика.– 2002.– Вып. 35.– С. 53–65.
2. Калоеров С. А., Добряк Д. А. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости // Теорет. и прикладная механика.– 2010.– Вып. 1(47).– С. 45–61.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968.– 512 с.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.– К.: Наук. думка, 1981.– 324 с.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками.– М.: Мир, 1990.– 1016 с.
6. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями.– Львів: НТШ.– 2007.– 716 с.
7. Hwu C. Anisotropic elastic plates – London: Springer.– 2010.– 673 p.
8. Mukherjee Y. X., Shah K, Mukherjee S. Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations // Eng. Anal. Bound. Elem.– 1999.– Vol. 23.– P. 89–96.
9. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity // Eng. Anal. Bound. Elem.– 2012.– Vol. 36, № 12.– P. 1931–1941.
10. Pasternak Ia, Pasternak R, Sulym H. Boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions // Eng. Anal. Bound. Elem.– 2013.– Vol. 37.– P. 1514–1523.
11. Prasad N. N. V., Aliabadi M. H., Rooke D. P. The dual boundary element method for thermoelastic crack problems // Int. J. Fract.– 1994.– Vol. 66.– P. 255–272
12. Shiah Y. C., Tan C. L. Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM // CMES.– 2000.– Vol. 1(3).– P. 91–99.
13. Shiah Y. C., Gao T. L., Tan C. L. Two-dimensional BEM, thermoelastic analysis of anisotropic media with concentrated heat sources // CMES.– 2005.– Vol. 7(3).– P. 321–338.
14. Ting T. C. T. Anisotropic elasticity: theory and applications.– New York: Oxford University Press, 1996.– 567 p.

Львовский национальный университет

Поступила в редакцию 17.10.2013

УДК 539.3

*И. К. СЕНЧЕНКОВ*, д-р физ.-мат. наук  
*О. П. ЧЕРВИНКО*, канд. физ.-мат. наук  
*Е. В. ДОЛЯ*, канд. физ.-мат. наук

## ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ЦИЛИНДРА С МНОГОСЛОЙНЫМ НАРАЩИВАНИЕМ НА ТОРЦЕ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*Разработана методика численного исследования процесса многослойного наращивания цилиндрических тел материалами с микроструктурными преобразованиями. Исследовано влияние остаточных напряжений на долговечность наращенных тел при дальнейшем циклическом термомеханическом нагружении. Исследование проводилось с целью разработки технологий наплавки и удлинения ресурса цилиндрических деталей, которые работают в условиях интенсивного циклического термомеханического нагружения.*

*Ключевые слова:* многослойное наращивание, цилиндрические тела, остаточные напряжения, циклическое термомеханическое нагружение.

Исследование долговечности наращенных тел при циклическом термомеханическом нагружении имеет важное теоретическое и прикладное значение при разработке технологий наплавления, напыления и т.п. таких элементов конструкций, как валки горячей прокатки, штампы горячего деформирования и др. [4]. Математическому моделированию напряженно-деформированного и микроструктурного состояния тел, наращиваемых слоями жидкого металла, посвящены работы [5, 7, 11]. Получаемые при этом данные об остаточном НДС определяют асимметрию цикла эксплуатационного нагружения наращенных элементов конструкций и являются базовыми для расчета их долговечности.

В настоящей работе развита численная методика оценки циклической долговечности цилиндра, наращенного на торце двумя слоями сталей с различными физико-механическими характеристиками с последующим циклическим термомеханическим нагружением.

**Объект исследования.** Исследование связано с расчетом долговечности штампов горячей штамповки. Схема наращенного цилиндра с указанием размеров в мм приведена на рис. 1. Объект моделируется цилиндром из стали 40Х (1), наращенного на торце сначала подслоем из стали 08кп (2), а затем слоем из износостойкой стали 25Х5ФМС (3), процесс нанесения слоев описан в работе [7]. После наращивания цилиндр подвергается циклическим софазным термическим и механическим нагрузкам периода  $T$  на торце. Принято, что область нагружения имеет вид круга диаметром  $1,5 \cdot 10^{-2} м$  (область 4 на рис. 1).

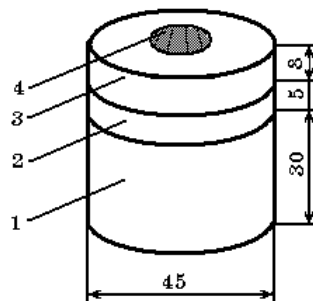


Рис. 1

**Постановка задачи.** Рассматривается цилиндр  $0 \leq z \leq \tilde{H}$ ,  $0 \leq r \leq R_0$ .

В цилиндрической системе координат  $Orz\varphi$  постановка задачи включает:

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right);$$

– уравнения квазистатического равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0;$$

– уравнение теплопроводности

$$c_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (kr \frac{\partial \theta}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial \theta}{\partial z}) + Q,$$

где  $\theta$  – температура;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформации и напряжений;  $Q$  – плотность объемного источника;  $c_v$  – объемная теплоемкость;  $k$  – коэффициент теплопроводности.

Физически нелинейное поведение материала описывается унифицированной моделью течения Боднера-Партома [7], включающей:

– гипотезу аддитивности тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{ph\theta};$$

– закон Гука для изотропного материала

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_v(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{ph\theta} - \varepsilon_{kk}^*); \quad (1)$$

– закон течения Прандтля-Рейсса с условием пластической несжимаемости

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ (K + K_0)^2 / 3J_2 \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \varepsilon_{ij}^p(0) = 0, \quad \varepsilon_{kk}^p = 0;$$

– уравнение эволюции для параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}^p, \quad K(0) = 0,$$

где  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\varepsilon_{ij}^{ph\theta}$  – компоненты тензоров упругой и термофазовой деформации;  $e_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций;  $G$  – модуль сдвига;  $K_v$  – объемный модуль;  $n$ ,  $m_1$ ,  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $D_0$  – параметры модели;  $\dot{W}^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  – пластическая мощность;  $J_2 = 1/2 s_{ij}s_{ij}$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений.

В уравнениях (1)  $e_{ij}^*$  обозначает девиатор тензора собственной деформации  $\varepsilon_{ij}^*$ , определяемый в процессе решения задачи с целью обеспечить выполнение условий на поверхности наращивания

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad \theta = \theta^*, \quad t = t^*(\tilde{H}), \quad z = \tilde{H}. \quad (2)$$

Здесь  $t^*$  – момент времени наращивания;  $\theta^*$  – температура наращиваемого материала;  $\tilde{H}$  – переменная координата на торце цилиндра,  $H_0 \leq \tilde{H} \leq H$ . На поверхностях, где не происходит наращивание, выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} \pm k \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \alpha(\theta - \theta_c) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4), \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad r = R_0, \quad 0 \leq z \leq \tilde{H}, \\ \mp k \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \alpha(\theta - \theta_c) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_c^4), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad z = \tilde{H}, \quad z = H, \quad t > t^*, \\ \theta &= \theta_c, \quad u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0, \end{aligned} \quad (3)$$

в которых  $T = \theta + 273^\circ\text{C}$ .

После наращивания цилиндр подвергается комбинированному тепловому и механическому циклическому нагружению торца  $z = H$ , которое описывается следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} q &= -k \frac{\partial \theta}{\partial z} = q_0(t) \exp\left[-(r/r_0)^2\right], \\ \sigma_{zz} &= \begin{cases} -p_0 \sigma(t) \left[1 - (r/r_1)^2\right], & 0 < r < r_1, \\ 0, & r_1 < r < R, \end{cases} \\ \sigma_{rz} &= 0, \quad 0 < r < R. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $r_0$  и  $r_1$  – характерные радиусы области нагружения;

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sin \pi t / \tilde{t}, & nT < t < nT + \tilde{t}, \\ 0, & nT + \tilde{t} < t < (n+1)T; \end{cases}$$

$T$  – период нагрузки;  $\tilde{t}$  – время действия нагрузки,  $0 < \tilde{t} < T$ ;  $p_0$  – интенсивность осевой нагрузки. Функция  $q(t)$  выбиралась таким образом, чтобы обеспечить заданную максимальную температуру в цикле. Продолжительность стадии нагрева принимается 11 с, а охлаждения – 8 с. Параметры конвективного теплообмена и тепловой поток подбираются из условий реализации заданного цикла.

**Микроструктурные превращения.** Многие материалы, в частности стали, в процессе нагрева и охлаждения претерпевают микроструктурные превращения [12, 14]. Эти превращения сопровождаются изменениями физико-механических характеристик, скрытыми теплотами, изменением объема и т. п. Для расчета изменения концентрации фаз используются термокинетические диаграммы (ТКД) распада переохлажденного аустенита [7, 11, 13]. При этом накопление наиболее важной фазы мартенсита описывается законом Коистинена-Марбургера

$$C^m = \left[ 1 - \exp\left(-k \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_0}\right) \right] C_e^m, \quad (5)$$

где  $C^m$  – концентрация фазы мартенсита;  $C_e^m$  – максимальное значение концентрации мартенсита для данной траектории охлаждения на ТКД;  $k$  – параметр модели, принимается  $k = 3$ ;  $\theta_s$  и  $\theta_e$  – температуры начала и конца преобразования.

Для произвольного объемного фазового состава  $C^\xi$ : аустенит ( $\xi = a$ ), феррит ( $\xi = f$ ), перлит ( $\xi = p$ ), бейнит ( $\xi = b$ ) и мартенсит ( $\xi = m$ ) при температуре  $\theta$  суммарная термотрансформационная деформация определяется через удельные объемы фаз по формуле [9, 13]

$$\varepsilon_{ij}^{\theta ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V^\xi(\theta)C^\xi(\theta) - V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}{3V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}, \quad (6)$$

в которой  $V^\xi(\theta)$  – удельный объем фазы  $\xi$  для температуры  $\theta$ ;  $\theta_r = 20^\circ\text{C}$  – отсчетная температура и

$$V^a(\theta) \cdot 10^3 = 0,12282 + 8,56 \cdot 10^{-6}(\theta - 20) + 2,15 \cdot 10^{-3}C_p,$$

$$V^{f,p,b}(\theta) \cdot 10^3 = 0,12708 + 5,528 \cdot 10^{-6}(\theta - 20),$$

$$V^m(\theta) \cdot 10^3 = 0,12708 + 4,448 \cdot 10^{-6}(\theta - 20) + 2,79 \cdot 10^{-3}C_p,$$

причем  $C_p$  – объемная концентрация углерода в процентах.

**Модель усталостной долговечности.** В связи со сложностью экспериментальных исследований [3] оценка долговечности деталей, работающих в условиях неизотермического механического нагружения, является нерешенной до настоящего времени проблемой. Поэтому в данной работе используется упрощенная модель Мэнсона [15], в которой для получения консервативных инженерных оценок используются изотермические соотношения, а входящие в них параметры вычисляются при максимальной температуре цикла. При этом предполагается, что в интервале эксплуатационного температурного цикла в материале не происходит структурных превращений.

Естественно, в условиях отсутствия экспериментальных данных по усталостной прочности, используются универсальные уравнения, включающие зависящие от температуры исходные статические характеристик, такие, как  $\sigma_{02}$ ,  $\sigma_B$  и другие, которые имеются в справочной литературе.

При изотермическом циклическом нагружении с учетом влияния статической нагрузки долговечность по Мэнсону оценивается при помощи универсальной зависимости [3, 15]

$$\Delta\varepsilon = \frac{3,5(\sigma_B - \sigma_m)}{E} N_f^{-0,12} + \left( \ln \frac{1}{1 - \psi} \right)^{0,6} N_f^{-0,6}, \quad (7)$$

где  $\sigma_B$ ,  $E$ ,  $\psi$  – исходные механические свойства при данной температуре;  $\Delta\varepsilon$  – размах полной деформации;  $\Delta\varepsilon = 2\varepsilon_a$ ;  $\varepsilon_a = (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}) / 2$ ;  $\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2$  – среднее напряжение цикла (учитываются лишь



положительные значения  $\sigma_m$ );  $N_f$  – число циклов до разрушения.

В области многоциклового усталости при отсутствии циклической пластической деформации ( $\Delta\varepsilon^p = 0$ ) уравнение (7) редуцируется к уравнению

$$\Delta\sigma = 3,5(\sigma_B - \sigma_m)N_f^{-0,12}, \quad (8)$$

в котором принято  $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$ .

Переход до одноосного уравнения (8) к многоосному напряженному состоянию осуществляется с использованием эквивалентного напряжения  $\sigma_i$  [15]

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}, \quad (9)$$

которое связано с интенсивностью касательных напряжений  $s_i = \sqrt{J_2}$  соотношением  $\sigma_i = \sqrt{3}s_i$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения. С учетом соотношений  $\sigma_{ia} = 2\sqrt{3}s_{ia}$  и  $\sigma_m = \sqrt{3}s_{im}$ , после некоторых преобразований получаем

$$\lg N = 8,33 \left( \frac{\sigma_B - \sqrt{3}s_{im}}{s_{ia}} \right). \quad (10)$$

где  $\sigma_B$  вычисляется при максимальной температуре цикла.

Значения величины  $\sigma_B = \sigma_B(\theta)$  для каждого материала выбирались из справочной литературы [1, 2], а значения  $s_{ia}, s_{im}$  рассчитывались с использованием численных методов в каждой точке цилиндра. В качестве материала цилиндра, подслоя (первого наращенного слоя) и наружного слоя использовалось, соответственно, сталь 40X, сталь 08кп, сталь 25X5ФМС. Параметры модели течения, упругие и теплофизические характеристики, термокинетические диаграммы конкретизировались на основе экспериментальных данных, приведенных в работах [1, 2, 8].

**Метод решения задачи.** Краевая задача термомеханики решалась численно методом пошагового интегрирования по времени [6, 10]. Уравнения модели течения и теплопроводности интегрировались с помощью неявного метода Эйлера. На каждом шаге нелинейная краевая задача решалась методом итераций. Линеаризованные задачи квазистатического равновесия и теплопроводности в каждой итерации решались методом конечных элементов.

На рис. 2 изображено остаточное напряженно-деформированное состояние наращенного цилиндра, подслоем из стали 08кп и наружным слоем из жаропрочной стали 25X5ФМС. Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы. Максимальные значения интенсивностей  $s_i$  достигаются на границе слоев. Максимальная остаточная пластическая деформация  $e_i^p$  составляет 6,6% и достигается в подслое на границе с

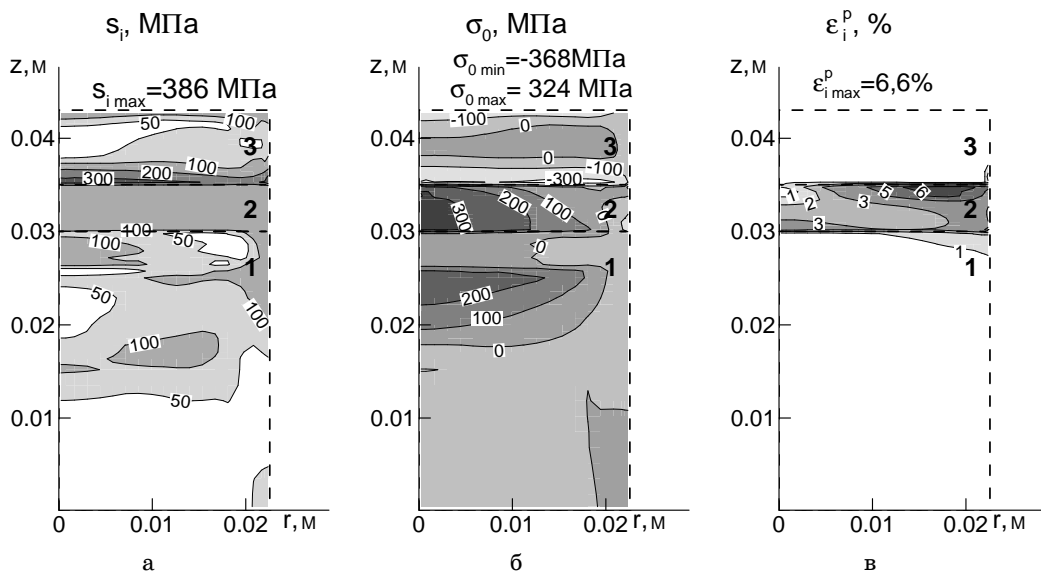


Рис. 2

основным металлом.

На рис. 3 показано остаточное микроструктурное состояние. Наружный наращенный слой имеет преимущественно мартенситную структуру в силу быстрого охлаждения. Исходной структурой материала

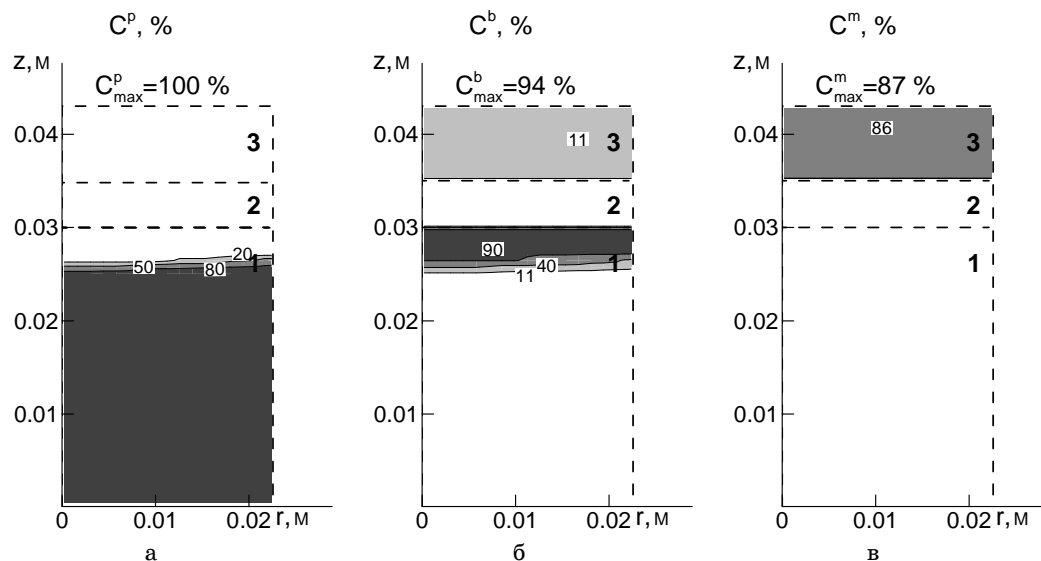


Рис. 3

основного цилиндра является перлит. В результате нагрева в аустенит переходит небольшой слой основного металла, прилегающий к подслою. Толщина этого слоя определяет зону термического влияния. Вследствие последующего медленного охлаждения материал в этой зоне приобретает бейнитную структуру.

**Долговечность наплавленного цилиндра при термомеханическом цикле нагружения.** Предполагается, что наращенный торец цилиндра подвергается комбинированному температурному и механическому софазному циклическому нагружению согласно граничным условиям (4). При этом термические циклы  $\theta_{\max} = 570^\circ\text{C}$  и  $\theta_{\max} = 860^\circ\text{C}$  сочетаются с механическими при  $p_0$  равном 0, 200 МПа, 500 МПа и 1000 МПа. Осевые распределения долговечности ( $r = 0$ ) для комбинированных циклов при  $p_0 = 1000$  МПа и  $\theta_{\max} = 20^\circ\text{C}$ ,  $\theta_{\max} = 570^\circ\text{C}$ ,  $\theta_{\max} = 860^\circ\text{C}$  показаны на рис. 4. Видно, что при данной нагрузке минимальную долговечность имеет подслой. Однако при возрастании температуры долговечность наружного слоя падает, и при  $\theta_{\max} \geq 860^\circ\text{C}$  происходит смена слабого звена, т. е. долговечность наплавленного цилиндра будет определяться уже долговечностью наружного слоя.

Рассмотрим влияние остаточных напряжений. С этой целью проведем расчет долговечности наращенного цилиндра в предположении отсутствия остаточных напряжений и деформаций. Очевидно, что при этом не учитывается влияние остаточных напряжений на асимметрию цикла. Она будет определяться только асимметрией, обусловленной внешней от нулевой нагрузкой. Кривые, аналогичные представленным выше, в случае отсутствия остаточных напряжений показаны на рис. 5.

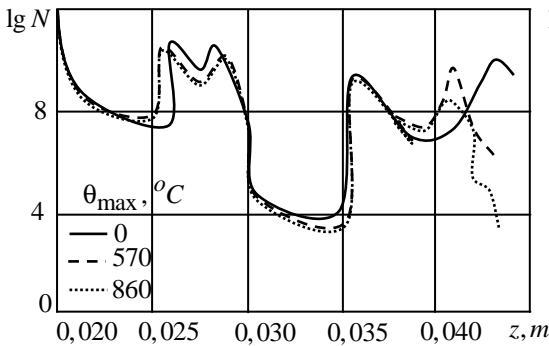


Рис.4

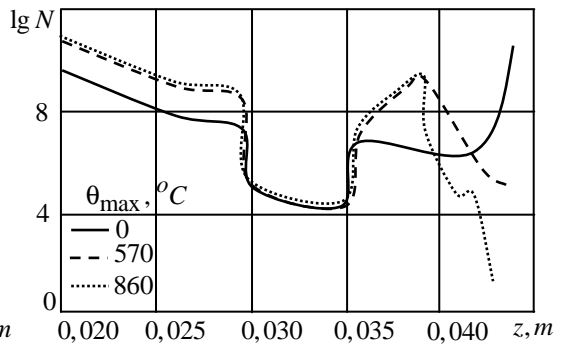


Рис.5

Влияние параметров  $p_0$  и  $\theta_{\max}$  на долговечность наращенных слоев цилиндра при наличии и отсутствии остаточных напряжений обобщено на рис. 6. Здесь показаны зависимости предельной долговечности подслоя (сплошные линии) и наружного слоя (штриховые линии) от максимальной в цикле температуры при  $p_0 = 0$  (кривые 2),  $p_0 = 1000$  МПа (кривые 1). Рис. 6 а и 6 б отвечают случаям наличия и отсутствия остаточных напряжений, соответственно.

Отметим, что уровень механической нагрузки  $p_0$  в рассматриваемом диапазоне слабо влияет на долговечность наружного слоя. Видно, что снятие остаточных напряжений, например, в результате отпуска, повышает долговечность подслоя, но снижает при  $\theta_{\max} \geq 570^\circ$  долговечность поверхностного слоя цилиндра. Это обусловлено тем, что в подслое в ре-

зультате наращивания формируются растягивающие напряжения, а в наружном слое вследствие мартенситных превращений – сжимающие. Кривые 2 на рис. 6 а показывают, что при  $p_0 = 0$  (термический цикл) подслоя имеет более высокую долговечность, чем наружный слой во всем интервале  $\theta_{\max}$ . Однако при  $p_0 = 1000 \text{ МПа}$  (кривая 1), наоборот, более высокую долговечность имеет наружный слой. В случае отсутствия оста-

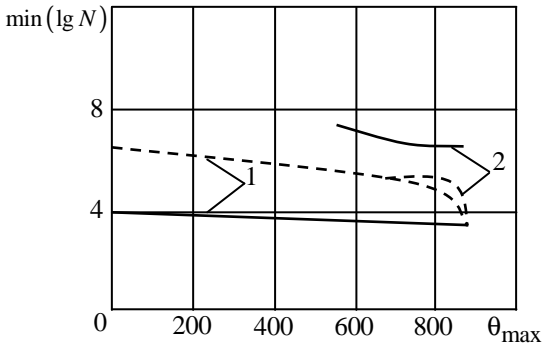


Рис.6а

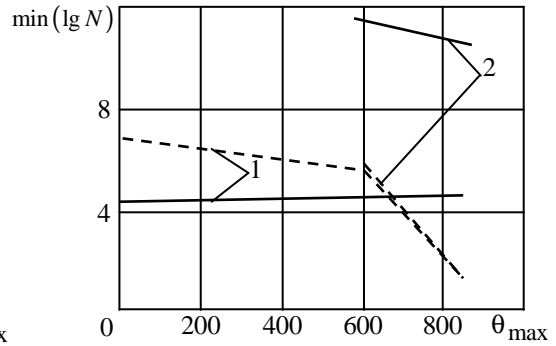


Рис.6б

точных напряжений (рис. 6 б) для комбинированного цикла возникает интересный эффект: в результате снижения долговечности поверхностного слоя для каждой нагрузки  $p_0$  может существовать температура  $\theta_{\max} = \theta_p$  такая, что при  $\theta_{\max} < \theta_p$  долговечность наружного слоя выше, а при  $\theta_{\max} > \theta_p$  – ниже, чем подслоя.

Таким образом, влияние остаточных напряжений на долговечность многослойно наращенных цилиндров является неоднозначным и зависит от последовательности наращивания и физико-механических характеристик слоев, а также микроструктурных превращений. Развитый подход позволяет за счет различного выбора материала слоев обеспечить требуемую для конкретных деталей долговечность эксплуатации.

**РЕЗЮМЕ.** Розроблено методику чисельного дослідження процесу багат шарового нарощування циліндричних тіл матеріалами з мікроструктурними перетвореннями. Досліджено вплив залишкових напружень на довговічність нарощених тіл при подальшому циклічному термомеханічному навантаженні. Дослідження проводилось з метою розробки технологій наплавлення та подовження ресурсу циліндричних деталей, які працюють в умовах інтенсивного циклічного термомеханічного навантаження.

**Ключові слова:** багат шарове нарощування, циліндричні тіла, залишкові напруження, циклічне термомеханічне навантаження.

**SUMMARY.** The methods of numerical study of the process of multilayer cylindrical bodies growing by materials with microstructural transformations. The influence of residual stresses on longevity of grew bodies with further cyclic thermomechanical loading is investigated. The research was conducted in order to develop technologies of surfacing and to extend resource of cylindrical parts, which work under intense cyclic thermomechanical loading.

**Keywords:** multi-layer growing, cylindrical body, residual state, cyclic thermomechanical loading.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев П.А., Котов П.И. Термическая усталость металлов.– М.: Машиностроение, 1980.– 200 с.
2. Михайло-Михеев П.Б. Справочник по металлическим материалам турбино- и моторостроения.– М.; Л.: Машгиз, 1961.– 838 с.
3. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур.– М.: Машиностроение, 1965.– 568 с.
4. Рябцев И.А., Наплавка деталей машин и механизмов.– К.: Экотехнология, 2004.– 160 с.
5. Рябцев И.А., Сенченков И.К. Теория и практика наплавочных работ.– К.: Экотехнология.– 2013.– 400 с.
6. Сенченков И.К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикладная механика.– 2005.– Т. 41, № 2.– С. 118–126.
7. Сенченков И.К., Червинко О.П., Баняс М.В. Расчет остаточного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния цилиндра при многослойном наращивании по боковой поверхности // Прикладная механика.– 2011.– Т. 48, № 2.– С. 7–12.
8. Шоршоров М.Х., Белов В.В. Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке. Атлас.– М.: Наука, 1972.– 220 с.
9. Юрьев С.Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита.– М.: Металлургиздат, 1950.– 48 с.
10. Senchenkov I.K., Chervinko O.P., Turyk, E., Ryabtsev I.A. Examination of the thermo-mechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels // Welding International.– 2008.– V. 22, N 7.– P. 457–464.
11. Khachaturyan A.C. Theory of Structural Transformations in Solids.– NY: Dover Publications, 1983.– 562 p.
12. Leblond I.B., Mottet G., Devaux I.C. A theoretical and numerical approach to the plastic behavior of steel during phase transformations // J. Mech. Phys. Solids.– 1986.– Vol. 34, N 4.– P. 395–409.
13. Manson S.S., Halford G.R. Fatigue and Durability of Structural Materials.– OH: ASM Inter. Mater. Park, 2006.– 456 p.
14. Senchenkov I.K., Zhuk Y.A., Chervinko O.P., Turyk E. Modeling of residual stresses developed in steel cylinders subjected to surface-layer deposition by welding // J. Eng. Math.– 2008.– Vol. 61.– P. 271–284.
15. Radaj D. Welding residual stresses and distortion. Calculation and measurement.– Dusseldorf: DVS Verlag, 2003.– 396 p.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев  
Киевский национальный университет  
строительства и архитектуры*

*Поступила 07.10.2013*

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,  
А. А. САМОДУРОВ

## ВЛИЯНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПЬЕЗОМОДУЛЕЙ НА ПЬЕЗОЭФФЕКТ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

*Исследованы основные соотношения электромагнитоупругости по вопросу о влиянии значений пьезомодулей на пьезоэффект. Выявлены условия, при выполнении которых из общей задачи электромагнитоупругости следуют основные соотношения задач электроупругости, магнитоупругости или задачи теории упругости и электромагнитостатики. Приведены решения частных задач для пластинки с эллиптическим отверстием или упругим включением. Численными исследованиями установлено при каких значениях пьезомодулей пьезоэффект значителен и когда им можно пренебречь, а также влияние жесткости упругого включения на значения напряжений, электромагнитных напряженностей и индукций.*

**Ключевые слова:** электромагнитоупругость, пьезоэффект, упругое включение, пьезопластинка с отверстием.

В различных отраслях современной техники широко используются элементы, изготовленные из пьезоматериалов. Под действием механических сил и электромагнитных полей в этих элементах могут возникать высокие концентрации напряжений, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. В работах [1, 7] предложены методы решения задач электромагнитоупругости, в [2, 4] разработаны методы решения таких задач для многосвязных областей, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние двумерных тел с отверстиями, трещинами, даны решения многочисленных задач.

В данной статье изучается влияние значений пьезомодулей на пьезоэффект, заключающийся в том, что под действием механических сил в теле наряду с напряжениями возникают электромагнитные поля, и наоборот, под электрическими и магнитными воздействиями в теле возникают не только электромагнитные поля, но и напряжения и деформации. Выявлены условия, при выполнении которых пьезоэффект значителен и когда им можно пренебречь. Приведены решения задач для пьезопластинки с эллиптическим отверстием или упругим ядром, численными исследованиями установлено влияние на значения напряжений и электромагнитных характеристик значений коэффициентов деформации и пьезомодулей.

**1. Основные соотношения.** Определение электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) многосвязной пьезопластинки, занимающей многосвязную область  $S$ , при использовании теории функций комплексного переменного сводится к определению комплексных потенциалов  $\Phi_k(z_k)$  [2, 4] из соответствующих граничных условий на контурах области. После нахождения этих функций основные характеристики (напряжения, перемещения, потенциалы, индукции и напряженности электромагнитного

поля) вычисляются по формулам [6]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \quad (1.1)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0); \quad (1.2)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (1.3)$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{9k}, \lambda_{10k}, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k), \quad (1.4)$$

где

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (1.5)$$

$\mu_k$  – корни характеристического уравнения

$$l_{4s}(\mu) [l_{2\beta}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{2v}^2(\mu)] - l_{3g}(\mu) [l_{3g}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu) l_{2v}(\mu)] - \\ - l_{3p}(\mu) [l_{3p}(\mu) l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu) l_{2v}(\mu)] = 0 \quad (1.6)$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2v}(\mu) = -v_{11}\mu^2 + 2v_{12}\mu - v_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \quad (1.7)$$

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \\ \lambda_{7k} = v_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -v_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k; \\ p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})v_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left( g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left( p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k, \\ r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})v_k - (v_{11}\mu_k - v_{12})\rho_k, \\ h_k^0 = p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (v_{11}\mu_k - v_{12})v_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \quad (1.8)$$

$$v_k = \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}, \\ \rho_k = \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k) l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}; \quad (1.9)$$

$s_{ij}$  – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электромагнитного поля;  $g_{ki}$  и  $p_{ki}$  – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{kl}$ ,  $\chi_{kl}$  и  $v_{kl}$  – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях.

В общем случае многосвязной области функции  $\Phi_k(z_k)$  имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^L A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \\ & + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{k0}(z_k), \end{aligned} \quad (1.10)$$

в котором  $\Gamma_k$  – постоянные, которые в случае конечной области равны нулю, а для бесконечной области определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty, D_y^\infty, B_x^\infty, B_y^\infty, 2\omega_3^\infty), \end{aligned} \quad (1.11)$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов индукции электромагнитного поля, или из системы

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, -h_k^0, -\mu_k h_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, E_x^\infty, E_y^\infty, H_x^\infty, H_y^\infty, 2\omega_3^\infty), \end{aligned} \quad (1.12)$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля;  $A_{kl}$ ,  $A_{kr}^0$  – постоянные, определяемые из аналогичных системе (1.12) уравнений, полученных из условий однозначности основных характеристик ЭМУС;  $\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в многосвязных областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{kl}$ , получаемыми из  $L_l$  аффинными преобразованиями (1.5).

При заданных на контуре  $L_l$  индукциях  $D_{nl}$ ,  $B_{nl}$  электромагнитного поля комплексные потенциалы должны удовлетворять граничным условиям [4]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(z_k) = \\ = \mp \int_0^s (X_{ln}, Y_{ln}, D_{ln}, B_{ln}) ds + (c_1, c_2, c_3, c_4), \end{aligned} \quad (1.13)$$



где  $X_{ln}, Y_{ln}$  – компоненты внешних усилий, в случае неподкрепленного контура и граничным условиям

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(t_k) = \left( u_* + \omega_3 y, v_* - \omega_3 x, \mp \int_0^s (D_{ln}, B_{ln}) ds \right) - (u_0, v_0, c_3, c_4), \quad (1.14)$$

если на контуре заданы перемещения  $u_*, v_*$ . В случае идеальных механического и электромагнитного контактов пьезопластины с пьезовключением с областью  $S^{(l)}$ , граничные условия будут такими [6]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) - \left( \lambda_{6k}^{(l)}, \lambda_{2k}^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, \lambda_{8k}^{(l)}, \lambda_{10k}^{(l)}, r_k^{(0l)}, h_k^{(0l)} \right) \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \left( c_1, c_2, \omega_3 y - u_0 - \omega_3^{(l)} y + u_0^{(l)}, -\omega_3 x - v_0 + \omega_3^{(l)} x + v_0^{(l)}, c_3, c_4, \varphi_0, \psi_0 \right). \quad (1.15)$$

При этом  $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$  – комплексные потенциалы для включения с областью  $S^{(l)}$ ;  $c_i, \varphi_0, \psi_0, u_0, u_0^{(l)}, v_0, v_0^{(l)}$  – постоянные. В случае жесткого включения должно выполняться также условие [2]

$$\sum_{k=1}^4 (\beta_{kl1} - \bar{\beta}_{kl1}) = 0, \quad (1.16)$$

в котором  $\beta_{kl1}$  – вычет функции  $\Phi_{k0}(z_k)$  в точке  $z_{kl}$ .

Из приведенных соотношений получаются аналогичные для задач электроупругости, магнитоупругости и классической теории упругости анизотропного тела. Характеристические уравнения для этих случаев имеют соответственно формы [2, 3]

$$l_{4s}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}^2(\mu) = 0; \quad (1.17)$$

$$l_{4s}(\mu)l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}^2(\mu) = 0; \quad (1.18)$$

$$l_{4s}(\mu) = 0. \quad (1.19)$$

Соответствующие изменения для этих случаев будут и во всех приведенных формулах (1.1) – (1.16). Эти соотношения можно получить и предельными переходами, с помощью которых можно пренебречь влиянием пьезоэффекта магнитного, электрического и электромагнитного. С этой целью выясним, как влияют на пьезоэффект значения постоянных в уравнениях электромагнитного состояния материала и получим некото-

рые полезные для дальнейших исследований дополнительные равенства.

**2. Влияние значений постоянных в уравнениях состояния на пьезоэффект материала.** Проанализировав уравнение (1.6) можно сделать следующие выводы.

1. Так как характеристическое уравнение (1.6) не имеет вещественных корней и его корни из-за вещественности коэффициентов являются комплексными и взаимосопряженными [2, 4, 8], то

$$\mu_k \neq 0. \quad (2.1)$$

2. В случае общей задачи электромагнитоупругости имеют место соотношения

$$\begin{aligned} l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2\nu}^2(\mu_k) &\neq 0, \\ l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) &\neq 0, \\ l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\nu}(\mu_k) &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

иначе независимо от значений  $l_{4s}(\mu_k)$ ,  $l_{3g}(\mu_k)$ ,  $l_{3p}(\mu_k)$  не все постоянные электромагнитоупругого состояния входили бы в характеристическое уравнение (1.6), и оно не выражало бы полностью и механический, и электромагнитный процессы.

3. Если  $l_{3p}(\mu_k) = 0$ ,  $l_{2\nu}(\mu_k) = 0$ , т. е., когда  $p_{ij} = 0$ ,  $v_{ij} = 0$ , то из (1.6) и (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} \left[ l_{4s}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k) - l_{3g}^2(\mu_k) \right] l_{2\chi}(\mu_k) &= 0, \\ v_k = -l_{3g}(\mu_k)/l_{2\beta}(\mu_k), \quad \rho_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из первого равенства (2.3) при  $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$  будем иметь характеристическое уравнение электроупругости (1.17). Соотношение  $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$  в численных расчетах лучше всего реализовать, принимая достаточно большими значения коэффициентов полинома  $l_{2\chi}(\mu_k)$ .

Таким образом, из общей задачи электромагнитоупругости при численных расчетах будут следовать результаты для электроупругости, если одновременно  $p_{ij} \rightarrow 0$ ,  $v_{ij} \rightarrow 0$ ,  $\chi_{ij} \rightarrow \infty$ .

4. Если  $l_{3g}(\mu_k) = 0$ ,  $l_{2\nu}(\mu_k) = 0$ , т. е., когда  $g_{ij} = 0$ ,  $v_{ij} = 0$ , то из (1.6) и (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} \left[ l_{4s}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{3p}^2(\mu_k) \right] l_{2\beta}(\mu_k) &= 0, \\ v_k = 0, \quad \rho_k = -l_{3p}(\mu_k)/l_{2\chi}(\mu_k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из первого соотношения (2.4) при  $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$  будем иметь характеристическое уравнение магнитоупругости (1.18). Соотношение  $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$  в численных расчетах лучше всего реализовать, выбирая достаточно большими значения коэффициентов полинома  $l_{2\beta}(\mu_k)$ .

Следовательно, из общей задачи электромагнитоупругости при численных расчетах будут следовать результаты для магнитоупругости, если одновременно  $g_{ij} \rightarrow 0$ ,  $v_{ij} \rightarrow 0$ ,  $\beta_{ij} \rightarrow \infty$ .

5. Если  $l_{3g}(\mu_k) = 0$ ,  $l_{3p}(\mu_k) = 0$ ,  $l_{2v}(\mu_k) = 0$  т. е., когда  $g_{ij} = 0$ ,  $p_{ij} = 0$ ,  $v_{ij} = 0$ , то из соотношений (1.6) и (1.9) следует, что

$$l_{4s}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k) = 0, \quad v_k = 0, \quad \rho_k = 0. \quad (2.5)$$

Из первого равенства (2.5) при  $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$ ,  $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$  будем иметь характеристическое уравнение плоской задачи теории упругости (1.19). Соотношения  $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$ ,  $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$  при проведении расчетов лучше всего реализовать, выбирая достаточно большими значения коэффициентов полиномов  $l_{2\beta}(\mu_k)$ ,  $l_{2\chi}(\mu_k)$ . Следовательно, из общей задачи электромагнитоупругости при численных расчетах будут следовать решения задачи для теории упругости и электромагнитостатики, если одновременно  $g_{ij} \rightarrow 0$ ,  $p_{ij} \rightarrow 0$ ,  $v_{ij} \rightarrow \infty$ ,  $\beta_{ij} \rightarrow \infty$ ,  $\chi_{ij} \rightarrow \infty$ .

При выборе поведения  $v_{ij}$  учтено, что наиболее значительным по влиянию на поведение тел являются коэффициенты восприимчивости  $\beta_{ij}$  и  $v_{ij}$ . Поэтому, чтобы сохранять электромагнитные свойства материала поведение  $v_{ij}$  должно быть таким же, как у  $\beta_{ij}$  и  $v_{ij}$ .

Покажем все это на решении частных задач.

**3. Решение задачи для пластинки со свободным или жестко подкрепленным эллиптическим отверстием.** Рассмотрим бесконечную пьезопластинку с эллиптическим отверстием (рис. 1) с контуром  $L_1$ , свободным от подкрепления или подкрепленным абсолютно жестким тонким кольцом. На контуре  $L_1$  потоки электромагнитной индукций равны нулю; на бесконечности  $\sigma_y^\infty = p$ ,  $E_y^\infty = \varepsilon$ ,  $H_y^\infty = \mu$ ,  $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$ ,

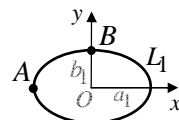


Рис. 1

$$E_x^\infty = H_x^\infty = 0.$$

В рассматриваемом случае функции (1.10) имеют вид [5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \Phi_{k1}(z_k). \quad (3.1)$$

Здесь  $\Gamma_k$  – постоянные, определяемые из системы (1.12);  $\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные вне эллиптических контуров  $L_{k1}$ , соответствующих контуру  $L_1$  при аффинных преобразованиях (1.5). Для построения общего вида последних функций используем конформные отображения.

Функции [3]

$$z_k = R_k(\zeta_k + m_k/\zeta_k), \quad (3.2)$$

в которых

$$R_k = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_k = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{a_1 - i\mu_k b_1}, \quad (3.3)$$

$a_1, b_1$  – полуоси эллипса  $L_1$ , отображают конформно внешности единичных кругов  $|\zeta_k| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{k1}$ . Тогда  $\Phi_{k1}(z_k)$ , голоморфные вне  $L_{k1}$ , будут голоморфными вне единичных кругов  $|\zeta_k| \geq 1$ , включая бесконечно удаленные точки, и их можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням  $\zeta_k$ . Поэтому для функций (3.1) будем иметь выражения:

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kn}}{\zeta_k^n}. \quad (3.4)$$

Подставив функции (3.4) в граничные условия в случае жестко подкрепленного контура (1.14) и применив метод рядов, получим, что коэффициенты  $a_{kn} = 0$  при  $n \geq 2$ , а для  $a_{k1}$  имеет место система

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) a_{k1} = \\ = - \sum_{k=1}^4 \left[ (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Gamma_k R_k m_k + (\bar{p}_k, \bar{q}_k, \bar{\lambda}_{8k}, \bar{\lambda}_{10k}) \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Окончательно комплексные потенциалы будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + a_{k1} \zeta_k^{-1}, \quad (3.6)$$

В случае неподкрепленного отверстия решение получается аналогичным образом с учетом граничных условий (1.13). Решение для этого случая следует из приведенного, если в последнем принять  $p_k = -\mu_k$ ,  $q_k = 1$ .

Зная функции (3.6), можно вычислять основные характеристики электромагнитоупругого состояния.

Были проведены численные исследования для пластинки из материалов [4]: композит на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (слабо анизотропный материал М1); композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия  $CdSe$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $BaTiO_3$  (анизотропный материал М2); композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют  $PZT-4$ , а пьезомагнитные и магнитные –  $CoFe_2O_4$  (сильно анизотропный материал М3).

Для выяснения влияния значений постоянных в уравнениях состояния на пьезоэффект пластинки был введен параметр  $\lambda_{pe} \rightarrow 0$ , и постоянные  $g_{ij}$ ,  $p_{ij}$  умножались на  $\lambda_{pe}$ , а постоянные  $\beta_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  и  $\nu_{ij}$  делились на  $\lambda_{pe}$ , т. е. новые постоянные брались такими:  $g'_{ij} = \lambda_{pe} g_{ij}$ ,  $p'_{ij} = \lambda_{pe} p_{ij}$ ,

$$\beta'_{ij} = \beta_{ij}/\lambda_{pe}, \quad \chi'_{ij} = \chi_{ij}/\lambda_{pe}, \quad v'_{ij} = v_{ij}/\lambda_{pe}.$$

В табл. 1 для различных внешних воздействий на пластинку с отверстием, подкрепленным абсолютно жестким кольцом, приведены значения некоторых характеристик ЭМУС в точках А и В (рис. 1) контура

Таблица 1

Воздействие	Точки	Величины	$\lambda_{pe}$							
			1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0
			Материал М1				Материал М3			
$\sigma_y^\infty = p$	А	$\sigma_s$	0,063	-0,003	-0,003	-0,003	0,273	0,039	0,039	0,039
		$\sigma_n$	0,006	-0,008	-0,008	-0,008	0,175	0,113	0,113	0,113
		$E_s$	-0,552	-0,055	-0,006	0,000	-1,202	-0,120	-0,012	0,000
		$H_s 10^{-3}$	-0,007	-0,001	0,000	0,000	0,034	0,005	0,001	0,000
	В	$\sigma_s$	0,479	0,483	0,483	0,483	0,368	0,393	0,393	0,393
		$\sigma_n$	1,469	1,480	1,480	1,480	1,556	1,661	1,661	1,661
$H_y^\infty = \mu$	А	$\sigma_s 10^3$	-0,216	-0,002	0,000	0,000	-1,007	-0,007	0,000	0,000
		$\sigma_n 10^2$	1,172	0,012	0,000	0,000	8,119	0,094	0,000	0,000
		$E_s 10^1$	0,324	0,012	0,011	0,011	2,508	-0,744	-0,747	-0,747
		$H_s$	1,533	1,531	1,531	1,531	2,705	2,019	2,018	2,018
	В	$\sigma_s 10^2$	0,623	0,006	0,000	0,000	2,993	0,034	0,000	0,000
		$\sigma_n 10^3$	0,191	0,002	0,000	0,000	1,265	0,014	0,000	0,000
$E_y^\infty = \varepsilon$	А	$\sigma_s 10^1$	-2,294	-0,024	0,000	0,000	-5,741	-0,068	-0,001	0,000
		$\sigma_n 10^1$	0,519	0,005	0,000	0,000	2,515	0,024	0,000	0,000
		$E_s$	2,278	2,068	2,068	2,068	3,246	2,034	2,032	2,032
		$H_s 10^{-2}$	0,011	-0,006	-0,006	-0,006	1,800	-0,585	-0,588	-0,588
	В	$\sigma_s 10^1$	0,461	0,005	0,000	0,000	1,159	0,013	0,000	0,000
		$\sigma_n 10^1$	1,409	0,143	0,001	0,000	4,898	0,056	0,001	0,000

отверстия на площадках, нормальных (со значком  $n$ ) и касательных (со значком  $s$ ) к контуру в зависимости от параметра  $\lambda_{pe}$ . Значения величин, соответствующие  $\lambda_{pe} = 0$ , относятся к решению задачи теории упругости при действии только механических усилий [8, 3] и задачи электромагнитостатики при электрических или магнитных воздействиях. Из табл. 1 видно, что чем сильнее «степень анизотропии», тем больше значения напряжений. Если пьезопостоянные более чем 100 раз ( $\lambda_{pe} \leq 10^{-2}$ )

отличаются (одни больше, другие меньше) от своих номинальных значений, то пьезоэффект не возникает, т. е. в случае механических воздейст-

Таблица 2

Точ-ки	Вели-чины	$\lambda_{pe}$							
		1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0
		Материал М1 при действии $\sigma_y^\infty = p$				Материал М3 при действии $\sigma_y^\infty = p$			
А	$\sigma_s$	0,061	-0,003	-0,003	-0,003	0,279	0,039	0,039	0,039
	$\sigma_n$	0,006	-0,008	-0,008	-0,008	0,147	0,113	0,113	0,113
	$E_s$	-0,552	-0,055	-0,006	0,000	-1,141	-0,114	-0,011	0,000
В	$\sigma_s$	0,480	0,483	0,483	0,483	0,376	0,393	0,393	0,393
	$\sigma_n$	1,469	1,480	1,480	1,480	1,587	1,661	1,661	1,661
		Материал М1 при действии $E_y^\infty = \varepsilon$				Материал М3 при действии $E_y^\infty = \varepsilon$			
А	$\sigma_s 10^1$	-2,294	-0,024	0,000	0,000	-5,330	-0,071	-0,001	0,000
	$\sigma_n 10^1$	0,509	0,005	0,000	0,000	1,985	0,018	0,000	0,000
	$E_s$	2,278	2,068	2,068	2,068	3,176	2,084	2,083	2,083
В	$\sigma_s 10^1$	0,461	0,005	0,000	0,000	1,078	0,012	0,000	0,000
	$\sigma_n 10^1$	1,409	0,014	0,000	0,000	4,557	0,051	0,001	0,000

Таблица 3

Точ-ки	Вели-чины	$\lambda_{pe}$							
		1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	0
		Материал М1 при действии $\sigma_y^\infty = p$				Материал М3 при действии $\sigma_y^\infty = p$			
А	$\sigma_s$	-0,002	-0,003	-0,003	-0,003	0,002	0,039	0,039	0,039
	$\sigma_n$	-0,007	-0,008	-0,008	-0,008	0,131	0,113	0,113	0,113
	$H_s 10^{-3}$	-0,007	-0,001	0,000	0,000	0,084	0,010	0,001	0,000
В	$\sigma_s$	0,483	0,483	0,483	0,483	0,388	0,393	0,393	0,393
	$\sigma_n$	1,480	1,480	1,480	1,480	1,641	1,661	1,661	1,661
		Материал М1 при действии $H_y^\infty = \mu$				Материал М3 при действии $H_y^\infty = \mu$			
А	$\sigma_s 10^3$	-0,188	-0,002	0,000	0,000	-0,878	-0,006	0,000	0,000
	$\sigma_n 10^2$	1,065	0,011	0,000	0,000	6,327	0,075	0,001	0,000
	$H_s$	1,533	1,531	1,531	1,531	2,679	2,070	2,069	2,069
В	$\sigma_s 10^2$	0,558	0,006	0,000	0,000	2,629	0,028	0,000	0,000
	$\sigma_n 10^2$	1,709	0,017	0,000	0,000	11,113	0,118	0,001	0,000

вий электромагнитные характеристики пренебрежимо малы, а в случае электромагнитных воздействий напряжения пренебрежимо малы.

Аналогичные результаты имеют место и в случае неподкрепленного контура отверстия. Только в последнем случае сходимость (при  $\lambda_{pe} \rightarrow 0$ ) к случаю задачи теории упругости для пластинки с отверстием несколько медленнее, пьезоэффект пренебрежимо мал при  $\lambda_{pe} < 10^{-2}$ .

Также отметим, что с возрастанием роли пьезоэффекта (с увеличением параметра  $\lambda_{pe}$ ) значения всех величин в точке А увеличиваются, в точке В они изменяются незначительно.

В табл. 2 и табл. 3 приведены результаты, аналогичные данным табл. 1, для задач электроупругости и магнитоупругости соответственно. Выводы о влиянии значения коэффициентов на пьезоэффект получаются абсолютно такими же, как и в задаче электромагнитоупругости.

**4. Решение задачи для пластинки с эллиптическим упругим включением.** Пусть в эллиптическое отверстие рассмотренной ранее бесконечной пьезопластины без предварительного натяжения впамяно включение из другого пьезоматериала, находящееся с пластинкой в условиях идеального механического и электромагнитоупругого контактов.

В этом случае комплексные потенциалы для пластинки опять представляются рядами (1.10), а комплексные потенциалы для включения, голоморфные в эллипсах  $L_k^{(1)}$ , соответствующих контуру  $L_1$  при аффинных преобразованиях  $z_k^{(1)} = x + \mu_k^{(1)}y$ , можно разложить в ряды по полиномам Фабера [7]

$$\Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(1)} P_n(z_k^{(1)}), \quad (4.1)$$

где  $P_n(z_k^{(1)})$  – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k^{(1)}) = (\zeta_k^{(1)})^n + (m_k^{(1)})^n / (\zeta_k^{(1)})^n;$$

$\zeta_k^{(1)}$  – переменные, определяемые из конформных отображений внешности единичных кругов  $|\zeta_k^{(1)}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_k^{(1)}$

$$z_k^{(1)} = R_k^{(1)} \left( \zeta_k^{(1)} + m_k^{(1)} / \zeta_k^{(1)} \right);$$

$$R_k^{(1)} = \left( a_1 - i\mu_k^{(1)}b_1 \right) / 2, \quad m_k^{(1)} = \left( a_1 + i\mu_k^{(1)}b_1 \right) / \left( a_1 - i\mu_k^{(1)}b_1 \right).$$

Подставив функции (3.4) и (4.1) в граничные условия (1.15) и применив метод рядов, получим, что  $a_{k1n} = a_{kn}^{(1)} = 0$ , ( $n \geq 2$ ) и систему для определения  $a_{k11}$  и  $a_{k1}^{(1)}$  [6]

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^4 \left[ \left( \lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, r_k^0, h_k^0 \right) a_{k11} - \right. \\
& \quad - \left( \lambda_{6k}^{(1)}, \lambda_{2k}^{(1)}, p_k^{(1)}, q_k^{(1)}, \lambda_{8k}^{(1)}, \lambda_{10k}^{(1)}, r_k^{(01)}, h_k^{(01)} \right) a_{k1}^{(1)} m_k^{(1)} - \\
& \quad \left. - \left( \bar{\lambda}_{6k}^{(1)}, \bar{\lambda}_{2k}^{(1)}, \bar{p}_k^{(1)}, \bar{q}_k^{(1)}, \bar{\lambda}_{8k}^{(1)}, \bar{\lambda}_{10k}^{(1)}, \bar{r}_k^{(01)}, \bar{h}_k^{(01)} \right) \bar{a}_{k1}^{(1)} \right] = \\
& = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left( \lambda_{6k}, \lambda_{2k}, p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, r_k^0, h_k^0 \right) \Gamma_k R_k m_k. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Окончательно комплексные потенциалы будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + a_{k11} / \zeta_{k1}, \quad \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) = a_{k1}^{(1)} z_k^{(1)} / R_k^{(1)}. \quad (4.3)$$

Зная функции (4.3), по формулам (1.1)–(1.4) и аналогичным для включения найдем основные характеристики. Как видно из (4.3), значения основных характеристик ЭМУС одинаковы во всех точках включения.

В исследованиях целесообразно связывать постоянные материала включения с постоянными материала пластинки. Исходя из описанных выше результатов исследований для пластинки с отверстием, для постоянных включения примем

$$\begin{aligned}
s_{ij}^{(1)} &= \lambda_s^{(1)} s_{ij}, & g_{ki}^{(1)} &= \lambda_{pe} g_{ki}, & p_{ki}^{(1)} &= \lambda_{pe} p_{ki}, \\
\beta_{kl}^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_{pe}} \beta_{kl}, & \chi_{kl}^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_{pe}} \chi_{kl}, & v_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_{pe}} v_{ij}.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

В табл. 4 для различных  $\lambda_s^{(1)}$ ,  $\lambda_{pe}$  и внешних воздействий на пластинку с упругим включением из материала МЗ приведены значения некоторых характеристик ЭМУС в точке А (рис. 1) пластинки на контуре

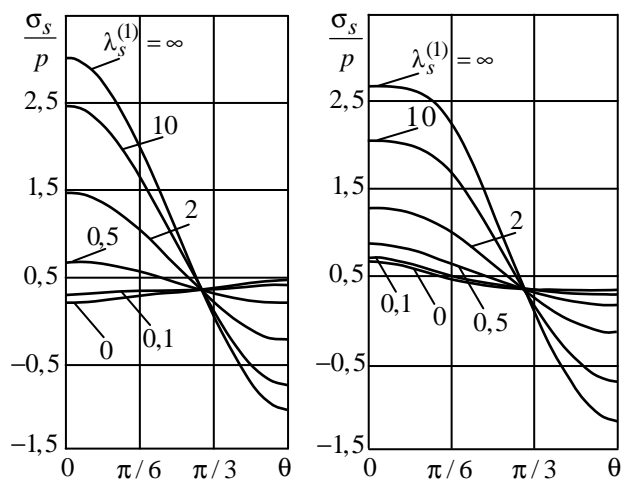


Рис. 3

Рис. 4

спая с включением на площадках, нормальных к нему. Значения величин, соответствующие  $\lambda_s^{(1)} = \infty$  и  $\lambda_s^{(1)} = 0$ , относятся к случаям пластинки с абсолютно мягким и абсолютно жестким включениями. На рис. 3 и рис. 4 для различных  $\lambda_s^{(1)}$  в случае растяжения усилиями  $\sigma_y^\infty = p$  пластинки из материалов М1 и М3 соответственно изображены графики распределения напря-



жений  $\sigma_s$  в пластинке вблизи контура включения. Считалось, что  $\lambda_{pe} = 1$ .

Таблица 4

$\lambda_{pe}$	Величины	$\lambda_s^{(1)}$							
		0	$10^{-2}$	$10^{-1}$	0,5	2	10	$10^2$	$\infty$
Растяжение усилиями $\sigma_y^\infty = p$									
1	$\sigma_s$	0,636	0,640	0,680	0,836	1,252	2,021	2,564	2,652
$10^{-1}$	$\sigma_s$	0,058	0,072	0,189	0,613	1,478	2,488	2,951	3,013
$10^{-2}$	$\sigma_s$	0,062	0,076	0,193	0,619	1,484	2,490	2,950	3,012
Электрическое воздействие $E_y^\infty = \varepsilon$									
1	$\sigma_s 10^1$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$E_s$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$10^{-1}$	$\sigma_s 10^1$	-2,042	-2,032	-1,950	-1,650	-1,039	-0,326	0,001	0,045
	$E_s$	2,030	2,029	2,023	1,999	1,952	1,897	1,872	1,868
$10^{-2}$	$\sigma_s 10^1$	-2,269	-2,258	-2,165	-1,829	-1,147	-0,355	0,006	0,054
	$E_s$	2,251	2,250	2,242	2,212	2,151	2,082	2,050	2,046
Магнитное воздействие $H_y^\infty = \mu$									
1	$\sigma_s 10^2$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$E_s$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	$H_s$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$10^{-1}$	$\sigma_s 10^2$	-1,996	-1,985	-1,887	-1,532	-0,809	0,034	0,421	0,473
	$E_s$	2,646	2,634	2,532	2,161	1,412	0,547	0,155	0,102
	$H_s$	1,456	1,456	1,456	1,456	1,455	1,454	1,454	1,454
$10^{-2}$	$\sigma_s 10^2$	-2,146	-2,133	-2,025	-1,635	-0,844	0,072	0,489	0,545
	$E_s$	3,180	3,166	3,041	2,593	1,690	0,657	0,191	0,129
	$H_s$	1,525	1,525	1,525	1,525	1,524	1,523	1,523	1,523

Из табл. 4 и рис. 3, 4 видно, что при действии механических усилий абсолютные значения напряжений  $\sigma_s$  и напряженностей  $E_s$  и  $H_s$  с увеличением  $\lambda_s^{(1)}$  растут, а в случае электрических и магнитных воздействий уменьшаются. При  $\lambda_s^{(1)} > 10^2$  включение можно считать абсолютно мягким, при  $\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$  – абсолютно жестким. С увеличением пьезоактивности включения (с увеличением параметра  $\lambda_{pe}$  для материала включения) значения напряжений и напряженностей поля растут. Это свойство осо-

бенно резко проявляется с увеличением жесткости ядра (с уменьшением параметра  $\lambda_s^{(1)}$ ).

**РЕЗЮМЕ.** Дослідженні основні співвідношення електромагнітопружності у питанні про вплив значень п'езомодулів на п'езоефект. Виявлено умови, при виконанні яких із загальної задачі електромагнітопружності слідує основні співвідношення задач електропружності, магнітопружності або задачі теорії пружності та електромагнітостатики. Наведені розв'язки окремих задач для пластинки з еліптичним отвором або пружним включенням. Чисельними дослідженнями встановлено при яких значеннях п'езомодулів п'езоефект є значимим і коли їм можна знехтувати, а також вплив жорсткості пружного включення на значення напруг, електромагнітних напруженостей та індукцій.

**Ключові слова:** електромагнітопружність, п'езоефект, пружне включення, п'езопластинка з отвором.

**SUMMARY.** Basic relations of electromagnetoelasticity on the impact of values of piezomodules on the piezoeffect are investigated. Conditions under which from the general problem of electromagnetoelasticity follow basic relations of problems of electroelasticity, magnetoelasticity or problem of elasticity and electromagnetostatic are identified. Solution of particular problems for a plate with an elliptic hole or elastic inclusion are given. Numerical studies have established for what values of piezomodules piezoeffect is significant and when it can be neglected, and the influence of the stiffness of elastic inclusion on the values of stresses, electromagnetic tensions and inductions.

**Keywords:** electromagnetoelasticity, piezoeffect, elastic inclusion, piezoelectric plate with hole.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).
2. Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
3. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
4. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
5. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластинки с подкрепленными отверстиями // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2013. – Вып. 1. – С. 42–48.
6. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Решение задачи электромагнитоупругости для кусочно-однородных пластин // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф., Донецк–Мелекино, 11–14 июня 2013 г. – Донецк, 2013. – Т. 1. – С. 163–167.
7. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
9. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел – М.: Наука, 1988. – 472 с.

*Донецкий национальный университет*

*Поступила 15.10.2013*

УДК 539.3

Р. М. КУШНИР, д-р. физ.-мат. наук,  
Т. Я. СОЛЯР, канд. физ.-мат. наук.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФОРМУЛЫ ПРУДНИКОВА

*Предложена методика решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для слоистого кольца, нагруженного переменными во времени нормальными усилиями. Расчет напряжений в пластинке с произвольным количеством слоев проведен с использованием модифицированной формулы для обращения интегрального преобразования Лапласа. Установлены характерные особенности в распределении динамических напряжений в двухслойной пластинке.*

**Ключевые слова:** динамические напряжения, слоистая пластинка, плоское напряженное состояние, интегральное преобразование Лапласа.

Рассматривается задача об определении осесимметричных динамических напряжений в слоистых кольцевых пластинках, которые нагружены переменными во времени нормальными усилиями. Принимается, что на поверхностях сопряжения слоев с разными механическими характеристиками выполняются условия идеального механического контакта. Ниже предложен алгоритм расчета таких напряжений в пластинке с произвольным количеством слоев, базирующийся на использовании интегрального преобразования Лапласа и модифицированной формулы Прудникова его аналитико-численного обращения [2]. Применение этой формулы анализируется в работах [2, 3] и ее преимущество заключается в возможности эффективного определения быстроизменяющихся во времени (в том числе колебательных) напряжений с контролируемой точностью. Другие подходы к исследованию напряженного состояния слоистых цилиндрических тел рассмотрены в работах [4–6, 8].

**Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим слоистое кольцо, состоящее из  $N$  слоев  $r_{j-1} < r < r_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $r_0$  и  $r_N$  – радиусы внутренней и внешней границ пластинки,  $r$  – радиальная координата. Обозначим через  $\nu_j$ ,  $E_j$  коэффициент Пуассона и модуль Юнга для  $j$ -го слоя,  $c_{1,j}$  – скорость распространения продольных волн. Рассмотрим случай, когда к границе пластинки при  $r = r_0$  и  $r = r_N$  приложены нормальные, независимые от угловой координаты усилия  $p_a$  и  $p_b$ , в начальный момент времени заданы перемещения и скорости пластинки.

Уравнения для  $j$ -го слоя в безразмерном виде имеют вид [8]

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_j}{\partial \rho} + \frac{U_j}{\rho^2} - \mu_j^2 \frac{\partial^2 U_j}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\mu_j = c_* / c_{1,j}$ ,  $\rho = r / r_*$ ,  $\tau = c_* t / r_*$ ,  $U_j = 2G_* u_j / r_*$ ,  $r_*$ ,  $c_*$ ,  $G_*$  – характерные (выбранные для одного из слоев) размер, скорость распространения волн и модуль сдвига,  $\tau$  – время.

Напряжения определяются формулами

$$\sigma_r = \alpha_j \frac{dU_j}{d\rho} + \beta_j \frac{U_j}{\rho}, \quad \sigma_\theta = \beta_j \frac{dU_j}{d\rho} + \alpha_j \frac{U_j}{\rho}, \quad (2)$$

в которых  $\alpha_j = \frac{\gamma_j}{1 - \nu_j}$ ,  $\beta_j = \nu_j \alpha_j$ ,  $\gamma_j = G_j / G_*$ .

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r = p_0 = p_a, \quad \text{при } \rho = a, \\ \sigma_r = p_N = p_b, \quad \text{при } \rho = b. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $a = r_0 / r_*$ ,  $b = r_N / r_*$ .

На поверхностях сопряжения однородных слоев пластинки выполняются условия идеального механического контакта

$$\sigma_r(\rho_j - 0) = \sigma_r(\rho_j + 0), \quad U_j(\rho_j - 0) = U_{j+1}(\rho_j + 0) \quad (j = 1, \dots, N - 1),$$

где  $\rho_j = r_j / r_*$ .

Применением к уравнению (1) и граничным условиям преобразование Лапласа по временной координате  $\tau$  сформулированная задача для каждого из слоев сводится к нахождению изображений перемещений  $U$ , удовлетворяющих уравнению вида

$$\frac{d^2 \widetilde{U}_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\widetilde{U}_j}{d\rho} - \frac{\widetilde{U}_j}{\rho^2} - m_j^2 \widetilde{U}_j = 0 \quad \text{при } \rho_{j-1} < \rho < \rho_j, \quad (4)$$

в котором  $m_j = s \mu_j$ ,  $s$  – параметр преобразования Лапласа, причем волна сверху указывает на изображение Лапласа от соответствующей функции. Здесь и далее принято, что в начальный момент времени перемещения и скорости пластинки равны нулю.

Изображения для нормальных и кольцевых напряжений определяются через функцию  $\widetilde{U}_j$  формулами

$$\widetilde{\sigma}_r = \alpha_j \frac{d\widetilde{U}_j}{d\rho} + \beta_j \frac{\widetilde{U}_j}{\rho}, \quad \widetilde{\sigma}_\theta = \beta_j \frac{d\widetilde{U}_j}{d\rho} + \alpha_j \frac{\widetilde{U}_j}{\rho}. \quad (5)$$

Примем, что известны изображения нормальных напряжений на границе данного кольца и обозначим их через  $\widetilde{\sigma}_r(\rho_{j-1}) = \sigma_{j-1}$ ,  $\widetilde{\sigma}_r(\rho_j) = \sigma_j$ .

Общее решение уравнения (4) запишем в виде

$$\widetilde{U}_j = CK_1(m_j \rho) + DI_1(m_j \rho), \quad (6)$$

где  $C$ ,  $D$  – произвольные постоянные.

Подставляя (6) в соотношение (5), находим выражения напряжений

$$\widetilde{\sigma}_r = CK(\rho) + DI(\rho),$$

в которых

$$I(\rho) = (\beta_j - \alpha_j)I_1(m_j\rho) / \rho + \alpha_j m_j I_0(m_j\rho);$$

$$K(\rho) = (\beta_j - \alpha_j)K_1(m_j\rho) / \rho - \alpha_j m_j K_0(m_j\rho);$$

$I_j, K_j$  – модифицированные функции Бесселя.

Используя граничные условия, для определения постоянных  $C, D$  получаем систему уравнений

$$K(\rho_{j-1})C + I(\rho_{j-1})D = \sigma_{j-1}, \quad K(\rho_j)C + I(\rho_j)D = \sigma_j.$$

Отсюда

$$C = \frac{I(\rho_{j-1})\sigma_j - I(\rho_j)\sigma_{j-1}}{\Delta}, \quad D = \frac{K(\rho_j)\sigma_{j-1} - I(\rho_j)\sigma_j}{\Delta},$$

$$\Delta = K(\rho_j)I(\rho_{j-1}) - I(\rho_j)K(\rho_{j-1}).$$

Подставляя эти постоянные в соотношения (6), получаем

$$\widetilde{U}_j = \sigma_{j-1}\varphi_j(\rho) + \sigma_j\psi_j(\rho), \quad (7)$$

где

$$\varphi_j(\rho) = \frac{K(\rho_j)I_1(m_j\rho) - I(\rho_j)K_1(m_j\rho)}{\Delta},$$

$$\psi_j(\rho) = -\frac{K(\rho_{j-1})I_1(m_j\rho) - I(\rho_{j-1})K_1(m_j\rho)}{\Delta}.$$

Подставляя функцию  $\widetilde{U}_j$  в соотношения (5), находим изображения для радиальных напряжений

$$\widetilde{\sigma}_r = \sigma_{j-1}f_j(\rho) + \sigma_jg_j(\rho). \quad (8)$$

Здесь

$$f_j(\rho) = \frac{K(\rho_j)I(\rho) - I(\rho_j)K(\rho)}{\Delta},$$

$$g_j(\rho) = -\frac{K(\rho_{j-1})I(\rho) - I(\rho_{j-1})K(\rho)}{\Delta}.$$

Изображения для кольцевых напряжений запишем в виде

$$\widetilde{\sigma}_\theta = \sigma_{j-1}f_{j\theta}(\rho) + \sigma_jg_{j\theta}(\rho), \quad (9)$$

в котором

$$f_{j\theta}(\rho) = \frac{K(\rho_j)I_\theta(\rho) - I(\rho_j)K_\theta(\rho)}{\Delta},$$

$$g_{j\theta}(\rho) = -\frac{K(\rho_{j-1})I_\theta(\rho) - I(\rho_{j-1})K_\theta(\rho)}{\Delta},$$

$$I_\theta(r) = -(\beta_j - \alpha_j)I_1(m_j\rho) / \rho + \beta_j m_j I_0(m_j\rho),$$

$$K_\theta(r) = -(\beta_j - \alpha_j)K_1(m_j\rho) / \rho - \beta_j m_j K_0(m_j\rho).$$

Заметим, что для определения кольцевых напряжений также может быть использована формула

$$\widetilde{\sigma}_\theta = \frac{\beta_j}{\alpha_j} \widetilde{\sigma}_r + \left( \alpha_j - \frac{\beta_j^2}{\alpha_j} \right) [\sigma_{j-1} \varphi_j(\rho) + \sigma_j \psi_j(\rho)]. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь задачу для системы колец. Изображения перемещений на стыке  $j$  и  $j+1$  слоев (при  $\rho = \rho_j \pm 0$ ) на основании формул (7) примут вид

$$\widetilde{U}(\rho_j - 0) = \sigma_{j-1} \varphi_{j-1}(\rho_j) + \sigma_j \psi_{j-1}(\rho_j),$$

$$\widetilde{U}(\rho_j + 0) = \sigma_j \varphi_j(\rho_j) + \sigma_{j+1} \psi_j(\rho_j).$$

Отсюда, используя условия непрерывности перемещений на стыке  $j$  и  $j+1$  слоев при  $j = 1, \dots, N-1$ , получаем уравнения

$$A_j \sigma_{j-1} + B_j \sigma_j + C_j \sigma_{j+1} = 0 \quad (j = 1, \dots, N-1), \quad (11)$$

где

$$A_j = \varphi_j(\rho_j), \quad B_j = \psi_j(\rho_j) - \varphi_{j+1}(\rho_j), \quad C_j = -\psi_{j+1}(\rho_j).$$

Систему уравнений (11) дополняем граничными условиями

$$\widetilde{\sigma}_0 = \widetilde{p}_a, \quad \widetilde{\sigma}_N = \widetilde{p}_b. \quad (12)$$

То есть при  $N > 3$ , сформулированная задача в изображениях сводится к решению системы  $N-1$  уравнения вида

$$A_j \sigma_{j-1} + B_j \sigma_j + C_j \sigma_{j+1} = 0 \quad (j = 2, \dots, N-2),$$

$$B_1 \sigma_1 + C_1 \sigma_2 = -A_1 \widetilde{p}_a,$$

$$A_{N-1} \sigma_{N-2} + B_{N-1} \sigma_{N-1} = -C_{N-1} \widetilde{p}_b. \quad (13)$$

Для решения системы уравнений (13) эффективен метод прогонки, который требует минимального количества операций при вычислениях и обеспечивает устойчивость расчетов при произвольном количестве слоев.

**Аналитико-численная формула обращения преобразования Лапласа.** Нахождение оригиналов (функции  $f(\theta)$ ) на промежутке  $0 < \theta < l$  проводили с помощью формулы аналитико-численного обращения преобразо-

вания Лапласа, которая построена на основании формулы Прудникова и имеет вид [2]

$$f(\theta) \cong \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(s_n \theta) + \frac{1}{1 - \exp(-c)} \left[ f_0 + l f'_0 \left[ \frac{\theta}{l} + \frac{1}{\exp(c) - 1} \right] \right], \quad (14)$$

Здесь  $0 < \theta < l$ ,

$$F_n = \tilde{f}_n - \left( \frac{f_0}{s_n} + \frac{f'_0}{s_n^2} \right), \quad s_n = \frac{(c + 2\pi ni)}{l},$$

$$\tilde{f}_n = \tilde{f}(s_n), \quad f_0 = f(0), \quad f'_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta=0},$$

$c, l$  – параметры. Остаточный член формулы (14) имеет множитель  $e^{-c}$ , который при выборе параметра  $c > 5$  достаточно мал. При расчетах принимали  $c = 6$ , что, как показали тестовые расчеты, обеспечивало практическую точность формулы (14).

**Результаты расчета.** Разработанный подход апробирован на задаче определения динамических напряжений в бесконечном теле с круговым отверстием, которое находится под действием ударного нагружения по всей поверхности. Полученные результаты хорошо согласовываются с известными в литературе [6, 7].

Для проведения числового анализа было рассмотрено неоднородное кольцо при  $b/a = 2$ , которое состоит из двух слоев с границей раздела  $1,5a$ . Принималось, что приложенные к внутренней границе усилия линейно возрастают во времени при  $0 < \tau < d$  от нулевого значения до  $p$ , оставаясь далее постоянными. Вычисленные радиальные и кольцевые напряжения при  $d=1$  на границах пластинки и на стыке слоев при  $\gamma_2 = G_2 / G_1 = 2$  представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 кривыми приведены радиальные напряжения при  $\rho$  равном  $a, 1,5a, b$  соответственно. На рис. 2 кривой 1 отвечают кольцевые напряжения на внутренней границе

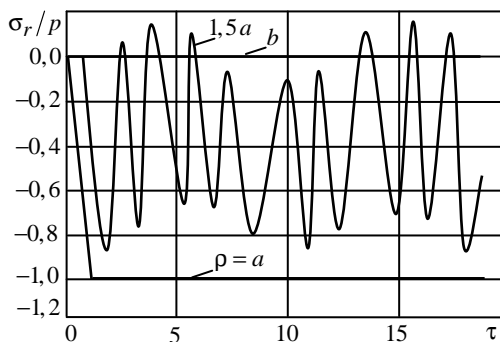


Рис.1

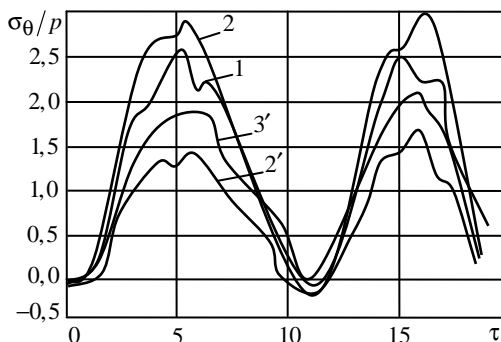


Рис.2

пластинки, кривым 2 и 2' – напряжения изнутри и извне границы раздела материалов, кривой 3' – на внешней границе.

Из анализа приведенных результатов расчета можно сделать выводы о том, что нормальные напряжения имеют колебательный характер и по величине являются меньшими по сравнению с кольцевыми; при более жестком внешнем слое максимальные кольцевые напряжения возникают в нем на границе раздела, причем на ее внутренней границе напряжения меньше.

Таким образом, предложен алгоритм решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для слоистого кольца, который базируется на интегральном преобразовании Лапласа и уточненной формуле обращения Прудникова, которая позволяет исследовать с высокой точностью быстроизменяющиеся динамические напряжения на широком временном диапазоне. Установлены характерные особенности в распределении динамических напряжений в слоистых пластинках.

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано алгоритм розв'язування осесиметричної динамічної задачі теорії пружності для шаруватого кільця, навантаженого змінними в часі нормальними зусиллями. Розрахунок напружень у пластинках із довільною кількістю шарів проведено з використанням модифікованої формули обернення інтегрального перетворення Лапласа. Встановлено характерні особливості у розподілі динамічних напружень у двошаровій пластинці.

**Ключові слова:** динамічні напруження, шарувата пластина, плоский напружений стан, інтегральне перетворення Лапласа

**SUMMARY.** An algorithm of solution an axially symmetric dynamic problem of elasticity theory for a layer ring, load by time varying normal force, is offered. Stress analysis in the plates with arbitrary number of layers is made using a modified inversion formula of Laplace integral transform. Characteristic singularities in distribution of dynamic stresses in a two-layer plate are determined.

**Keywords:** dynamic stresses, layer plate, plate stress, Laplace integral transform, method of integral equations

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая шк., 1970. – 712 с.
2. Кушнір Р.М., Максимович В.М., Соляр Т.Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – Т. 37, №2. – С. 18–26.
3. Кушнір Р.М., Соляр Т.Я. О методике определения динамических напряжений в теле с трещинами при антиплоской деформации // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 4(50). – С. 160–166.
4. Онишко Л.Й., Сенюк М.М. Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 55–61.
5. Саврук М.П., Онишко Л.Й., Сенюк М.М. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 7–14.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К: Наук. Думка, 1968. – 888 с.
7. Сагомонян Ф.Я. Волны напряжения в сплошных средах. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 416 с.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

*Институт прикладных проблем механики и математики  
НАН Украины, г. Львов*

*Поступила в редакцию 20.11.2013*



УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р физ.-мат. наук,  
В. И. КОЗЛОВ, д-р физ.-мат. наук,  
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат. наук

## ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА НА КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

*На основе концепции комплексных характеристик разработана уточненная модель колебаний и диссипативного разогрева трехслойных оболочек из неупругих пассивных и пьезоэлектрических материалов. Комплексные характеристики материалов зависят от температуры. Для решения полученных нелинейных краевых задач применяются итерационные процедуры, сводящие решение этих нелинейных задач к решению последовательности линейных задач механики и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Линейные задачи на каждой итерации решаются методом конечных элементов. Представлены примеры расчета динамических характеристик колебаний цилиндрической панели, иллюстрирующие влияние на них деформаций сдвига.*

**Ключевые слова:** оболочки, вынужденные колебания, деформации сдвига, метод конечных элементов, диссипативный разогрев, динамические характеристики.

Многослойные тонкостенные оболочки с пьезоэлектрическими включениями широко используются в различных областях современной техники [1,8]. С одной стороны, эти включения могут играть роль сенсоров и актуаторов при активном демпфировании колебаний конструкций из пассивных (без пьезоэффекта) материалов [8]. С другой стороны, если пьезослой используется для возбуждения колебаний, пассивные слои могут использоваться для повышения прочности конструкций. Часто пассивные и активные слои являются неупругими и при возбуждении гармонических колебаний из-за превращения механической и электрической энергии в тепловую в них может иметь место существенное повышение температуры, так называемой температуры диссипативного разогрева. При достижении этой температурой точки Кюри активных слоев может иметь место специфический тип теплового разрушения, когда конструкция не разделяется на части, но теряет свою функциональную способность из-за потери пьезоэффекта. Поэтому учет влияния температуры диссипативного разогрева на функциональную способность конструкции представляет значительный практический и научный интерес. При определенных условиях, например, большом отношении толщины оболочки к минимальному радиусу кривизны или при существенном отличии в характеристиках анизотропных материалов для повышения точности расчета электромеханического и теплового состояния оболочки необходимо отказаться от гипотез Кирхгоффа-Лява, а использовать уточненные теории с учетом сдвиговых деформаций.

В данной статье предлагается один из вариантов такой теории, яв-

ляющийся обобщением на пьезоактивные оболочки результатов работы [5]. Принятые в ней гипотезы дополняются гипотезами относительно распределения электрических полевых величин и температуры диссипативного разогрева. Теория строится на основе концепции комплексных характеристик [3], которые зависят от температуры. Для решения полученных нелинейных краевых задач применяются итерационные процедуры, сводящие решение этих нелинейных задач к решению последовательности линейных задач механики и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Эти линейные задачи решаются методом конечных элементов. Представлены примеры расчета динамических характеристик колебаний цилиндрической панели, иллюстрирующие влияние деформаций сдвига на эти характеристики.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается трехслойная оболочка вращения толщиной  $H = 2h_1 + h_2$ , составленная из внутреннего пассивного (или пьезоактивного) слоя толщиной  $h_2$  и двух внешних слоев толщиной  $h_1$  из трансверсально-изотропного вязкоупругого пьезоактивного материала. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат  $(s, \theta, z)$ , где  $s, \theta, z$  – меридиональная, окружная и толщинная координаты соответственно. В качестве базовой выбирается срединная поверхность  $z = 0$  внутреннего слоя. На поверхностях пьезоэлектрических слоев  $z = a_0, a_1, a_2, a_3$  имеются бесконечно тонкие электроды. Предполагается, что  $\sigma_{zz} = 0$ . Кроме того, считается, что нормальная составляющая вектора электрической индукции  $D_z$  значительно больше его тангенциальных составляющих  $D_s, D_\theta$ . Поэтому предполагается, что  $D_z \neq 0$ , а  $D_s = 0, D_\theta = 0$ . В результате этих предположений имеем упрощенные комплексные определяющие уравнения для каждого из слоев:

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^k &= B_{11}^k \varepsilon_{ss} + B_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta} - \gamma_{11}^k E_z^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k \varepsilon_{ss} + B_{11}^k \varepsilon_{zz} - \gamma_{11}^k E_z^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}, \quad \sigma_{zs}^k = 2G_{13}^k \varepsilon_{zs}, \quad \sigma_{\theta z}^k = 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}, \\ D_z^k &= \gamma_{33}^k E_z^k + \gamma_{11}^k (\varepsilon_{ss}^k + \varepsilon_{\theta z}^k), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned} B_{11}^k &= \frac{1}{S_{11}^{kE} (1 - \nu^{k2})}, \quad B_{12}^k = \nu^k B_{11}^k, \\ \gamma_{11}^k &= d_{31}^k (1 + \nu^k) B_{11}^k, \\ G_{12}^k &= \frac{1 - \nu^k}{2} B_{11}^k, \quad \sigma_{\theta z}^k = 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}^k, \\ G_{13}^k &= G_{23}^k = \frac{\varepsilon_{11}^{kT}}{S_{55}^{kE} \varepsilon_{11}^{kT} - d_{15}^k d_{15}^k}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{33}^k = \varepsilon^{kT}_{33} \left(1 - \kappa_P^{k2}\right), \quad \kappa_P^{k2} = \frac{2d_{31}^k d_{31}^k}{S_{11}^{kE} \varepsilon_{33}^{kT} (1 - \nu^k)}, \quad \nu^k = -\frac{S_{12}^{kE}}{S_{11}^{kE}}; \quad (1.2)$$

$S_{ij}^{kE}$  – податливости пьезоматериала;  $d_{ij}^k$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{ij}^{kT}$  – диэлектрические проницаемости.

Входящие в уравнения состояния (1.1) сдвиговые деформации  $\varepsilon_{sz}^k, \varepsilon_{\theta z}^k$  в пределах каждого слоя аппроксимируются квадратичными функциями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sz}^k &= \frac{1}{2} u_1(s, \theta) q^k(z), \quad \varepsilon_{\theta z}^k = \frac{1}{2} v_1(s, \theta) q^k(z), \\ q^1(z) &= \frac{B_{11}^k}{2G_{13}^{k1}} \left(1 - \frac{z^2}{a_0^2}\right), \\ q^2(z) &= \frac{B_{11}^{k2}}{2G_{13}^{k2}} \left[ \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) \right], \quad q^3(z) = q^1(z), \end{aligned} \quad (1.3)$$

в которых  $u_1(s, \theta), v_1(s, \theta)$  – искомые функции.

В дальнейшем будем рассматривать такие оболочки, для которых можно пренебречь  $z/R_1, z/R_2$  по сравнению с 1 ( $R_1, R_2$  – радиусы главных кривизн поверхности отсчета). Тогда выражения для компонент вектора перемещений будут иметь вид

$$u^k = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^k(z), \quad w^k = w, \quad v^k = v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^k(z), \quad (1.4)$$

где  $u_0, v_0$  – тангенциальные перемещения поверхности  $z=0$ ;  $w$  – нормальный прогиб оболочки, а

$$\begin{aligned} f^k(z) &= f_1^k(z) + f_0^k(z), \quad f_1^k(z) = B_{11}^1(z) [z - z^3 / (3a_0^2)] / (2G_{13}^1), \\ f_1^2(z) &= \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[ \frac{a_1^2}{a_0^2} z - \frac{z^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) z \right], \\ f_1^3(z) &= f_1^3(z), \quad f_0^3 = -f_0^1, \quad f_0^2 = 0, \\ f_0^1 &= \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[ \frac{2}{3} \frac{a_1^3}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right) a_1 \right] - \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{a_1^2}{3a_0^2}\right) a_1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

При этом следует учесть, что в рассматриваемом случае  $a_3 = -a_0, a_2 = -a_1, B_{11}^1 = B_{11}^3, G_{13}^1 = G_{13}^3$ . Используя соотношения Коши и зависимости (1.4), (1.5), компоненты тензора деформаций  $k$ -го слоя оболочки запишем в виде

$$\varepsilon_{ss}^k = \varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^k = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z),$$

$$\varepsilon_{s\theta}^k = \varepsilon_{s\theta}^0 + \chi_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z), \quad \varepsilon_{sz}^k = \frac{1}{2} u_1 q^k(z), \quad \varepsilon_{\theta z}^k = \frac{1}{2} v_1 q^k(z). \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \quad \kappa_{ss} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \delta_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \\ \varepsilon_{s\theta}^0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{r} v_0 \right), \quad \kappa_{s\theta} = - \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial s} - \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \delta_{s\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{r} v_1 \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} u_0 + \frac{w}{R_2}, \quad \chi_{\theta\theta} = - \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \right), \\ \delta_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} u_1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Полагаем, что к бесконечно тонким электродам, расположенных между слоями и на поверхностях оболочки, заданы электрические потенциалы  $V_k$ . Согласно указанной выше гипотезе относительно  $D_z$  для каждого слоя  $D_z^k = D_z^k(s, \theta)$ . После интегрирования соотношения

$$E_z^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k} D_z^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} \left[ (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) + (\chi_{ss} + \chi_{\theta\theta}) + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) f^k(z) \right] \quad (1.8)$$

по толщине оболочки, получаем

$$D_z^k = -\frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{H_1^k} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k}, \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} H_1^k &= \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma_{33}^k}, \quad H_2^k = \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} (a_k - a_{k-1}), \quad H_3^k = \frac{\gamma_{11}^k}{2\gamma_{33}^k} (a_k^2 - a_{k-1}^2), \\ H_4^k &= \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} \left[ F^k(a_k) - F^k(a_{k-1}) \right], \quad F^k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f^k(z) dz \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.8) в (1.1) и учитывая (1.9), (1.10), запишем уравнения состояния в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^k &= A_{11}^k \left[ \varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z) \right] + A_{12}^k \left[ \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z) \right] - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= A_{12}^k \left[ \varepsilon_{ss}^0 + \chi_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_{11}^k \left[ \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \chi_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z) \right] - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \\
\sigma_{s\theta}^k & = G_{12} \left[ \varepsilon_{s\theta}^0 + \chi_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z) \right], \\
\sigma_{sz} & = G_{13} u_1 q^k(z), \quad \sigma_{\theta z} = G_{13} v_1 q^k(z),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$A_{11}^k = B_{11}^k + (\gamma_{11}^k)^2 / \gamma_{33}^k, \quad A_{12}^k = B_{12}^k + (\gamma_{11}^k)^2 / \gamma_{33}^k.$$

**2. Конечно-элементный метод решения задачи.** Для решения задачи механики используем вариационную постановку, эквивалентную дифференциальной постановке. При этом задача сводится к нахождению стационарных точек двумерного функционала

$$\delta\mathcal{D} = \delta\mathcal{D}_1 + \delta\mathcal{D}_2 + \delta\mathcal{D}_3 = 0, \tag{2.1}$$

в котором

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 & = \frac{1}{2} \iint_F \left[ C_{11} (\varepsilon_{ss}^o)^2 + 2C_{12} \varepsilon_{ss}^o \varepsilon_{\theta\theta}^o + C_{11} (\varepsilon_{\theta\theta}^o)^2 + 4C_{44} (\varepsilon_{s\theta}^o)^2 + \right. \\
& + D_{11} \kappa_{ss}^2 + 2D_{11} \kappa_{ss} \kappa_{\theta\theta} + D_{11} \kappa_{\theta\theta}^2 + D_{44} \kappa_{s\theta}^2 + 2(D_{11}^{\kappa} \kappa_{ss} \delta_{ss} + \\
& + D_{12}^{\kappa} \kappa_{ss} \delta_{\theta\theta} + D_{21}^{\kappa} \kappa_{\theta\theta} \delta_{ss} + D_{11}^{\kappa} \kappa_{\theta\theta} \delta_{\theta\theta} + 2D_{44}^{\kappa} \kappa_{s\theta} \delta_{s\theta}) + D_{11}^{\delta} \delta_{ss}^2 + \\
& \left. + 2D_{12}^{\delta} \delta_{ss} \delta_{\theta\theta} + D_{11}^{\delta} \delta_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}^{\delta} \delta_{s\theta}^2 + C_{55} u_1^2 + C_{55} v_1^2 \right] r ds d\theta, \\
\mathcal{D}_2 & = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ \omega^2 \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) + \omega^2 \rho_2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + \omega^2 \rho_3 (u_1^2 + v_1^2) - 2\omega^2 \rho_4 \left( \frac{\partial w}{\partial s} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} v_1 \right) \right\} r ds d\theta, \\
\mathcal{D}_3 & = \iint (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \left[ (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + \right. \\
& \left. + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} - P_z w \right] r dr d\theta.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_{ij} & = \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k dz - (H_2^k)^2 / H_1^k, \quad D_{ij} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k z^2 dz - (H_3^k)^2 / H_1^k, \\
D_{ij}^{\kappa} & = \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k z f^k(z) dz - (H_3^k H_4^k) / H_1^k, \\
D_{ij}^{\delta} & = \int_{a_{k-1}}^{a_k} A_{ij}^k (f^k(z))^2 dz - (H_4^k)^2 / H_1^k, \quad C_{44} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12} dz, \\
D_{44} & = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z^2 dz, \quad D_{44}^{\kappa} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z f^k(z) dz,
\end{aligned}$$

$$D_{44}^{\delta} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k (f^k(z))^2 dz, \quad C_{55} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{13} (q^k(z))^2 dz, \quad \rho_1 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k dz, \\ \rho_2 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z^2 dz, \quad \rho_3 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z f^k(z) dz, \quad \rho_4 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k (f^k(z))^2 dz, \quad (2.3)$$

$\rho^k$  – плотность материалов слоев;  $P_Z$  – интенсивность поверхностной нагрузки. В (2.2), (2.3) следует проводить суммирование по индексу  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Для определения температуры диссипативного разогрева используется трехмерное вариационное уравнение энергии [3, 4]

$$\iiint_V \left[ c_T^k \rho^k \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_T^k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial s} \delta \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + Q_k \delta T \right] r ds d\theta dz + \iint_F \alpha_T (T - T_c) \delta T dF = 0, \quad (2.4)$$

где  $c_T^k$  – коэффициент теплоемкости материала слоя оболочки;  $\alpha_T$  – коэффициент конвективного теплообмена на поверхности  $F$  со средой с температурой  $T_c$ ;  $\lambda_T^k$  – коэффициент теплопроводности материала слоя;  $t$  – время. Для сведения трехмерной вариационной задачи к двумерной принимаем, что нормальная составляющая  $q_z$  теплового потока изменяется по толщине оболочки по линейному закону:

$$q_z = q_0 + q_1 z = -\lambda_z^k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.5)$$

В этом случае температура в каждом  $k$ -ом слое оболочки аппроксимируется квадратичным полиномом по толщине координате  $z$ .

Решение вариационной задачи (2.1) находится методом конечных элементов с использованием двенадцатиузловых изопараметрических четырехугольных элементов с аппроксимацией перемещений и геометрии оболочки полиномами третьей степени в пределах четырехугольника [4, 6]. При этом прогиб в пределах элемента аппроксимируется бикубическими полиномами Эрмита:

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i, \quad (2.6)$$

где  $w_i$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)_i$ ,  $\left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i$ ,  $\left( \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$  – амплитудные значения прогиба и его производных в узловых точках,  $L_K$  – полиномы Эрмита [4, 6].

Тангенциальные составляющие перемещений срединной поверхности и сдвиговые деформации оболочки в пределах элемента аппроксимируются кубическими полиномами  $N_i$ :

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i, \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i, \quad u_1 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_1^i, \quad v_1 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_1^i. \quad (2.7)$$

В качестве глобальной системы координат, в которой объединяются все конечные элементы, используется цилиндрическая система координат  $(r, \theta, s)$ . Меридиональная  $s$  и осевая  $x$  координаты связаны соотношениями

$$ds = A dx, \quad A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}. \quad \text{В качестве локальной системы координат,}$$

в которой определяются аппроксимирующие функции и производится интегрирование, используется нормализованная система координат  $\xi, \eta$ . При этом связь между координатами  $s, r, \theta$  и координатами  $\xi, \eta$  определяется зависимостями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i s_i, \quad r = \sum_{i=1}^{12} N_i r_i, \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i \theta_i, \quad (2.8)$$

где  $s_i, r_i, \theta_i$  – узловые значения координат.

Соотношения (2.6), (2.7) показывают, что используемый элемент имеет 64 степени свободы: 8 степеней ( $w, \frac{\partial w}{\partial s}, u, v, \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta}, u_0, v_0, u_1, v_1$ ) в каждой узловой точке и 4 степени свободы ( $u_0, v_0, u_1, v_1$ ) в каждом узле, расположенном на сторонах четырехугольника. Представим компоненты механического и электрического нагружения, которые действуют в пределах элемента, в виде разложения:

$$P_i = \sum_{i=1}^{12} N_i P_i, \quad V_i = \sum_{i=1}^{12} N_i V_i. \quad (2.9)$$

Учитывая выражения для перемещений и деформаций, из условия стационарности функционала (2.1) получим комплексную систему линейных алгебраических уравнений относительно тангенциальных перемещений, деформаций сдвига, прогиба и его производной:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_j} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i^s} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i^s} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_1^j} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_1^j} = 0. \quad (2.10)$$

При этом дифференцирование по  $w, w^s, w^\theta, w^{s\theta}$  производится только в угловых точках, а по  $u_0, v_0, u_1, v_1$  – во всех точках элемента. Комплексные коэффициенты системы алгебраических уравнений (2.10) выражаются через механические и геометрические характеристики оболочки, а правые части определяются путем разложения механической нагрузки по системе аппроксимирующих функций. Такой подход позволяет получить решение линейной задачи для слоистых оболочек вращения как при механическом, так и при электрическом нагружении.

Двумерное вариационное уравнение энергии решается на той же сетке конечных элементов. При этом производная по времени  $\frac{dT}{dt}$  не варьируется и заменяется выражением  $\frac{dT}{dt} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$ . В дальнейшем используем неявную схему решения уравнения энергии.

При механическом нагружении для случая разомкнутых электродов из условия  $\iint_S D_z dS = 0$  можно определить разность потенциалов

$$V_k - V_{k-1} = \iint_S \left\{ \left[ (\epsilon_{ss}^0 + \epsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] dS \right\} / \iint_S \frac{1}{H_1^k} dS. \quad (2.11)$$

Здесь  $S$  – площадь электродов, с которых снимается разность потенциалов.

**3. Аналитическое решение линейной задачи.** Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях трехслойной цилиндрической панели радиуса  $R$  при действии на нее равномерно распределенного давления  $P = P_0 \cos \omega t$ . На электродированных внутренней и внешней поверхностях прикладывается разность потенциалов  $V = V_0 \cos \omega t$ . Рассмотрим следующие механические граничные условия:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad M_x = 0, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a, \\ w = 0, \quad M_y = 0, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b \quad (y = R\theta). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Представляя решение задачи и электромеханические нагрузки в форме

$$\begin{aligned} w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \dots, P_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \\ V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \end{aligned} \quad (3.2)$$

из условия стационарности функционала (2.1) получим систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} w_{mn} = \frac{P_{mn} - Q_{mn}}{\rho_1(\omega_{mn}^2 - \omega^2)}, \quad u_{mn}^0 = \frac{k_m(C_{12}k_m^2 - C_{11}p_n^2)}{C_{11}R(k_m^2 + p_n^2)^2} w_{mn}, \\ v_{mn}^0 = \frac{p_n[(C_{11} + C_{12})k_m^2 + C_{11}(k_m^2 + p_n^2)]}{C_{11}R(k_m^2 + p_n^2)^2} w_{mn}, \\ u_{mn}^1 = \frac{D_{11}^k k_m(k_m^2 + p_n^2)w_{mn} + k_m V_{mn}^\delta}{D_{11}^\delta k_m(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}}, \end{aligned}$$



$$v_{mn}^1 = \frac{D_{11}^\kappa p_n (k_m^2 + p_n^2) w_{mn} + p_n V_{mn}^\delta}{D_{11}^\delta k_m (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} P_{mn} &= \frac{16P_0}{abk_m p_n}, \quad V_{mn}^\kappa = \frac{16V_0 H_3^1}{abk_m p_n H_1^1}, \quad V_{mn}^\delta = \frac{16V_0 H_4^1}{abk_m p_n H_1^1}, \\ Q_{mn} &= V_{mn}^\kappa (k_m^2 + p_n^2) - \frac{D_{11}^\kappa (k_m^2 + p_n^2)^2}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} V_{mn}^\delta, \\ \omega_{mn}^2 &= \frac{1}{\rho_1} \left[ D_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2) k_m^4}{R^2 C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} - \frac{(D_{11}^\kappa)^2 (k_m^2 + p_n^2)^3}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При  $R \rightarrow \infty$  имеем решение для прямоугольной пластины.

**4. Анализ результатов.** Как указано выше, при активном контроле вынужденных колебаний тонкостенных элементов пьезоэлектрические слои могут играть роль как сенсоров, так и актуаторов. При использовании для активного контроля колебаний только актуаторов к ним подводится разность потенциалов  $V_0$ , которая позволяет при совместном действии механической и электрической загрузки существенно уменьшить амплитуду поперечных колебаний. Из формул (3.3) следует, что если —

$$Q_{mn} = P_{mn}, \quad (4.1)$$

то амплитуда поперечных колебаний по соответствующей моде  $(m, n)$  становится равной нулю. Из тех же формул видно, что равны нулю и тангенциальные перемещения  $u_{mn}^0$ ,  $v_{mn}^0$ . Таким образом, динамическая напряженность цилиндрической панели существенно уменьшается. Из (3.4) и (4.1) находим важную формулу для величины потенциала  $V_0$ , который надо подвести к актуатору при заданной нагрузке  $P_0$  для того, чтобы амплитуда поперечных колебаний цилиндрической панели по моде  $(m, n)$  стала равной нулю:

$$V_0 = P_0 (k_m^2 + p_n^2) \left[ \frac{H_3^1}{H_1^1} - \frac{D_{11}^\kappa (k_m^2 + p_n^2)}{D_{11}^\kappa (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} \frac{H_4^1}{H_1^1} \right]. \quad (4.2)$$

Второе слагаемое в формуле (4.2) учитывает влияние сдвигов. При его отсутствии расчет разности потенциалов проводится с использованием гипотез Кирхгоффа-Лява. Таким образом, учет сдвиговых деформаций приводит к уменьшению величины разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о колебаниях шарнирно опертой по торцам однослойной цилиндрической панели толщиной  $H$  и радиуса  $R$ , находящейся под действием равномерно распределенного давления  $P = P_0 \cos \omega t$ . На электродированных поверхностях поддер-

живается нулевое значение потенциала. Аналитическое решение этой задачи представлено выше. Из него, как частный случай, имеем решение, полученное на основе гипотез Кирхгоффа - Лява. Панель изготовлена из пьезоэлектрического материала *PZT-ES-65*, комплексные характеристики которого представлены в [7].

Нагружение панели и ее геометрия характеризуются такими значениями параметров:  $P_0 = 10^4 \text{ Па}$ ;  $R = 0,1 \text{ м}$ ;  $a = L = 0,1 \text{ м}$ ;  $b = R\theta = 0,1 \text{ м}$ ;  $r_1 = 0,09 \text{ м}$ ;  $r_2 = 0,11 \text{ м}$ ;  $H = 0,001 \text{ м}$ . Коэффициент теплопроводности и плотность материала внешнего слоя имеют такие значения:  $\lambda = 1,25 \text{ Вт / м} \cdot ^\circ\text{С}$ ,  $\rho = 0,75 \cdot 10^4 \text{ кг / м}^3$ .

Коэффициент теплоотдачи между окружающей средой и материалом панели является постоянным и равным  $\alpha_T = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}}$ .

На рис. 1, 2, 3 показаны амплитудно-частотные характеристики для значений  $H/R=0,01$ ,  $P_0=10^2 \text{ Па}$ ;  $H/R=0,1$ ,  $P_0=10^4 \text{ Па}$ ;  $H/R=0,2$ ,  $P_0=10^4 \text{ Па}$  толщины и нагрузки соответственно. Кривые 1 отвечают результатам расчетов МКЭ в трехмерной постановке, кривые 2 – результатам, полученным на основе уточненной теории, а кривые 3 – на основе гипотез Кирхгоффа-Лява.

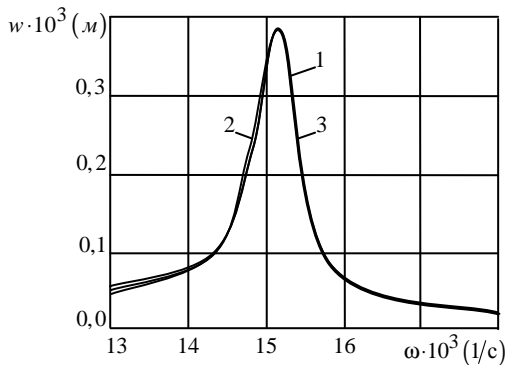


Рис.1

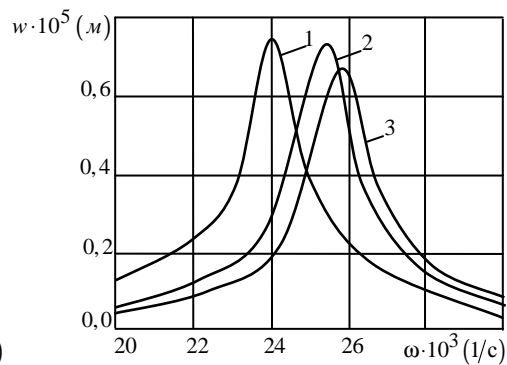


Рис.2

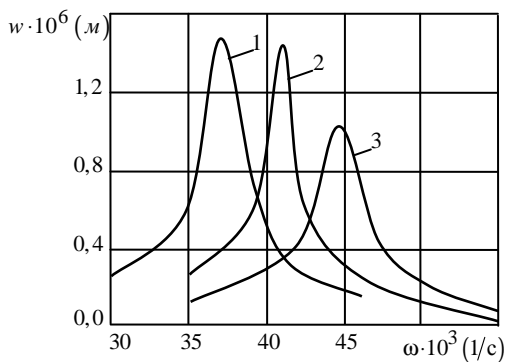


Рис.3

Как видно из рис. 1, для тонкой оболочки ( $H/R = 0,01$ ) результаты расчетов с использованием всех теорий практически совпадают.

Из рис. 1–3 также видно, что амплитуды колебаний на резонансной частоте, полученные с использованием уточненной и трехмерной теорий, очень хорошо согласуются между собой. Кроме того, результаты расчета с использованием аналитического решения и МКЭ также очень близки.

Для исследования влияния физической нелинейности, порождаемой зависимостью электромеханических характеристик от температуры рассмотрим колебания и диссипативный разогрев трехслойной цилиндрической панели толщиной  $H = 2h_1 + h_2$ , которая состоит из внешних пьезослоев толщиной  $h_1$  с одинаковыми вязкоупругими свойствами и внутреннего слоя толщиной  $h_2$  из пассивного материала. На пьезослоях нанесены сплошные электроды. Внутренние электроды коротко замкнуты. К внешним электродам подводится разность потенциалов  $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$ . Торцы панели шарнирно оперты. Из-за симметрии нагрузки и граничных условий при решении задачи рассматривалась четверть панели с условиями симметрии  $w = 0$  при  $z = 0$ ,  $v = 0$  при  $\theta = 0$ . Расчеты проводились для панели, внешние слои которой изготовлены из пьезокерамики  $PZT - TC - 65$  с радиальной поляризацией, а внутренний слой – алюминиевый. Нагрузка панели, ее геометрические и физико-механические свойства характеризуются такими параметрами:

$$\varphi_0 = 70 \text{ В}, \quad r_1 = 0,09 \text{ м}, \quad r_2 = 0,11 \text{ м}, \quad H = r_2 - r_1 = 0,02 \text{ м},$$

$$h_1 = 0,005 \text{ м}, \quad h_2 = 0,01 \text{ м}; \quad L = 0,1 \text{ м}; \quad \theta_0 = \pi / 3,$$

$$E_a = 7,3 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \nu_a = 0,34, \quad \rho_a = 0,27 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Коэффициент теплопроводности и плотность материала внешнего слоя имеют такие значения:  $\lambda = 1,25 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{С}$ ,  $\rho = 0,75 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ . Коэффициент теплоотдачи между окружающей средой и поверхностью панели является постоянным и равным  $\alpha_T = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}}$ . Комплексные характеристики для указанного материала представлены в [7].

На рис. 4, 5 показана частотная зависимость радиальной компоненты вектора перемещений и стационарной температуры в точках срединной поверхности, которая лежит в сечении  $z = 0$ ;  $R = 0,1 \text{ м}$ ;  $\theta = 0$ . Здесь линия 1 отвечает расчету по нелинейной теории, а линия 2 – по линейной

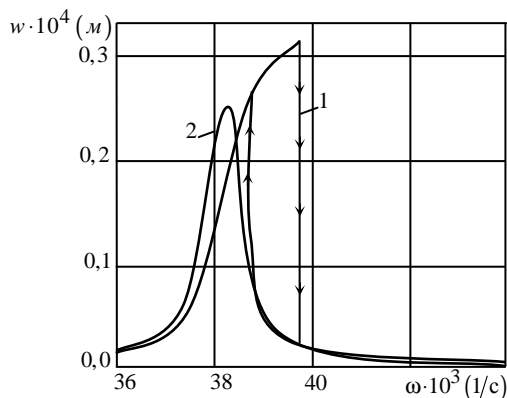


Рис.4

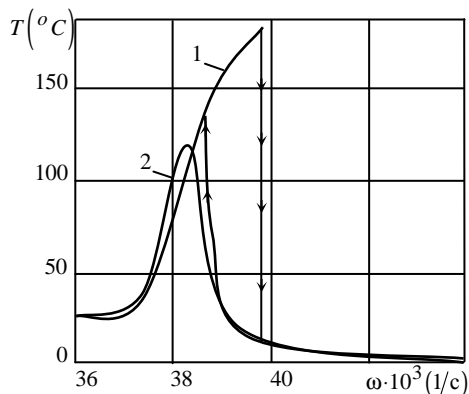


Рис.5

связанной теории. Как видно, учет указанной нелинейности приводит к типичному для нелинейных систем характеру зависимости амплитуды колебаний и температуры от частоты, когда эти зависимости обладают нелинейным гистерезисом и перескоками с одной ветви на другую при определенных частотах.

**РЕЗЮМЕ.** На основі концепції комплексних характеристик розроблена уточнена модель коливань та дисипативного розігріву тришарових оболонок з непружних пасивних і п'єзоелектричних матеріалів. Комплексні характеристики п'єзоматеріалу залежать від температури. Для розв'язування одержаних нелінійних крайових задач застосовуються ітераційні процедури, які зводять розв'язування цих нелінійних задач до розв'язування послідовності лінійних задач електромеханіки і теплопровідності з відомим джерелом тепла. Лінійні задачі на кожній ітерації розв'язуються методом скінченних елементів. Представлено приклади розрахунку динамічних характеристик коливань циліндричної панелі, які ілюструють вплив на них деформацій зсуву.

**Ключові слова:** оболонки, вимушені коливання, деформації зсуву, метод скінченних елементів, дисипативний розігрів, динамічні характеристики.

**SUMMARY.** On base of conception of complex characteristics the refined model of vibrations and dissipative heating of threelayered shells from nonelastic passive and piezoactive materials is developed. Material complex characteristics depend on temperature. To solve the nonlinear boundary problems the iterative methods are used. By the methods the obtained nonlinear boundary problems are reduced to the linear problems of electromechanics and thermal conductivity with known heat source. These linear problems on each iteration are solved by the finite elements. To show influence of shear strains and nonlinearity the examples of calculation of dynamic characteristics of vibrations of cylindrical panel are given.

**Keywords:** shells, forced vibrations, shear strains, method of finite elements, dissipative heating, dynamic characteristics.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка – 1989. – 290 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5.)
2. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка. – 1988. – 320 с.
3. Карнаузов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир, 2005. – 428 с.
4. Рассказов А. О., Козлов В. И. Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочек вращения при нестационарном нагружении // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 5. – С. 68–75.
5. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.
6. Bhimaraddi A., Carr A. J., Mass P. T. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // Comput. Struct. – 1989. – Vol. 31, N 3. – P. 299–308.
7. Sabat R. G., Mukherjee B., Ren W., Yung G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Physics. – 2007. – Vol. 101. – P 06411–1–7.
8. Schwartz M. Encyclopedia of smart materials. – Willey, 2002. – 1073 p.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*  
*Национальный технический университет Украины “КПИ”, г. Киев*

*Поступила 15.11.2013*

УДК 539.3

*И. Ф. КИРИЧОК*, д-р физ.-мат. наук*Я. А. ЖУК*, д-р физ.-мат. наук**ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И ТЕМПЕРАТУРЫ  
ВИБРОРАЗОГРЕВА НА РЕЗОНАНСНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК С ПЬЕЗОАКТУАТОРАМИ И СЕНСОРАМИ**

*Представлены результаты численного исследования вынужденных резонансных колебаний и диссипативного разогрева шарнирно закрепленной или жестко заземленной цилиндрической оболочки с пьезоэлектрическими слоями, один из которых является актуатором, а другой выполняет роль сенсора. Исследовано влияние граничных условий и температурной зависимости комплексных характеристик пассивного и пьезоактивного материалов на резонансные изгибные колебания оболочки и возможность их активного демпфирования. Рассмотрены вопросы теплового разрушения оболочки.*

*Ключевые слова:* вынужденные колебания, пьезоактуатор, сенсор, диссипативный разогрев, активное демпфирование, цилиндрическая оболочка.

В последнее время для демпфирования вынужденных колебаний тонкостенных элементов конструкций из упругих и вязкоупругих материалов используются методы активного контроля, которые базируются на включении в конструкцию пьезоэлектрических компонентов, выполняющих роль актуаторов и сенсоров [3, 9, 10]. Изотермическая постановка задачи о вынужденных колебаниях тонкостенных элементов и их активное демпфирование пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами развиты в работах [9, 10] и др. Постановка связанной задачи электротермомеханики о колебаниях и диссипативном разогреве тонкостенных элементов с пьезоактивными включениями и решение ряда конкретных задач представлены в работах [1, 3, 4]. Осесимметричные резонансные колебания и виброразогрев вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими актуаторами рассматривались в статьях [5–8].

В данной статье численно решена задача о вынужденных осесимметричных колебаниях и диссипативном разогреве цилиндрической оболочки с пьезоактивными слоями, один из которых выступает актуатором, а второй – сенсором. Торцы оболочки шарнирно или жестко закреплены. Исследуется влияние граничных условий и температурной зависимости свойств материалов на динамические характеристики оболочки. Рассматриваются вопросы активного демпфирования и теплового разрушения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку длины  $l$ , отнесенную к ортогональной системы координат  $\alpha, \theta, z$  с координатой  $z = 0$  в центре среднего изотропного пассивного слоя радиуса  $R$  и толщины  $h_0$ . Внутренний и внешний слои толщины  $h_1$  и  $h_2$  соответственно изготовлены из пьезокерамики, поляризованной по толщине в противоположных направлениях. Все остальные свойства слоев оди-

наковы. Материалы слоев демонстрируют вязкоупругое поведение, которое описывается с привлечением концепции комплексных модулей, зависящих от температуры [2]. Будем считать, что слой толщины  $h_1$  играет роль актуатора и характеризуется пьезомодулем  $d_{31}$ , а слой толщины  $h_2$  выступает в качестве сенсора с пьезомодулем  $-d_{31}$ . Поверхности пьезоэлектрических слоев электродированы. На внутренних электродах поддерживаются нулевые значения потенциалов  $\varphi(\pm h_0 / 2) = 0$ . Электродированные цилиндрические поверхности  $z = h_0 / 2 + h_2$  и  $z = -(h_0 / 2 + h_1)$  разделены бесконечно тонкими кольцевыми разрезами на отдельные участки координатами  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq l$ ).

Оболочка нагружена поверхностным давлением  $q_z = q_z(\alpha) \cos \omega t$ , которое изменяется во времени по гармоническому закону с близкой к резонансной круговой частотой  $\omega$ . К электродам актуатора с площадью  $s = 2\pi R \Delta_\alpha$  ( $\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ) и частотой механического нагружения для компенсации его действия подводится разность амплитуд электрических потенциалов  $V_a$ . На участках  $\alpha < \alpha_1, \alpha > \alpha_2$  электроды короткозамкнуты ( $V_A = 0$ ). При этом на разомкнутых электродах сенсора площадью  $s$  возникает неизвестная разность потенциалов  $V_s$  и выполняется условие [3]

$$\iint_s D_z ds = 0, \quad (1)$$

где  $D_z$  – нормальная составляющая электрической индукции.

Двумерную модель рассматриваемой оболочки будем строить на основе гипотез Кирхгоффа-Лява для механических переменных и адекватных предположений относительно электрических полевых величин [2, 3], из которых следует, что  $D_z = C = const$  не зависит от координаты  $z$ . Температуру саморазогрева будем считать постоянной по толщине пакета слоев оболочки. Торцы оболочки шарнирно или жестко закреплены, а на ее поверхностях выполняются условия конвективного теплообмена с внешней средой температуры  $T_s$ .

Согласно подходу, развитому в работе [4], задача об электротермомеханическом поведении исследуемой оболочки относительно искомых комплексных величин сводится к решению уравнений гармонических колебаний (множитель  $e^{i\omega t}$  опускаем)

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} + \tilde{\rho}\omega^2 u = 0, \quad \frac{dM_\alpha}{d\alpha} - Q_\alpha = 0, \quad \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \tilde{\rho}\omega^2 w + q_z = 0; \quad (2)$$

определяющих соотношений для усилий и моментов

$$\begin{aligned} N_\alpha &= C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\theta + K_{11}\kappa_\alpha + N_E, & N_\theta &= C_{12}\varepsilon_\alpha + C_{11}\varepsilon_\theta + K_{12}\kappa_\alpha + N_E, \\ M_\alpha &= K_{11}\varepsilon_\alpha + K_{12}\varepsilon_\theta + D_{11}\kappa_\alpha + M_E, & M_\theta &= K_{12}\varepsilon_\alpha + K_{11}\varepsilon_\theta + D_{12}\kappa_\alpha + M_E; \end{aligned} \quad (3)$$

зависимостей между амплитудами параметров деформаций и перемеще-

ний

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \quad \kappa_\alpha = \frac{d\vartheta_\alpha}{d\alpha}, \quad \vartheta_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha}; \quad (4)$$

выражений для электрической индукции в пьезослоях

$${}^1D_z = -b_{33}V_a/h_1 + b_{31}(\varepsilon + \tilde{h}_1\kappa_\alpha), \quad {}^2D_z = -b_{33}V_s/h_2 - b_{31}(\varepsilon + \tilde{h}_2\kappa_\alpha); \quad (5)$$

усредненного за период колебаний и по толщине оболочки уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_0) + \frac{\omega}{2\lambda H} \tilde{W}, \quad (6)$$

где  $\tilde{W} = N_\alpha''\varepsilon'_\alpha - N'_\alpha\varepsilon''_\alpha + N_\theta''\varepsilon'_\theta - N'_\theta\varepsilon''_\theta + M_\alpha''\kappa'_\alpha - M'_\alpha\kappa''_\alpha + {}^1D_z''V'_a + {}^1D_z'V''_a$ .

Механические граничные условия формулируются следующим образом:

$$N_\alpha = 0, \quad M_\alpha = 0, \quad w = 0 \quad (\alpha = 0, l) \quad (7)$$

при шарнирном опирании торцов;

$$u = 0, \quad M_\alpha = 0, \quad \vartheta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, l) \quad (8)$$

при жестком опирании торцов. Граничные и начальные условия для уравнения теплопроводности имеют вид

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \alpha_{0,l} (T - T_s) \quad (\alpha = 0, l), \quad T = T_0 \quad (t = 0). \quad (9)$$

В уравнениях (2)–(9) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{11}^E &= 1/\left[s_{11}^E(1 - \nu_E^2)\right], \quad c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E, \quad \nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E, \\ c_{11} &= E/(1 - \nu^2), \quad c_{12} = \nu c_{11}, \quad b_{31} = d_{31}/\left[s_{11}^E(1 - \nu_E)\right], \\ b_{33} &= \varepsilon_{33}^T/(1 - k_p^2), \quad k_p^2 = 2d_{31}^2/\left[\varepsilon_{33}^T s_{11}^E(1 - \nu_E)\right], \\ h_{m2} &= \mp h_m(h_m + h_0), \quad N_E = b_{31}V_a, \quad M_E = -\tilde{h}_1 b_{31}V_a, \\ \tilde{h}_{1,2} &= (h_{1,2} + h_0)/2, \quad s_{1m}^E = s'_{1m}(1 - i\delta_{1m}^s), \\ d_{31} &= d'_{31}(1 - i\delta_{31}^d), \quad \varepsilon_{33}^T = \varepsilon'_{33}(1 - i\delta_{33}^e), \end{aligned} \quad (10)$$

в которых  $H = h_1 + h_2 + h_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta$ ;  $s_{1m}^E$ ,  $d_{31}$  и  $\varepsilon_{33}^T$  – зависящие от температуры комплексные податливости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость материала пьезоактивных слоев соответственно;  $E = E' + iE''$ ,  $\nu = const$  – зависящие от температуры модуль и коэффициент Пуассона пассивного материала;  $w = w' + iw''$  и  $u = u' + iu''$  – амплитуды прогибов и продольных перемещений;  $N_\alpha$ ,  $N_\theta$ ,  $Q_\alpha$  и  $M_\alpha$  – комплексные амплитуды усилий и изгибающего момента;  $\lambda$  и  $a$  – осредненные ко-

ээффициенты теплопроводности и температуропроводности;  $\tilde{\rho} = \rho_0 h_0 + \rho_1 (h_1 + h_2)$ ,  $\rho_0, \rho_1$  – удельные плотности пассивного и пьезоактивного материалов;  $\alpha_s = (\alpha_s^1 + \alpha_s^2) / 2$ ,  $\alpha_s^{1,2}$ ,  $\alpha_{0,l}$  – коэффициенты теплообмена на соответствующих граничных поверхностях. Тут при построении определяющих соотношений (3) для пьезослоя-сенсора вместо условия (1) использовано приближенное равенство  $D_z = 0$  [3].

Подстановка значения  ${}^2D_z$  из (5) в условие (1) приводит к выражению для определения амплитудного значения разности потенциалов  $V_s$  на электродах сенсора через решение краевой задачи термовязкоупругости, а именно:

$$V_s/h_2 = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b_{31} (\varepsilon + \tilde{h}_2 \kappa_\alpha) d\alpha / \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b_{33} d\alpha. \quad (11)$$

**Методика построения решения задачи.** Для решения связанной нелинейной задачи (2)–(9) применялся пошаговый во времени метод [2]. При этом уравнения (2)–(4) относительно комплексных неизвестных  $u$ ,  $w$ ,  $\vartheta_\alpha$ ,  $N_\alpha$ ,  $Q_\alpha$  и  $M_\alpha$  записывались в форме обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида. Полученная система с граничными условиями (7), (8) после разделения ее на действительную и мнимую части на каждом шаге по времени интегрировалась при помощи типовой программы решения системы обычных дифференциальных уравнений. При этом на первом шаге решается линейная задача (2)–(4), (7), (8) при изотермических характеристиках материалов. Потом вычисляется диссипативная функция  $\tilde{W}$  и решается задача теплопроводности (6), (9) при помощи метода конечных разностей с использованием явной схемы. Далее, с учетом полученного распределения температуры вычисляются жесткостные характеристики (10). Процесс повторяется на следующем шаге.

При расчетах использовались безразмерные параметры пространственной  $x = \alpha / l$  и временной  $\tau = at / l^2$  координат, а также теплообмена  $\gamma_{s,0,l} = \alpha_{s,0,l} l / \lambda$ .

Будем ограничиваться случаем механического нагружения постоянной амплитуды  $q_z(\alpha) = q_0$ . При этом в оболочке реализуются осесимметричные колебания преимущественно изгибной формы, в которой наиболее энергоемкой является первая мода. Для ее демпфирования при известном  $q_0$  электрический потенциал  $V_a$ , который необходимо подвести в противофазе к актуатору, определяется соотношениями

$$V_A = k_A(\Delta) q_0 \quad (\Delta = \Delta_\alpha / l), \quad k_A = \left| w_{q_{\max}} \right| / \left| w_{E_{\max}} \right|, \quad (12)$$

в которых  $\left| w_{q_{\max}} \right|$  и  $\left| w_{E_{\max}} \right|$  – модули максимальных амплитуд изгибных колебаний на частоте резонанса при  $q_0 = 1 \text{ Па}$ ,  $V_a = 0 \text{ В}$  и при  $q_0 = 0 \text{ Па}$ ,  $V_a = 1 \text{ В}$ , соответственно.

Для расчета компенсирующего показателя актуатора  $V_a$  по извест-



ному значению потенциала сенсора  $V_s$  при неизвестной нагрузке использовалась зависимость обратной связи [3]

$$V_a = G_{as} V_s, \quad G_{as} = \left| V_a^1 \right| / \left| V_s^1 \right|, \quad (13)$$

где модули эталонных показателей сенсора  $V_s^1$  и актуатора  $V_a^1$  вычислялись на резонансе по формулам (11) и (12) соответственно при нагрузке  $q_0 = 1 \text{ Па}$ .

**Результаты расчетов и их анализ.** Расчеты проведены для оболочки, пассивный слой которой изготовлен из полимера, а сенсоры и актуаторы – из пьезокерамики типа ЦТСтБС-2. Вязкоупругие характеристики и их температурные аппроксимации для указанных материалов приведены в работе [4]. Параметры оболочки и теплообмена таковы:  $R = 0,1 \text{ м}$ ,  $l = 0,2 \text{ м}$ ,  $h_1 = h_2 = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ,  $h_0 = 0,004 \text{ м}$ ,  $\gamma_{s,0,1} = 0,5$ ,  $T_0 = T_s = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Ниже на рисунках штриховыми линиями показаны результаты решения задачи при изотермических модулях, сплошными – при учете температурной зависимости свойств материалов, штрих-пунктирными – при совместном действии механического  $q_0$  и противофазного электриче-

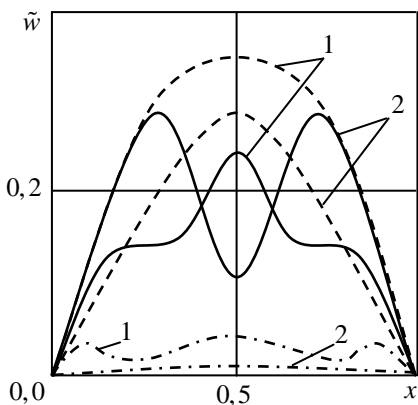


Рис.1

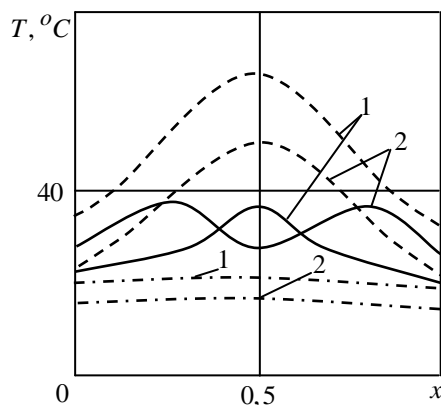


Рис.2

ского ( $-|V_a|$ ) нагружения. Кривые 1 и 2 соответствуют шарнирному (7) и жесткому (8) закреплениям торцов.

Распределение относительных амплитуд прогибов  $\bar{w} = |w| / h_0 \cdot 10^2$  и стационарного значения ( $\tau = 0, 1$ ) температуры виброразогрева вдоль оболочки для поверхностного давления с амплитудой  $q_0 = 0,1 \cdot 10^4 \text{ Па}$  на частотах  $\omega = 15200 \text{ с}^{-1}$  (кривые 1) и  $\omega = 16500 \text{ с}^{-1}$  (кривые 2) показаны на рис. 3 и рис. 4 соответственно. Для выбранного  $q_0 = 0,1 \cdot 10^4 \text{ Па}$  рассчитанные по формуле (11) показатели сенсора равны  $|V_s| = 0,493 \text{ В}$  при шарнирном (7) и  $|V_s| = 0,582 \text{ В}$  при жестком (8) закреплениях торцов обо-

лочки. Разность потенциалов, которую необходимо подвести к электродам актуатора для компенсации указанного нагружения, рассчитывались по формуле (12):  $|V_a| = 12 В$  при условиях (7) и  $|V_a| = 4,84 В$  при условиях (8).

В предположении неизвестного параметра нагружения  $q_0$  при известном показателе сенсора  $|V_s|$  компенсирующий показатель актуатора  $|V_a|$  рассчитывался также из соотношений (13), в которых коэффициент обратной связи равен  $G_{as} = 24,3$  и  $G_{as} = 8,32$  для условий (7) и (8) соответственно. Вычисленные таким способом значения  $|V_a|$  совпадают со значениями, полученными по формуле (12).

Частотные зависимости относительной амплитуды прогибов  $\bar{w}$  и стационарной температуры виброразогрева в средней части ( $x = 0,5$ ) оболочки показаны на рис. 3 и рис. 4 соответственно. Очевидно, что жесткое закрепление торцов приводит к увеличению резонансной частоты изгиб-

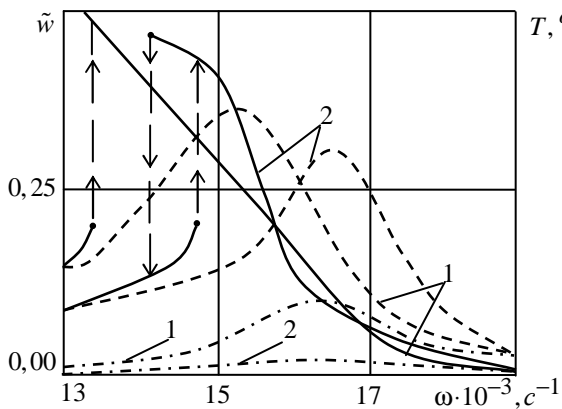


Рис.3

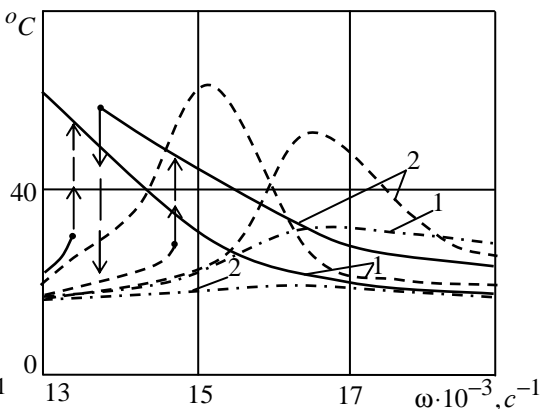


Рис.4

ных колебаний оболочки и уменьшению прогибов и температуры виброразогрева. Влияние температурной зависимости комплексных модулей материалов сопровождается появлением нелинейных характеристик мягкого типа и участков неоднозначности [2]. При активном демпфировании колебаний оболочки (штрих-пунктирные кривые) амплитуды прогибов на порядок уменьшаются, а температура виброразогрева оказывается близкой к начальной.

Температура виброразогрева рассматриваемой оболочки при соответствующих уровнях нагружения и условиях теплообмена может достигнуть критического значения  $T_{kp}$ , при котором происходит тепловое разрушение из-за размягчения пассивного материала или из-за деполяризации пьезо-керамики (точка Кюри). Считаем, что элемент теряет свое функциональное назначение, если хотя бы в одной точке температура достигает значения  $T_{kp}$ , которому соответствует критическая нагрузка  $q_{kp}$ .

На рис. 5 показаны кривые 1-3 эволюции температуры  $T_m = T(x = 0,5)$  по времени  $\tau$ , рассчитанные на основании решения линейной задачи о колебаниях шарнирно закрепленной оболочки на резонансной

частоте  $\omega = 15200 \text{ c}^{-1}$  для амплитуд  $q_0 = 0,125 \cdot 10^4 \text{ Па}$  (кривая 1),  $q_0 = 0,132 \cdot 10^4 \text{ Па}$  (кривая 2),  $q_0 = 0,15 \cdot 10^4 \text{ Па}$  (кривая 3). Значению  $T_{kp}$  отвечает линия с крестиками. Известно, что для рассматриваемого полимера  $T_{kp} = 100^\circ \text{C}$ , что ниже температуры Кюри пьезокерамики. Из рис. 5 видно, что для амплитуд нагрузок  $q_0 < q_{kp} = 0,132 \cdot 10^4 \text{ Па}$  значения стационарной температуры виброразогрева не достигает  $T_{kp}$ . При  $q_0 \geq q_{kp}$  (кривые 2, 3) наступает момент времени  $\tau \geq \tau_{kp}$ , когда элемент теряет свое функциональное предназначение.

На рис. 6 для параметров теплообмена  $\gamma_{s,0,l} = 0,5$  и  $\gamma_{s,0,l} = 2,0$  представлены графики зависимости амплитуда нагружения  $q_0 > q_{kp}$  ( $q_{kp}$  обо-

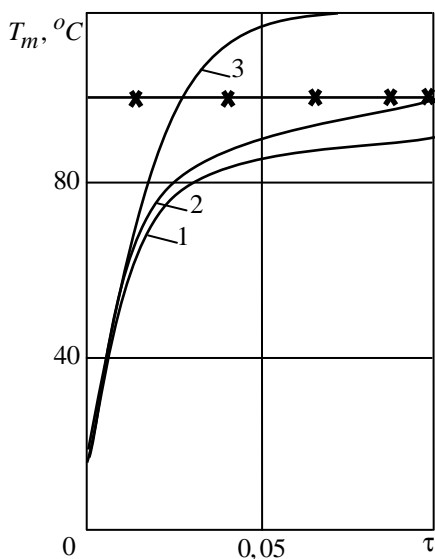


Рис.5

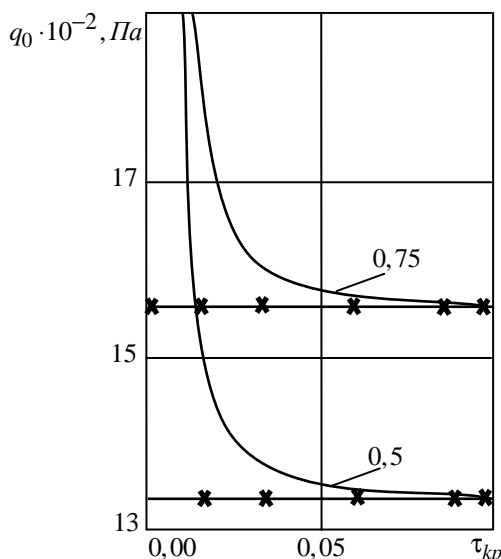


Рис.6

значено крестиками) от критического параметра времени  $\tau_{kp}$ , после которого происходит тепловое разрушение материала. Распределение представленных кривых, которые выступают аналогом кривых Велера из теории циклического разрушения материалов, существенно зависит от параметров теплообмену на поверхностях оболочки. С их помощью можно определить время  $\tau \leq \tau_{kp}$  работоспособности системы при нагружениях, превышающих критические уровни.

**РЕЗЮМЕ.** Подано результати чисельного дослідження вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву шарнірно- або жорстко закріпленої циліндричної оболонки з п'єзоелектричними шарами, один з яких є актуатором, а інший виконує роль сенсора. Досліджено вплив граничних умов і температурної залежності комплексних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалів на резонансні згинальні коливання оболонки і можливість їх активного демпфування. Розглянуто питання теплового руйнування оболонки.

**Ключові слова:** вимушені коливання, п'єзоактуатор, сенсор, дисипативний розігрів, активне демпфірування, циліндрична оболонка.

**SUMMARY.** Results of numerical investigation of forced resonance vibrations and dissipative heating of cylindrical shell with hinged or fixed edges and containing piezoelectric layers are presented. One piezolayer is functioning as actuator and second piezolayer is working as sensor. Influence of boundary conditions as well as temperature dependence of complex characteristics of the passive and active materials onto resonant bending vibrations of the shell is studied along with the possibility of active damping of the vibrations. Some aspects of the thermal fracture of the shell are considered.

**Keywords:** forced vibrations, piezoactuator, sensor, dissipative heating, active damping, cylindrical shell.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жук Я. А., Гузь І. А. Активное демпфирование вынужденных колебаний шарнирно опертой балки, содержащей пьезоактивные слои, при учете геометрической и физической нелинейностей // Прикладная механика.– 2009.– Т. 45, № 1.– С. 118–135.
2. Карнаушов В. Г., Киричок І. Ф. Электротермовязкоупругость.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с.– Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5т.– Т. 4.
3. Карнаушов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении.– Житомир, 2005.– 428 с.
4. Киричок І. Ф. Осесимметричные резонансные колебания и разогрев оболочек вращения и их контроль пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами // Прикладная механика.– 2010.– Т. 46, № 8.– С. 42–57.
5. Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В. Вынужденные осесимметричные колебания и разогрев вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами при учете термомеханического сопряжения // Прикладная механика.– 2010.– Т. 46, № 10.– С. 53–61.
6. Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В. Осесимметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-матем. науки.– 2013.– Вип. 3.– С. 150–153.
7. Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В. Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теоретическая и прикладная механика.– Донецк: 2010.– Вып. 46.– С. 132–140.
8. Козлов В. І., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В. Демпфірування вимушених осесимметричних коливань шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-матем. науки.– 2007.– Вип. 4.– С. 84–87.
9. Tzou H. S., Anderson G. L. (Eds.) Intelligent structural Systems.– Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publisher, 1992.– 453 p.
10. Tzou H. S. Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua).– Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publisher, 1993.– 400 p.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев  
Киевский национальный университет*

*Поступила 15.11.2013*

УДК 539.3

А. Р. ГАЧКЕВИЧ, д-р физ.-мат. наук,  
Т. В. КОЗАКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук

## ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО ПОДОГРЕВА НА ОСТАТОЧНОЕ СТРУКТУРНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

*Исследовано остаточные фазовый состав и напряженное состояние тонких малоуглеродистых низколегированных стальных пластин обусловленные воздействием подвижного нормально распределенного источника тепла при предварительном однородном подогреве.*

*Ключевые слова: малоуглеродистые низколегированные пластины, фазовый состав, остаточное напряженное состояние, подвижный источник тепла, общий однородный подогрев*

Многие элементы современных конструкций и машин являются стальными пластинчатыми. В технологических процессах изготовления и обработки таких элементов часто используется локальный высокотемпературный нагрев, который реализуется с применением подвижных источников нагрева (газовых, электрических, электромагнитных, лазерных, инфракрасного облучения и т.п.). Высокие температуры нагрева и режим последующего охлаждения могут изменять структурное состояние стали, приводить к изменению ее механических свойств (твердости, прочности, пластичности, вязкости и др.), а также к возникновению в соответствующих элементах совместно с пластическими деформациями и структурных остаточных деформаций и напряжений, уровни которых могут превышать допустимые. Для прогнозирования механических свойств конструктивных элементов и уровня остаточных напряжений в них при различных режимах нагрева-охлаждения является важной и актуальной разработкой методик исследования и целевой оптимизации фазового и напряженного состояний таких элементов как в процессе нагрева-охлаждения, так и после его завершения.

В данной работе, с целью изучения влияния различных технологических факторов на механическое поведение стальных конструктивных элементов при высокотемпературном нагреве предложена методика исследования остаточных фазового состава и напряженного состояния предварительно подогретых тонких стальных малоуглеродистых низколегированных пластин при действии подвижного нормально распределенного источника тепла (с одним центром локализации).

В работах [3, 5, 13] приведены интерполяционные аналитические зависимости механических характеристик малоуглеродистых низколегированных стальных образцов от времени монотонного охлаждения в интервале температур эвтектоидных преобразований ( $850 \div 500^{\circ}\text{C}$ ), их химического состава, а также процентного содержания фазовых составляющих (мартенсита  $M$ , бейнита  $B$  и феррито-перлита  $FP$ ), образующихся в результате распада аустенита.

При охлаждении стального изделия, которое начинает происходить при температурах, превышающих температуры полиморфных превращений ( $850^{\circ}\text{C} \div 500^{\circ}\text{C}$ ), образуются фазовые составляющие: феррит, перлит, бейнит и мартенсит. Мартенсит – это структура, которая соответствует превращению грани-центрированной кубической решетки ( $Fe_{\gamma}$ ) аустенита в объемно-центрированную кубическую решетку ( $Fe_{\alpha}$ ) феррита бездиффузным способом.

В связи с тем, что плотность  $Fe_{\gamma}$  выше, чем  $Fe_{\alpha}$ , переход  $Fe_{\gamma} \rightarrow Fe_{\alpha}$  связан с увеличением удельного объема. Именно для сталей переход аустенита в мартенсит связан с увеличением объема примерно на 1–4 % в зависимости от содержания углерода. Поскольку это преобразование объема проходит во всех элементарных ячейках кристаллической решетки железа, между этими ячейками возникают высокие микронапряжения, которые суммируясь, вызывают образование высоких зональных напряжений. При преобразованиях аустенита в процессе охлаждения равновесных фаз (феррита и карбидов) увеличение объема, является меньшим (до 1%), чем при образовании мартенсита (так как при этом не происходит расширение решетки пресыщенного  $Fe_{\alpha}$  – твердого раствора атомов углерода).

Упругие изменения объема, происходящие при нагреве без образования различных фаз приводят к возникновению временных напряжений. Они исчезают, когда весь металл изделия (или произвольная его часть) перейдет в пластическое состояние и будет легко деформироваться в результате имеющихся напряжений или при снятии температурного нагружения. Но упругие изменения объема, произошедшие при охлаждении и образовании фаз с различными удельными объемами, приводят к возникновению напряжений, которые являются остаточными (постоянными). Экспериментально установлено [10], что пластическое деформирование незначительно влияет на остаточное напряженное состояние образцов из малоуглеродистых сталей при монотонном охлаждении их с аустенизированного состояния при реальных тепловых условиях охлаждения, т.е. это состояние определяется, в основном, раскладом фазовых составляющих [7, 12]. При этом фазовая составляющая стали – мартенсит, образующийся при монотонном охлаждении после высокотемпературного нагрева вызывает, в основном, появление остаточных структурных напряжений, влияющих на дальнейшие механические и физические эксплуатационные показатели изделий из стали.

С целью увеличения пластических свойств зоны термического влияния при уменьшении уровня остаточных напряжений разработана методика параметрической оптимизации характеристик движущегося источника тепла и параметров начальной температуры (характеризующей предварительный однородный подогрев пластины) относительно процентного содержания мартенсита (по критерию минимума максимального содержания мартенсита) при уменьшении уровня остаточных напряжений.

**Постановка задачи.** Рассматривается тонкая стальная пластина (рис. 1), начальная температура которой равна  $t_0 + T$ , где  $T$  – часть, которая может изменяться и характеризует температуру предварительного однородного подогрева пластины,  $t_0$  – температура внешней среды.

Пластина локально нагревается подвижным распределенным источником тепла  $\bar{Q}_1$  до температуры полной аустенизации стали в окрестности сечения  $x_2 = 0$ , а затем монотонно охлаждается. Необходимо определить и исследовать остаточные фазовое и напряженное состояния пластины при таком воздействии. Рассматривается нормально распределенный источник тепла (с одним центром локализации), плотность тепловой энергии которого распределена по нормальному (гауссовому) закону, т.е. [8, 12]

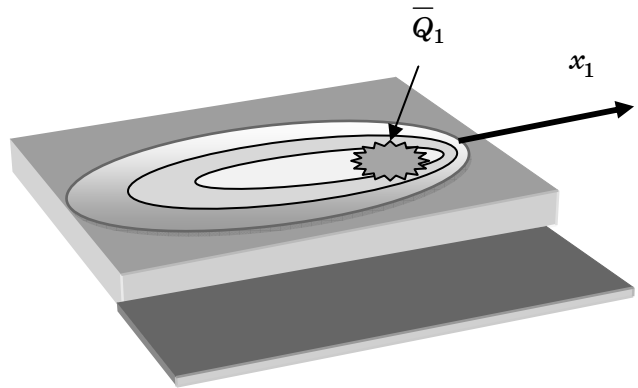


Рис. 1

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1^*}{2\pi\bar{\sigma}} \exp \left[ -\frac{x_2^2 + (x_1 - x_1^0)^2}{2\bar{\sigma}} \right], \quad (1)$$

где  $Q_1^*$  – мощность источника тепла (на единицу длины, кВт/м);  $\bar{\sigma}$  – параметр рассеивания ( $\text{м}^2$ );  $x_1$  – координата в направлении движения источника (м);  $x_2$  – расстояние от направления движения источника (м);  $x_1^0 = v \tau$  (м);  $v$  – скорость движения источника (м/с);  $\tau$  – время (с). Такие распределения создают стандартные электрические, электромагнитные, инфракрасные и др. промышленные нагреватели [8].

**Методика решения.** С использованием известной математической модели описания и оптимизации остаточных фазового и напряженного состояний малоуглеродистых низколегированных пластин при нагреве подвижными источниками тепла до температуры полной аустенизации и последующем монотонном охлаждении сформулированы для рассматриваемого случая соответствующие исходные задачи математической физики. Они сводятся к следующим [1, 4, 6, 11]:

- постановка соответствующей двумерной нестационарной задачи теплопроводности для тонкой пластины при высокотемпературном нагреве подвижным нормально распределенным источником тепла с заданной начальной температурой, определение изотерм на основе решений этой задачи теплопроводности, разработка с учетом изотерм алгоритма определения времени пребывания точки в интервале температур ( $850^\circ\text{C} \div 500^\circ\text{C}$ ) полиморфных превращений (принятом в статистических данных) при монотонном охлаждении;

- определение, с использованием обобщенных аналитических зависимостей статистического анализа (при известном времени нахождения то-

чек пластины в диапазоне температур полиморфных превращений при охлаждении и химического состава) процентного содержания имеющихся остаточных фазовых составляющих;

– формулировка в перемещениях и решение задачи о нахождении остаточных напряжений с помощью метода условных остаточных деформаций при известной (в соответствии с принципом аддитивности) деформации, вызванной различным процентным содержанием имеющихся фазовых составляющих при установленном изменении удельного объема всех составляющих в процессе преобразования.

На последнем этапе при нахождении остаточных напряжений в соответствии с методом условных остаточных деформаций [9] принимается, что полная деформация  $\hat{\varepsilon}$ , которая соответствует имеющимся в теле остаточному напряжению  $\hat{\sigma}$  при известной остаточной деформации  $\hat{\varepsilon}^0$  при натуральном тепловом состоянии тела, равна сумме этой деформации и упругой  $\hat{\varepsilon}^p$ , т.е.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^0 + \hat{\varepsilon}^p \quad (\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^p; \quad i, j = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

и связана с компонентами вектора перемещения  $\bar{u} = \{u_{ij}\}$  соотношением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (3)$$

Упругая деформация  $\hat{\varepsilon}^p$  определяется законом Гука

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (4)$$

где  $\sigma \equiv \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  – первый инвариант тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Граничные условия для не нагруженной поверхности тела запишутся в виде

$$\hat{\sigma} \cdot \bar{n} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (2)–(4) могут быть записаны соответственно для плоской деформации ( $\varepsilon_{22} = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ ) при заданной в пластине остаточной объемной деформации  $e_a(x, z)$ , а также для тонкой пластины. В этом случае остаточной объемной деформацией является структурная, которая согласно работам [2, 7, 12] в соответствии с принципом аддитивности деформации, вызванной различным процентным содержанием имеющихся фазовых составляющих, определяется формулой

$$e_a = \beta_m \xi_m + \beta_b \xi_b + \beta_{fp} \xi_{fp}. \quad (6)$$

Здесь  $\xi_m = 0.01 \cdot M$ ,  $\xi_b = 0.01 \cdot B$ ,  $\xi_{fp} = 0.01 \cdot FP$ . Эта деформация соответствует (при учете известных экспериментальных данных [3, 13]), измене-



нию удельного объема исходного феррито-перлита ( $V_{FP} \equiv 1/\rho_{FP} = 0.1274 \cdot 10^{-3}, \text{ м}^3/\text{кг}$ , где  $\rho$  – плотность) при аустенизации и последующем изменении удельного объема аустенита ( $V_A = 0.1227 \cdot 10^{-3}, \text{ м}^3/\text{кг}$ ) на процентные объемные части мартенсита ( $V_M = 0.1282 \cdot 10^{-3}, \text{ м}^3/\text{кг}$ ), бейнита ( $V_B = 0.1277 \cdot 10^{-3}, \text{ м}^3/\text{кг}$ ) и феррито-перлита ( $V_{FP} = 0.1274 \cdot 10^{-3}, \text{ м}^3/\text{кг}$ ). При этом получены следующие значения коэффициентов:  $\beta_m = 0.002093$ ,  $\beta_b = 0.000785$ ,  $\beta_{fp} = 0$ .

На основе метода взвешенных невязок (в частности, методе Галеркина) и метода конечных элементов [14] разработана методика численного последовательного решения соответствующих задач математической физики с этапами расчетной схемы, с учетом числовой формы получения результатов на каждом этапе. При этом бесконечная пластина моделируется конечной (которая занимает конечную область) с подбором размеров пластины такими, чтобы результаты выбранной точности не зависели от ее размеров.

Разработано программное обеспечение, которое реализовано в пакете программ определения поля температуры, времени пребывания рассматриваемых точек тела в диапазоне температур полиморфных превращений, процентного содержания фазовых составляющих при распаде аустенита и вычисления значений компонент остаточных структурных напряжений.

**Числовые результаты и их анализ.** Исследование проведено для пластины из малоуглеродистой низколегированной стали 17Г1С с таким химическим составом:  $Mn = 1.35\%$ ,  $C = 0.175\%$ ,  $Si = 0.5\%$ ,  $\bar{\sigma} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$  при  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $v = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$ ,  $\lambda = 4,42 \text{ кВ}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\alpha/2h = 2,34 \cdot 10^2 \text{ В}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $c\rho = 5,52 \text{ кДж}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$ .

На рис. 2 показано распределение фаз (а-б, д-е) и остаточных напряжений (в-г, ж-з) при температуре  $T$  и параметре мощности источника тепла  $Q_1^*$  равных:  $50^\circ\text{C}$ ,  $780 \text{ кВ}/\text{м}$  (рис. 2 а, 2 в);  $50^\circ\text{C}$ ,  $800 \text{ кВ}/\text{м}$  (рис. 2 б, 2 г);  $200^\circ\text{C}$ ,  $710 \text{ кВ}/\text{м}$  (рис. 2 д, 2 е);  $200^\circ\text{C}$ ,  $800 \text{ кВ}/\text{м}$  (рис. 2 ж, 2 з). Кривые 1, 2, 3 на рисунках относятся к значениям процентного содержания мартенсита, бейнита, феррито-перлита; кривые 4, 5 – к напряжениям  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ; кривая 6 – к интенсивности напряжений  $\sigma_{\text{инт}}$ .

В табл. 1 приведены данные об изменении значения полуширины зоны термического влияния при различных значениях параметра мощности источника тепла  $Q_1^*$  и температуры предварительного однородного подогрева  $T$ . Значения параметра мощности источника тепла  $Q_1^*$ , при которых обеспечивается одинаковая максимальная температура в зоне термического влияния при различных значениях температуры  $T$  представлено в табл. 2.

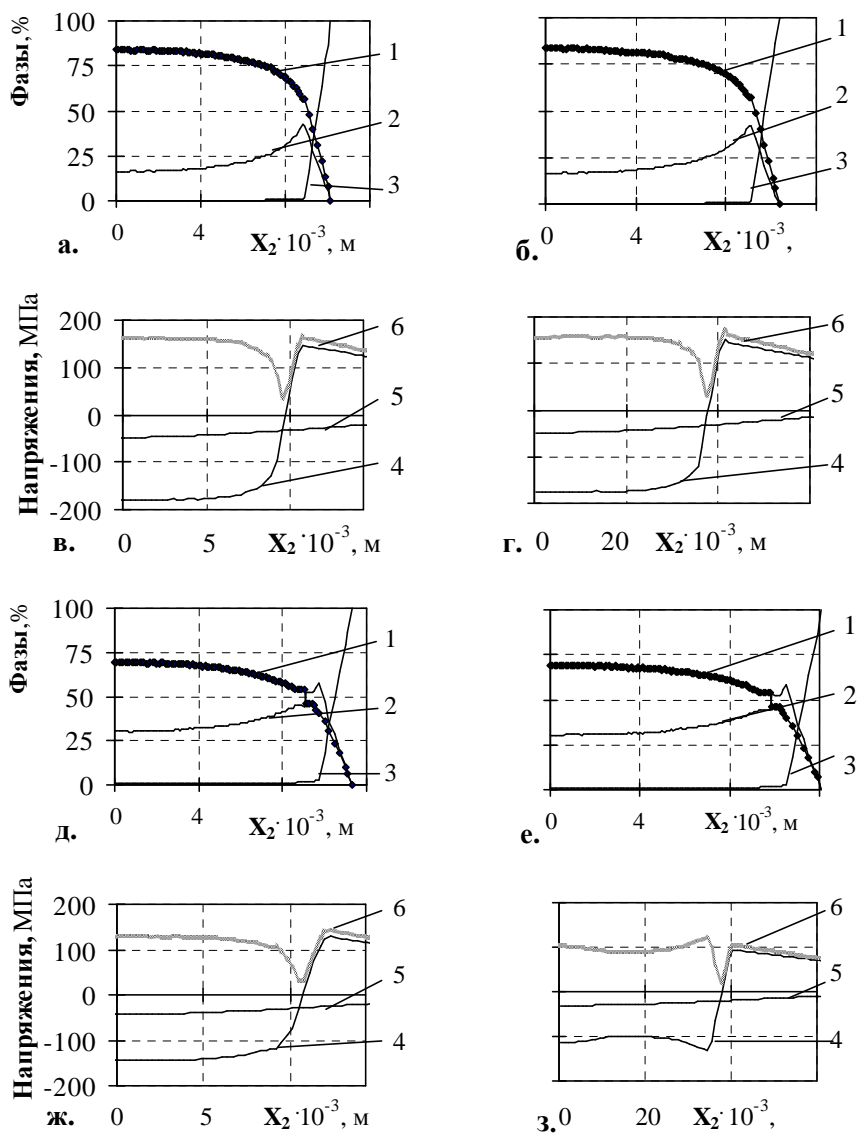


Рис. 2

На основе анализа приведенных результатов исследований фазового состава при начальном общем однородном подогреве до постоянной температуры  $T$  (от  $0^\circ\text{C}$  до  $200^\circ\text{C}$ ) установлено: при повышении температуры зоны термического влияния от  $0^\circ\text{C}$  до  $200^\circ\text{C}$  уменьшается максимальное содержание мартенсита в стали на 30 %; максимальная интенсивность остаточных напряжений на 24 %; расширяется на 10 % сама полуширина зоны термического влияния (табл. 1). При этом для поддержания фиксированной температуры зоны термического влияния с увеличением температуры  $T$  уменьшается мощность движущегося источника тепла  $Q_1^*$  (табл. 2).

Таблица 1

	$T = 50^{\circ}\text{C}$	$T = 100^{\circ}\text{C}$	$T = 150^{\circ}\text{C}$	$T = 200^{\circ}\text{C}$
$Q_1^* = 800 \text{ кВт/м}$	$10.4 \cdot 10^{-3}\text{м}$	$10.8 \cdot 10^{-3}\text{м}$	$11.5 \cdot 10^{-3}\text{м}$	$12.1 \cdot 10^{-3}\text{м}$
$Q_1^* = 730\text{-}780 \text{ кВт/м}$	$10.1 \cdot 10^{-3}\text{м}$	$10.5 \cdot 10^{-3}\text{м}$	$10.9 \cdot 10^{-3}\text{м}$	$11.3 \cdot 10^{-3}\text{м}$

Таблица 2

$T = 50^{\circ}\text{C}$	$T = 100^{\circ}\text{C}$	$T = 150^{\circ}\text{C}$	$T = 200^{\circ}\text{C}$
780	760	730	710
кВт/м	кВт/м	кВт/м	кВт/м

Из анализа приведенных результатов следует, что при предварительном общем однородном подогреве до постоянной температуры  $T$  замедляется процесс охлаждения материала и таким образом увеличивается содержание равновесных фаз в охлажденной тонкой малоуглеродистой низколегированной пластине и уменьшается значение, а также неравномерность распределения закаливающих составляющих в структуре. Это в свою очередь, приводит к уменьшению интенсивности остаточных напряжений (улучшению механических характеристик изделия при его эксплуатации, в частности пластических свойств).

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено залишкові фазовий склад і напружений стан тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластин, які зумовлені впливом рухомого нормально розподіленого джерела тепла при попередньому однорідному підігріві.

**Ключові слова:** маловуглецеві низьколеговані пластини, фазовий склад, залишковий напружений стан, рухоме джерело тепла, загальний однорідний підігрів.

**SUMMARY.** Phase composition and residual stress state of thin low-carbon low-alloyed steel plates subjected to influence of the moving normally distributed heat source in a homogeneous pre-warming is developed.

**Key words:** low-carbon low-alloy the plate, phase composition, residual the stress state, the moving heat source, general homogeneous heating.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. До питання про розрахунок фазового складу і відповідних йому залишкових напружень при неоднорідному нагріві тонких сталевих пластин / О. Гачкевич, В. Асташкін, Б. Дробенко, Т. Козакевич // *Машинознавство.*– 2009.– № 12 (150).– С. 3–8.
2. Жукевич-Стоша А. В. Процесс закалки и метод численного определения возникающих напряжений // *Журн. тех. физики.*– 1940.– Т. 10, Вып. 6.– С. 478–490.
3. Зайффарт П., Касаткин О. Г. Расчетные модели для оценки механических свойств металла ЗТВ при сварке низколегированных сталей // *Микроструктура и свойства.*– 2002.– № 2.– С. 103–106.
4. К вопросу о расчете влияния легирующих элементов на фазовое и напряженное состояние стальной пластины при нагреве подвижным источником / О. Р. Гачкевич, В. И. Асташкин, Б. Д. Дробенко, Т. В. Козакевич // *Теорет. и прикладная механика.*– 2009.– Вып. 46.– С. 19–28.
5. Касаткин О. Г., Зайффарт П. Интерполяционные модели для оценки фазового состава зоны термического влияния при дуговой сварке низколегированных сталей // *Автоматическая сварка.*– 1984.– № 1.– С. 7–11.

6. *Оптимізація* залишкового напруженого стану сталевих пластин при дії рухомих джерел тепла за врахування структурних перетворень / В. І. Асташкін, О. Р. Гачкевич, Т. В. Козакевич, А. Равська-Скотнічни // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки, – Вип. 3, – 2013, – С. 69-72.
7. *Пекарска В.* Численное моделирование структуры металла в ЗТВ при сварке стали повышенной прочности // Автоматическая сварка. – 2008. – № 4. – С. 9–14.
8. *Рыкалин Н. Н.* Расчеты тепловых процессов при сварке. – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.
9. *Шаблій О. М., Цимбалюк Л. І.* Розподіл залишкових напружень у пластині з прямо-лінійним швом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 4. – С. 91–94.
10. *Büchholtz H., Bühler H.* Zusammenhang zwischen Wärmespannungen und Festigkeits-eigenschaften von Stahl // Archiv für das Eisenhüttenwesen. – 1933. – № 8. – S. 335–340.
11. *Calculation of the phase content of a steel plate at local heating* / O. Hachkevych, V. Astashkin, T. Kozakevych et al. // *Metallic Materials (Kovové Materiály)*. – 2007. – Vol. 45, № 6. – P. 319–325.
12. *Inoue T.* Metall-Thermo-Mechanical Coupling/ application to the Analysis of quenching, Welding and Continuous Casting Processes // *Hüttenmänn Monatsh.* – 1987. – Vol. 132, № 3. – P. 63–71.
13. *Seyffarth P., Kassatkin O.G.* Rechnerische Bestimmung der prozentualen Gefügezu-sammensetzung in der Wärmeeinflusszone niedriglegierter Stähle // *ZIS-Mitteilungen.* – 1984. – Vol. 26, № 12. – P. 1284–1292.
14. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The Finite Element Method for Solid and Structural Me-chanics. – London: Butterworth Heinemann, 2005. – 631 p.

*Ин-т прикладных проблем механики и математики  
НАН Украины, г. Львов  
Политехника Опольская (Польша)*

*Поступила 30.10.2013*