
СОДЕРЖАНИЕ

<i>Хома И. Ю., Дашко О. Г., Коваленко И. Г.</i> Напряженное состояние трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью при заданной расщепляющей силе	3
<i>Кирилюк В. С., Левчук О. И.</i> , О напряженном состоянии в упругом ортотропном материале вблизи произвольно ориентированной эллиптической трещины при линейно изменяющемся давлении на ее поверхности	11
<i>Каминский А. А., Селиванов М. Ф.</i> Определение параметров предельного состояния в рамках модели трещины с зоной сцепления для смешанного режима разрушения.	18
<i>Семенюк Н. П., Жукова Н. Б., Иванова Н. И.</i> Об устойчивости двухслойных углеродных нанотрубок	26
<i>Сенченков И. К., Червинко О. П., Доля Е. В.</i> Моделирование остаточного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния цилиндра при наращивании по боковой поверхности слоями расплавленного металла	34
<i>Голуб В. П., Кобзарь Ю. М., Фернати П. В.</i> К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии	45
<i>Калоеров С. А., Самодуров А. А.</i> Решение задачи электромагнитовязкоупругости для многосвязных кусочно-однородных пластин	57
<i>Курна Л. В., Шматко Т. В.</i> Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана	77
<i>Елагин А. В., Моисеенко И. А., Сторожев В. И.</i> Исследование геометрически нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в свободном трансверсально-изотропном цилиндре	86
<i>Мейш В. Ф., Мейш Ю. А., Кепенач Н. П.</i> Решение задач динамического поведения цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках.	98

<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.</i> Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоактуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний цилиндрической панели	106
<i>Глухов И. А., Сторожев В. И.</i> Симметричные упругие волны в трансверсально-изотропном слое между одностипными трансверсально-изотропными полупространствами	114
<i>Вуколов Д. С.</i> Дифракция сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости со свободной либо закрепленной границей в упругом слое.	123

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,
О. Г. ДАШКО, канд. физ.-мат. наук,
И. Г. КОВАЛЕНКО

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ РАСЩЕПЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ

Методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра найдено решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой задано значение расщепляющей силы. Под расщепляющей силой подразумевается уравновешенная пара сил, стремящаяся расщепить (сжать) пластину вдоль срединной плоскости. Проведен численный анализ распределения напряжений в окрестности полости.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная пластина, круговая цилиндрическая полость, расщепляющая сила, напряженное состояние.

Проблеме концентрации напряжений около отверстий в нетонких упругих пластинах уделяется достаточно внимания [2–5]. Используются разные подходы и методы решения соответствующих краевых задач [6, 11, 12]. Одним из эффективных является метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины [1, 7, 10]. В случае первого приближения в работе [1] для согласования порядка разрешающей системы уравнений с граничными условиями традиционные краевые условия классической теории дополняются граничным значением расщепляющей силы (уравновешенной пары сил, стремящейся расщепить оболочку (пластину) вдоль срединной поверхности). Этот термин употребляется и в случае, когда пара сил вызывает поперечное сжатие оболочки. Решение краевых задач по определению напряженного состояния оболочек и пластин с учетом расщепляющей силы содержится в [8, 9].

В данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии неограниченной трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью, на граничной поверхности которой задано значение сжимающей пары сил. Приводится численный анализ распределения напряжений в окрестности полости.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим, отнесенную к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины $2h$ ($h = \text{const}$), срединная плоскость S которой совпадает с плоскостью изотропии. Пластина ослаблена круговой цилиндрической полостью радиуса R , на поверхности которой $\partial\Omega = R \times [-h, h]$ задано значение уравновешенной сжимающей пары сил. Для решения задачи воспользуемся методом разложения по толщине.

Представим компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in S$, $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, определяемые равенствами

$$\{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{-h}^h \{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} P_k(\xi) dx_3, \quad (2)$$

N – натуральное число, которое будем считать нечетным, т.е. $N = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots < \infty$).

Относительно составляющих данного разложения получаем при симметричном деформировании по отношению к S пластины систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \partial_z \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i \sigma_{12}^{(2k)} \right) + \partial_{\bar{z}} \left(\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} \right) - \\ - (4k + 1) h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_+^{(2s+1)} = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \partial_z \sigma_+^{(2k+1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(2k+1)} - (4k + 3) h^{-1} \sum_{s=0}^k \sigma_{33}^{(2s)} = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \end{aligned} \quad (3)$$

и соотношения упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2 \left[(c_{12} + c_{66}) e^{(2k)} + (4k + 1) c_{13} h^{-1} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)} \right], \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i \sigma_{12}^{(2k)} &= 4c_{66} \partial_{\bar{z}} u_+^{(2k)}, \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= c_{13} e^{(2k)} + (4k + 1) c_{33} h^{-1} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)}, \\ \sigma_+^{(2k+1)} &= c_{44} \left[2 \partial_{\bar{z}} u_3^{(2k+1)} + (4k + 3) h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_+^{(2s)} \right] \quad (k = \overline{0, n}), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} 2 \partial_{\bar{z}} &= \partial / \partial x_1 + i \partial / \partial x_2, \quad \sigma_+^{(2k+1)} = \sigma_{13}^{(2k+1)} + i \sigma_{23}^{(2k+1)}, \\ u_+^{(2k)} &= u_1^{(2k)} + i u_2^{(2k)}, \quad e^{(2k)} = \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)}; \end{aligned}$$

$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – упругие постоянные.

Подставляя выражения (4) в равенства (3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
& c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\bar{z}}e^{(2k)} + (4k + 1)h^{-1} \left[-2c_{44} \sum_{s=0}^{k-1} \partial_{\bar{z}}u_3^{(2s+1)} + \right. \\
& \left. + 2c_{13} \sum_{s=k}^n \partial_{\bar{z}}u_3^{(2s+1)} - c_{44}h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)}u_+^{(2s)} \right] = 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\
& c_{44}\Delta u_3^{(2k+1)} + (4k + 3)h^{-1} \left[-c_{13} \sum_{s=0}^k e^{(2s)} + c_{44} \sum_{s=k+1}^n e^{(2s)} - \right. \\
& \left. - c_{33}h^{-1} \sum_{s=0}^n \alpha_{2s+1}^{(k)}u_3^{(2s+1)} \right] = 0. \tag{5}
\end{aligned}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; $\alpha_{2s+1}^{(k)}$, $\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} (s+1)(2s+1), & 1 \leq s \leq k, \\ (k+1)(2k+1), & k \leq s \leq n, \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Общее аналитическое решение системы (5) определяется формулами [7]

$$\begin{aligned}
c_{66}u_+^{(0)} &= \chi^* \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m, \\
c_{66}u_+^{(2)} &= \chi_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s, \\
c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}), \\
c_{66}u_3^{(1)} &= -\chi_1^* h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(1)} V_m, \\
c_{66}u_3^{(2k+1)} &= \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(2k+1)} V_m \quad (k = \overline{1, n}), \tag{6}
\end{aligned}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – произвольные голоморфные функции, V_m и W_s – метатармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0, \tag{7}$$

в которых параметрами k_m и λ_s служат корни соответствующих характеристических уравнений; $a_m^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_m^{(2k+1)}$ – константы.

Согласно (6) соотношения (4) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(0)} V_m, \\
\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i \sigma_{12}^{(0)} &= -4 \left[z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] + 4h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)} + 2i\sigma_{12}^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi'''(z)} + 4h \left(\sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right), \\
\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(2k)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_{3m}^{(2k)} V_m \quad (k = \overline{0, n}), \\
\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4h \left(\sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right) \quad (k = \overline{2, n}), \\
\sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} &= 2 \left(\sum_{m=1}^{2n+1} p_m^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right) \quad (k = \overline{0, n}), \quad (8)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_m^{(2k)} &= \frac{c_{12} + c_{66}}{2c_{66}} a_m^{(2k)} k_m + \frac{(4k+1)c_{13}}{c_{66}} \sum_{s=k}^n c_m^{(2s+1)}, \\
d_{3m}^{(2k)} &= \frac{c_{13}}{2c_{66}} a_m^{(2k)} k_m + \frac{(4k+1)c_{33}}{c_{66}} \sum_{s=k}^n c_m^{(2s+1)}, \\
p_m^{(2k+1)} &= \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[2c_m^{(2k+1)} + (4k+3) \sum_{s=k+1}^n a_m^{(2s)} \right], \\
q_s^{(2k+1)} &= (4k+1) \frac{c_{44}}{2c_{66}} \sum_{l=k+1}^n b_s^{(2l)}.
\end{aligned}$$

Из соотношений (8) получаем выражения для граничных условий при решении внутренней и внешней краевых задач. Пусть, в частности, на поверхности $\partial\Omega_l = \partial S_l \times [-h, h]$ с внешней нормалью \vec{l} задан вектор напряжений $\vec{p}_l = \sigma_{ll} \vec{l} + \sigma_{ls} \vec{s} + \sigma_{ln} \vec{n}$. Тогда, учитывая разложения (1), на кривой ∂S_l плоскости S имеют место условия

$$\begin{aligned}
\sigma_{ll}^{(2k)} + i\sigma_{ls}^{(2k)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} \right) - \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right) \left(\frac{d\bar{z}}{ds} \right)^2 \right], \\
\sigma_{ln}^{(2k+1)} &= -\operatorname{Im} \left(\sigma_+^{(2k+1)} \frac{d\bar{z}}{ds} \right) \quad (k = \overline{0, n}). \quad (9)
\end{aligned}$$

Здесь ds – элемент длины дуги кривой ∂S_l .

Для приближения $N=1$ ($n=0$) коэффициенты разложения в ряд имеют определенный физический смысл. Введем при этом такие обозначения

$$2h \left(\sigma_{ll}^{(0)}, \sigma_{ls}^{(0)}, \sigma_{ln}^{(0)} \right) = (T_{ll}, T_{ls}, Q_l), \quad \frac{2h^2}{3} \left(\sigma_{ll}^{(1)}, \sigma_{ls}^{(1)}, \sigma_{ln}^{(1)} \right) = (M_{ll}, M_{ls}, S_l). \quad (10)$$

где T_{ll} и T_{ls} – нормальные и касательные усилия, Q_l – перерезывающая

сила, M_{ll} и M_{ls} – крутящий и изгибающий моменты, величина S_l имеет смысл расщепляющей силы [1]. Согласно (1) на граничной поверхности имеет место равенство

$$\sigma_{ln} = \frac{1}{2h} \left(Q_l + \frac{3}{h} P_1(\xi) S_l \right). \quad (11)$$

Очевидно, второе слагаемое этой суммы представляет собой кососимметричную нагрузку относительно плоскости S . При $S_l > 0$ эта пара сил стремится расщепить пластину вдоль срединной плоскости. Отмечается [1], что этот термин употребляется и в случае, когда уравновешенная пара сил вызывает поперечное сжатие пластины.

Пусть неограниченная пластина ослаблена круговой цилиндрической полостью радиуса R , на граничной поверхности $R \times [-h, h]$ которой заданы напряжения

$$\sigma_{rr}(r, \theta, x_3)|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r3}(r, \theta, x_3)|_{r=R} = -q\xi(1 - \xi^2), \quad (12)$$

где $q = \text{const}$, $\xi = h^{-1}x_3$. Отсюда на контуре кругового отверстия в плоскости S получаем условия

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{2, n}), \\ \sigma_{r3}^{(1)}(r, \theta)|_{r=R} = -0,4q, \quad \sigma_{r3}^{(3)}(r, \theta)|_{r=R} = 0,4q. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем в S полярную систему ρ, ϑ и примем во внимание равенство $d\bar{z}/ds = -ie^{-i\vartheta}$. Тогда из (9) с учетом формул (8) получаем выражение для граничных условий (13). Для решения задачи примем голоморфные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = b_2 z^{-2}, \quad (14)$$

а метагармонические функции V_m представим таким образом

$$\begin{aligned} V_m = B_0^{(m)} K_0(\rho x_m) \quad m \in [1, 2l+1], \quad V_{2m} = C_0^{(2m)} H_0^{(1)}(\rho x_{2m}), \\ V_{2m+1} = D_0^{(2m)} H_0^{(2)}(\rho x_{2m+1}) \quad m \in [l+1, n], \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\rho = r/R, \quad x_m = Rh^{-1}\sqrt{k_m}, \quad x_{2m} = Rh^{-1}\sqrt{-k_{2m}}, \quad x_{2m+1} = \bar{x}_{2m},$$

$K_0(\rho x_m)$ – модифицированные функции Бесселя, $H_0^{(1)}(\rho x_{2m})$ и $H_0^{(2)}(\rho x_{2m+1})$ – цилиндрические функции Ханкеля первого и второго рода, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(2m)}$, $D_0^{(2m)}$ – постоянные.

Здесь учтено, что характеристическое уравнение потенциального решения имеет $2l+1$ вещественных положительных и $2(n-l)$

комплексно-сопряженных корней k_m (функции W_s вихревого решения в осесимметричной задаче отсутствуют). Подставляя значения данных функций в равенства (8), (9) и учитывая граничные условия (13), получим алгебраическую систему уравнений для определения констант.

Результаты численных исследований. Проведены исследования напряженного состояния нетонкой пластины с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой задано значение уравновешенной пары касательных напряжений. Численные расчеты проведены для трансверсально-изотропной пластины с коэффициентами Пуассона $\nu=0,25$, $\nu'=0,35$ и отношениями модулей упругости $E/G'=2,5$, $E/E'=1,25$.

На рис. 1 и 2 приведены кривые изменения окружных σ_{99} и нормальных поперечных напряжений σ_{33} на контуре отверстия ($\rho=1$)

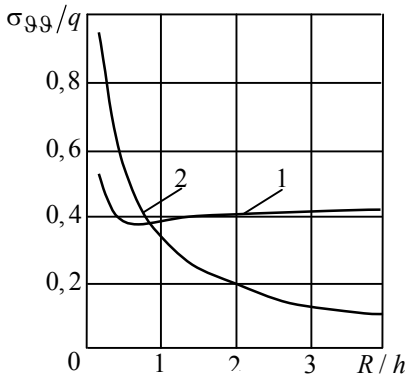


Рис. 1

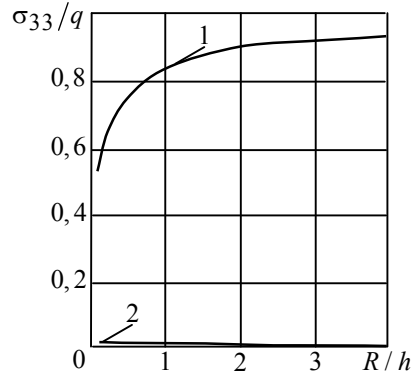


Рис. 2

соответственно на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины в зависимости от изменения относительной толщины пластины R/h . Как вид-но, с увеличением параметра R/h

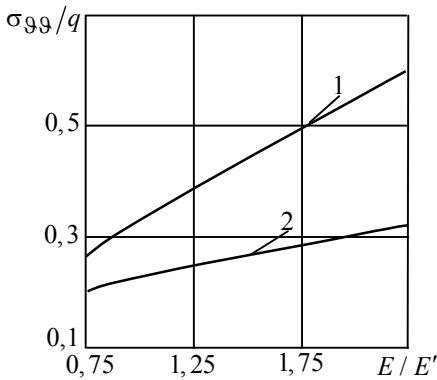


Рис. 3

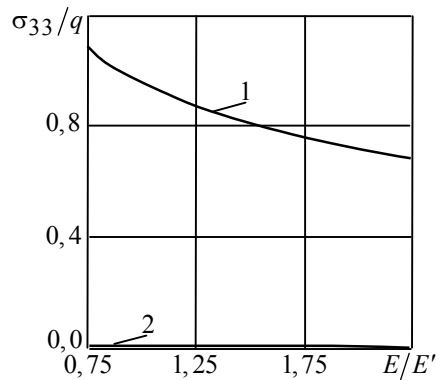


Рис. 4

окружные напряжения σ_{99} на граничной плоскости $\xi=1$ монотонно убывают, а на срединной остаются без изменений при значениях $R/h > 2$.

Поперечные напряжения σ_{33} на граничной плоскости принимают нулевые значения, а на срединной – монотонно возрастают.

При тех же данных упругих констант кривые, приведенные на

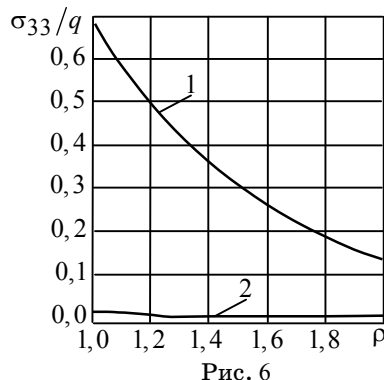
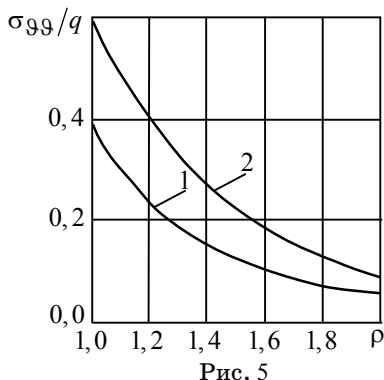
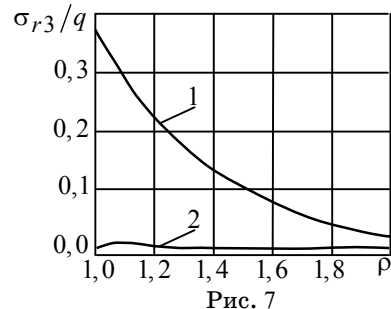


рис. 3 и 4, характеризуют изменения напряжений σ_{99} и σ_{33} в зависимости от отношения модулей упругости E/E' . С увеличением параметра E/E' , окружные напряжения σ_{99} возрастают как на срединной, так и на граничной плоскостях пластины, поперечные напряжения σ_{33} уменьшаются.

На рис. 5 и 6 представлены кривые затухания напряжений σ_{99} и σ_{33} на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины при удалении от поверхности плоскости. Очевидно, с ростом координаты ρ они резко уменьшаются, приближаясь к нулю.

Характер затухания касательных напряжений σ_{r3} с удалением от поверхности плоскости виден на рис. 7. Наибольшего значения они достигают на поверхности полости ($\rho=1$) в точке $\xi=0,5$.



РЕЗЮМЕ. Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра знайдено розв'язок задачі про напружений стан трансверсально-ізотропної пластини з круговою циліндричною порожниною, на поверхні якої задано значення розщеплюючої сили. Під розщеплюючою силою ми розуміємо врівноважену пару сил, що намагається розщепити (стиснути) пластину вздовж срединної площини. Проведено числовий аналіз розподілу напружень в околі порожнини.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна пластинка, кругова циліндрична порожнина, розщеплююча сила, напружений стан.

SUMMARY. A stress-strain problem for a transversely isotropic plate with a circular cylindrical hole, on the boundary of which the shredding force is given, is solved using the method of expanding of unknown functions into Fourier series through Legendre polynomials. The shredding force we understand as a balanced couple of forces attempting to shred

(compress) the plate in the median plane. Numerical analysis of the stress distribution in the vicinity of the hole is carried out.

Key words: transversely isotropic plate, circular cylindrical hole, shredding force, stress state.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – № 30. – С. 3–103.
2. *Ворович И.И.* Некоторые проблемы концентрации напряжений // В кн. Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1968. – Вып. 2. – С. 45–53.
3. *Космодамианский А.С., Милишевский И.Х., Шалдырван В.А.* О концентрации напряжений в транслопной пластине с цилиндрической полостью // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41, № 5. – С. 957–960.
4. *Меунаргия Т.В.* Исследование концентрации напряжений около отверстий в пластинах постоянной толщины // Исследование некоторых уравнений математической физики. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1974. – С. 107–120.
5. *Роменская Г.И., Шленов М.А.* Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально-изотропной плиты. // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси, 1975. – С. 260–269.
6. *Фильштинский Л.А., Кушнир Д.В.* Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 90–99.
7. *Khoma I.Yu.* Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates // J. Math. Sci. – 2000. – V. 1001, № 6. – P. 3577–3584.
8. *Хома И.Ю.* Влияние расщепляющей силы на напряженное состояние пластины, ослабленной отверстием // Докл. АН УССР. Сер. А. 1969, № 7. – С. 643–646.
9. *Хома И.Ю., Кондратенко О.А.* О влиянии расщепляющей силы на напряженное состояние пологой сферической оболочки с круговым отверстием // Актуальные проблемы механики деформированного твердого тела. Матер. IV Междунар. науч. конф. – Донецк-Мелекино, 12-14 июня 2006. – Донецк. – 2006. – С. 145–147.
10. *Хома И.Ю., Стрыгина О.А.* О влиянии упругих свойств на напряженное состояние нетонкой трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 85–97.
11. *Чехов В.Н., Королев К.А.* Исследование поля смещений в трехмерной задаче Кирша // Современные проблемы концентрации напряжений. Тр. междунар. науч. конф., Донецк, 21–25 июня 1998. – Донецк, 1998. – С. 253–257.
12. *Шалдырван В.А., Сумцов А.А., Сорока В.А.* Исследование концентрации напряжений в полых коротких цилиндрах из трансверсально-изотропных материалов // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 43–48.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 11.04.2014

УДК 539.3

В. С. КИРИЛЮК, д-р физ.-мат. наук,
О. И. ЛЕВЧУК, канд. физ.-мат. наук

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В УПРУГОМ ОРТОТРОПНОМ МАТЕРИАЛЕ ВБЛИЗИ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ДАВЛЕНИИ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Решена задача о распределении напряжений в ортотропном упругом пространстве вблизи произвольно ориентированной внутренней эллиптической трещины при линейно изменяющемся давлении на ее поверхности. Использовано тройное преобразование Фурье, Фурье-образ функции Грина, теорема Коши о вычетах и квадратурные формулы Гаусса для численного интегрирования. Найдено аналитико-численное решение задачи, проведен анализ полученных результатов. Установлены закономерности распределения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) вдоль фронта эллиптической трещины в упругом ортотропном материале. Выявлено влияние ориентации трещины в материале на распределение КИН.

Ключевые слова: ортотропная среда, эллиптическая трещина, линейно изменяющееся давление, коэффициенты интенсивности напряжений, влияние ориентации трещины

Решения трехмерных задач механики разрушения для упругих изотропных тел с круговыми или эллиптическими трещинами проведены в ряде работ [6, 9–11]. Значительно меньше работ по изучению напряженно-го состояния в трансверсально-изотропных телах, содержащих плоские трещины дискообразной или эллиптической формы [7, 8]. При этом принципиальным моментом в указанных работах было ограничение на ориентацию трещин, поскольку рассматривался только случай расположения плоских трещин в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала. Нахождение замкнутых решений задач при указанной ориентации плоской трещины основано на представлении общих решений трехмерных уравнений равновесия для изотропного и трансверсально-изотропного упругих тел на основе гармонических функций. Отметим также важные результаты [1] для тел с начальными напряжениями, содержащими трещины круговой и эллиптической формы, полученными с помощью представлений решений системы уравнений статики через гармонические функции. В то же время, для упругого ортотропного тела подобные представления не известны. Также для изотропного и трансверсально-изотропного материалов функция Грина для бесконечной среды (фундаментальное решение) записывается в явном виде через элементарные функции (в отличие от случая упругого ортотропного материала). Упомянутые сложности математического характера не позволяют при решении трехмерных задач теории упругости для ортотропных материалов с плоскими трещинами использовать методы и подходы, успешно применяемые при рассмотрении пространственных задач механики разрушения

для изотропных и трансверсально-изотропных тел. Исследования напряжений в упругом ортотропном теле вблизи круговых или эллиптических трещин, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала, при растяжении и сдвиге проведены в [2, 3], а при линейно изменяющемся давлении – в [4] на основе похода [12]. При рассмотрении задач использовано тройное преобразование Фурье, Фурье-образ функции Грина для ортотропной среды, теорема о вычетах и процедура численного интегрирования на основе квадратурных формул Гаусса. Однако, задача о произвольно расположенной круговой или эллиптической трещине в упругом ортотропном материале при линейно-переменной нагрузке ранее не рассматривалась.

В настоящей работе дано аналитико-численное решение трехмерной задачи теории упругости для ортотропного пространства с произвольно ориентированной эллиптической трещиной при линейно изменяющемся давлении на ее поверхности.

Постановка задачи. Пусть упругая ортотропная среда (с осями ортотропии $0x'$, $0y'$, $0z'$ в системе координат (x', y', z')) содержит внутреннюю эллиптическую трещину, ориентация которой может быть произвольной относительно осей ортотропии. При этом поверхность трещины находится под давлением, что изменяется линейным образом. Ориентацию трещины свяжем с системой координат (x, y, z) . Будем считать, что от системы координат (x', y', z') можно перейти к системе (x, y, z) с помощью вращений вокруг осей $0x'$, $0y'$, $0z'$ на углы поворота α , β , γ соответственно. Упругие свойства ортотропного материала в системе (x', y', z') описываются девятью независимыми постоянными: c_{11} , c_{22} , c_{33} , c_{12} , c_{13} , c_{23} , c_{44} , c_{55} , c_{66} . Постоянные C_{ijkl} связаны со значениями c_{mn} зависимостями

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; & C_{2222} &= c_{22}; & C_{3333} &= c_{33}; & C_{1122} &= C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; & C_{2233} &= C_{3322} = c_{23}; \\ C_{2323} &= C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; \\ C_{1212} &= C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}. \end{aligned} \quad (1)$$

Остальные компоненты тензора C_{ijkl} равны нулю. Ориентацию эллиптической трещины можно учесть, переходя к решению задачи об эллиптической трещине (при линейно изменяющемся давлении) в анизотропном упругом материале (в новой системе координат x, y, z), свойства которого находим с помощью преобразования тензора четвертого порядка

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}, \quad (2)$$

где T_{ij} – матрица преобразования

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Приведенная матрица T_{ij} является результатом последовательного перемножения трех матриц, отражающих правые вращения вокруг каждой из осей координат.

Граничные условия на поверхности эллиптической трещины при линейно изменяющемся давлении имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{23}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{33}^{\pm} = - \left(P_0 + p \frac{x_1}{a_1} + q \frac{x_2}{a_2} \right) \\ ((x_1, x_2) \in S), \quad \vec{u}(\vec{x}) \rightarrow 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь S – двусторонняя поверхность трещины.

Метод решения. Воспользуемся интегральным выражением функции Грина для анизотропного упругого пространства [10]

$$G_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (5)$$

где $N_{ij}(\vec{\xi})$ – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы вида

$$\{K_{ki}(\vec{\xi})\} = \{C_{kijl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\vec{\xi})\}, \quad (6)$$

а $D(\vec{\xi})$ – ее определитель. Для эллиптической трещины поле перемещений представим с помощью скачков перемещений [12] через поверхность трещины

$$u_i(\vec{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S C_{jlm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} b_m(\vec{x}') \xi_l N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\vec{\xi} dx'_1 dx'_2, \quad (7)$$

где $\vec{b}(\vec{x})$ – неизвестный вектор вида

$$\vec{b}(\vec{x}) = \left[\vec{b}^{(1)} + \vec{b}^{(2)} \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{ix_2}{a_2} \right) \right] \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^{1/2}.$$

Воспользовавшись теоремой Коши о вычетах, поле перемещений, вызванное неизвестными скачками перемещений через поверхность трещины, запишем таким образом:

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{C_{jlm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l^M N_{ij}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2, \quad (8)$$

где суммирование проводится для ξ_3^M – корней уравнения $D(\vec{\xi}) = 0$ с отрицательной мнимой частью, а вектор $\vec{\xi}^M$ имеет вид $\vec{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$. Соответственно получаем поле напряжений

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q^M \xi_l^M N_{kp}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} \times \\ \times b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2.$$

Рассматривая компоненты напряжений на поверхности трещины и проводя дальнейшие упрощения, имеем

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left(\frac{\eta_1}{a_1}, \frac{\eta_2}{a_2}, \xi_3^M (\eta_1 / a_1, \eta_2 / a_2) \right) \times \\ \times \left[b_m^{(1)} + 3b_m^{(2)} (\eta_1 + i\eta_2) \left(\frac{\eta_1 x_1}{a_1} + \frac{\eta_2 x_2}{a_2} \right) \right] d\phi, \quad (9)$$

где $\eta_1 = \cos \phi$; $\eta_2 = \sin \phi$;

$$F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q \xi_l N_{kp}(\vec{\xi})}{\partial D(\vec{\xi}) / \partial \xi_3}. \quad (10)$$

Используя в дальнейшем для нахождения записанных интегралов метод квадратур Гаусса, и, удовлетворяя граничным условиям на поверхности трещины, находим неизвестные значения скачков перемещений на поверхности эллиптической трещины. После дополнительного анализа асимптотических выражений для напряжений в плоскости трещины, и, воспользовавшись определением коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), получаем

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi} (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{-1/4} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left(\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \xi_3^M (x_1 / a_1^2, x_2 / a_2^2) \right) \times \\ \times \left(b_m^{(1)} + b_m^{(2)} \left(\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} \right) \right); \\ K_I = k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1, \quad (11)$$

где компоненты нормали в плоскости (x, y) к границе эллиптической трещины

$$n_1 = (x_1 / a_1^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}; \quad n_2 = (x_2 / a_2^2) / (x_1^2 / a_1^4 + x_2^2 / a_2^4)^{1/2}.$$

Применяя в дальнейшем для вычисления одномерных интегралов метод квадратур Гаусса, и удовлетворяя граничным условиям на поверхности трещины, находим неизвестные значения скачков перемещений.

Приведем результаты апробации используемого подхода на тестовой задаче для внутренней эллиптической трещины в трансверсально-изотропном упругом материале (при линейно изменяющемся давлении на поверхности трещины (4)). При расположении плоской трещины в плоскости изотропии материала выражение КИН K_I согласно [9, 11] принимает вид

$$K_I = \left(\frac{P_0 \sqrt{\pi}}{E(k)} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} + \frac{p \sqrt{\pi} \cos \phi}{(a_2/a_1)^{3/2} \left[(1/(k')^2 - 1/k^2) E(k) + K(k)/k^2 \right]} \right) + \left(\frac{q \sqrt{\pi} \sin \phi}{\left[(1/k^2 + 1) E(k) - K(k)(k'/k)^2 \right]} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right) \times (a_1^2 \sin^2 \phi + a_2^2 \cos^2 \phi)^{1/4}, \quad (12)$$

в котором $k = (1 - a_2^2/a_1^2)^{1/2}$, $k' = a_2/a_1$, а $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. При этом $K_{II} = K_{III} = 0$. Ниже приведены результаты проведенных вычислений для тестовой задачи на основе двух подходов (аналитико-численного решения и точного решения согласно формулам (12)). При вычислениях контурных интегралов использовались квадратурные формулы Гаусса по 24 узлам. Результаты расчетов КИН для линейно изменяющегося давления (от значения $P_0/2$ до значения $3P_0/2$) на поверхности трещины вдоль оси Ox ($p = P_0/2$; $q = 0$) и вдоль оси Oy ($p = 0$; $q = P_0/2$) приведены в табл. 1 и 2. В них дано сравнение полученных результатов согласно выражениям (10), (11), а

Таблица 1

a_2	ϕ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,5	1,021929 (1,022116)	1,073345 (1,073422)	1,154801 (1,154773)	1,184093 (1,184045)	1,140457 (1,140391)	1,034948 (1,034894)
0,3	0,697751 (0,697998)	0,813961 (0,814117)	0,956846 (0,956998)	1,013623 (1,013708)	0,982927 (0,982995)	0,885331 (0,885392)
0,1	0,258697 (0,259419)	0,457837 (0,458988)	0,590945 (0,592376)	0,637681 (0,639095)	0,617953 (0,619139)	0,550844 (0,551676)

также на основе точных формул (12) (записаны в круглых скобках в таблицах). При расчетах значение большей полуоси эллиптической трещины a_1 полагалось равными единице. В табл. 1 проведено сравнение значений K_I при изменении давления вдоль оси Ox ($p = P_0/2$; $q = 0$), а в табл. 2 – значений K_I при изменении давления вдоль оси Oy ($p = 0$; $q = P_0/2$).

Таблица 2

a_2	ϕ					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,5	0,731648 (0,731780)	0,848466 (0,848561)	1,021828 (1,021851)	1,183404 (1,183375)	1,293563 (1,293504)	1,332316 (1,332316)
0,3	0,484805 (0,484949)	0,621765 (0,621854)	0,817438 (0,817503)	0,980651 (0,980701)	1,086504 (1,086547)	1,123122 (1,123161)
0,1	0,174150 (0,174455)	0,337775 (0,338251)	0,487596 (0,488230)	0,597973 (0,598709)	0,667033 (0,667828)	0,690643 (0,691457)

Следовательно, двумя подходами на тестовом примере (для трещины в трансверсально-изотропном материале) получено совпадение результатов

вычислений и, следовательно, подтверждена эффективность использования аналитико-численного решения задачи.

Анализ результатов численных исследований. Изучим распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта круговой, а также эллиптической трещин. При расчетах в качестве ортотропного материала используем ортогонально-армированный 2:1 стеклопластик, упругие свойства которого приведены в монографии [5] (таблица 7, стр. 64). На рис.1 приведено изменение коэффициентов интенсивности напряжений K_I вдоль границы круговой трещины ($a = b = 1$) при различных ориентациях трещины относительно осей ортотропии (кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям углов поворота α равных $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$). При расчетах полагалось, что при $\alpha = 0$ трещина расположена в плоскости (x', y') , т.е. в одной из плоскостей ортотропии материала. Также считалось, что давление на ее поверхности линейным образом изменяется вдоль

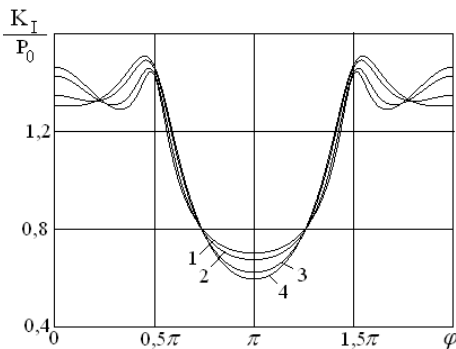


Рис.1

оси Ox , т.е. выбирались значения нагрузок $p = P_0/2, q = 0$. На рис. 2, 3 показано появление ненулевых значений КИН K_{II} и K_{III} для эллиптической трещины ($a = 1; b = 0,5$) нормального отрыва при тех же параметрах нагружения, что и в предыдущем случае для круговой трещины. Линии 1 и 2 на рис. 2, 3 соответствуют углам поворота α равных $\pi/6, \pi/3$. Отметим, что ненулевые значения КИН K_{II} и K_{III} на этих рисунках для плоской трещины нормального отрыва вызваны ориентацией трещины в ортотропном материале ($\alpha = \pi/6, \pi/3$). При углах поворота $\alpha = 0$ и $\pi/2$ плоская трещина располагается в плоскостях ортотропии материала, и КИН K_{II} и K_{III} равны нулю вдоль всей ее границы.

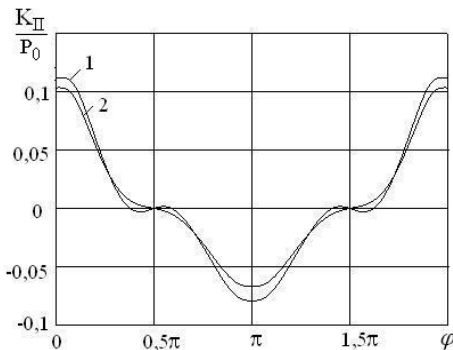


Рис.2

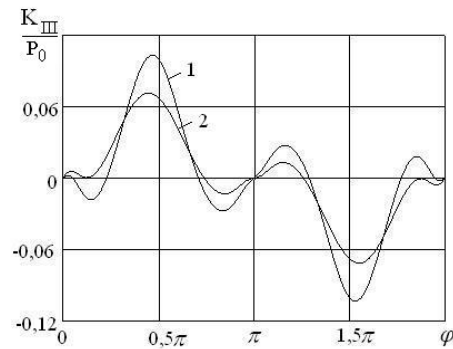


Рис.3

Таким образом, в данной работе получено аналитико-численное решение задачи и исследовано распределение КИН вдоль фронта эллиптической трещины, произвольным образом ориентированной в упругом ортотропном материале (при линейно изменяющемся давлении на поверх-

ности трещины). Как частный случай из полученных результатов следует решение задачи о произвольно ориентированной круговой трещине в ортотропном материале, которая также ранее не рассматривалась.

РЕЗЮМЕ. Розв'язана задача про розподіл напружень в ортотропному пружному просторі поблизу довільно орієнтованої внутрішньої еліптичної тріщини при лінійно-змінному тискові на її поверхні. Використано потрійне перетворення Фур'є, Фур'є - образ функції Гріна, теорема Коші про лишки і квадратурні формули Гаусса для чисельного інтегрування. Знайдено аналітико-чисельний розв'язок задачі і проведено аналіз числових результатів. Встановлено закономірності розподілу коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) вздовж фронту еліптичної тріщини в пружному ортотропному матеріалі. Виявлено вплив орієнтації тріщини на розподіл КІН.

Ключові слова: ортотропне середовище, еліптична тріщина, лінійно-змінний тиск, коефіцієнти інтенсивності напружень, вплив орієнтації тріщини

SUMMARY. The problem on the stress distribution in an orthotropic elastic space near an arbitrary oriented inner elliptical crack under linear varying pressure on its surface was considered. There were used the triple Fourier transforms and Fourier image of Green's function, Cauchy theorem about residues and Gauss squaring formulas for the numerical integration. Analytic-numerical solution of problem was found and the analysis of numerical results was carried out. Regularities of distribution of stress intensity factors (SIF) along crack front in the elastic orthotropic material were established. The influence of crack orientation in material on SIF distribution was shown.

Key words: orthotropic medium, elliptical crack, linear varying pressure, stress intensity factors, influence of crack orientation

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
2. Кирилук В.С. О напряженное состояние упругой ортотропной среды с дискообразной трещиной // Прикладная механика. – 2004. – 40, № 12. – Р. 64–72.
3. Кирилук В.С. О напряженное состояние упругой ортотропной среды с эллиптической трещиной при растяжении и сдвиге // Прикладная механика. – 2005. – 41, № 4. – С. 56–64.
4. Кирилук В.С., Левчук О.И. О напряженное состояние упругой ортотропной среды с эллиптической трещиной при линейно изменяющемся давлении // Прикладная механика. – 2006. – 42, № 7. – С. 78–81.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
7. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (Обзор). // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 10. – С. 3–30.
8. Chiang C.-R. Some crack problems in transversely isotropic solids // Acta Mechanica – 2004. – 170, Vol. 1. – Р. 1–9.
9. Kassir M.K., Sih G. Three-dimensional crack problems. – Leyden: Nordhoff Interen. Publ., 1975. – 425 p. – (Mechanics of fracture; V. 2).
10. Mura T. Micromechanics of defects in solids. – Boston, London: Martinus Nijhoff. – 1987. – 587 p.
11. Shan R.C. and Kobayashi A.S. Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract.Mech. – 1971. – Vol. 3. – P.71-96.
12. Willis L. J. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium // Int.J. Eng. Sci. – 1968. – Vol. 6, № 5. – P. 253– 263.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 25.03.2013

УДК 539.421

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
М. Ф. СЕЛИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ ТРЕЩИНЫ С ЗОНОЙ СЦЕПЛЕНИЯ ДЛЯ СМЕШАННОГО РЕЖИМА РАЗРУШЕНИЯ

Рассмотрена нагруженная на бесконечности пластина с центральной трещиной смешанного режима разрушения. С использованием кусочно-линейного закона распределения для сил сцепления, получено решение для отрывов. Это решение включено в модель трещины со сложной зоной сцепления. Определяющие соотношения для параметров распределения сил сцепления и параметров предельного состояния найдены для заданной интенсивности внешней нагрузки.

Ключевые слова: трещина смешанного режима разрушения, модель трещины с зоной сцепления, закон сцепления-отрыва, сложные границы зоны сцепления.

Инженерным расчетам, учитывающим наличие трещин, уделяется все больше внимания в связи с тем, что они сосредоточены на выявлении границ сопротивления разрушению и долговечности конструкций, изготовленных из современных материалов, таких как, армированные пластики, нанокompозиты и др. Преимущественно эти расчеты базируются на результатах линейной упругой механики разрушения (ЛУМР). Когда нелинейным поведением материала в окрестности вершины трещины можно пренебречь, ЛУМР дает эффективные результаты при прогнозировании предельного состояния трещины (определении параметров задачи, обеспечивающих начало распространения трещины). Важнейшим достижением после появления ЛУМР стала модель трещины с зоной ослабленных связей у ее вершины. Эта зона получила название зоны сцепления (ЗС). При незначительных размерах ЗС можно эффективно применять концепцию квази-хрупкого разрушения, которая использует важнейший параметр ЛУМР – коэффициент интенсивности напряжений (КИН).

Во многих случаях определение предельного состояния при наличии трещины в конструкции из композитного материала, бетона или другого квази-хрупкого материала, размер ЗС оказывается не достаточно малым по сравнению с другими характерными размерами, что приводит к несоответствию условиям применения КИН. Некоторые механизмы (образование микротрещин и полостей у фронта трещины, их слияние, бриджинг и другие механизмы на микроуровне), сопровождающие развитие трещины, оказывают существенное влияние на невыполнение этих условий. Если размер ЗС не является достаточно малым по сравнению с другими характерными размерами задачи, незаменимым инструментом анализа становится модель трещины с зоной сцепления (МЗС). Сложные физические эффекты, имеющие место в окрестности вершины трещины, можно смоделировать при помощи введения нелинейных эффектов раз-

рушения, которые снесены на отрезок на продолжении трещины. При этом во всей области вне этого отрезка материал можно считать линейно упругим. ЗС моделируется двумя поверхностями, которые стягиваются силами сцепления (СС). Потеря несущей способности материалом характеризуется полным разъединением поверхностей сцепления. СС и расстояние между поверхностями сцепления связаны законом сцепления-отрыва (ЗСО).

Для применения МЗС в простой форме (например, в случае нормального отрыва) необходимо два параметра: энергия разрушения (предельное значение работы СС) и прочность сцепления (максимальная интенсивность СС). Эти параметры должны быть определены с помощью стандартизированных тестов с целью прогнозирования развития трещины в других структурных конфигурациях. ЗСО содержит в качестве параметров энергию разрушения, прочность сцепления и параметры формы, таким образом, предоставляя большую гибкость при описании трещиностойкости. Существует набор базовых законов, которые успешно применяются в рамках МЗС. Критическое раскрытие трещины превращается в характеристический размер, который зависит от энергии разрушения, прочности сцепления и ЗСО.

При смешанном типе разрушения параметров трещиностойкости больше. Энергия разрушения, ϕ_I и прочность сцепления, σ_{\max} для трещины нормального отрыва дополняются энергией разрушения, ϕ_{II} и прочностью сцепления, τ_{\max} для трещины сдвига, а также параметрами, связывающих эти два вида разрушения [7].

Исследование напряженно-деформированного состояния в рамках МЗС проводится с помощью аппарата метода функции комплексной переменной (МФКП) или метода конечных элементов (МКЭ). В первом случае длина ЗС находится из условия конечности напряжений в ее вершине. В рамках МКЭ вводится новый характеристический размер (для нормального отрыва – $E\phi_I / \sigma_{\max}^2$), что с точностью до числового множителя совпадает с размером ЗС.

Современные представления о моделировании в рамках МЗС изложены в работах [4, 5, 7, 8]. Большинство исследований, использующих МЗС для решения прикладных задач механики разрушения проведено с помощью МКЭ. Работ, использующих аппарат МФКП для исследований трещиностойкости при смешанном типе разрушения в рамках МЗС, в современной литературе не обнаружено. В работе [3] в формулировке МФКП представлено решение задачи о перемещении берегов трещины смешанного режима разрушения (к пластине приложены на бесконечности нагрузки σ_y^∞ , σ_x^∞ и τ_{xy}^∞) когда нормальные и касательные СС распределены вдоль ЗС с постоянными интенсивностями σ_{\max} и τ_{\max} соответственно, причем участки приложения этих сил совпадают. В такой постановке условия конечности напряжений у фронта ЗС приводит к связи между СС и внешней нагрузкой в виде

$$\frac{\sigma_y^\infty}{\sigma_{\max}} = \frac{\tau_{xy}^\infty}{\tau_{\max}},$$

которая не позволяет независимо вводить прочностные сцепления двух режимов разрушения. Впервые такую проблему удалось решить в работе [6] путем моделирования зон приложения нормальных и сдвиговых СС отрезками с общими вершинами и отличающимися хвостами. Такой принцип моделирования получил название сложных границ зоны сцепления [5]. В данной работе модифицировано решение, полученное в [3]. Распределение СС при этом взято в виде кусочно-линейного закона. Полученные выражения для нормального и касательного отрывов позволили использовать МЗС. Построена система для определения значений СС в узлах кусочно-линейных распределений для заданной длины трещины и интенсивности внешней нагрузки. Полученная система использована в числовом примере для определения параметров предельного состояния для случая, когда потенциал ЗСО задан в форме

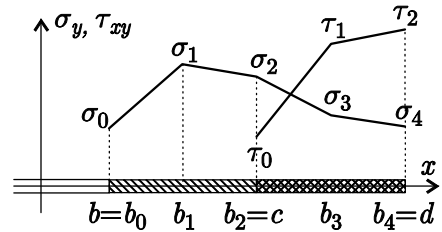
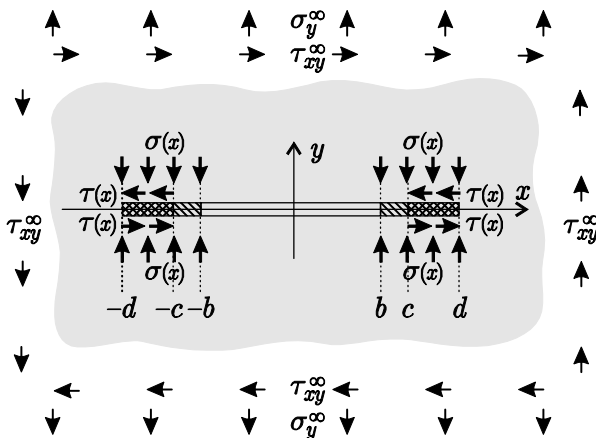
$$\Psi(\bar{\Delta}_I, \bar{\Delta}_{II}) = \varphi_I \left[1 - (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha (1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta \right]. \quad (1)$$

Решение полученной определяющей системы проведено путем добавления узлов в распределение СС с использованием каждого предыдущего решения в качестве приближения для текущего.

Определение отрывов берегов трещины при кусочно-линейном распределении СС. Рассмотрим классическую задачу механики разрушения сплошной среды об идеально острой трещине в бесконечной пластине. На бесконечности к пластине приложены растягивающие нагрузки интенсивности σ_y^∞ , направление приложения которых совпадает с направлением нормали к линии расположения трещины, и сдвиговые нагрузки интенсивности τ_{xy}^∞ (рис. 1 а).

Будем считать, что заданные параметры задачи соотносятся таким образом, что разрушение происходит в режиме нормального отрыва. В противном случае задачу можно легко переформулировать. В силу положенного, длина участка приложения нормальных СС больше участка приложения касательных СС ($c > b$).

Будем моделировать трещину разрезом длиной $2b$ вдоль оси Ox . На продолжении этого разреза вводим дополнительный разрез длиной $d - b$



с приложенными к берегам самоуравновешенными нормальными СС интенсивности $\sigma(x)$, на части введенного разреза длиной d – с приложим касательные СС интенсивности $\tau(x)$. Законы распределения $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ задаем в кусочно-линейной форме с совпадающими узлами общего участка приложения (рис. 1,б). Будем требовать плавного смыкания берегов трещины, что эквивалентно условию конечности напряжений σ_y и τ_{xy} в вершине ЗС (в точке $x = d$).

Рассмотрим контурные условия (на рис. 1 б $n=4$, $r=2$, $m=n-r$). В правой координатной полуплоскости:

$$\sigma_y^\pm(x) = \begin{cases} \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, & b_{k-1} \leq x \leq b_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \\ 0, & 0 \leq x < b \end{cases}$$

$$\tau_{xy}^\pm(x) = \begin{cases} \frac{(b_{k+m} - x)\tau_{k-1} + (x - b_{k+m-1})\tau_k}{\Delta b_{k+m}}, & b_{k+m-1} \leq x \leq b_{k+m} \quad (k=1, 2, \dots, r) \\ 0, & 0 \leq x < c \end{cases}$$

и симметрично для $-d \leq x < 0$, $\sigma_y^\pm(x) = \sigma_y^\pm(-x)$, $\tau_{xy}^\pm(x) = \tau_{xy}^\pm(-x)$.

Найдем величины нормального и касательного отрывов

$$\Delta_I(x) = \frac{4}{\pi E} \sum_{k=0}^n \sigma_k J_k(x), \quad \Delta_{II}(x) = \frac{4}{\pi E} \sum_{k=0}^r \tau_k J_k'(x), \quad (2)$$

которые определяются при условии конечности напряжений

$$\sum_{k=0}^n \sigma_k N_k = \frac{\pi \sigma_y^\infty}{2}, \quad \sum_{k=0}^r \tau_k N_k' = \frac{\pi \tau_{xy}^\infty}{2}. \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3) введены следующие обозначения:

$$J_0(x) = \frac{\Delta T_1(x)}{\Delta b_1} + K(b, x), \quad J_0'(x) = \frac{\Delta T_{m+1}(x)}{\Delta b_{m+1}} + K(b_m, x);$$

$$J_k(x) = \frac{\Delta T_{k+1}(x)}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta T_k(x)}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n), \quad J_n(x) = \frac{T_{n-1}(x)}{\Delta b_n};$$

$$J_k'(x) = J_{m+k}(x) \quad (0 < k \leq r, m = n - r);$$

$$C(\xi, x) = \ln \left| \frac{\check{X}(\xi) - \check{X}(x)}{\check{X}(\xi) + \check{X}(x)} \right|, \quad \check{X}(t) = \sqrt{\frac{t+d}{d-t}};$$

$$K(\xi, x) = (x - \xi)C(\xi, x) - (x + \xi)C(-\xi, x);$$

$$\Delta T_k(x) = T_{k+1}(x) - T_k(x);$$

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left[(x + b_k)^2 C(-b_k, x) + (x - b_k)^2 C(b_k, x) \right] + \widehat{X}(b_k) \widehat{X}(x);$$

$$N_0 = \frac{b_1 \Delta I_1 + \Delta \widehat{X}_1}{\Delta b_1}, \quad N_k = \frac{\Delta R_{k+1}}{\Delta b_{k+1}} - \frac{\Delta R_k}{\Delta b_k} \quad (0 < k < n);$$

$$\begin{aligned}
N_n &= -\frac{b_{n-1}\Delta I_n + \Delta \widehat{X}_n}{\Delta b_n}; \\
N_{0'} &= \frac{b_{m+1}\Delta I_{m+1} + \Delta \widehat{X}_{m+1}}{\Delta b_{m+1}}, \quad N_{k'} = N_{m+k} \quad (0 < k \leq r); \\
\Delta I_k &= I_k - I_{k-1}, \quad I_k = I(b_k), \quad (I_n = I(d)\pi); \\
\Delta \widehat{X}_k &= \widehat{X}_k - \widehat{X}_{k-1}, \quad \widehat{X}_k = \widehat{X}(b_k), \quad (\widehat{X}_n = \widehat{X}(d) = 0); \\
\Delta R_k &= R_k - R_{k-1}, \quad R_k = b_k I_k + \widehat{X}_k; \\
I(t) &= 2\bar{X}(t), \quad \widehat{X}(t) = \sqrt{d^2 - t^2}.
\end{aligned}$$

Определение закона распределения СС и параметров предельного состояния при заданном ЗСО. Используя ЗСО

$$\sigma = T_I(\bar{\Delta}), \quad \tau = T_{II}(\bar{\Delta}), \quad \bar{\Delta} = (\bar{\Delta}_I \bar{\Delta}_{II})$$

и условие конечности напряжений в вершине ЗС (3), для заданной докритической полудлины трещины b_0 можно записать систему $n + r + 4$ уравнений

$$\begin{aligned}
T_I[\bar{\Delta}(b_k)] &= \sigma_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\
T_{II}[\bar{\Delta}(b_{n-r+k})] &= \tau_k, \quad k = 0, 1, \dots, r, \\
\sum_{k=0}^n \sigma_k N_k &= \pi \sigma_y^\infty / 2, \quad \sum_{k=0}^r \tau_k N_{k'} = \pi \tau_{xy}^\infty / 2,
\end{aligned} \tag{4}$$

для определения $n + r + 4$ неизвестных: 1) положения точки b_n - вершины ЗС; 2) положение точки b_{n-r} - хвоста участка приложения касательных СС; 3) значений σ_k функции $\sigma(x)$ в точках сетки b_k , $k = 0, 1, \dots, n$; 4) значений τ_k функции $\tau(x)$ в точках сетки b_{n-r+k} , $k = 0, 1, \dots, r$.

Величины b_k , $k = 0, 1, \dots, n$ являются параметрами геометрических характеристик N_k , N'_k , J_k , J'_k . Три из величин $b_k - b_0 = b$, $b_m = c$ и $b_n = d$ - неизвестны, другие можно распределить (например, равномерно) между b_0 и b_m , b_m и b_n .

В предельном состоянии одного из режимов разрушения, когда раскрытие трещины в ее вершине достигает максимального значения Δ_{\max} , согласно большинства известных ЗСО, соответствующее значение СС равно нулю. Полагая в соотношениях (4) $\sigma_0 = 0$, получим систему для определения параметров предельного состояния в режиме нормального отрыва (к этим параметрам вместо σ_0 следует отнести критическую длину трещины b_0).

В данную работу не входит подробное описание метода численного решения системы (4). Отметим лишь то, что он получается добавлением

числа узлов в кусочно-линейное распределение СС с использованием каждого предыдущего решения в качестве приближения для текущего.

Для числового примера используем ЗСО с потенциалом (1):

$$\begin{aligned} T_I(\bar{\Delta}) &= \sigma_{\max} (1 - \bar{\Delta}_I)^{\alpha-1} (1 - \bar{\Delta}_{II})^\beta, \\ T_{II}(\bar{\Delta}) &= \tau_{\max} (1 - \bar{\Delta}_I)^\alpha (1 - \bar{\Delta}_{II})^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

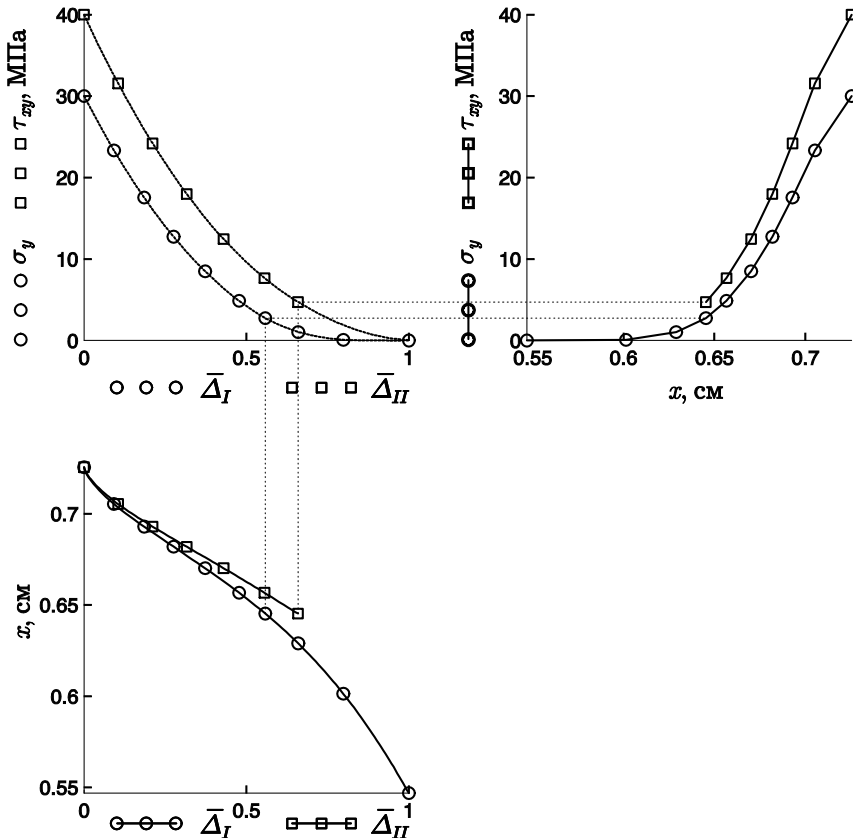
Энергия разрушения для режимов нормального отрыва и сдвига:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \int_0^1 T_I(\bar{\Delta}_I, 0) d\bar{\Delta}_I = \frac{\sigma_{\max} \Delta_{I \max}}{\alpha}, \\ \varphi_{II} &= \int_0^1 T_{II}(0, \bar{\Delta}_{II}) d\bar{\Delta}_{II} = \frac{\tau_{\max} \Delta_{II \max}}{\beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условием потенциальности поля (5) является равенство энергий разрушения двух режимов.

Параметры числовых решений возьмем следующими: $E = 4$ ГПа, $\varphi_I = \varphi_{II} = 600$ Н/м, $\sigma_{\max} = 30$ МПа, $\tau_{\max} = 40$ МПа, $\alpha = 1.3$, $\beta = 2$. Величины $\Delta_{I \max}$ и $\Delta_{II \max}$ определены при помощи выражений (6).

На рис. 2 проиллюстрированы параметры предельного состояния



при $\sigma_y^\infty = 7$ МПа, $\tau_{xy}^\infty = 9,4$ МПа. Аналогичные зависимости на рис. 3 построены для $\tau_{xy}^\infty = 3$ МПа. Пунктирными кривыми на первых блоках рисунков изображены проекции линий пересечения поверхности ЗСО с плоской между прямыми, проходящими через точки $\bar{\Delta}(b_{k-1})$ и $\bar{\Delta}(b_k)$ плоскости $\bar{\Delta}_I O \bar{\Delta}_{II}$ перпендикулярно этой плоскости. На каждом из рисунков пунктирными прямыми изображено соответствие между блоками. Каждая точка (кружочек для параметров нормального отрыва, квадратик для смещения) соответствует узлу кусочно-линейного закона распределения

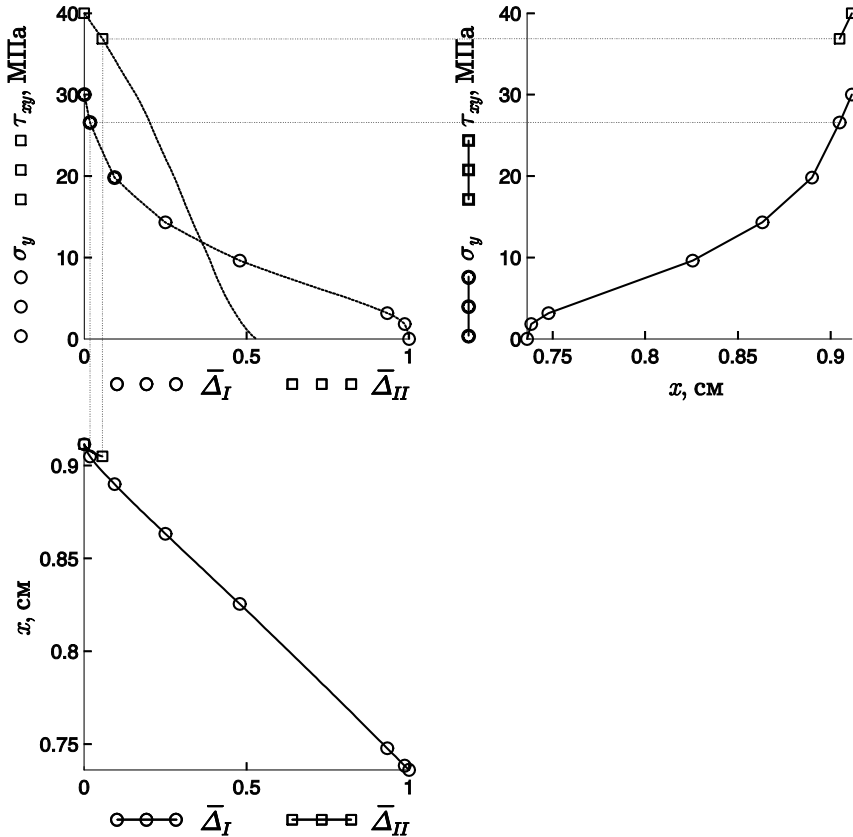


Рис. 3

СС. Упомянутое соответствие проиллюстрировано только для точек b_0 и b_m – хвостов отрезков приложения нормальных и сдвиговых СС соответственно.

Рис. 2, 3 позволяют проследить как изменяется критическая полу-длина трещины при увеличении интенсивности внешних сдвиговых нагрузок (от 0,73 см в первом случае до 0,55 см во втором). Понятно, что при дальнейшем увеличении τ_{xy}^∞ режим разрушения будет изменен, но получить аналитическое условие оказалось достаточно сложной задачей.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто навантажену на нескінченності пластину з центральною тріщиною змішаного режиму руйнування. Використовуючи кусково-лінійний закон розподілу для сил зчеплення, отримано розв'язок для відривів. Цей розв'язок включено до моделі тріщини із складною зоною зчеплення. Визначальні співвідношення для параметрів розподілу сил зчеплення і параметрів граничного стану знайдено для заданої інтенсивності зовнішнього навантаження.

Ключові слова: тріщина змішаного режиму руйнування, модель тріщини з зоною зчеплення, закон зчеплення-відриву, складні границі зони зчеплення.

SUMMARY. Considered is the loaded at infinity plate with a central mixed-mode crack. Using the piecewise-linear distribution law for cohesive traction, a solution for separation is given. Obtained separations are included in cohesive zone model with multiple cohesive zone fronts. Constitutive relationships for parameters of cohesive traction distribution and parameters of critical state are found for the given intensity of external load.

Keywords: mixed-mode crack, cohesive zone model, traction-separation law, multiple cohesive zone fronts.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Каминский А.А. Механика длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами: теория, эксперимент (обзор) // Прикладная механика.– 2014.– 50, № 5.– С. 3–79.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.– М.: Наука, 1966.– 707 с.
3. Becker W., Gross D. About the Dugdale crack under mixed mode loading. // Int. J. Fract.– 1988.– Vol. 37.– P. 163–170.
4. Chew H.B., Hong S., Kim K.-S. Cohesive-zone laws for void growth-I. Experimental field projection of crack-tip crazing in glassy polymers // J. Mech. Physics Solids.– 2009.– Vol. 57.– P. 1357–1373.
5. Hui C.Y., Ruina A., Long R., Jagota A. Cohesive zone models and fracture // J. Adhesion.– 2011.– Vol. 87.– P. 1–52.
6. Jin Z.-H., Sun C.T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimaterials // Eng. Fract. Mech.– 2005.– Vol. 72.– P. 1805–1817.
7. Park K., Paulino G.H. Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. // Appl. Mech. Reviews.– 2011.– Vol. 64, №. 6.– P. 060802 (20 pages).
8. Thouless M.D., Sills R.B. The effect of cohesive-law parameters on mixed-mode fracture // Eng. Fract. Mech.– 2013.– Vol. 109.– P. 353–368.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 10.03.2014

УДК 539.3

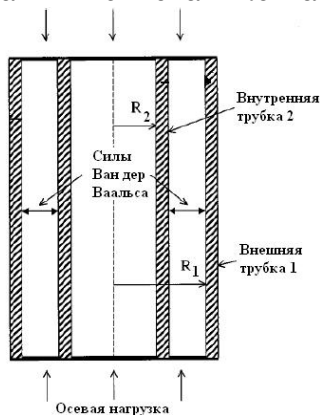
Н. П. СЕМЕНЮК, д-р техн. наук,
Н. Б. ЖУКОВА, канд. физ.-мат. наук,
Н. И. ИВАНОВА, канд. физ.-мат. наук

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Разработана методика расчета на устойчивость ортотропных двухслойных оболочек, имеющих механические и электрические свойства углеродных нанотрубок. Слои связаны между собой с помощью сил Ван дер Ваальса. Разрешающая система уравнений записывается относительно скоростей шестнадцати переменных. Нагрузка и граничные условия задаются отдельно для каждого слоя. Для получения числовых результатов применяется процедура метода дискретной ортогонализации. Исследована устойчивость двухслойных нанотрубок с креслообразной хиральностью.

Ключевые слова: *устойчивость, нанотрубка, цилиндрические оболочки, силы Ван дер Ваальса, метод дискретной ортогонализации, хиральность*

Благодаря своим уникальным свойствам углеродные нанотрубки (CNT) вызывают широкий интерес среди исследователей. В последние годы разработаны методы расчета нанотрубок, учитывающие их атомную структуру, а также методы континуализации, позволяющие рассматривать дискретную структуру нанотрубок с позиций механики сплошной среды [4–9]. В случае многослойных нанотрубок (MWCNT) дополнительно возникает проблема континуализации сил Ван дер Ваальса, действующих в межслойном пространстве. Основываясь на результатах указанных работ, в настоящей работе предлагается модель расчета, которая базируется на рассмотрении межслойного пространства как сплошного слоя. Слои нанотрубки имеют столько же степеней свободы, как и однослойные оболочки, несмотря на наличие связей, которые возникают из-за совместной работы слоев. На необходимость и целесообразность проведения исследований по механике нанотрубок как армирующих элементов обоснованно указывают авторы работы [3].



К нелинейной теории многослойных цилиндрических оболочек с учетом дискретности слоев. Рассмотрим многослойную цилиндрическую оболочку, состоящую из жестких слоев, связь между которыми осуществляется с помощью мягкого слоя. Жесткие слои являются континуальной моделью дискретных слоев графита, а средний слой — континуальной моделью сил межатомного взаимодействия Ван дер Ваальса. На рисунке показан элемент рассматриваемой оболочки.

Механические характеристики слоев будем

определяются на основании известных расчетных моделей [4–9].

Будем считать, что основными параметрами, достаточными для описания жестких слоев, являются обобщенные перемещения, деформации и напряжения теории оболочек Кирхгофа – Лява. В слоях-связях в соответствии с их назначением будем учитывать жесткости поперечного сдвига и растяжения – сжатия в трансверсальном направлении. Введем следующие обозначения: h_i – толщина i -го жесткого слоя; t_i – толщина i -го мягкого слоя; R_i , r_i – радиусы срединной поверхности соответственно жесткого и мягкого слоев.

Учитывая аддитивные свойства потенциальной энергии деформации оболочки, можем записать

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathcal{E}_i^{(c)}, \quad (1)$$

где $\mathcal{E}_i^{(a)}$ – потенциальная энергия деформации i -го жесткого слоя; $\mathcal{E}_i^{(c)}$ – потенциальная энергия деформации i -го мягкого слоя при условии его непрерывности; N – количество жестких слоев в оболочке.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа – Лява для жестких слоев выражение потенциальной энергии деформации имеет вид

$$\mathcal{E}_i^{(a)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R_i} \left(T_{11}^i \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \varepsilon_{22}^i + T_{12}^i \varepsilon_{12}^i + M_{11}^i k_{11}^i + M_{12}^i k_{12}^i + M_{22}^i k_{22}^i \right) dx dy. \quad (2)$$

Здесь T_{mn}^i , M_{mn}^i – усилия и моменты, действующие на единицу длины элемента срединной поверхности i -го слоя; ε_{mn}^i , k_{mn}^i – деформации растяжения – сжатия, изменения кривизны и кручения данной поверхности; L – длина оболочки; x , y – координатные линии поверхности, направленные по образующей и направляющей цилиндра.

Нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями u^i , v^i , w^i каждого несущего слоя будем принимать в таком виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_1^i{}^2, \\ \varepsilon_{12}^i &= \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial x} + \theta_1^i \theta_2^i, \\ \varepsilon_{22}^i &= \frac{\partial v^i}{\partial y} - \frac{w^i}{R_i} + \frac{1}{2} (\theta_2^i)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Приращения кривизны и кручения также выражаются через перемещения:

$$k_{11}^i = -\frac{\partial^2 w^i}{\partial x^2} = -\frac{\partial \theta_1^i}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
k_{22}^i &= -\frac{\partial^2 w^i}{\partial y^2} - \frac{1}{R_i} \frac{\partial v^i}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \theta_2^i, \\
k_{12}^i &= -2 \frac{\partial^2 w^i}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R_i} \frac{\partial v^i}{\partial x} = -\frac{\partial \theta_1^i}{\partial y} - \frac{\partial \theta_2^i}{\partial x},
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}.$$

Вследствие малой толщины жестких слоев соотношения закона Гука принимаются в простейшем виде:

$$\begin{aligned}
T_{11}^i &= C_{11}^i \varepsilon_{11}^i + C_{12}^i \varepsilon_{22}^i, & M_{11}^i &= D_{11}^i k_{11}^i + D_{12}^i k_{22}^i, \\
T_{22}^i &= C_{12}^i \varepsilon_{11}^i + C_{22}^i \varepsilon_{22}^i, & M_{22}^i &= D_{12}^i k_{11}^i + D_{22}^i k_{22}^i, \\
T_{12}^i &= C_{66}^i \varepsilon_{12}^i, & M_{12}^i &= D_{66}^i k_{12}^i.
\end{aligned} \tag{5}$$

Потенциальная энергия деформации k -го мягкого слоя определяется выражением

$$\mathcal{E}_k^{(c)} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi r_k} \int_{-\frac{t_k}{2}}^{\frac{t_k}{2}} \left(\sigma_{13}^k \varepsilon_{13}^k + \sigma_{23}^k \varepsilon_{23}^k + \sigma_{33}^k \varepsilon_{33}^k \right) dx dy dz. \tag{6}$$

Если в уравнениях равновесия теории упругости пренебречь напряжениями в направлениях осей x , y , то найдем [2], что напряжения σ_{13} будут распределены по толщине равномерно, следовательно, это будет относиться и к деформациям ε_{13} . Сказанное дает возможность для перемещений мягкого слоя записать закон изменения перемещений по толщине в виде:

$$u = u_0 + z\theta, \quad v = v_0 + z\psi, \quad w = w_0 + z\chi. \tag{7}$$

С учетом (7) после интегрирования по координате z для потенциальной энергии деформации мягкого слоя получим выражение

$$\mathcal{E}_k^{(c)} = \frac{1}{2} \iint \left[N_{13} \varepsilon_{13} + N_{23} \varepsilon_{23} + N_{33} \varepsilon_{33} + M_{13} \frac{\partial \chi}{\partial x} + M_{22} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\psi}{R_k} \right) \right] dx dy, \tag{8}$$

в котором

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{13} &= \theta + \frac{\partial w_0}{\partial x}, & \varepsilon_{23} &= \psi + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{v_0}{R}, & \varepsilon_{33} &= \chi; \\
N_{13} &= G_{13} t_3 \varepsilon_{13}, & N_{23} &= G_{23} t_2 \varepsilon_{23}, & N_{33} &= E_3 t_3 \varepsilon_{33}; \\
M_{23} &= \frac{1}{12} G_{23} t_3^3 \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\psi}{R_k} \right), & M_{13} &= \frac{1}{12} G_{13} t_1^3 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2.
\end{aligned}$$

G_{13} , G_{23} , E_3 – модули сдвига и поперечной упругости слоя.

Пусть k -й мягкий слой связывает i -й и $(i+1)$ -й жесткие слои. Из условий равенства перемещений на поверхностях контакта получаем

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \frac{1}{2} \left(u_i + u_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{2} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial x} - \frac{h_i}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x} \right), \\
 v_0 &= \frac{1}{2} \left[v_i + v_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{2} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} + \frac{v_{i+1}}{R_{i+1}} \right) - \frac{h_i}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{v_i}{R_i} \right) \right], \\
 w_0 &= \frac{1}{2} (w_i + w_{i+1}), \\
 \theta &= \frac{1}{l_k} \left(u_{i+1} - u_i + \frac{h_{i+1}}{2} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial x} + \frac{h_i}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x} \right), \\
 \psi &= \frac{1}{l_k} \left[v_{i+1} - v_i + \frac{h_{i+1}}{2} \left(\frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} + \frac{v_{i+1}}{R_{i+1}} \right) + \frac{h_i}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{v_i}{R_i} \right) \right], \\
 \chi &= \frac{1}{i_k} (w_{i+1} - w_i).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, деформации мягкого слоя полностью определяются перемещениями жестких слоев, ограничивающих этот слой:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{l_k} (u_{i+1} - u_i) + \frac{1}{2l_k} (h_{i+1} + i_k) \frac{\partial w_{i+1}}{\partial x} + \frac{1}{2l_k} (h_i + i_k) \frac{\partial w_i}{\partial x}, \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{l_k} \left[v_{i+1} - v_i + \left(\frac{h_{i+1}}{2R_{i+1}} + \frac{l_k}{2r_k} \right) \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \psi} + \left(\frac{h_i}{2R_i} + \frac{l_k}{2r_k} \right) \frac{\partial w_i}{\partial \psi} \right], \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{1}{l_k} (w_{i+1} - w_i).
 \end{aligned} \tag{10}$$

При выводе выражений (10) опущены малые по сравнению с единицей слагаемые $\frac{h_i}{R_i}$, $\frac{l_k}{r_k}$. Однако изменение метрики по толщине оболочки

учитывается, так как для каждого жесткого слоя принят радиус кривизны его серединой поверхности.

Вариационная задача, соответствующая принципу Лагранжа, имеет вид

$$\delta \mathcal{E} - \delta A = 0 \tag{11}$$

где \mathcal{E} – потенциальная энергия деформации; A – работа внешних сил. Потенциальная энергия деформации оболочки определяется выражением (1). Если учесть выражения (2), (3), то из вариационного принципа получаем уравнения равновесия при $N = 2$.

$$\frac{\partial T_{11}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}^{(i)}}{\partial y} + (-1)^{i+1} \frac{1}{t_1} N_{13}^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{12}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^{(i)}}{\partial y} - \frac{1}{R_2^i} T_{23}^{(i)} + (-1)^{i+1} N_{23}^{(1)} &= 0, \\ \frac{\partial T_{13}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}^{(i)}}{\partial y} - \frac{1}{R_2^i} T_{22}^{(i)} + (-1)^{i+1} N_{33}^{(1)} + q &= 0 \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} T_{13} &= \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, \quad T_{23} = \frac{\partial M_{22}}{\partial y}, \\ T_{13}^* &= T_{13} + T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2, \quad T_{23}^* = T_{23} + T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия для каждого слоя формулируются относительно четырех величин, взятых по одной из таких пар

$$\begin{aligned} \left(T_{11}^{(i)}, u_i \right), \quad \left(T_{12}^{(i)} - \frac{M_{12}}{R_2}, v_i \right), \\ \left(T_{13}^{(i)} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, w_i \right), \quad \left(M_{11}^{(i)}, \theta_1^{(i)} \right) \text{ при } x = 0, L. \end{aligned} \quad (14)$$

По координате y оболочки замкнутые.

Представленные нелинейные соотношения и уравнения описывают напряженно-деформированное состояние двухслойных оболочек с межслойным взаимодействием Ван дер Ваальса по всей траектории нагружения, включая особые точки типа предельных и бифуркации.

Модули G_{13} , G_{23} полагаем равными нулю, так как они существенно меньше модуля E_3 .

Для решения задач, соответствующих различным этапам нагружения, в большинстве работ используются формулировки, основанные на некоторых упрощающих предположениях. Наиболее реалистичным подходом является использование метода непрерывного продолжения по параметру [1]. В этом случае находится решение линейной краевой задачи относительно скоростей (производных по параметру продолжения) разрешающих функций и задача Коши для нахождения самих функций. В качестве разрешающих функций в данной задаче выбираются те, через которые формируются граничные условия (14). Имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= T_{11}^{(1)}, \quad y_2 = T_{12}^{(1)} - \frac{M_{12}^{(1)}}{R_2^{(1)}}, \\ y_3 &= T_{13}^{(1)} + T_{11}^{(1)}\theta_1^{(1)} + T_{12}^{(1)}\theta_2^{(1)} + \frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial y}, \\ y_4 &= M_{11}^{(1)}, \quad y_5 = u^{(1)}, \quad y_6 = v^{(1)}, \\ y_7 &= w^{(1)}, \quad y_8 = \theta_1^{(1)}, \quad y_9 = T_{11}^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{10} &= T_{12}^{(2)} - \frac{M_{12}^{(2)}}{R_2^{(2)}}, & y_{11} &= T_{13}^{*(2)} - \frac{\partial M_{12}^{(2)}}{\partial y}, \\
y_{12} &= M_{11}^{(2)}, & y_{13} &= u^{(2)}, & y_{14} &= v^{(2)}, \\
y_{15} &= w^{(2)}, & y_{16} &= \theta_1^{(2)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Система линейных уравнений относительно скоростей представляется в нормальном виде

$$\frac{d\dot{Y}}{dx} = A\dot{Y} + b, \tag{16}$$

где \dot{Y} – вектор с компонентами $(\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_{16})$, A – матрица размером (16×16) , b – вектор-столбец, содержащий скорости поверхностной нагрузки.

Граничные условия заданы в виде

$$A_1 \dot{Y} = b_1, \quad A_2 \dot{Y} = b_2. \tag{17}$$

Задача Коши имеет вид

$$\frac{dY}{dt} = \dot{Y}, \quad Y \Big|_{t=0} = \dot{Y}_0. \tag{18}$$

Результаты расчета. Используя имеющиеся в публикациях [6, 7] данные о механических и геометрических свойствах углеродных нанотрубок, найдем для них критические значения осевых нагрузок для двух вариантов шарнирного опирания, приведенных в табл. 1. Индексы 1, 2 показывают, что равенство имеет место как для внешней (1), так и для внутренней (2) оболочки в случае двухслойной углеродной нанотрубки (DWCNT). При определении докритического состояния, граничные условия могут быть однородными или неоднородными в зависимости от типа действующей на оболочку нагрузки. При осевом сжатии на одном из торцов необходимо задать действующее усилие, на противоположном – принять равным нулю перемещение или заменить его условием симметрии относительно середины оболочки. Ниже при решении задач использовался первый подход.

Описанные многими авторами методы континуализации [5–7] позволяют обоснованно рассматривать нанотрубки как сплошные цилиндрические оболочки. В работе [7] для них получены значения модулей упругости и сдвига, приведенные в табл. 2. Как известно, углеродные нанотрубки отличаются своей структурой, которая проявляется в их хиральности [3]. В

Таблица 1

S2	$u^{1,2} = 0$	$T_{12}^{1,2} = 0$	$w^{1,2} = 0$	$M_{11}^{1,2} = 0$
S3	$T_{11}^{1,2} = 0$	$v^{1,2} = 0$	$w^{1,2} = 0$	$M_{11}^{1,2} = 0$

Таблица 2

	(9, 9)	[(4, 4), (9, 9)]	[(9, 9), (14, 14)]
E_{11}	5,7911	5,4824	5,1054
E_{22}	7,9735	7,5435	7,0294
G_{12}	1,9840	1,8610	1,7912
ν_{12}	0,1690	0,1690	0,1690

данной таблице в первом столбце записаны механические характеристики для однослойной CNT с креслоподобной структурой (9, 9), во втором и третьем столбцах – для двухслойной CNT со структурой [(4, 4), (9, 9)] и [(9, 9), (14, 14)]. Обозначения структуры и геометрические параметры оболочек взяты такими же, как и в работе [7]. Все три оболочки имеют длину 5,32 нм, однослойная оболочка (9, 9) имеет радиус $R=0,61$ нм, толщину $h=0,066$ нм, для DWCNT [(4, 4), (9, 9)] – $R_1=0,61$ нм, $R_2=0,27$ нм, $h=0,075$ нм; для DWCNT [(9, 9), (14, 14)] – $R_1=0,95$ нм, $R_2=0,61$ нм, $h=0,075$ нм.

Полученные по предлагаемой расчетной методике критические нагрузки (в нН) для оболочек указанных структур с граничными условиями

Таблица 3

	(9, 9)	[(4, 4), (9, 9)]	[(9, 9), (14, 14)]
S2	53,34	58,56	80,17
S3	63,60	48,10	113,55

S2 и S3 приведены в табл. 3. В работе [7] при граничных условиях S3 критические нагрузки составили $P_{cr} = 79,43$ нН, $106,75$ нН, 114 нН. Сравнивая их с данными табл. 3, замечаем, что только для оболочки [(9, 9), (14, 14)] величины критических на-

грузок совпадают. Различие между расчетными величинами работы [7] и полученными по предлагаемой методике объясняется тем, что уравнения указанной работы соответствуют варианту теории Муштари-Доннелла-Власова, справедливой при $n \gg 1$. А также постановкой задачи, в основе которой лежит предположение о безмоментности докритического состояния. Учет влияния деформаций поперечного сдвига [2] при маловолновых формах потери устойчивости – незначительный.

РЕЗЮМЕ. Розроблено методику розрахунку на стійкість ортотропних двошарових оболонок, що мають механічні та електричні властивості вуглецевих нанотрубок. Шари поєднані між собою за допомогою сил Ван дер Ваальса. Розв'язувальна система рівнянь записується відносно швидкостей шістнадцяти змінних. Навантаження і граничні умови задаються окремо для кожного шару. Для отримання числових результатів застосовано процедуру методу дискретної ортогоналізації. Досліджено стійкість двошарових кріслоподібних нанотрубок.

Ключові слова: стійкість, нанотрубка, циліндричні оболонки, сили Ван дер Ваальса, метод дискретної ортогоналізації, хіральність

SUMMARY. A method to calculation of stability of orthotropic double-walled shells which have a mechanical and electrical properties as carbon nanotubes is offered. The layers are connected with each other to the help of van der Waals forces. The resolving set of equations is recorded with respect to speeds of sixteen variables. The loads and the boundary conditions are set separately for each layer. The discrete-orthogonalization method is applied to deriving numerical results. The stability double-walled armchair nanotube is analysed.

Key words: stability, nanotube, cylindrical shells, van der Waals interaction, discrete-orthogonalization method, chirality

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Ванін Г.Л., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. – К.: Наук. думка, 1987. – 200 с.
3. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокомпозитов. – К., 2010. – 398 с.

4. He X.Q., Hitipornchai S., Liew H.M. Buckling analysis of multiwalled carbon nanotubes: a continuum model accounting for van der Waals interaction //J. Mech. Phys. Solids.– 2005.– Vol. 53.– P. 303–326.

5. Ru C.O. Effect of van der Waals forces on axial buckling of a double-walled carbon nanotube //J. of Applied Physics.– 2000.– Vol. 87.– P. 7227–7231.

6. Shen H.S., Zhang C.L. Post-Buckling of Double-Walled Carbon Nanotubes with temperature depended properties and initial defects under combined axial and radial mechanical loads //Int. J. of Solids and Structures.– 2003.– Vol. 44.– P. 1461–1487.

7. Shen H.S., Zang C.L. Nonlocal Shear Deformable Shell Model for Post-Buckling of Axially Compressed Double-Walled Carbon Nanotubes Embedded in an Elastic Matrix //J. of Applied Mechanics.– 2010.– Vol.77, No. 4– P. 1–12.

8. Wang C.Y., Ru C.O., Mioduchowski A. Axial Compressed buckling of pressured multiwall carbon nanotubes //Int. J. of Solids and Structures.– 2003.– Vol. 40.– P. 2893–3011.

9. Yakobson B.I., Brabec C.J., Brabec J. Nanomechanics of carbon tubes instabilities beyond linear response // Physical Review Letters.– 1996.– Vol. 76.– P. 2511–2514.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 11.03.2014

УДК 539.3

И. К. СЕНЧЕНКОВ, д-р физ.-мат. наук
О. П. ЧЕРВИНКО, канд. физ.-мат. наук
Е. В. ДОЛЯ, канд. физ.-мат. наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО И МИКРОСТРУКТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРА ПРИ НАРАЩИВАНИИ ПО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯМИ РАСПЛАВЛЕННОГО МЕТАЛЛА

Методы теории растущих вязкопластических тел с микроструктурными превращениями в сочетании с методом конечных элементов используются для моделирования остаточного напряженного и структурного состояния цилиндра при наращивании по боковой поверхности слоями расплавленного металла.

Ключевые слова: растущие тела, цилиндр, остаточные напряжения, микроструктура.

Моделирование кинетики формирования остаточных напряжений и деформаций в процессах нанесения материала на свободную поверхность тела в неизотермических условиях является важной научной проблемой термомеханики. По подходам и методам моделирования таких процессов эта задача исследуется в рамках теории растущих деформируемых тел. [1]. Интерес к таким задачам значительно возрос в связи с развитием ряда технологий макро- и микроскопического уровней, а также технологий 3D-принтера. К технологиям макроуровня относятся наплавка, напыление и т.п. технологии изготовления и ремонта изделий [8, 9], объединяемые в класс «производство изделий методом свободного формирования» (solid freeform fabrication (SFF) processes) [16]. Сущность таких процессов состоит в формировании тел путем прямого нанесения материала (как правило, в виде расплава) на его поверхность. Нанесение материала может производиться непрерывно или дискретно. SFF – технологии являются одним из способов формирования неоднородных структур, в частности т.н. «разумных» (smart) материалов и готовых изделий, состоящих из (пьезо- и пр.) активных и пассивных слоев или включений [21]. К технологиям наращивания микроуровня относятся нанотехнологии, поскольку одним из основных способов получения наноматериалов, в частности композитов, является напыление [20]. В работе [10] проведено численное моделирование термомеханических процессов при наплавке роликов МНРС слоями из аустенитной стали. Исследованию блочного (послойного) наращивания цилиндра по боковой поверхности слоями аустенитной и мартенситной стали посвящена работа [11].

В настоящей работе дан анализ распределения остаточных напряжений и деформаций в наплавленных слоях в зависимости от технологии дуговой многослойной наплавки цилиндрических деталей (роликов, валков и т.п.) с учетом структурных превращений в детали и наплавленных слоях.

Исследуются термомеханические процессы при наплавке роликов с использованием элементов теории растущих термовязкопластических тел в сочетании с численным методом конечных элементов (МКЭ). Для расчета фаз использовались термокинетические диаграммы [6]. Термомеханическое поведение материала описывается с помощью унифицированной модели течения Боднера – Партома [14].

Постановка задачи. Вводится цилиндрическая система координат $Orz\varphi$ и рассматривается остаточное напряженно-деформированное состояние ролика из стали 35ХМ, наплавляемого двумя слоями хромоникелевой аустенитной стали 1Х18Н10 и одним (наружным) слоем стали 3Х13. Расположение слоев I – III и валиков в слоях в меридиональном сечении ролика показано на схеме (рис. 1).

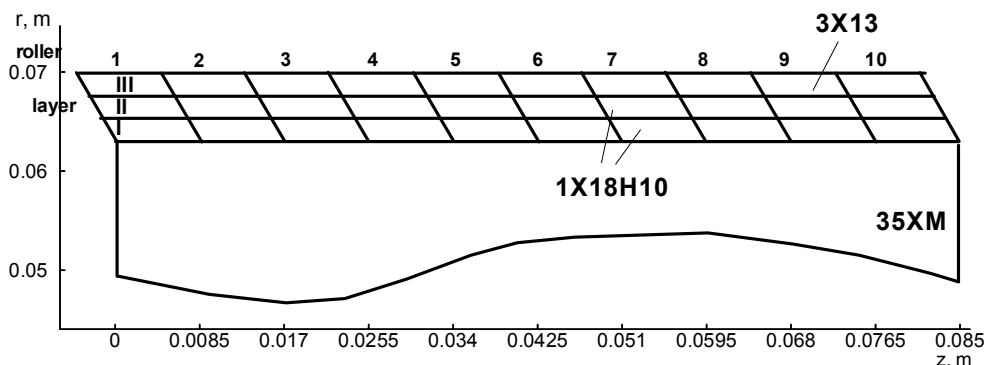


Рис. 1

Ролик имеет форму цилиндра диаметром $D = 0,126$ м и длиной $L = 0,250$ м. Толщины всех слоев одинаковы и равны 2,3 мм. Наплавка производится на ролик, предварительно подогретый до температуры $\theta = 300^{\circ}C$ или $\theta = 200^{\circ}C$.

Процесс наплавки (рис. 1) моделируется на основе теории постепенного наращивания деформируемых тел [3]. Такой подход ранее применялся для моделирования процессов сварки. Неосесимметричная трехмерная в общем случае задача спиральной наплавки рассматривается как осесимметричная, т.е. наплавка валика заменяется наращиванием рабочей поверхности цилиндрической детали (ролика) за счет эквивалентных кольцевых валиков. Временной интервал между присоединениями этих валиков, их размеры, температура материала, время охлаждения и т.п. выбираются из условия эквивалентности геометрических, энергетических и пр. параметров технологического процесса. В частности, интервал нанесения валиков принимается равным 45 секунд – времени нанесения одного кольцевого шва.

Математическая постановка задачи включает следующие соотношения:
– уравнения равновесия и теплопроводности

$$\operatorname{div} \sigma = 0; \tag{1}$$

$$\bar{c}_v \dot{\theta} = \operatorname{div} (\bar{\lambda} \operatorname{grad} \theta) + Q; \tag{2}$$

где тензор напряжений σ имеет компоненты σ_{ij} , $i, j = r, z, \varphi$;

– определяющие уравнения для основного материала

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{\theta ph}, \quad \varepsilon_{kk}^p = 0; \quad (3)$$

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta ph}); \quad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} s_{ij} / J_2^{1/2}, \quad \varepsilon_{ij}^p(0) = 0; \quad (5)$$

– определяющие уравнения для наплавляемого материала

$$s_{ij} = 2G_f(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_{Vf}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta ph} - \varepsilon_{kk}^*); \quad (6)$$

– уравнение эволюции для параметра изотропного упрочнения

$$\dot{K} = m_1(\bar{K}_1 - K)\dot{w}^p, \quad K(0) = 0, \quad (7)$$

где G , G_f и K_V , K_{Vf} – модули сдвига и объемного сжатия; \bar{K}_0 и \bar{K}_1 определяются формулами $\bar{K}_0 = C^\xi K_0^\xi$, $\bar{K}_1 = C^\xi K_1^\xi$; C^ξ – объемные концентрации фаз, $\xi = a, \varphi, p, b, m$, соответственно, аустенита, феррита, перлита, бейнита и мартенсита; K_0^ξ , K_1^ξ , m_1 , n , D_0 – параметры модели; s_{ij} – девиатор тензора напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$; \dot{w}^p – пластическая мощность, J_2 – второй инвариант тензора напряжений $\dot{w}^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, $J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}$; Q – источник тепла; $\bar{\lambda}$ и \bar{c}_v – приведенные коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости смеси фаз,

$$\bar{\lambda} = C^\xi \lambda_\xi, \quad \bar{c}_v = C^\xi c_{v\xi}. \quad (8)$$

Для обоснования уравнений (8) для $\bar{\lambda}$ оценим ее связь с формулой Хашина-Штрикмана [4] для случая двухфазной смеси

$$\bar{\lambda} = \lambda_2 \left[1 + \frac{C_1}{(1 - C_1)/3 + \lambda_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)} \right], \quad (9)$$

где λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности фаз 1 и 2, C_1 и C_2 – объемные доли фаз, $C_1 + C_2 = 1$.

Предполагая различие коэффициентов λ_1 и λ_2 малым

$$|\lambda_1 - \lambda_2| / \lambda_2 = \delta \ll 1,$$

получаем асимптотику для соотношения (9)

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 C^1 + \lambda_2 (1 - C^1) + O(\delta^2), \quad (10)$$

главная часть которой совпадает с уравнением линейного правила смесей (8) (оценка Фойгта).

Для технических сталей $\lambda_1 = \lambda_m = 24 \text{Вт/м}^\circ\text{С}$, $\lambda_2 = \lambda_a = 16 \text{Вт/м}^\circ\text{С}$, [15], различие в значениях $\bar{\lambda}$, рассчитанных по формулам (9) и (8) не превосходит 2%. Общий интервал вариаций $\bar{\lambda}$, определяемых граничными соотношениями Фойгта и Рейсса, не превосходит 4%. Это дает основания использовать упрощенное соотношение (8) при расчете $\bar{\lambda}$ для сталей многофазового состава.

Термоструктурная деформация $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$ определяется через удельные объемы фаз V_ξ по формуле

$$\varepsilon_{ij}^{\theta ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V_\xi(\theta)C^\xi(\theta) - V_\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}{\mathfrak{V}_\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)} \delta_{ij}. \quad (11)$$

Здесь θ – текущая температура, θ_r – некоторая отсчетная температура. В уравнении (11) производится суммирование по повторяющемуся индексу ξ .

Температурные зависимости удельных объемов $V_\xi(\theta)$ в $\text{м}^3/\text{кг}$, отнесенные к $\theta_r = 20^\circ\text{С}$, принимаются в виде [13],

$$\begin{aligned} V_a(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 &= 0,1228 + 8,56 \cdot 10^{-6}(\theta - 20) + 2,15 \cdot 10^{-3}C_p, \\ V_{\varphi, p, b}(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 &= 0,12708 + 5,528 \cdot 10^{-6}(\theta - 20), \\ V_m(\theta, 20^\circ, C_p) \cdot 10^3 &= 0,12708 + 4,448 \cdot 10^{-6}(\theta - 20) + 2,79 \cdot 10^{-3}C_p, \end{aligned} \quad (12)$$

где C_p – объемная концентрация углерода в процентах.

Рассмотрим структуру деформации $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$ с учетом соотношений (12). Представим уравнения (12) в унифицированном виде

$$V_\xi(\theta) = V_0^\xi [1 + 3\alpha_\xi(\theta - \theta_r)], \quad (13)$$

где α_ξ – коэффициент линейного теплового расширения фазы ξ . Подстановка (13) в (11) после группировки слагаемых дает

$$\varepsilon^{\theta ph} = \hat{\alpha}(\theta - \theta_r) + \chi, \quad (14)$$

причем

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_\xi V_0^\xi C_0^\xi \alpha_\xi}{\sum_\xi V_0^\xi C_0^\xi}, \quad \chi = \frac{\sum_\xi V_0^\xi (C^\xi - C_0^\xi)}{3 \sum_\xi V_0^\xi C_0^\xi}. \quad (15)$$

Первое слагаемое в (14) характеризует изменение объема за счет

изменения температуры от θ_r до θ , а второе слагаемое – изменение объема за счет изменения фазового состава от начального C_0^ξ до текущего значения C^ξ .

Если удельные объемы фаз V_0^ξ одинаковы, то

$$\hat{\alpha} = \sum_{\xi} \alpha_{\xi} C^{\xi}. \quad (16)$$

Для уравнений (12) различие в значениях $\hat{\alpha}$, рассчитанных по формулам (15) и (16) не превышает 2%.

Деформация ε_{ij}^* , $\varepsilon_{ij}^* = e_{ij}^* + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^* \delta_{ij}$, и θ^* в уравнениях (6) определяют искажение пустых элементов конечно-элементной сетки в момент заполнения материалом наплавки и температуру заполняющего материала. При таком определении этих величин и определяющих уравнений (6) на поверхности наплавки (роста) автоматически выполняются необходимые условия [1]

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0.$$

Кроме того, на этой поверхности принимается $\varepsilon_{ij}^p = 0$ и $K = K_{of}(\theta^*)$. Величины ε_{ij}^* и θ^* рассчитываются в процессе решения задачи. Для материалов наплавленных слоев в формуле (11) принимается $\theta_r = \theta^*$.

Начальное условие и граничные условия на остальных поверхностях имеют вид

$$\theta = \theta_0 \text{ при } t = 0, \quad \sigma \cdot n = 0, \quad -\lambda \text{grad } \theta \cdot n = -q + \gamma(\theta - \theta_c) + \sigma\varepsilon(T^4 - T_c^4), \quad (17)$$

где $T = \theta + 273^0$ – абсолютная температура, γ – коэффициент теплоотдачи, $\gamma = 30 \text{Вт/м}^2 \text{град}$; σ – постоянная Стефана, ε – коэффициент черноты, θ_c – температура окружающей среды, $\theta_c = 20^\circ \text{C}$; θ_0 – начальная температура, n – внешняя нормаль к поверхности.

Рассмотрим схему заполнения объема ΔV валика. Пусть t^* – момент заполнения объема ΔV расплавом. Для $t < t^*$ предполагается, что объем заполнен «пустым» упругим материалом с характеристиками $E = 0$, $\nu = 0$, $\alpha = 0$ и теплофизическими свойствами наплавленного металла. В момент заполнения $t = t^*$ фиксируются ε_{ij}^* , θ^* – деформация и температура объема ΔV , которые при $t > t^*$ используются в уравнениях (3).

Алгоритмы расчета фазового состава материалов на основе термодинамических диаграмм распада переохлажденного аустенита [6], а также параметров модели течения и на основе экспериментальных данных [7, 12] для выбранных сталей изложены в работах [17, 18].

Для решения задачи используется конечно-элементная методика [9], основанная на подходе, развитом в работе [5].

Квазистатическая краевая задача термомеханики решается методом шагового интегрирования по времени. Уравнение течения Прандтля-Рейсса (5) и эволюции параметра изотропного упрочнения (7), а также уравнение теплопроводности интегрируются с помощью неявного метода Эйлера с переменным шагом по времени. Нелинейные краевые задачи механики и теплопроводности на каждом временном шаге решаются методом простой итерации с использованием процедуры Стефенсена-Эйткена для ускорения сходимости итерационного процесса. На каждой итерации характеристики материалов и параметры модели пересчитываются для текущих значений температуры и фазового состава. Линеаризованные краевые задачи на каждой итерации решаются методом конечных элементов. Используется четырехугольный изопараметрический конечный элемент.

Результаты расчетов. Влияние температуры подогрева. Влияние температуры подогрева на концентрацию фаз распада аустенита и макси-

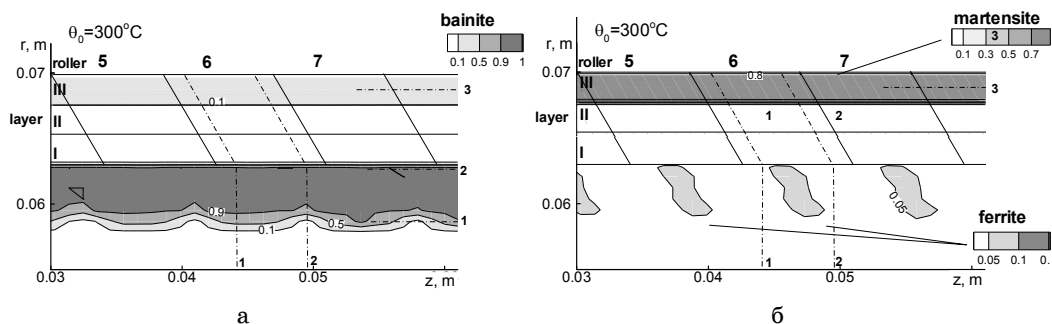


Рис. 2

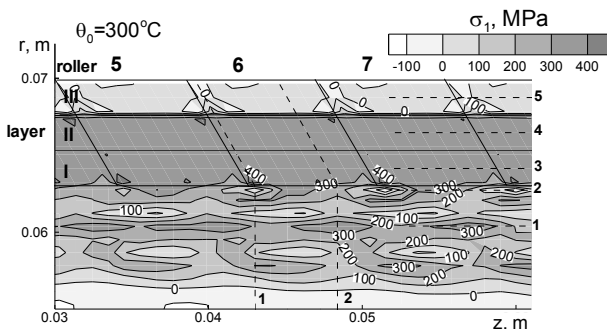


Рис. 3

мальные нормальные напряжения иллюстрируют рис. 2 и 3 для $\theta_0 = 300^{\circ}\text{C}$ и рис. 4 и 5 для $\theta_0 = 200^{\circ}\text{C}$. Цифрами показаны номера наплавленных валиков. Анализ результатов показывает, что при $\theta_0 = 300^{\circ}\text{C}$ зона термического влияния (ЗТВ) имеет преимущественно бейнитную структуру, а наружный наплавленный слой – мартенситную (порядка 80%). Такой структурный состав наплавленной детали с учетом свободных объемов фаз вызывает растягивающие напряжения в первом и вто-

ром аустенитных слоев и в прилегающей к ним области основного мате-

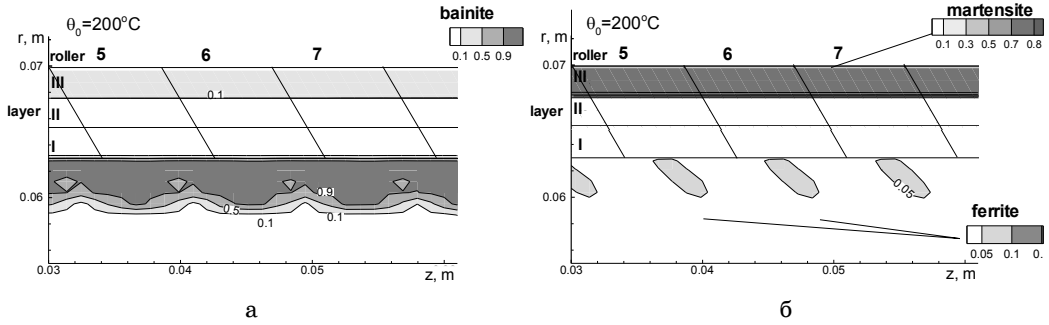


Рис. 4

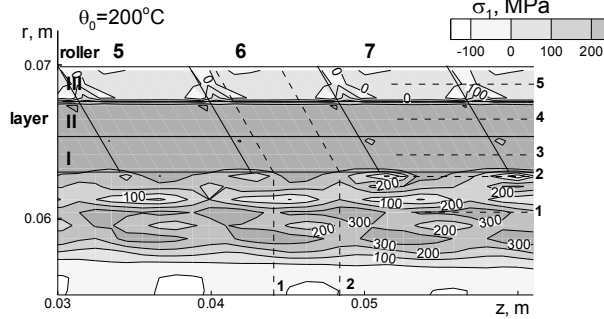


Рис. 5

риала ролика. В наружном слое, имеющем мартенситную структуру, а также в центральной части ролика формируются сжимающие напряжения. ЗТВ составляет 3 – 4 мм.

Для начальной температуры $\theta_0 = 200^{\circ}\text{C}$ ЗТВ также имеет преимущественно бейнитную структуру. Концентрация мартенсита в наружном слое увеличивается до 85%.

Радиальные распределения осевых и окружных напряжений при $\theta_0 = 300^{\circ}\text{C}$ в сечениях 1 и 2 показаны штриховыми линиями на рис. 6. Сплошные линии отвечают сечению 1, а штриховые – сечению 2.

Сложный характер изменения компонент отражает процессы упрочнения и структурных превращений в материалах слоев и основном материале ролика при последовательной наплавке отдельных слоев и валиков. Кривые 1 и 2 для радиальных сечений в пределах одного наплавленного валика отличаются несущественно.

Отметим наличие минимума радиальных распределений компонент напряжений на границе ролик – первый наплавленный валик. Эффект обусловлен структурными превращениями в ролике, связанными с формированием фаз с большим свободным объемом (бейнит, мартенсит). Пики в расчетных распределениях напряжений возникают в результате многостадийности процесса наложения валиков и сопровождающими их процессами упрочнения материала ролика в ЗТВ.

Для понимания влияния подогрева сопоставим результаты расчета для

$\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$ (рис. 7) и $\theta_0 = 200 - 300^{\circ}\text{C}$ (рис. 8 и 10). При $\theta_0 = 200 - 300^{\circ}\text{C}$ ЗТВ имеет однородную бейнитную структуру (рис. 8, а и 10, а). В случае $\theta_0 = 20^{\circ}\text{C}$ после наплавки первого слоя и остывания структура ЗТВ мартенситная (~ 80%). После наплавки второго слоя распределение фаз показано на рис. 7. После наплавки второго слоя и полного остывания мартенсит в приповерхностном слое превращается в бейнит. При этом мар-

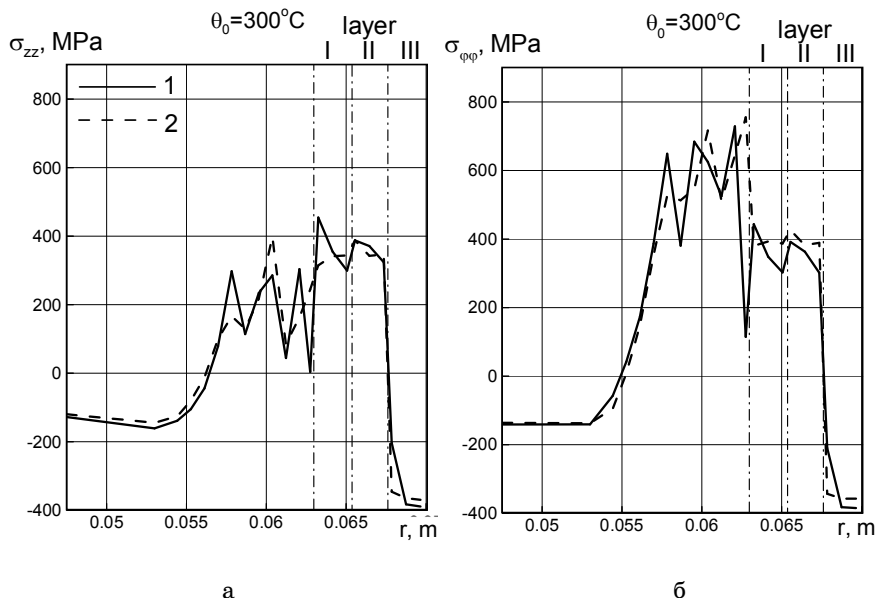


Рис. 6

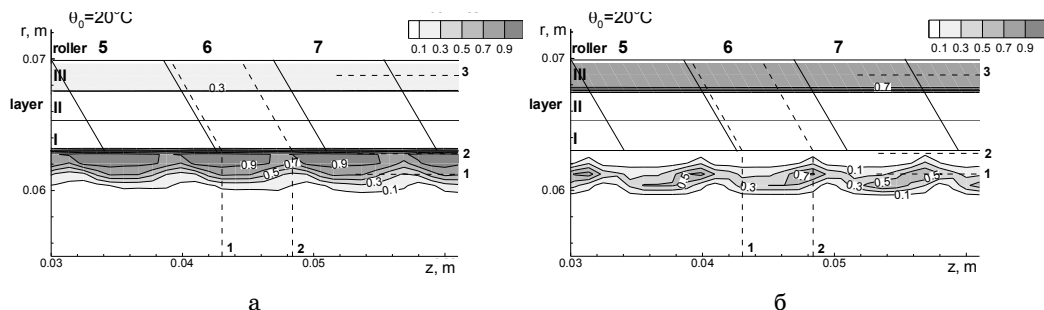


Рис. 7

тенсит сохраняется в более глубоких слоях ЗТВ. Такая структура ЗТВ остается неизменной после наплавки третьего слоя, имеющего структуру мартенсита (более 90%).

Это указывает на возможность управления структурным составом ЗТВ при наплавке слоев путем выбора температуры предварительного подогрева, тепловложения и др. В частности возможно снижение температуры предварительного подогрева за счет отпуска при наплавке последующих слоев. Экспериментальные данные, подтверждающие такие возможности, приведены в работе [19].

Сопоставление теоретических и экспериментальных данных. Для

оценки достоверности принятых моделей и расчетной схемы проводились измерения остаточных напряжений в наплавленном ролике. Исходные размеры ролика: $\varnothing 103$ мм, длина – 160 мм. Материал ролика 35ХМ. На ролик наплавлено 3 слоя: 1-2-ой слои – хромоникелевая сталь 1Х18Н10) с аустенитно-ферритной структурой, толщина слоев 3,4 мм; 3-ий слой – хромистая сталь 13Х13 с мартенситной структурой, толщина слоя 2,7 мм. Структура основного материала ролика до наплавки: перлит + феррит. Температура предварительного подогрева $\theta_0 = 200^{\circ}\text{C}$, промежуточная температура – 320°C .

Структурный анализ показал, что после наплавки материал ролика в ЗТВ (около 3мм) имеет преимущественно бейнитную структуру с небольшим количеством феррита. В остальной части ролика структура не меняется. Остаточная структура наружного (третьего) слоя наплавки – мартенсит. Эти результаты подтверждаются расчетными данными, представленными на рис. 8, на котором показана структура в ролике и наплавленных слоях после остывания.

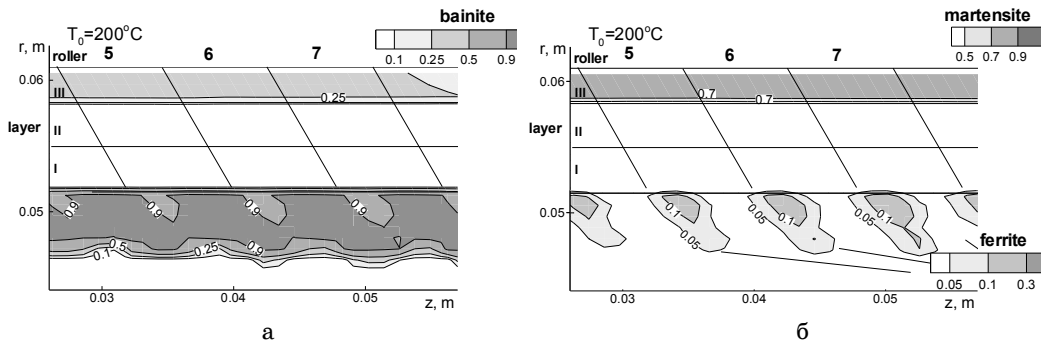


Рис. 8

Измерение деформаций проводилось тензометрическим методом. Параметры напряженно-деформированного состояния определялись по тензометрическим данным в процессе расточки ролика по методике [2]. На рис. 9 дается сопоставление экспериментальных и расчетных распре-

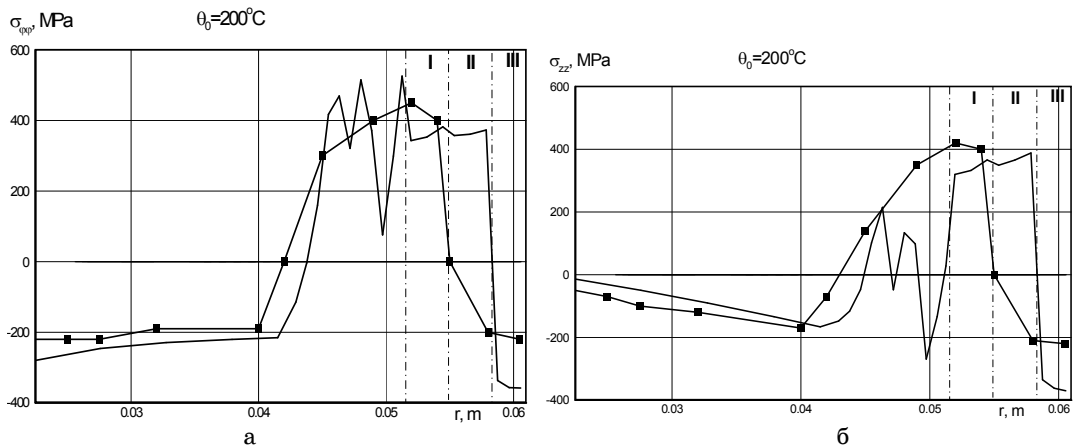


Рис. 9

делений осевых σ_{zz} и окружных $\sigma_{\phi\phi}$ напряжений. Уровень радиальных напряжений существенно ниже, поэтому их распределения не приводятся. Усредненные экспериментальные данные показаны линиями с квадратными маркерами. Линии без маркеров отвечают расчетным данным.

Представленные распределения согласуются по чередованию зон растяжения и сжатия вдоль радиуса, а также по уровням максимальных растягивающих значений компонент. Различие наблюдается в области стыков основного материала ролика и первого слоя, а также наружного (третьего) и прилегающего к нему внутреннего (второго) слоев. Оба указанных расхождения, по-видимому, связаны с тем, что модель не учитывает изменений химического состава слоев в результате переплавления на указанных стыках. В результате расчетные распределения напряжений являются более контрастными, чем экспериментальные.

Таким образом, предложена методика численного моделирования термомеханических процессов при спиральной наплавке цилиндрических деталей, основанная на теории растущих вязкопластических тел, модели течения Боднера-Партома и методе конечных элементов. Проведен расчет остаточных напряжений и деформаций ролика из стали 35ХМ, наплавленного двумя слоями стали 1Х18Н10 и слоем стали 3Х13, с учетом структурных превращений в слоях и ролике. Установлено, что температура предварительного подогрева в пределах 200...300⁰С приводит к образованию в ЗТВ ролика из стали 35ХМ бейнитной структуры. В случае наплавки без подогрева после нанесения первого слоя и остывания структура ЗТВ мартенситная, после наплавки последующих слоев мартенсит замещается бейнитом, а в более глубоких слоях ЗТВ остается мартенсит. Это указывает на возможность управления структурным составом ЗТВ при многослойной наплавке за счет изменения температуры предварительного подогрева, тепловложения, наплавки пластичного подслоя и др. Структура наплавленного наружного слоя из стали 3Х13 для всех температур подогрева остается мартенситной. При данных режимах наплавки напряжения в наружном слое являются сжимающими, а во внутренних аустенитных слоях – растягивающими. Проведено сопоставление осевых и окружных напряжений в наплавленной цилиндрической детали, полученных расчетным и экспериментальным методами. Удовлетворительное в целом совпадение расчетных и экспериментальных данных свидетельствует об обоснованности и достоверности предложенной методики моделирования термомеханических процессов при спиральной наплавке цилиндрических деталей слоями из аустенитной и мартенситной сталей.

РЕЗЮМЕ. Методи теорії в'язкопластичних тіл, що ростуть, з мікроструктурними перетвореннями в поєднанні з методом скінченних елементів використовуються для моделювання залишкового напруженого і структурного стану циліндра при нарощуванні по бічній поверхні шарами розтопленого металу.

Ключові слова: тіла, що ростуть, циліндр, залишкові напруження, мікроструктура

SUMMARY. The methods of the theory of growth of thermoviscoplastic bodies with structure transformations is utilized for FEM modeling of temporal and residual stresses under surfacing of cylindrical parts by austenitic and martensite steel layers. Comparison of numerical and experimental results is performed.

Keywords: growing bodies, cylinder, residual stress, microstructure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. – М.: Наука, 1987. 472 с.
2. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, – 1963. – 232 с.
3. Закономерности относительных продольных смещений пластин из алюминиевого сплава при сварке встык / И.К. Сенченков, Л.М. Лобанов, О.П. Червинко, Н.А. Пащин // Докл. НАНУ.-1998. – №6. – С. 66–70.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. – 334 с.
5. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.1. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
6. Попов А.А., Попова Л.Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М. – С.: ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
7. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
8. Рябцев И.А. Наплавка деталей машин и механизмов. – К.: Экотехнология, 2004. – 160 с.
9. Рябцев И.А., Сенченков И.К. Теория и практика наплавочных работ. – К.: Экотехнология, 2013. – 400 с.
10. Сенченков И.К., Рябцев И.А., Турык Е., Табиева Г.А. Расчет остаточных напряжений при многослойной спиральной наплавке цилиндрических деталей на основе теории наращивания вязкопластических тел // Сварочное производство. – 2005. – № 9. – С. 18–25.
11. Сенченков И.К., Червинко О.П., Баняк М.В. Расчет остаточного напряженно-деформированного и микроструктурного состояния цилиндра при многослойном наращивании по боковой поверхности // Прикладная механика. – 2011. – Т. 48, № 2. – С. 7–12.
12. Шоршоров М.Х., Белов В.В. Фазовые превращения и изменение свойств стали при сварке. Атлас. – М.: Наука, 1972. – 220 с.
13. Юрьев С.Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.
14. Bodner S.R. Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report), Faculty of Mechanical Engineering, Technion – Israel Inst. of Techn. Haifa 32000, Israel – 2000. – 105 p.
15. Iwamoto N. Multiscale computational simulation of deformation behavior of TRIP steel with growth of martensitic particles in unit cell by asymptotic homogenization method // Intern. J. of Plasticity. – 2004. – Vol. 20. – P. 841–869.
16. Residual Stress-Induced Warping in Direct Metal Solid Freeform Fabrication / N.W. Klingbeil, J.L. Beuth, R.K. Chin, C.H. Amon // Int. J. of Mech. Sciences. – 2002. Vol. 44, N 1. – P. 57–77.
17. Senchenkov I.K., Chervinko O.P., Banyas M.V. Modeling of thermomechanical process in growing viscoplastic bodies with accounting of microstructural transformation. / Encyclopedia of Thermal Stresses. R.B. Hetnarsky(ed.), Springer Reference, 2013, Vol 6. – P. 3147–3157.
18. Senchenkov I.K., Chervinko O.P., Turyk E., Rjabtsev I.A. Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels // Welding Internat. – 2008. – Vol. 22, N 7. – P. 457–464.
19. Turyk E. „Czynniki warunkujące stan naprężeń w elementach napawanych”. IX Naukowo-Techniczna Krajowa Konferencja Spawalnicza, Międzyzdroje. – 2004. – S. 197–207.
20. Ultra-Low Thermal Conductivity in W / Al_2O_3 Nanolaminates / R.M. Costescu, D.G. Cahill, F.H. Fabriguette, Z.A. Sechrist, S.M. George // Science. – 2004. – Vol. 303. – P. 989–990.
21. Zhuk Ya.A., Senchenkov I.K. Modelling the Stationary Vibrations and Dissipative Heating of Thin-Walled Inelastic Elements with Piezoactive Layers // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 5. – P. 546–556.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Киевский национальный университет
строительства и архитектуры*

Поступила 01.03.2014

УДК 539.376

*В. П. ГОЛУБ, д-р техн. наук,
Ю. М. КОБЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук,
П. В. ФЕРНАТИ, канд. техн. наук*

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ ИЗОТРОПНЫХ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Построена система определяющих уравнений нелинейной теории вязкоупругости, устанавливающих зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений и временем исходя из гипотезы тензорно-линейной связи. Нелинейность вязкоупругого деформирования задается уравнением ползучести типа уравнения Работнова. Определяющие уравнения апробированы экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести тонкостенных трубчатых элементов при нагружении растяжением с кручением.

***Ключевые слова:** нелинейная вязкоупругость, изотропные материалы, сложное напряженное состояние, продольная ползучесть, поперечная ползучесть, сдвиговая ползучесть, объемная ползучесть.*

Особенности деформирования вязкоупругих сред при внешних воздействиях чаще всего задаются с помощью определяющих уравнений наследственного типа [4, 6, 8, 11]. Эти уравнения устанавливают зависимость между компонентами тензора деформаций или скоростей деформаций, компонентами тензора напряжений и интегральным временным оператором и содержат набор функций и коэффициентов, подлежащих определению из базовых экспериментов.

Одно из простейших предположений, используемых для построения определяющих уравнений при сложном напряженном состоянии, основано на том, что тензор деформаций считается линейной или квазилинейной функцией от тензора напряжений.

Как известно [9], необходимым и достаточным условием квазилинейной изотропной связи двух тензоров является их соосность, т.е. совпадение в рассматриваемой точке пространства их главных осей и пропорциональность девиаторов. В рамках этой гипотезы в работах [1, 7, 10] построена система определяющих уравнений для нелинейных вязкоупругих сред и простых режимов нагружения. Зависимость между тензорами деформаций и напряжений задается уравнением, аналогичным по структуре обобщенному уравнению теории малых упругопластических деформаций [4]. Зависимость между инвариантами, определяющими скалярные свойства нелинейно-вязкоупругой среды, задается уравнениями, аналогичными по форме уравнениям, отражающим условие подобия изохронных диаграмм ползучести [8]. Ядра наследственности при сложном напряженном состоянии определяются по ядрам продольной и поперечной ползучести, которые в свою очередь определяются по результатам базовых испытаний на ползучесть при одноосном растяжении [1].

В настоящей работе гипотеза пропорциональности девиаторов обобщается на условия, когда объемная деформация зависит от времени и в рамках построенных определяющих уравнений решаются задачи расчета деформаций ползучести при двухосном нагружении.

1. Постановка задачи. Рассматривается деформирование изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии и простых режимах нагружения. Считается, что для простых режимов нагружения справедлива гипотеза пропорциональности девиаторов и гипотеза единой диаграммы деформирования.

В этом случае определяющие уравнения ползучести в нелинейной теории вязкоупругости, задающие зависимость между компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(t)$, компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(t)$ и временем t записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \phi_i(\varepsilon_i(t)) &= \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau, \\ \phi_v(\varepsilon_v(t)) &= \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.1)$$

или, используя обращение функций $\phi_i(\cdot)$ и $\phi_v(\cdot)$, соответственно в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i(t); t)}{\sigma_i(t)} \cdot (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \varepsilon_i(t) &= \psi_i \left[\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right], \\ \varepsilon_v(t) &= \psi_v \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon_v(\cdot)$ и $\varepsilon_i(\cdot)$ – объемная деформация и интенсивность деформаций; $\sigma_0(t)$ и $\sigma_i(t)$ – первый инвариант и интенсивность напряжений; $\phi_i(\cdot)$ и $\phi_v(\cdot)$ – функции, задающие нелинейность скалярных свойств; $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$ – ядра интенсивности ползучести и объемной ползучести; λ_i , λ_v – реологические параметры; δ_{ij} – символ Кронекера.

В уравнениях (1.1) и (1.2) также принято, что в главных осях

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2}. \quad (1.4)$$

В качестве ядер наследственности выбираются дробно-экспоненциальные функции Работнова [5], так что для ядер ползучести в уравнениях (1.1) и (1.2) получаем

$$K(t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (1.5)$$

где α и β – параметры ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция Эйлера.

Задача заключается в идентификации ядер ползучести, функций и параметров, входящих в систему определяющих уравнений нелинейной теории вязкоупругости при сложном напряженном состоянии, и в решении на этой основе задач по расчету деформаций ползучести тонкостенных полимерных трубчатых элементов при нагружении растяжением с кручением.

2. Идентификация ядер ползучести, функций и параметров ядер. В определяющих уравнениях (1.1) и (1.2) идентификации подлежат два ядра ползучести $K_i(t - \tau)$ и $K_v(t - \tau)$, две функции $\phi_i(\varepsilon_i(t))$, $\phi_v(\varepsilon_v(t))$ и два реологических параметра λ_i и λ_v . Идентификация осуществляется с использованием данных экспериментов, полученных при одноосном растяжении и рассматриваемых в дальнейшем как базовые.

2.1. Ядра интенсивности ползучести и объемной ползучести. Определяются структура и параметры ядер интенсивности ползучести $K_i(\cdot)$ и объемной ползучести $K_v(\cdot)$. В качестве базовых экспериментов рассматриваются испытания образцов материала на ползучесть при одноосном растяжении постоянными напряжениями с замерах продольных и поперечных деформаций. По результатам замеров определяются ядра продольной $K_{11}(\cdot)$ и поперечной $K_{22}(\cdot)$ ползучести.

Ядра ползучести $K_i(\cdot)$ и $K_v(\cdot)$, задающие скалярные свойства нелинейной вязкоупругой среды при сложном напряженном состоянии, определяются на основе соотношений, связывающих эти ядра с ядрами продольной $K_{11}(\cdot)$ и поперечной $K_{22}(\cdot)$ ползучести.

Следуя методике, изложенной в [1], для зависимости между ядрами ползучести $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$, $K_{11}(\cdot)$, $K_{22}(\cdot)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \lambda_v K_v(t) + \psi_i(\sigma_{11}) \lambda_i K_i(t) &= \psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t), \\ \frac{1}{2} \psi_i(\sigma_{11}) \lambda_i K_i(t) - \frac{1}{3} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \lambda_v K_v(t) &= \psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

определитель которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \cdot \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) & \psi_i(\sigma_{11}) \\ -\frac{1}{3} \cdot \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) & \frac{1}{2} \psi_i(\sigma_{11}) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \psi_v \left(\frac{1}{3} \sigma_{11} \right) \psi_i(\sigma_{11}) \neq 0,$$

что свидетельствует о существовании нетривиальных решений системы уравнений (2.1).

Из решения системы уравнений (2.1) получаем соотношения между ядрами ползучести $K_i(\cdot)$, $K_v(\cdot)$, $K_{11}(\cdot)$, $K_{22}(\cdot)$ в виде

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{2}{3} \frac{\Psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) - \Psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\Psi_i(\sigma_i)} \quad (2.2)$$

и, соответственно, в виде

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\Psi_{11}(\sigma_{11}) \lambda_{11} K_{11}(t) + 2\Psi_{22}(\sigma_{11}) \lambda_{22} K_{22}(t)}{\Psi_v\left(\frac{1}{3}\sigma_{11}\right)}, \quad (2.3)$$

где $\Psi_{11}(\sigma_{11})$, $\Psi_{22}(\sigma_{22})$ – функции, задающие нелинейность вязкоупругих свойств в продольном и поперечном направлениях.

Для случая линейности вязкоупругих свойств из (2.2) и (2.3) получаем

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) - \nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 + \nu} \quad (2.4)$$

и, соответственно, получаем

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) + 2\nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 - 2\nu} \quad (2.5)$$

где принято

$$\Psi_{11}(\sigma_{11}) = \frac{1}{E} \sigma_{11}; \quad \Psi_{22}(\sigma_{11}) = \frac{\nu}{E} \sigma_{11}.$$

E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

По уравнениям (2.2) и (2.3) рассчитываются дискретные значения величин, пропорциональных ядрам ползучести $K_i(t)$ и $K_v(t)$. Аппроксимация дискретных значений этих величин одной из функций, используемых для задания ядер ползучести позволяет определить параметры этих ядер, а также реологические параметры λ_i и λ_v . Методика решения этой задачи изложена в [2, 3].

2.2. Ядра продольной и поперечной ползучести. Определяются параметры ядер продольной $K_{11}(\cdot)$ и поперечной $K_{22}(\cdot)$ ползучести, входящих в соотношения (2.2) и (2.3) для ядер интенсивности ползучести $K_i(\cdot)$ и объемной ползучести $K_v(\cdot)$.

Одномерные определяющие уравнения, задающие нелинейные вязкоупругие свойства в продольном и поперечном направлениях, записываются по аналогии с уравнениями в (1.1) в виде

$$\phi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) = \sigma_{11}(t) + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t - \tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau,$$

$$\phi_{22}(\varepsilon_{22}(t)) = -\left(\sigma_{11}(t) + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(t - \tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau\right), \quad (2.6)$$

которые при постоянных напряжениях сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \phi_{11}(\varepsilon_{11}(t)) &= \sigma_{11} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) d\tau\right), \\ \phi_{22}(\varepsilon_{22}(t)) &= -\sigma_{11} \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(\tau) d\tau\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь σ_{11} – одноосное растягивающее напряжение; $\phi_{11}(\cdot)$, $\phi_{22}(\cdot)$ – функции, задающие нелинейность процессов продольной и поперечной ползучести; $K_{11}(\cdot)$, $K_{22}(\cdot)$ – ядра продольной и поперечной ползучести; λ_{11} , λ_{22} – реологические параметры.

Используя далее обращение функций $\phi_{11}(\cdot)$ и $\phi_{22}(\cdot)$ в (2.7), для деформаций продольной $\varepsilon_{11}(\cdot)$ и поперечной $\varepsilon_{22}(\cdot)$ ползучести получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \psi_{11} \left\{ (\sigma_{11}) \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(\tau) d\tau\right) \right\}, \\ \varepsilon_{22}(t) &= -\psi_{22} \left\{ (\sigma_{11}) \left(1 + \lambda_{22} \int_0^t K_{22}(\tau) d\tau\right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где принято

$$\psi_{11}(\sigma_{11}) = \phi_{11}^{-1}[\phi_{11}(\varepsilon_{11}(t))], \quad \psi_{22}(\sigma_{11}) = \phi_{22}^{-1}[\phi_{22}(\varepsilon_{22}(t))].$$

Параметры ядер продольной $K_{11}(\cdot)$ и поперечной $K_{22}(\cdot)$ ползучести, а также значения реологических параметров λ_{11} и λ_{22} определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер, полученных исходя из условия подобия изохронных диаграмм продольной и поперечной ползучести и соответствующих диаграмм мгновенного деформирования. Методика определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов, нелинейность деформирования которых задается уравнениями вида (2.8), изложена в [2, 10].

2.3. Функции, задающие нелинейность процесса ползучести. Нелинейность вязкоупругих свойств материалов, включая и нелинейность процесса ползучести, в уравнениях (1.1), (2.6) и (2.7) задается функциями $\phi_i(\varepsilon_i(t))$, $\phi_v(\varepsilon_v(t))$ и $\phi_{11}(\varepsilon_{11}(t))$, $\phi_{22}(\varepsilon_{22}(t))$, а в уравнениях (1.2), (2.1)–(2.3) и (2.8) – обращениями $\psi_i(\sigma_i(t))$, $\psi_v(\sigma_0(t))$ и $\psi_{11}(\sigma_{11})$, $\psi_{22}(\sigma_{22})$ соответствующих функций. Эти функции выбираются в форме сглаживающих кубических сплайнов, коэффициенты которых определяются по результатам аппроксимации «мгновенных» диаграмм растяжения, еди-

ных диаграмм деформирования и «мгновенных» диаграмм объемного деформирования.

Функция $\phi_{11}(\varepsilon_{11})$ и ее обращение $\psi_{11}(\sigma_{11})$ аппроксимируют диаграмму мгновенного растяжения « $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$ » и ее обращение « $\varepsilon_{11} - \sigma_{11}$ » сглаживающими кубическими сплайнами

$$\begin{aligned}\phi_{11}(\varepsilon_{11}) &= a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_{11} + a_{2,j}\varepsilon_{11}^2 + a_{3,j}\varepsilon_{11}^3, \\ \psi_{11}(\sigma_{11}) &= b_{0,j} + b_{1,j}\sigma_{11} + b_{2,j}\sigma_{11}^2 + b_{3,j}\sigma_{11}^3,\end{aligned}\quad (2.9)$$

а функция $\phi_{22}(\varepsilon_{22})$ и ее обращение $\psi_{22}(\sigma_{11})$ – диаграмму мгновенного сжатия « $\sigma_{11} - \varepsilon_{22}$ » и ее обращение « $\varepsilon_{22} - \sigma_{22}$ » соответственно сплайнами

$$\begin{aligned}\phi_{22}(\varepsilon_{22}) &= c_{0,j} + c_{1,j}\varepsilon_{22} + c_{2,j}\varepsilon_{22}^2 + c_{3,j}\varepsilon_{22}^3, \\ \psi_{22}(\sigma_{11}) &= d_{0,j} + d_{1,j}\sigma_{11} + d_{2,j}\sigma_{11}^2 + d_{3,j}\sigma_{11}^3,\end{aligned}\quad (2.10)$$

где коэффициенты $a_{0,j;\dots}$ и $c_{0,j;\dots}$ сплайн аппроксимаций имеют размерность напряжений и зависят от j -го интервала разбиения оси деформаций, а коэффициенты $b_{0,j;\dots}$ и $d_{0,j;\dots}$ имеют размерность деформаций и зависят от j -го интервала разбиения оси напряжений.

Функция $\phi_i(\varepsilon_i)$ и ее обращение $\psi_i(\sigma_i)$ аппроксимируют единую диаграмму мгновенного деформирования « $\sigma_i - \varepsilon_i$ » и ее обращение « $\varepsilon_i - \sigma_i$ » сглаживающими кубическими сплайнами

$$\begin{aligned}\phi_i(\varepsilon_i) &= f_{0,j} + f_{1,j}\varepsilon_i + f_{2,j}\varepsilon_i^2 + f_{3,j}\varepsilon_i^3 \\ \psi_i(\sigma_i) &= g_{0,j} + g_{1,j}\sigma_i + g_{2,j}\sigma_i^2 + g_{3,j}\sigma_i^3,\end{aligned}\quad (2.11)$$

а функция $\phi_v(\varepsilon_v)$ и ее обращение $\psi_v(\sigma_0)$ – диаграмму мгновенного объемного деформирования « $\sigma_0 - \varepsilon_v$ » и ее обращение « $\varepsilon_v - \sigma_0$ » соответственно сплайнами

$$\begin{aligned}\phi_v(\varepsilon_v) &= k_{0,j} + k_{1,j}\varepsilon_v + k_{2,j}\varepsilon_v^2 + k_{3,j}\varepsilon_v^3 \\ \psi_v(\sigma_0) &= m_{0,j} + m_{1,j}\sigma_0 + m_{2,j}\sigma_0^2 + m_{3,j}\sigma_0^3\end{aligned}\quad (2.12)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \sigma_i = \sigma_{11}, \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11},$$

а размерности коэффициентов совпадают с размерностями коэффициентов в (2.9) и (2.10).

3. Решение задач ползучести. Решаются и апробируются экспериментально задачи расчета деформаций ползучести тонкостенных трубчатых элементов при нагружении одноосным растяжением, чистым кручени-

ем и растяжением с кручением. Рассчитываются деформации продольной и поперечной ползучести, деформации сдвиговой и объемной ползучести.

3.1. Объект исследования. Параметры ядер ползучести и коэффициенты функций нелинейности. В качестве объекта исследования выбраны тонкостенные трубчатые образцы из полиэтилена высокой плотности ПЭВП наружным диаметром 51 мм и толщиной стенки 5 мм. В экспериментах реализованы одноосное растяжение с замером продольных и поперечных деформаций, чистое кручение и кручение с растяжением. Экспериментальные данные заимствованы из [5].

По данным испытаний на растяжение с замером продольных и поперечных деформаций строятся диаграммы «мгновенного» растяжения и сжатия в координатах « $\sigma_{11} - \varepsilon_{11}$ » и « $\sigma_{11} - \varepsilon_{22}$ », единая диаграмма деформирования в координатах « $\sigma_i - \varepsilon_i$ » и диаграмма объемного деформирования в координатах « $\sigma_0 - \varepsilon_v$ ». Экспериментальные данные, соответствующие этим диаграммам для полиэтилена ПЭВП, показаны на рис. 1 точками,

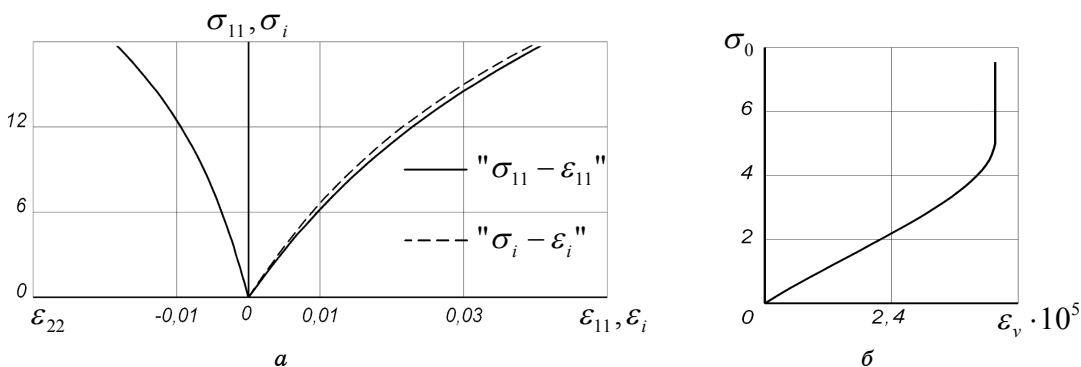


Рис. 1

ми, а линиями нанесена аппроксимация экспериментальных данных соответствующим уравнением из (2.9)–(2.12).

В табл. 1 приведены значения коэффициентов в зависимостях для

	σ_j , МПа	g_0	g_1 , МПа ⁻¹	g_2 , МПа ⁻²	g_3 , МПа ⁻³
Ψ_i	0 – 18	0	$1,316 \cdot 10^{-2}$	$1,51910^{-5}$	$2,02710^{-6}$
	σ_j , МПа	m_0	m_1 , МПа ⁻¹	m_2 , МПа ⁻²	m_3 , МПа ⁻³
Ψ_v	0 – 5	0	$3,189 \cdot 10^{-4}$	$4,281 \cdot 10^{-5}$	$-9,688 \cdot 10^{-6}$
	5 – 18	$1,454 \cdot 10^{-3}$	0	0	0

$\Psi_i(\sigma_i)$ и $\Psi_v(\sigma_0)$, полученных по результатам аппроксимации сглаживающими кубическими сплайнами (2.11) и (2.12) дискретных значений соответствующих функций.

По данным испытаний на ползучесть при одноосном растяжении постоянными напряжениями с замером продольных и поперечных деформаций ползучести и с использованием функций $\phi_{11}(\varepsilon_{11})$ и $\phi_{22}(\varepsilon_{22})$ нахо-

дятся дискретные значения ядер ползучести $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ по методике, изложенной в [2, 3].

Найденные таким образом дискретные значения ядер ползучести $K_{11}(t)$ и $K_{22}(t)$ для полиэтилена ПЭВП нанесены на рис. 2 а точками, а

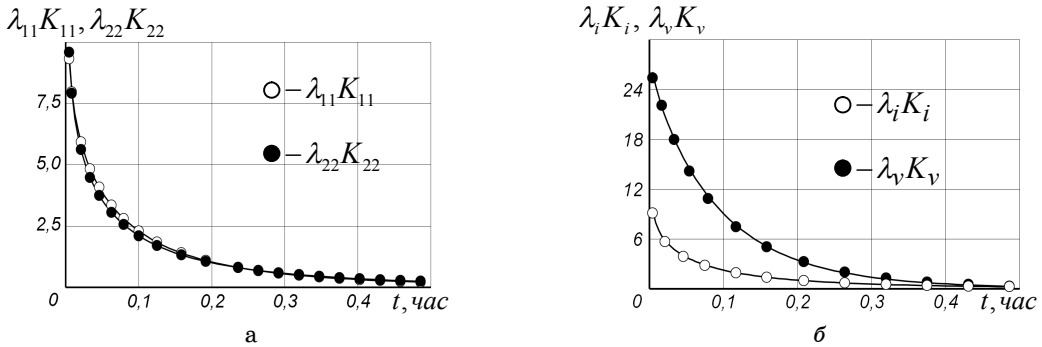


Рис. 2

линиями нанесена аппроксимация дискретных значений ядер дробно-экспоненциальной функцией (1.5). Найденные по результатам аппроксимации параметры α_{11} , β_{11} , λ_{11} ядра $K_{11}(t)$ и параметры α_{22} , β_{22} , λ_{22}

Таблица 2

$K_{11}(t)$, час ⁻¹			$K_{22}(t)$, час ⁻¹		
α_{11}	β_{11} , час ^{-(1+\alpha_{11})}	λ_{11} , час ^{-(1+\alpha_{11})}	α_{22}	β_{22} , час ^{-(1+\alpha_{22})}	λ_{22} , час ^{-(1+\alpha_{22})}
-0,1681	5,4039	4,5730	-0,2203	4,3770	3,7669
$K_i(t)$, час ⁻¹			$K_v(t)$, час ⁻¹		
α_i	β_i , час ^{-(1+\alpha_i)}	λ_i , час ^{-(1+\alpha_i)}	α_v	β_v , час ^{-(1+\alpha_v)}	λ_v , час ^{-(1+\alpha_v)}
-0,1830	5,0840	4,3380	-0,0316	9,0430	23,5240

ядра $K_{22}(t)$ приведены в табл. 2.

Дискретные значения ядра интенсивности ползучести $K_i(t)$ и ядра объемной ползучести $K_v(t)$ рассчитываются по формуле (2.2) и по формуле (2.3) соответственно. Дискретные значения ядер ползучести $K_i(t)$ и $K_v(t)$ для полиэтилена ПЭВП нанесены на рис. 2 б точками, а линиями нанесена аппроксимация дискретных значений ядер дробно-экспоненциальной функцией (1.5). Найденные по результатам аппроксимации параметры α_i , β_i , λ_i ядра $K_i(t)$ и параметры α_v , β_v , λ_v ядра $K_v(t)$ приведены в табл. 2.

3.2. Одномерная продольная и сдвиговая ползучесть. Рассчитываются продольная и сдвиговая ползучесть тонкостенных трубчатых образцов при одноосном растяжении и чистом кручении соответственно.

Исходная система определяющих уравнений (1.2) сводится с учетом (1.5) к определяющему уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i(t)} \Psi_i \left[\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t \frac{(-\beta_i)^n (t-\tau)^{(1+\alpha_i)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \sigma_i(\tau) d\tau \right] \times \\ \times \left[\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) \right] + \frac{1}{3} \delta_{ij} \Psi_v \left[\sigma_0(t) + \right. \\ \left. + \lambda_v \int_0^t \frac{(-\beta_v)^n (t-\tau)^{(1+\alpha_v)n}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \sigma_0(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

которое позволяет рассчитывать деформации ползучести нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии и переменных режимах нагружения.

Для деформаций продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ при $\sigma_{11} = const$ из (3.1) с учетом (2.11) и (2.12) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{11}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sigma_{11} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right]^k \times \right. \\ \times \left(\sigma_{11} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_0 \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right]^k \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а для деформаций сдвиговой ползучести $\varepsilon_{21}(t)$ при $\tau_{21} = const$ – уравнение

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{3} \tau_{21} \left[1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right]^k \right\}, \quad (3.3)$$

где принято $\sigma_i = \sigma_{11} = \sqrt{3} \tau_{21}$; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}$.

Результаты расчетов деформаций продольной $\varepsilon_{11}(t)$ и сдвиговой $\varepsilon_{21}(t)$ ползучести тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена ПЭВП при одноосном растяжении и чистом кручении, выполненных по уравнениям (3.2) и (3.3) с использованием приведенных в табл. 1 и 2 значений соответствующих параметров, сопоставлены на рис. 3 с экспериментальными данными для нескольких уровней нормальных σ_{11} и касательных τ_{21} напряжений. Здесь и далее результаты расчетов нанесены линиями, а экспериментальные данные – точками.

В целом, как видно из рис. 3, получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчета с экспериментальными данными. Мак-

симальная погрешность между расчетными и экспериментальными данными для продольных деформаций не превышает 16%, а для сдвиговых деформаций – 25%. Характерно, что расчеты продольных деформаций ползучести дают заниженные по отношению к экспериментальным дан-

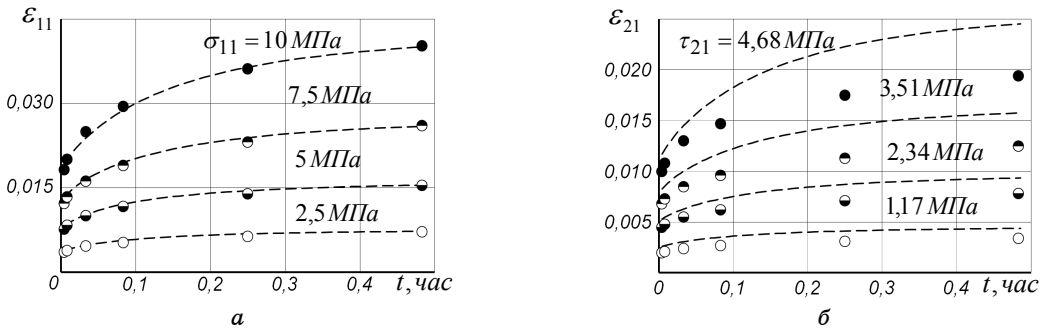


Рис. 3

ным значения деформаций, а сдвиговых деформаций – завышенные значения.

3.3. Продольная и сдвиговая ползучесть при сложном напряженном состоянии. Рассчитывается продольная и сдвиговая ползучесть тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена ПЭВП при комбинированном нагружении одноосным растяжением и кручением.

Для деформаций продольной ползучести $\varepsilon_{11}(t)$ при $\sigma_{11} = const$ и $\tau_{21} = const$ из (2.1) с учетом (2.11) и (2.12) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k \left(\sigma_{11} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{11} \right) + \\ & + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_{k=0}^3 m_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k, \quad (3.4) \end{aligned}$$

а для деформаций сдвиговой ползучести $\varepsilon_{21}(t)$ при $\sigma_{11} = const$ и $\tau_{21} = const$ – уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21}(t) = & \frac{3}{2} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k, \quad (3.5) \end{aligned}$$

где принято $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}$; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11}$.

Результаты расчетов деформаций продольной $\varepsilon_{11}(t)$ и сдвиговой $\varepsilon_{21}(t)$ ползучести тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена ПЭВП при совместном нагружении одноосным растяжением и кручением, выполненных по уравнениям (3.4) и (3.5) с использованием приведенных в табл. 1 и 2 значений соответствующих параметров, сопоставлены на рис. 4 с экспериментальными данными для нескольких комбинаций нормальных σ_{11} и касательных τ_{21} напряжений. В целом, как видно, получено вполне удовлетворительное согласование результатов расчетов с экспериментальными данными. Максимальная погрешность составляет 10% и получена для продольной деформации $\varepsilon_{11}(t)$ при напряжениях $\sigma_{11} =$

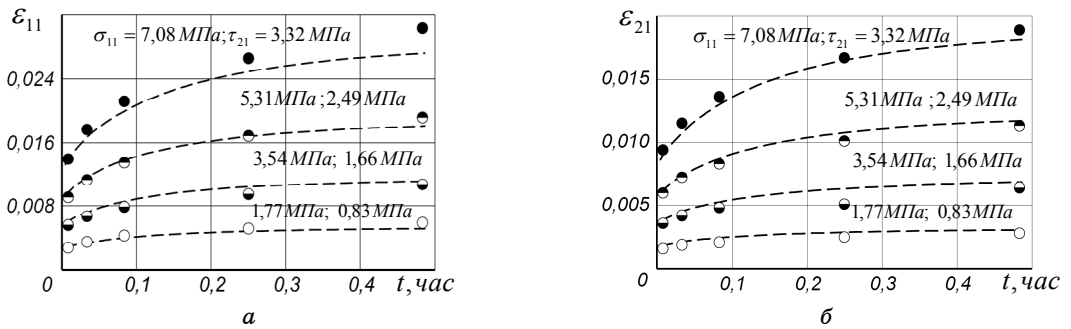


Рис. 4

7,08 МПа и $\tau_{21} = 3,32$ МПа.

Гипотеза пропорциональности девиаторов и гипотеза единой диаграммы деформирования позволяют сформулировать достаточно эффективную систему определяющих уравнений в нелинейной теории вязкоупругости. Определяющие уравнения теории содержат легко воспроизводимый базовый эксперимент и позволяют учесть влияние нормальных напряжений на сдвиговую ползучесть, а касательных напряжений на линейную ползучесть.

РЕЗЮМЕ. Сформульовано систему визначальних рівнянь нелінійної теорії в'язкопружності, що встановлюють залежність між компонентами тензору деформацій та напружень та часом виходячи із гіпотези тензорно-лінійного зв'язку. Нелінійність в'язкопружного деформування задається рівняннями повзучості типу рівняння Работнова. Визначальні рівняння апробовано експериментально на задачах розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчатих елементів за умов розтягу та скручення.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, ізотропні матеріали, складний напружений стан, повздовжня повзучість, поперечна повзучість, зсувна повзучість, об'ємна повзучість.

SUMMARY. The system of constitutive equations of non-linear theory of viscoelasticity establishing the relationship between strain and stress tensor components and the time starting from the hypothesis of the tensor-linear relation has been formulated. The non-

linearity of viscoelastic deformation is given by the creep equation like Rabotnov's equation. The constitutive equations formulated have been approved experimentally on the problems of creep strains calculation of thin-walled tubular elements under tension and torsion.

Key words: non-linear viscoelasticity, isotropic materials, the complex stress state, longitudinal creep, transversal creep, shearing creep, volumetric creep.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикладная механика.– 2013.– №5 (51).– С. 26–35.
2. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций // Теорет. и прикладная механика.– 2009.– Вып. 46.– С. 70–80.
3. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости // Прикладная механика.– 2011.– Т 47, № 3.– С. 75–88.
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости.– М.: Наука.– 1970.– 240 с.
5. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов.– 1985.– № 2.– С. 195–201.
6. Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости // Пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро.– М.: Мир, 1974.– 340 с.
7. Ломакин В.А., Колтунов М.А. Моделирование процессов деформирования нелинейных вязко-упругих сред // Механика полимеров.– 1967.– № 2.– С. 221–227.
8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.– М.: Наука, 1966.– 752 с.
9. Седов Л.М. Введение в механику сплошной среды.– М.: Наука, 1962.– 284 с.
10. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная наследственная модель с учетом температуры при различных напряженных состояниях // Механика композитных материалов.– 1996.– Т 32, № 1.– С. 72–82.
11. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials.– Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976.– 367 p.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 16.03.2014

УДК 539.3

С. А. КАЛОЕРОВ, д-р физ.-мат. наук,
А. А. САМОДУРОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК

Предложен метод решения задач электромагнитовязкоупругости для кусочно-однородных многосвязных пластинок. Методом малого параметра исходная задача сведена к последовательности задач электромагнитоупругости, использующих для своего решения методы комплексных потенциалов. Получены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных областей, граничные условия для их определения. Разработана методика определения основных характеристик электромагнитовязкоупругости во времени. Решены задачи для вязкоупругой пьезопластины с одним или рядом включений. Исследовано изменение во времени значений основных характеристик электромагнитоупругого состояния.

Ключевые слова: электромагнитовязкоупругость, вязкоупругое включение, кусочно-однородная пьезопластина, комплексные потенциалы приближений.

В различных отраслях современной техники широкое применение получили элементы из пьезоматериалов. В связи с этим возникла необходимость разработки методов определения их электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) под действием механических сил и электромагнитных полей [2, 14]. В работах [3, 5, 8, 10, 11] предложены методы решения задач электромагнитоупругости, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние пластинок с отверстиями, трещинами и включениями. Но в указанных работах не учитывались вязкоупругие свойства материалов, за счет которых возникающее мгновенное напряженно-деформированное состояние со временем изменяется.

В данной статье предложен подход решения задачи электромагнитовязкоупругости для кусочно-однородной пластинки с учетом вязкоупругих свойств материалов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат $Oxuz$ находящуюся в условиях обобщенного плоского электромагнитоупругого состояния конечную пьезопластинку-матрицу, занимающую многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l=\overline{1, L}$). На контурах отверстий заданы внешние усилия или перемещения, а также электромагнитные индукции или потенциалы поля; во внутренних точках области $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r=\overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы, электрические заряды и магнитные диполи. В некоторые из отверстий без предварительного натяжения вставлены включения из других пьезоматериалов. Если внешний контур L_0 полностью уходит в бесконечность, то будем иметь

бесконечную пластинку-матрицу с отверстиями и включениями. В последнем случае будем считать, что на бесконечности заданы напряжения σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ , угол жесткого поворота пластинки как целого ω_3^∞ , а также компоненты векторов индукций D_x^∞ , D_y^∞ , B_x^∞ , B_y^∞ или напряженностей E_x^∞ , E_y^∞ , H_x^∞ , H_y^∞ электромагнитного поля. Будем считать, что по упругим свойствам пластинка и включения являются линейно вязкоупругими, электромагнитные свойства материала с течением времени не изменяются.

Для определения вязкоупругого ЭМУС будем использовать метод малого параметра, позволяющий решение исходной задачи приводить к последовательности задач электромагнитоупругости, решаемых с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости.

2. Комплексные потенциалы задачи электромагнитоупругости. При решении задачи электромагнитоупругости с использованием обобщенных комплексных потенциалов определение ЭМУС пьезопластинки сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ обобщенных комплексных переменных из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций основные характеристики ЭМУС (напряжения, перемещения, индукции и потенциалы) вычисляются по формулам [3, 5]

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\ (u, v, \varphi, \psi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0, \psi_0), \\ (D_x, D_y, B_x, B_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}) \Phi'_k(z_k), \\ (E_x, E_y, H_x, H_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$z_k = x + \mu_k y; \quad (2.2)$$

μ_k – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) \left[l_{2\beta}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{2\nu}^2(\mu) \right] - l_{3g}(\mu) \left[l_{3g}(\mu) l_{2\chi}(\mu) - l_{3p}(\mu) l_{2\nu}(\mu) \right] - \\ - l_{3p}(\mu) \left[l_{3p}(\mu) l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}(\mu) l_{2\nu}(\mu) \right] = 0; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$l_{4s}(\mu) = s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22},$$

$$l_{3g}(\mu) = g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22},$$

$$l_{3p}(\mu) = p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \quad l_{2\nu}(\mu) = -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \\ \lambda_{7k} &= v_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -v_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k; \\ p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})v_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k, \\ r_k^0 &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})v_k - (v_{11}\mu_k - v_{12})\rho_k, \\ h_k^0 &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (v_{11}\mu_k - v_{12})v_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{l_{3p}(\mu_k)l_{2v}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}, \\ \rho_k &= \frac{l_{3g}(\mu_k)l_{2v}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k)l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$ – жесткие перемещения тела как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy против часовой стрелки, причем $\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; u_0 , v_0 – компоненты поступательного движения тела; φ_0 и ψ_0 – нулевой уровень потенциалов электрического и магнитного полей.

Функции $\Phi_k(z_k)$ для неподкрепленных контуров L_l должны удовлетворять граничным условиям [8]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, v_k, \rho_k) \Phi_k(z_k) &= \\ &= \pm \int_0^s (-Y_{ln}, X_{ln}, D_{ln}, B_{ln}) ds + (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

при задании на контуре индукции электромагнитного поля D_{ln} , B_{ln} или

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) &= \\ &= \left(\mp \int_0^s Y_{ln} ds + c_{l1}, \mp \int_0^s -X_{ln} ds + c_{l2}, \varphi_{l*} - \varphi_0, \psi_{l*} - \psi_0 \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей φ_{l*} , ψ_{l*} . Для контуров, на которых заданы перемещения u_{l*} , v_{l*} , граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, v_k, \rho_k) \Phi_k(t_k) = \left(u_{l^*} + \omega_3 y - u_0, v_{l^*} - \omega_3 x - v_0, \pm \int_0^s D_{ln} ds + c_{l3}, \pm \int_0^s B_{ln} ds + c_{l4} \right), \quad (2.9)$$

при задании на контурах индукций или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(t_k) = (u_{l^*} + \omega_3 y - u_0, v_{l^*} - \omega_3 x - v_0, \varphi_{l^*} - \varphi_0, \psi_{l^*} - \psi_0), \quad (2.10)$$

если на контуре заданы потенциалы электрического и магнитного полей. В (2.7) – (2.10) верхние знаки в правой части относятся к внешнему контуру конечной пластинки, нижние – к контурам отверстий. В случае идеального механического и электромагнитного контактов пластинки с включением области $S^{(l)}$, граничные условия на L_l имеют вид [3, 9]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) - (1, \mu_k^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, v_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)}) \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = (c_{l1}, c_{l2}, \omega_3 y - u_0 - \omega_3^{(l)} y + u_0^{(l)}, -\omega_3 x - v_0 + \omega_3^{(l)} x + v_0^{(l)}, c_{l3}, c_{l4}, \varphi_0, \psi_0), \quad (2.11)$$

где $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ – комплексные потенциалы для включения с областью $S^{(l)}$; c_{li} – постоянные.

Для абсолютно жесткого включения должно выполняться также условие [3]

$$\sum_{k=1}^4 (\beta_{kl1} - \bar{\beta}_{kl1}) = 0, \quad (2.12)$$

в котором β_{kl1} – вычеты функции $\Phi_{k0}(z_k)$ в точках z_{kl} .

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (2.2). В общем случае функции имеют вид [3, 5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{k0}(z_k). \quad (2.13)$$

Здесь Γ_k – постоянные, равные нулю для конечной области и определяемые из системы

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k =$$

$$= \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right) \quad (2.14)$$

для бесконечной области при задании на бесконечности компонент векторов индукций электромагнитного поля или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0 \right) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty, -H_x^\infty, -H_y^\infty \right), \quad (2.15)$$

если на бесконечности заданы компоненты векторов напряженности поля; A_{kl} , A_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kl} = \\ = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (2.16)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right) i A_{kr}^0 = \\ = \left(\frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0, 0 \right); \quad (2.17)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; X_l , Y_l и Q_{el} , Q_{ml} – компоненты главного вектора внешних усилий и суммарные электрический и магнитный заряды, приложенные к контуру L_l ; X_r^0 , Y_r^0 и Q_{er}^0 , Q_{mr}^0 – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенные электрические заряды и диполи в точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$.

3. Комплексные потенциалы задачи электромагнитовязкоупругости. Для решения задачи вязкоупругости используем метод малого параметра, в качестве которого по аналогии с решением задачи вязкоупругости для анизотропной пластинки [6, 7] возьмем изменение с течением времени коэффициента Пуассона ν_{12} :

$$\lambda = \nu_{12} - \nu_{12}^0. \quad (3.1)$$

Здесь ν_{12}^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона. Учитывая равенство (3.1), находим выражения

$$s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}, \quad p_k = p_{k0} + \lambda p_{k1}, \quad q_k = q_{k0} + \lambda q_{k1}, \quad (3.2)$$

В которых

$$s_{12}^0 = -\nu_{12}^0 s_{11}, \quad p_{k1} = -s_{11}, \quad q_{k1} = -s_{11} \mu_k,$$

$$\begin{aligned}
p_{k0} &= (\mu_k^2 - v_{12}^0) s_{11} - s_{16} \mu_k + (g_{11} \mu_k - g_{21}) v_k + (p_{11} \mu_k - p_{21}) \rho_k, \\
q_{k0} &= -\mu_k v_{12}^0 s_{11} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Разложим входящие в выражения (2.13) постоянные Γ_k , A_{kl} , A_{kr}^0 , ω_3 и функции $\Phi_k^*(z_k)$ в ряды по малому параметру λ [7]:

$$\begin{aligned}
\Gamma_k &= \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}, \quad A_{kl} = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkl}, \quad A_{kr}^0 = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkr}^0; \\
(\Phi_k^*(z_k), \omega_3) &= \sum_{j=0} \lambda^j (\Phi_{jk}^*(z_k), \omega_{j3}). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Учитывая разложения (3.4), функции (2.13) представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \quad (3.5)$$

где

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^L A_{jkl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{jkr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{jk}^*(z_k); \quad (3.6)$$

Γ_{jk} – постоянные, равные нулю для конечной области и определяемые из систем уравнений

$$\begin{aligned}
&2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_{0k} = \\
&= \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} \left[2\omega_3^\infty + 3s_{26} \sigma_y^\infty + (s_{66} - 2v_{12}^0 s_{11}) \tau_{xy}^\infty + s_{16} \sigma_x^\infty \right], \right. \\
&\quad \left. -D_y^\infty, D_x^\infty, -B_y^\infty, B_x^\infty \right\}, \\
&2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left(g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\rho_k}{s_{22}} \left(p_{22} - \frac{2p_{12} + p_{26}}{2} \mu_k + \frac{p_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k \right\} \Gamma_{1k} = \\
&= \left\{ 0, 0, 0, -\frac{s_{11}}{2s_{22}} \tau_{xy}^\infty, 0, 0, 0, 0 \right\}, \quad \Gamma_{jk} = 0 \quad (j \geq 2) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

в случае бесконечной области; A_{jkl} – постоянные, определяемые из сис-

тем уравнений

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \right. \\
& \quad \left. v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{0kl} = \left\{ \frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, \right. \\
& \quad \left. -\frac{s_{16} X_l - v_{12}^0 s_{11} Y_l + g_{21} Q_{el} + p_{21} Q_{ml}}{2\pi s_{11}}, \right. \\
& \quad \left. -\frac{v_{12}^0 s_{11} X_l + s_{26} Y_l + g_{12} Q_{el} + p_{12} Q_{ml}}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, 0, -\frac{Q_{ml}}{2\pi}, 0 \right\}, \\
& 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[1 + \frac{v_k g_{11} + \rho_k p_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[1 - \frac{v_k g_{22} - \rho_k p_{22}}{s_{22}} \right], \right. \\
& \quad \left. v_k, r_k^0, \rho_k, h_k^0 \right\} i A_{1kl} = \{0, 0, -s_{11} Y_l, -s_{11} X_l, 0, 0, 0, 0\}, \\
& A_{jkl} = 0 \quad (j \geq 2), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

в которых A_{jkr}^0 – постоянные, удовлетворяющие системам уравнений (3.8), в которых величины X_l, Y_l, Q_{el}, Q_{ml} нужно заменить на $X_r^0, Y_r^0, Q_{er}^0, Q_{mr}^0$; $\Phi_{jk}^*(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , полученными из контура L_l аффинными преобразованиями (2.2).

Исходя из (2.7) – (2.11), для определения комплексных потенциалов приближений $\Phi_{jk}(z_k)$ получим следующие граничные условия. Для неподкрепленных контуров механические граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} \left(\mp \int_0^s Y_{ln} ds + c_{1l}, \pm \int_0^s X_{ln} ds + c_{2l} \right), \tag{3.9}$$

если на контуре заданы усилия и

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (p_{k0}, q_{k0}) \Phi_{jk}(t_k) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0}) (p_{k1}, q_{k1}) \Phi_{j-1,k}(t_k) + \\
&+ \delta_{j0} (u_{l*} - u_0 \omega_{j3} y, v_{l*} - v_0 - \omega_{j3} x) \tag{3.10}
\end{aligned}$$

при задании на контуре перемещений u_{l*}, v_{l*} . Электромагнитные граничные условия получаются такими:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (v_k, \rho_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} \left(\pm \int_0^s D_{ln} ds + c_{3l}, \pm \int_0^s B_{ln} ds + c_{4l} \right) \tag{3.11}$$

при задании на контуре электрической и магнитной индукции и

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(r_k^0, h_k^0 \right) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} (\varphi_{l*} + c_{3l}, \psi_{l*} + c_{4l}), \quad (3.12)$$

если на контуре заданы потенциалы φ_{l*} , ψ_{l*} . В случае упругих включений граничные условия для функций получаются такими:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[g_{ki} \Phi_{jk}(t_k) - g_{ki}^{(l)} \Phi_{jk}^{(l)}(t_k^{(l)}) \right] &= \delta_{j0} \varepsilon_i, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(p_{k0}, q_{k0}) \Phi_{jk}(t_k) - (p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)}) \Phi_{jk}^{(l)}(t_k^{(l)}) \right] &= \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0}) \left[(p_{k1}, q_{k1}) \Phi_{j-1,k}(t_k) - (p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)}) \Phi_{j-1,k}^{(l)}(t_k^{(l)}) \right] &+ \\ + \delta_{j0} \left(u_{l0} - u_{l*} + (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)}) y, v_{l0} - v_{l*} - (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)}) x \right), & \quad (3.13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_{ki} &= \left(1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, r_k^0, h_k^0 \right), \\ g_{ki}^{(l)} &= \left(1, \mu_k^{(l)}, \nu_k^{(l)}, \rho_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)} \right), \\ \varepsilon_i &= (c_{1l}, c_{2l}, c_{3l}, c_{4l}, \varphi_0, \psi_0) \quad (i = \overline{1, 6}). \end{aligned}$$

При этом $\Phi_{jk}^{(l)}(z_k^{(l)})$ – функции приближений для включений, для которых имеют место формулы, аналогичные (3.6), с учетом того, что в силу их конечности нужно принимать $\Gamma_{jk}^{(l)} = 0$.

После определения комплексных потенциалов приближений комплексные потенциалы для пластинки-матрицы определяются по формуле (3.5), в которой степени λ^j вычисляются с помощью таких операторных выражений [6, 7]:

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathfrak{A}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*) \cdot \mathfrak{A}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathfrak{A}_\alpha^{*k} (-\beta_2^*) - \mathfrak{A}_\alpha^{*j-k} (-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4\nu_{12}^0 \right], \quad D_2 = \frac{\delta_2^*}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}. \quad (3.15)$$

E_i^0 ($i = 1, 2$) – мгновенно упругие значения E_i ; δ_i^* , β_i^* – реологические постоянные материала включения, связанные с изменением E_i во време-

ни. По аналогичным формулам вычисляются основные характеристики для включений, причем

$$\Phi_k^{(l)}(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}^{(l)}(z_k). \quad (3.16)$$

Рассмотрим частные задачи.

4. Пластинка с эллиптическим ядром. Рассмотрим бесконечную пластинку с одним эллиптическим ядром. Обозначим контур отверстия и его полуоси через L_1 , a_1 , b_1

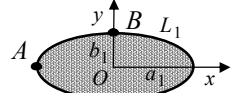


Рис. 1

(рис. 1). На бесконечности $\sigma_y^\infty = p$, $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$,

$$E_y^\infty = \varepsilon, \quad H_y^\infty = \mu, \quad E_x^\infty = H_x^\infty = 0.$$

В данном случае комплексные потенциалы (3.6) примут вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \Phi_{jk1}(z_k), \quad (4.1)$$

где $\Phi_{jk1}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллипсов L_{k1} , соответствующих L_1 при аффинных преобразованиях (2.2). Для построения этих функций используем конформные отображения. Функции

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + m_{k1} / \zeta_{k1} \right), \quad (4.2)$$

в которых

$$R_{k1} = \frac{a_1 - i \mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i \mu_k b_1}{a_1 - i \mu_k b_1}, \quad (4.3)$$

отображают конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1} . Тогда $\Phi_{jk1}(z_k)$, голоморфные вне L_{k1} , будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$, включая бесконечно удаленную точку, и их можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням ζ_{k1} . Поэтому для функций (4.1) будем иметь выражения

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jkn}}{\zeta_{k1}^n}. \quad (4.4)$$

Комплексные потенциалы для ядра примут вид

$$\Phi_{jk}^{(1)}(z_k^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(1)} P_n \left(z_k^{(1)} \right), \quad (4.5)$$

где $P_n \left(z_k^{(1)} \right)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства [13]

$$P_0 = 1, \quad P_n \left(z_k^{(1)} \right) = \left(\zeta_k^{(1)} \right)^n + \left(m_k^{(1)} \right)^n / \left(\zeta_k^{(1)} \right)^n; \quad (4.6)$$

$\zeta_k^{(1)}$ – переменные, определяемые из конформных отображений внешне-

сти единичных кругов $\left| \zeta_k^{(1)} \right| \geq 1$ на внешности эллипсов $L_k^{(1)}$

$$\begin{aligned} z_k^{(1)} &= R_k^{(1)} \left(\zeta_k^{(1)} + m_k^{(1)} / \zeta_k^{(1)} \right); \\ R_k^{(1)} &= \left(a_1 - i\mu_k^{(1)} b_1 \right) / 2, \quad m_k^{(1)} = \left(a_1 + i\mu_k^{(1)} b_1 \right) / \left(a_1 - i\mu_k^{(1)} b_1 \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставив функции (4.1) и (4.5) в граничные условия (3.13) и применив метод рядов получим, что $a_{jk1n} = a_{jkn}^1 = 0$ ($j = 0, 1, \dots, n \geq 2$), а a_{jk11} и a_{jk1}^1 находятся из системы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \left(g_{ki} a_{jk11} - g_{ki}^{(l)} a_{k1}^{(1)} m_k^{(1)} - \bar{g}_{ki}^{(l)} \bar{a}_{k1}^{(1)} \right) &= - \sum_{k=1}^4 \left[g_{ki} \Gamma_{jk} R_{k1} m_{k1} + \bar{g}_{ki} \bar{\Gamma}_{jk} \bar{R}_{k1} \right], \\ \sum_{k=1}^4 \left((p_{k0}, q_{k0}) a_{jk11} - (p_{k0}^{(1)}, q_{k0}^{(1)}) a_{jk1}^{(1)} m_k^{(1)} - (\bar{p}_{k0}^{(1)}, \bar{q}_{k0}^{(1)}) \bar{a}_{jk1}^{(1)} \right) &= \\ &= - \sum_{k=1}^4 \left\{ (p_{k0}, q_{k0}) \Gamma_{jk} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0}) \bar{\Gamma}_{jk} \bar{R}_{k1} \right\} - \\ &- \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_j^0) \left\{ (p_{k1}, q_{k1}) \Gamma_{j-1k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k1}, \bar{q}_{k1}) \bar{\Gamma}_{j-1k} \bar{R}_{k1} + \right. \\ &\left. + (p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1k11} - (p_{k1}^{(1)}, q_{k1}^{(1)}) a_{j-1k1}^{(1)} m_k^{(1)} - (\bar{p}_{k1}^{(1)}, \bar{q}_{k1}^{(1)}) \bar{a}_{j-1k1}^{(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Окончательно комплексные потенциалы примут вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \frac{a_{jk11}}{\zeta_{k1}}, \quad \Phi_{jk}^{(1)}(z_k^{(1)}) = a_{jk1}^{(1)} \frac{z_k^{(1)}}{R_k^{(1)}}. \quad (4.9)$$

Вычислив по формуле (3.14) степени малого параметра λ^j и умножив их на функции приближений (4.9), получим комплексные потенциалы (3.5) и (3.16), а также их производные, а по ним и значения основных характеристик в любой момент времени.

Были проведены численные исследования изменения во времени основных характеристик ЭМУС в пластинке для следующих материалов: композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [18]; композит, упругие, и электрические постоянные которого соответствуют кадмию селенида $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ [17] (материал М2); композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные, которого соответствуют $PZT - 4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ [17] (материал М3). Постоянные материалов приведены в табл. 1. Реологические постоянные материалов были выбраны на основе анализа известных в литературе реологических постоянных [12, 15].

При проведении расчетов считалось, что постоянные материалов ядер были связаны с соответствующими постоянными материала пластинки

следующим образом [10]:

$$s_{ij}^{(1)} = \lambda_s^{(1)} s_{ij}, \quad g_{ki}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} g_{ki}, \quad p_{ki}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} p_{ki},$$

$$\beta_{kl}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{pe}^{(1)}} \beta_{kl}, \quad \chi_{kl}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{pe}^{(1)}} \chi_{kl}, \quad v_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{pe}^{(1)}} v_{ij},$$

где $\lambda_s^{(l)}$ и $\lambda_{pe}^{(l)}$ – параметры относительной жесткости и пьезоэффектности материала ядра $S^{(l)}$.

При проведении расчетов количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло максимальные значения напряжений предыдущего приближения более чем на 0,01%. Для этого в рассмотренных случаях необходимо было оставлять от 5 до 10 приближений (степеней малого параметра λ).

В табл. 2 для растяжения пластинки из материалов М1 и М3 усилиями $\sigma_y^\infty = p$ в зависимости от значений параметра относительной жесткости $\lambda_s^{(1)}$ и параметра пьезоэффектности $\lambda_{pe}^{(1)}$, с точностью до множителя p приведены значения нормальных напряжений σ_s в точках пластинки, на площадках, перпендикулярных к контуру включения в начальном (0 час.) и стационарном (через 200 час.) состоянии. Значения величин при $\lambda_s^{(1)} = 0$ и $\lambda_{pe}^{(1)} = \infty$ соответствуют случаям абсолютно жесткого и абсолютно мягкого ядра. На

Таблица 1

Величина	Материалы		
	М1	М2	М3
$s_{11}/s_0 = s_{33}/s_0$	7,165	22,260	10,745
s_{22}/s_0	6,797	14,984	7,398
s_{66}/s_0	19,912	47,481	7,637
s_{12}/s_0	-2,337	-6,437	-2,542
s_{13}/s_0	-2,736	-11,942	-5,595
$g_{16}/g_0 = g_{34}/g_0$	2,028	109,22	2,054
$g_{21}/g_0 = g_{23}/g_0$	-0,496	-4,333	-1,159
g_{22}/g_0	1,157	8,016	2,458
$p_{16}/p_0 = p_{34}/p_0$	1,850	268,318	98,843
$p_{21}/p_0 = p_{23}/p_0$	0,576	17,778	12,102
p_{22}/p_0	1,186	31,206	22,268
$\beta_{11}/\beta_0 = \beta_{33}/\beta_0$	0,156	19,612	0,106
χ_{22}/χ_0	0,137	10,612	0,090
$v_{11}/v_0 = v_{33}/v_0$	-0,190	213,404	-14,931
v_{22}/v_0	-0,185	-5,534	-3,740
$\chi_{11}/\chi_0 = \chi_{33}/\chi_0$	0,336	0,590	0,805
χ_{22}/χ_0	0,119	0,575	0,704
α^*	0,50	0,22	0,25
$\beta_1^*, c^{\alpha-1}$	0,0011	0,014	0,00039
$\beta_2^*, c^{\alpha-1}$	0,00095	0,00078	0,00015
$\delta_1^*, c^{\alpha-1}$	0,0069	0,0095	0,0061
$\delta_2^*, c^{\alpha-1}$	0,0065	0,0064	0,0066

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3 \text{ МН м}^2 \text{ МКл}^{-2}, \quad v_0 = 10^{-1} \text{ МКл м МА}^{-1},$$

$$\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа МТл}^{-2}$$

Таблица 2

Точка	$\lambda_{pe}^{(1)}$	t , час.	$\lambda_s^{(1)}$							
			0	10^{-2}	10^{-1}	0,5	2	10	10^2	∞
Материал М1										
A	0,1	0	0,058	0,072	0,189	0,613	1,478	2,488	2,951	3,013
		200	0,025	0,039	0,162	0,603	1,484	2,492	2,951	3,013
	0,5	0	0,078	0,091	0,203	0,610	1,457	2,475	2,952	3,017
		200	0,041	0,054	0,173	0,600	1,464	2,479	2,952	3,017
	1	0	0,173	0,184	0,285	0,657	1,454	2,460	2,951	3,019
		200	0,131	0,144	0,251	0,645	1,462	2,464	2,952	3,019
B	0,1	0	0,479	0,472	0,412	0,195	-0,251	-0,775	-1,017	-1,049
		200	0,663	0,653	0,563	0,255	-0,301	-0,828	-1,025	-1,049
	0,5	0	0,478	0,471	0,412	0,196	-0,247	-0,771	-1,013	-1,046
		200	0,662	0,651	0,563	0,257	-0,298	-0,825	-1,021	-1,046
	1	0	0,457	0,451	0,394	0,187	-0,243	-0,763	-1,009	-1,043
		200	0,635	0,625	0,541	0,247	-0,294	-0,819	-1,018	-1,042
Материал М3										
A	0,1	0	0,254	0,264	0,353	0,672	1,327	2,136	2,536	2,592
		200	0,400	0,406	0,458	0,696	1,337	2,185	2,547	2,592
	0,5	0	0,359	0,366	0,429	0,669	1,237	2,080	2,556	2,625
		200	0,348	0,355	0,417	0,660	1,254	2,121	2,565	2,625
	1	0	0,636	0,640	0,680	0,836	1,252	2,021	2,564	2,652
		200	0,538	0,545	0,598	0,802	1,283	2,062	2,573	2,652
B	0,1	0	0,364	0,360	0,324	0,172	-0,241	-0,894	-1,260	-1,313
		200	0,959	0,943	0,810	0,363	-0,396	-1,063	-1,287	-1,313
	0,5	0	0,349	0,345	0,312	0,174	-0,195	-0,818	-1,195	-1,252
		200	0,938	0,924	0,800	0,376	-0,372	-1,021	-1,228	-1,252
	1	0	0,287	0,283	0,252	0,127	-0,191	-0,754	-1,142	-1,204
		200	0,809	0,797	0,691	0,317	-0,375	-0,995	-1,184	-1,204

рис. 2, 3 для материалов М1 и М3 соответственно изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру для начального (сплошные линии) и стационарного (штриховые линии) состояний для различных значений параметра $\lambda_s^{(1)}$. Как видно из табл. 2 и рис. 2–3, при переходе в стационарное состояние значения напряжений изменяется значительно, особенно с увеличением жесткости ядра. При переходе в стационарное состояние они в точке *A* при $\lambda_s^{(1)} < 1$ уменьшаются, при $\lambda_s^{(1)} > 1$ увеличиваются. В точке *B* при переходе в стационарное состояние напряжения увеличиваются при любых значениях $\lambda_s^{(1)}$. С уменьшением относительной жесткости включения (с увеличением $\lambda_s^{(1)}$) концентрация напряжений в окрестности точек *A* и *B* растет, но при этом уменьшается влияние времени на значения напряжений, для абсолютно мягкого включения ($\lambda_s^{(1)} = \infty$), как и в задачах вязкоупругости для анизотропных пластинок

[6, 7], значения напряжений со временем не изменяются. При $\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$ включение можно считать абсолютно жестким, при $\lambda_s^{(1)} > 10^2$ – абсолютно мягким. Изменения напряжений при переходе в стационарное состояние

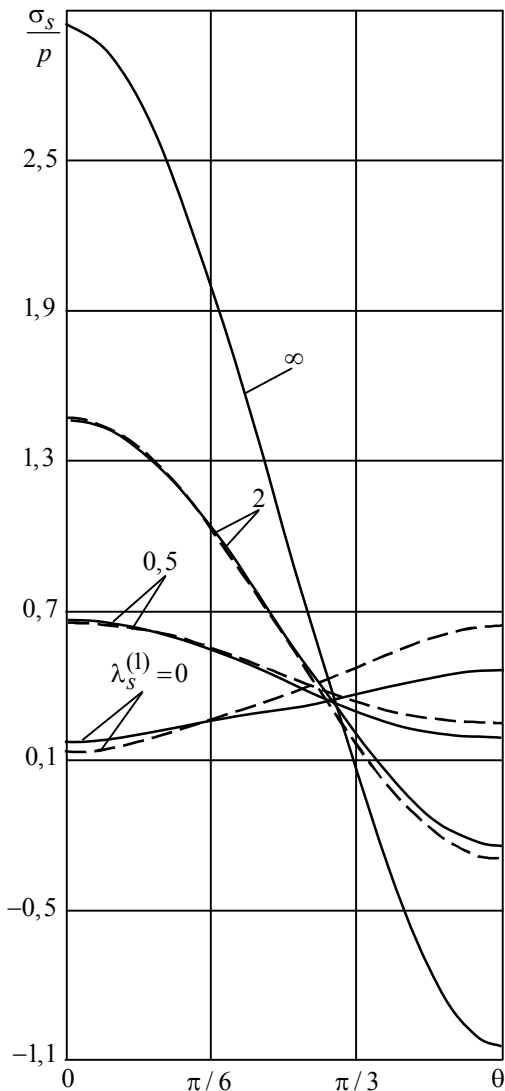


Рис. 2

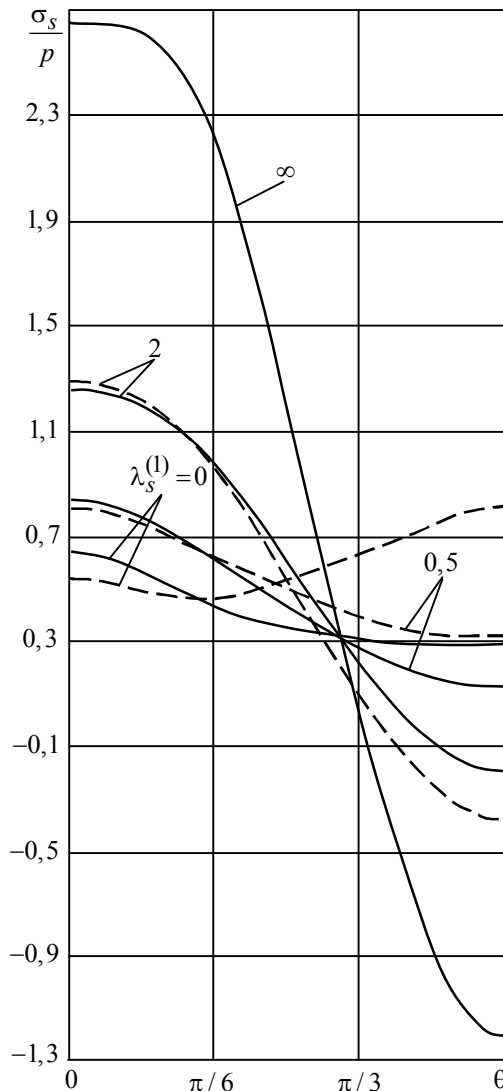


Рис. 3

для пластинки из «сильно анизотропного» материала МЗ больше, чем из «слабо анизотропного» материала М1. Так при $\lambda_s^{(1)} = 0$ и $\lambda_{pe}^{(1)} = 1$, значения σ_s в точке В для пластинки из материала М1 изменяются на 39%, тогда как для пластинки материала МЗ – более чем в 2,5 раза. С увеличением параметра пьезоэффектности $\lambda_{pe}^{(1)}$ увеличивается и изменение напряжений при переходе в стационарное состояние.

В табл. 3 и табл. 4 для случаев действия на бесконечности электрического поля с напряженностью $E_y^\infty = \varepsilon$ и магнитного поля с напряженно-

Таблица 3

Точ- ка	$\lambda_{pe}^{(1)}$	t , час.	$\lambda_s^{(1)}$								
			0	10^{-2}	10^{-1}	0,5	2	10	10^2	∞	
Материал М1											
А	0,1	0	-20,42	-20,32	-19,50	-16,50	-10,39	-3,26	0,01	0,45	
		200	-20,21	-20,12	-19,32	-16,42	-10,47	-3,37	-0,01	0,45	
	0,25	0	-16,72	-16,65	-15,98	-13,57	-8,61	-2,75	-0,04	0,33	
		200	-16,63	-16,55	-15,90	-13,53	-8,65	-2,82	-0,05	0,33	
	0,5	0	-10,79	-10,75	-10,33	-8,82	-5,66	-1,85	-0,06	0,18	
		200	-10,80	-10,75	-10,33	-8,81	-5,67	-1,88	-0,07	0,18	
	0,75	0	-5,20	-5,18	-4,99	-4,28	-2,78	-0,93	-0,05	0,08	
		200	-5,22	-5,20	-5,00	-4,28	-2,78	-0,94	-0,05	0,08	
	0,95	0	-1,01	-1,00	-0,97	-0,83	-0,55	-0,19	-0,01	0,01	
		200	-1,01	-1,01	-0,97	-0,83	-0,55	-0,19	-0,01	0,01	
	В	0,1	0	4,93	4,91	4,75	4,14	2,86	1,29	0,55	0,45
			200	6,35	6,30	5,91	4,61	2,47	0,88	0,48	0,45
0,25		0	4,85	4,83	4,66	4,04	2,73	1,16	0,43	0,33	
		200	5,99	5,95	5,60	4,42	2,42	0,83	0,37	0,33	
0,5		0	3,78	3,76	3,62	3,13	2,09	0,84	0,26	0,18	
		200	4,50	4,47	4,22	3,37	1,89	0,63	0,23	0,18	
0,75		0	2,05	2,04	1,96	1,69	1,13	0,45	0,12	0,08	
		200	2,39	2,38	2,25	1,81	1,03	0,34	0,10	0,08	
0,95		0	0,42	0,42	0,41	0,35	0,24	0,09	0,02	0,01	
		200	0,49	0,49	0,46	0,37	0,22	0,07	0,02	0,01	
Материал М3											
А		0,1	0	-47,70	-47,46	-45,42	-38,31	-24,74	-9,41	-2,25	-1,27
	200		-37,73	-37,73	-37,65	-35,73	-26,03	-9,80	-2,24	-1,27	
	0,25	0	-35,34	-35,19	-33,92	-29,31	-19,71	-7,67	-1,66	-0,82	
		200	-30,49	-30,45	-30,09	-27,97	-20,43	-7,86	-1,64	-0,82	
	0,5	0	-19,49	-19,43	-18,89	-16,84	-12,02	-4,94	-0,96	-0,38	
		200	-18,44	-18,40	-18,04	-16,52	-12,21	-4,95	-0,94	-0,38	
	0,75	0	-8,14	-8,12	-7,94	-7,24	-5,43	-2,37	-0,44	-0,14	
		200	-8,12	-8,10	-7,93	-7,23	-5,43	-2,34	-0,42	-0,14	
	0,95	0	-1,42	-1,42	-1,39	-1,28	-0,99	-0,46	-0,08	-0,02	
		200	-1,46	-1,45	-1,42	-1,30	-0,99	-0,45	-0,08	-0,02	
	В	0,1	0	12,07	12,10	12,33	12,57	10,61	4,67	0,69	0,09
			200	25,47	25,21	23,09	16,60	7,65	1,80	0,25	0,09
0,25		0	11,29	11,30	11,37	11,26	9,33	4,19	0,72	0,20	
		200	21,20	21,01	19,43	14,39	6,90	1,73	0,34	0,20	
0,5		0	8,06	8,05	8,03	7,76	6,35	2,94	0,57	0,20	
		200	13,54	13,44	12,55	9,59	4,81	1,26	0,30	0,20	
0,75		0	4,04	4,04	4,00	3,81	3,10	1,48	0,30	0,11	
		200	6,32	6,27	5,89	4,60	2,39	0,64	0,16	0,11	
0,95		0	0,79	0,79	0,78	0,74	0,60	0,29	0,06	0,02	
		200	1,18	1,18	1,11	0,88	0,47	0,13	0,03	0,02	

стью $H_y^\infty = \mu$ с точностью до значений ε и μ соответственно приведены результаты расчетов, аналогичные данным табл. 2 для растяжения. Видно,

Таблица 4

Точ- ка	$\lambda_{pe}^{(1)}$	t , час.	$\lambda_s^{(1)}$								
			0	10^{-2}	10^{-1}	0,5	2	10	10^2	∞	
Материал М1											
А	0,1	0	-199,6	-198,5	-188,7	-153,2	-80,9	3,4	42,1	47,3	
		200	-190,4	-189,4	-181,0	-150,0	-83,8	0,2	41,6	47,3	
	0,25	0	-170,9	-170,0	-162,0	-132,7	-72,4	-1,0	32,2	36,7	
		200	-163,4	-162,6	-155,7	-130,1	-74,7	-3,8	31,7	36,7	
	0,5	0	-116,3	-115,7	-110,6	-91,8	-52,3	-4,1	18,7	21,9	
		200	-111,6	-111,1	-106,6	-90,1	-53,8	-6,0	18,4	21,9	
	0,75	0	-58,0	-57,8	-55,4	-46,5	-27,4	-3,4	8,3	9,9	
		200	-55,8	-55,6	-53,5	-45,7	-28,2	-4,4	8,1	9,9	
	0,95	0	-11,4	-11,4	-10,9	-9,3	-5,6	-0,9	1,5	1,8	
		200	-11,0	-11,0	-10,6	-9,1	-5,8	-1,1	1,5	1,8	
	В	0,1	0	50,1	50,3	52,3	59,2	72,4	86,2	92,1	92,9
			200	68,7	68,5	67,6	65,4	67,2	80,7	91,2	92,9
0,25		0	34,6	34,8	36,5	42,5	54,0	66,1	71,3	71,9	
		200	50,3	50,2	49,4	47,7	49,6	61,3	70,5	71,9	
0,5		0	15,6	15,7	17,0	21,4	29,9	38,8	42,4	42,9	
		200	26,1	26,0	25,7	25,0	26,9	35,4	41,9	42,9	
0,75		0	4,2	4,3	5,0	7,5	12,3	17,2	19,2	19,4	
		200	9,4	9,4	9,3	9,3	10,8	15,5	18,9	19,4	
0,95		0	0,3	0,3	0,5	1,0	2,1	3,1	3,6	3,6	
		200	1,3	1,3	1,3	1,4	1,8	2,8	3,5	3,6	
Материал М3											
А		0,1	0	-812,6	-806,7	-756,4	-584,6	-269,8	65,7	215,7	236,0
	200		-483,5	-485,4	-497,8	-495,3	-320,9	36,9	213,0	236,0	
	0,25	0	-572,8	-569,3	-539,7	-433,9	-221,4	32,1	154,4	171,3	
		200	-389,8	161,6	-393,1	-380,2	-256,0	9,7	152,1	171,3	
	0,5	0	-287,0	-285,8	-274,7	-232,7	-135,6	4,8	82,8	94,1	
		200	-224,8	-224,7	-223,6	-212,3	-151,5	-8,3	81,3	94,1	
	0,75	0	-107,5	-107,1	-104,1	-91,9	-59,5	-2,6	34,4	40,1	
		200	-91,5	-91,5	-90,7	-86,2	-64,9	-8,3	33,6	40,1	
	0,95	0	-17,0	-17,0	-16,6	-15,1	-10,5	-1,0	6,0	7,2	
		200	-15,2	-15,2	-15,0	-14,4	-11,3	-2,0	5,9	7,2	
	В	0,1	0	238,0	240,3	259,1	312,5	359,6	328,9	287,2	280,2
			200	563,8	558,8	518,6	406,9	294,9	271,4	278,8	280,2
0,25		0	159,9	-390,3	175,6	217,0	259,4	242,0	209,9	204,4	
		200	395,9	392,6	365,8	288,7	207,4	193,9	202,8	204,4	
0,5		0	66,7	67,7	76,2	102,8	136,2	134,8	116,5	113,0	
		200	194,5	193,0	180,7	144,0	103,8	102,5	111,6	113,0	
0,75		0	15,9	16,4	20,5	33,7	53,0	57,4	49,9	48,3	
		200	68,6	68,1	64,0	51,5	38,0	41,3	47,4	48,3	
0,95		0	0,8	0,9	1,7	4,3	8,2	10,2	9,0	7,2	
		200	9,9	9,8	9,2	7,5	5,7	7,0	8,5	7,2	

что под действием электрического поля, в пластинке возникают весьма значительные напряжения, причем, в отличие от действия механических усилий, в этом случае на значения напряжений велико влияние не только параметра относительной жесткости включения $\lambda_s^{(1)}$, но и параметра относительной пьезоэффектности $\lambda_{pe}^{(1)}$. Закономерность влияния жесткости включения для действия электрического и магнитного полей такие же, как и в случае растяжения, что же касается относительной пьезоэффектности, то, как следует из табл. 3 и табл. 4, чем меньше $\lambda_{pe}^{(1)}$, тем больше значения возникающих в пластинке напряжений.

5. Пластинка с конечным числом включений. В случае многосвязной области удобнее использовать граничные условия в дифференциальной форме. Продифференцировав граничные условия (3.13) по дуге контура, получим

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[g_{ki} \delta_k \Phi'_{jk} (t_k) - g_{ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} \Phi'_{jk} (t_k^{(l)}) \right] &= 0 \quad (i = \overline{1, 6}), \\
 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(p_{k0}, q_{k0}) \delta_k \Phi'_{jk} (t_k) - (p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)}) \delta_k^{(l)} \Phi'_{jk} (t_k^{(l)}) \right] &= \\
 &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0}) \left[(p_{k1}, q_{k1}) \delta_k^{(l)} \Phi'_{j-1,k} (t_k) - \right. \\
 &\quad \left. - (p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)}) \delta_k^{(l)} \Phi'_{j-1,k} (t_k^{(l)}) \right] + \\
 &\quad + \delta_{j0} \left(\frac{du^*}{ds} - (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)}) \frac{dy}{ds}, \frac{dv^*}{ds} + (\omega_{j3} - \omega_{j3}^{(l)}) \frac{dx}{ds} \right), \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

где $\delta_k = dz_k/ds$.

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [4]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (5.2)$$

причем

$$\begin{aligned}
 z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\
 R_{kl} &= \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2, \\
 m_{kl} &= \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2R_{kl}.
 \end{aligned}$$

Разлагая функции, голоморфные вне контуров отверстий L_{kl} , в ряды Лорана, для функций $\Phi_{jkl}^*(z_k)$ получаем представления

$$\Phi_{jkl}^* (z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jkl n}}{\zeta_{kl}^n}.$$

Окончательно комплексные потенциалы приближений для пластинок $\Phi_{jk} (z_k)$ и их производные получим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{jk} (z_k) &= \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \phi_{kln} (z_k); \\ \Phi'_{jk} (z_k) &= \Gamma_{jk} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkl n} \phi'_{kln} (z_k), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\phi_{kln} (z_k) = \zeta_{kl}^{-n}, \quad \phi'_{kln} (z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (5.4)$$

$a_{jkl n}$ – постоянные, вычисляемые из граничных условий на контурах.

Разлагая функции, голоморфные в эллипсах L_{kl} в ряды по полиномам Фабера, найдем

$$\Phi_{jk}^{(l)} (z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jkn}^{(l)} \Psi_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)}), \quad \Phi'_{jk}{}^{(l)} (z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jkn}^{(l)} \Psi'_{kn}{}^{(l)} (z_k^{(l)}). \quad (5.5)$$

Здесь

$$\Psi_{kn}^{(l)} (z_k^{(l)}) = \frac{(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n}{(R_k^{(l)})^n}, \quad \Psi'_{kn}{}^{(l)} (z_k^{(l)}) = \frac{n (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1}}{(R_k^{(l)})^n}; \quad (5.6)$$

$$R_k^{(l)} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l) \right] / 2,$$

$$z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l}; \quad (5.7)$$

$a_{jkn}^{(l)}$ – постоянные, вычисляемые из граничных условий на контурах.

Выберем на контурах контактов пластинок-матрицы и включений систему точек $M_{lm} (x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (5.3) и (5.5) в граничные условия (5.1) в точках $M_{lm} (x_{lm}, y_{lm})$ получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{ki} \delta_k a_{jkl n} \phi'_{kln} (t_{klm}) + \bar{g}_{ki} \bar{\delta}_k \bar{a}_{jkl n} \overline{\phi'_{kln} (t_{klm})} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{ki}^{(l)} \delta_k^{(l)} a_{jkn}^{(l)} \Psi'_{kn}{}^{(l)} (t_{km}^{(l)}) + \bar{g}_{ki}^{(l)} \bar{\delta}_k^{(l)} \bar{a}_{jkn}^{(l)} \overline{\Psi'_{kn}{}^{(l)} (t_{km}^{(l)})} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^4 \left[\mathbf{g}_{ki} \delta_k \Gamma_{jk} + \bar{\mathbf{g}}_{ki} \bar{\delta}_k \bar{\Gamma}_{jk} \right] \quad (i = \overline{1, 6}), \\
&\sum_{k=1}^4 \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left((p_{k0}, q_{k0}) \delta_k \mathbf{a}_{jkl n} \varphi'_{kln} (t_{klm}) + (\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0}) \bar{\delta}_k \bar{\mathbf{a}}_{jkl n} \overline{\varphi'_{kln} (t_{klm})} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left((p_{k0}^{(l)}, q_{k0}^{(l)}) \delta_k^{(l)} \mathbf{a}_{jkn}^{(l)} \psi_{kn}^{(l)} (t_{km}^{(l)}) + (\bar{p}_{k0}^{(l)}, \bar{q}_{k0}^{(l)}) \bar{\delta}_k^{(l)} \bar{\mathbf{a}}_{jkn}^{(l)} \overline{\psi_{kn}^{(l)} (t_{km}^{(l)})} \right) \right] = \\
&= - \sum_{k=1}^4 \left[(p_{k0}, q_{k0}) \delta_k \Gamma_{jk} + (\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0}) \bar{\delta}_k \bar{\Gamma}_{jk} \right] - \\
&\quad - \sum_{k=1}^4 (1 - \delta_{j0}) \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left((p_{k1}, q_{k1}) \delta_k \mathbf{a}_{j-1, kln} \varphi'_{kln} (t_{klm}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\bar{p}_{k1}, \bar{q}_{k1}) \bar{\delta}_k \bar{\mathbf{a}}_{j-1, kln} \overline{\varphi'_{kln} (t_{klm})} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left((p_{k1}^{(l)}, q_{k1}^{(l)}) \delta_k^{(l)} \mathbf{a}_{j-1, kn}^{(l)} \psi_{kn}^{(l)} (t_{km}^{(l)}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\bar{p}_{k1}^{(l)}, \bar{q}_{k1}^{(l)}) \bar{\delta}_k^{(l)} \bar{\mathbf{a}}_{j-1, kn}^{(l)} \overline{\psi_{kn}^{(l)} (t_{km}^{(l)})} \right) \right] \quad (i = \overline{1, 2}), \tag{5.8}
\end{aligned}$$

где

$$t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}, \quad t_{km}^{(l)} = x_{lm} + \mu_k^{(l)} y_{lm}.$$

Система (5.8) состоит из $8M_{\mathcal{L}}$ линейных алгебраических уравнений,

где $M_{\mathcal{L}} = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$. Если в рядах (5.5) оставлять по N членов, то каждое уравнение будет содержать $16N\mathcal{L}$ вещественных неизвестных для определения комплексных постоянных $\mathbf{a}_{jkl n}$ ($k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = \overline{1, N}$).

После решения системы уравнений (5.8), функции приближения $\Phi_{jk}(z_k)$ будут определены, поэтому, заменяя степени малого параметра λ^j временными операторами (3.14), можно найти значения комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ и их производных в любой момент времени, а по ним и основные характеристики ЭМУС (2.1) в любой момент времени.

После нахождения с применением сингулярного разложения [1, 16] псевдорешения системы (5.8), входящие в функции (5.5) постоянные, а, следовательно, и сами функции будут известны, что позволит вычислять напряжения в пластинке-матрице и ядре.

В табл. 5, для растяжения пластинки из материала М1 с двумя одинаковыми круговыми включениями (рис. 4) радиуса a усилиями $\sigma_y^{\infty} = p$ в зависимости от параметров относительной жесткости

$\lambda_s^{(i)}$ с точностью до множителя p для некоторых значений отношения

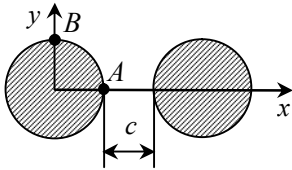


Рис. 4

Таблица 5

$\lambda_s^{(i)}$	Точка	t, час	c/a					
			∞	10	2	1	0,5	0,1
0,5	А	0	0,657	0,656	0,642	0,618	0,578	0,478
		200	0,645	0,644	0,627	0,601	0,556	0,444
	В	0	0,187	0,186	0,180	0,179	0,180	0,183
		200	0,247	0,246	0,238	0,236	0,236	0,239
2	А	0	1,454	1,455	1,467	1,502	1,589	1,917
		200	1,462	1,462	1,468	1,498	1,582	1,911
	В	0	-0,243	-0,240	-0,225	-0,224	-0,227	-0,235
		200	-0,294	-0,290	-0,272	-0,270	-0,273	-0,282

c/a , где c – расстояние между контурами включений, приведены значения нормальных напряжений σ_s в точках А и В пластинки на площадках, перпендикулярных к контуру включения в начальном (0 час.) и стационарном (через 200 час.) состоянии.

Из табл. 5 видно, что с уменьшением расстояния между включениями концентрация напряжений в зоне между включениями растет при $\lambda_s^{(i)} > 1$ и уменьшается, при $\lambda_s^{(i)} < 1$; при $c/a > 2$ влияние одного включения на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод розв'язку задач електромагнітов'язкопружності для кусково-однорідних багатозв'язних пластинок. Методом малого параметру початкова задача зведена до послідовності задач електромагнітопружності, для розв'язку яких використовуються методи комплексних потенціалів. Отримані загальні представлення комплексних потенціалів для багатозв'язних областей, граничні умови для їх визначення. Розроблена методика визначення основних характеристик електромагнітов'язкопружності у часі. Розв'язані задачі для в'язкопружної п'єзопластинки з одним або рядом включень. Досліджено змінення у часі значень основних характеристик електромагнітопружного стану.

Ключові слова: електромагнітов'язкопружність, в'язкопружне включення, кусково-однорідна п'єзопластинка, комплексні потенціали наближень.

SUMMARY. A method for solving electromagnetoviscoelasticity problem for piecewise homogeneous multiply plates is proposed. The original problem is reduced by small parameter method to a sequence of electromagnetoelasticity problems which solved using methods of complex potentials. A general submission of the complex potentials for multiply connected domains and the boundary conditions for their determination were obtained. The technique of determining the basic characteristics of electromagnetoviscoelasticity over time is developed. The problem of viscoelasticity for piezoelectric plate with one or some inclusions is solved. Variation of values of basic characteristics of electromagnetoelasticity state in time is studied.

Keywords: electromagnetoviscoelasticity, viscoelastic inclusion, piecewise piezoplate, approximations of complex potentials.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).

3. Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред.- Донецк: Юго-Восток, 2007.- 270 с.
4. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений.- К.: А.С.К., 1998.- С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7).
5. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел.- Донецк: Юго-Восток, 2011.- 232 с.
6. Калоеров С.А., Коломиец М.А. Вязкоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими включениями // Теорет.и прикладная механика.- 2009.- Вып. 45.- С. 79-89.
7. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикладная механика.- 2011.- № 2 (48).- С. 51-70.
8. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластинки с подкрепленными отверстиями // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки.- 2013.- Вып. 1.- С. 42-48.
9. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Решение задачи электромагнитоупругости для кусочно-однородных пластин // Актуальные пробл. механики деформируемого твердого тела: Тр. VII Междунар. науч. конф., Донецк-Мелекино, 11-14 июня 2013 г.- Донецк, 2013.- Т. 1.- С. 163-167.
10. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости // Теорет.и прикладная механика.- 2013.- Вып. 7 (53).- С. 118-130.
11. Калоеров С.А., Самодуров А.А. Решение задачи электромагнитоупругости для многосвязных кусочно-однородных пластинок // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки.- 2014.- Вып. 1.- С. 57-63.
12. Каминский А.А. Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел // Прикладная механика.- 2000.- Т 36, № 11.- С. 39-63.
13. Космодамианский А.С., Калоеров С.А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках.- К., Донецк: Вища шк., 1983.- 160 с.
14. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел - М.: Наука, 1988.- 472 с.
15. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий.- К.: Наук. думка, 1968.- 888 с.
16. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.- М.: Мир, 1980.- 280 с.
17. Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method // J. Appl. Mech.- 1941.- Vol. 8.- P. A169-A175.
18. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelastoc solids // Europ. J. Mech. Part A.- 2004.- Vol. 23.- P. 599-614.

Донецкий национальный университет

Поступила 15.03.2014

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р техн. наук,
Т. В. ШМАТКО, канд. техн. наук

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

С использованием теории R-функций и вариационного метода Ритца предложен подход к решению задач о свободных колебаниях функционально-градиентных (ФГ) пологих оболочек с различной формой плана. Алгоритм разработан для уточненной теории ФГ пологих оболочек типа теории С.П.Тимошенко. С помощью разработанного программного обеспечения решены тестовые задачи для ФГ пологих оболочек с квадратным и эллиптическим планом. Для иллюстрации эффективности и универсальности предложенного подхода рассмотрены оболочки различной кривизны, опирающиеся на план сложной формы.

Ключевые слова: функционально градиентные материалы, пологие оболочки, теория R-функций, RFM, метод Ритца, сложная форма, теория Тимошенко.

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) представляют собой современные неоднородные композитные материалы, которые обычно получают в результате сплава металла и керамики. Механические свойства ФГМ, в частности модули упругости, плотности, коэффициент Пуассона, непрерывно изменяются вдоль одной или нескольких координат, т.е. являются функциями этих координат. Плавное изменение свойств материала от одной поверхности оболочки к другой позволяет существенно сократить уровни концентрации напряжений при действии различных факторов, например, при воздействии температуры. Благодаря высокой прочности, легкости и высокой термостойкости ФГМ находят самое широкое применение во многих инженерных приложениях и, прежде всего, в авиационной и ракетной промышленности. Теория пластин и оболочек, изготовленных из ФГМ, интенсивно развивается. Об этом свидетельствует большое число появившихся в последние годы работ [4–8] и др. Как следует из обзора литературы, детально изучаются вопросы линейного и нелинейного динамического и статического анализа функционально-градиентных пластин и оболочек. При этом наиболее существенный прогресс, достигнут для объектов, моделируемых пластинами и оболочками, в основном прямоугольной или круглой формы, свободно опертых или жестко защемленных по всему контуру.

В данной работе для исследования собственных колебаний ФГ пластин и пологих оболочек различной формы в плане предложено использовать метод R-функций (RFM). Метод разработан для решения указанных задач в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим в ортогональной системе координат пологую оболочку постоянной толщины h , с радиуса-

ми главных кривизн срединной поверхности R_x, R_y . Предположим, что оболочка изготовлена из смеси керамики и металла. Механические свойства композита непрерывно изменяются вдоль толщины оболочки таким образом, что верхняя часть панели ($z = h/2$) является керамической, а нижняя ($z = -h/2$) – металлической. Материальные свойства ФГ структур, которые зависят от объемных частей составляющих материалов, будем определять, используя простейший степенной закон. Согласно этому закону [4-8], механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом:

$$P(z) = (P_c - P_m)V + P_m, \quad (1)$$

где V выражает объемную долю керамики и определяется как:

$$V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (2)$$

Выражение (1) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости, коэффициента Пуассона и плотности композита, P_c, P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени k объемной доли керамики в формуле (2) может изменяться от нуля до бесконечности, т.е. $0 \leq k < \infty$. При этом если $k = 0$, то структура является полностью керамической, если же $k = \infty$, то металлической. Используя уточненную теорию первого порядка типа С.П.Тимошенко [1], запишем соотношения для деформаций, усилий и моментов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{,x} + w / R_x, & \varepsilon_{22} &= v_{,y} + w / R_y, & \varepsilon_{12} &= u_{,y} + v_{,x}, \\ \chi_{11} &= \psi_{x \prime x}, & \chi_{22} &= \psi_{y \prime y}, & \chi_{12} &= \psi_{x \prime y} + \psi_{y \prime x}, \end{aligned}$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности в направлениях осей Ox, Oy, Oz соответственно, ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей Oy и Ox . Усилия и моменты N_{ij}, M_{ij} ($i, j = 1, 2$), которые вычисляются в результате интегрирования вдоль оси Oz , имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_1(1 - \nu)}{2} \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_2(1 - \nu)}{2} & 0 & 0 & \frac{E_3(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix},$$

где

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k + 1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k + 1)(k + 2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k + 3} - \frac{1}{k + 2} + \frac{1}{4(k + 4)} \right) \right) h^3.$$

Перерезывающие силы Q_x , Q_y определяются как:

$$Q_x = K_s^2 \frac{E_1 h}{2(1 + \nu)} (w_{,x} + \psi_x), \quad Q_y = K_s^2 \frac{E_1 h}{2(1 + \nu)} (w_{,y} + \psi_y),$$

где K_s^2 – корректирующий коэффициент сдвига, который ниже принимается равным $\frac{5}{6}$.

Свободные колебания полой оболочки в рамках уточненной теории первого порядка описываются пятью дифференциальными уравнениями движения [7, 8]:

$$N_{11,x} + N_{12,y} = m_1 u_{,tt}, \quad N_{12,x} + N_{22,y} = m_1 v_{,tt},$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + k_1 N_{11} + k_2 w_{,yy} = m_1 w_{,tt};$$

$$M_{11,x} + M_{12,y} - Q_x = m_2 \psi_{x,tt}, \quad M_{12,x} + M_{22,y} - Q_y = m_2 \psi_{y,tt},$$

где

$$m_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz, \quad m_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz.$$

Плотность композита ρ также определяется в результате интегрирования по толщине оболочки:

$$\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k + 1} \right) h.$$

Разрешающие уравнения дополняются граничными условиями, характер которых определяется способом закрепления контура оболочки.

Метод решения. Аналогично, как и в случае однослойных анизотропных пластин и оболочек, применение RFM требует знания вариационной постановки задачи о колебаниях оболочек и пластин. Если рассматриваются гармонические свободные колебания, то вектор неизвестных функций представляется в виде

$$\bar{U}(\bar{u}(x, y, t), \bar{v}(x, y, t), \bar{w}(x, y, t), \bar{\psi}_x(x, y, t), \bar{\psi}_y(x, y, t)) = \\ = \bar{U}(u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)) \sin \lambda t,$$

где λ – частота колебаний. Используя принцип Остроградского-

Гамильтона, можно получить вариационное уравнение в виде:

$$\partial I = 0, \quad (3)$$

где

$$I = U - \lambda T. \quad (4)$$

Выражения для потенциальной U и кинетической энергии T определяются с помощью следующих формул:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12}) d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x (w_{,x} + \psi_x) + Q_y (w_{,y} + \psi_y)) d\Omega, \\ T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho \left(u^2 + v^2 + w^2 + \frac{h^2}{12} (\psi_x^2 + \psi_y^2) \right) dx dy.$$

Минимизацию функционала (4) будем выполнять с помощью метода Ритца, согласно которому неизвестные функции u , v , w , ψ_x , ψ_y представляются как

$$u = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{N_2} b_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{N_5} e_i w_i, \\ \psi_x = \sum_{i=1}^{N_3} c_i \psi_{xi}, \quad \psi_y = \sum_{i=1}^{N_4} d_i \psi_{yi}, \quad (5)$$

где $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, $\{\psi_{xi}\}$, $\{\psi_{yi}\}$, $\{w_i\}$ – последовательности координатных функций, удовлетворяющие, по крайней мере, главным граничным условиям; a_i , b_i , c_i , d_i , e_i – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума функционала (4). Базой для построения таких последовательностей являются структуры решения краевой задачи [2, 3]. Например, для условий жесткой заделки такие структурные формулы имеют следующий вид:

$$u = \omega P_1 e_i, \quad v = \omega P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega P_4, \quad \psi_y = \omega P_5, \quad (6)$$

где P_i ($i = \overline{1, 5}$) – неопределенные компоненты структуры решения [3]. Функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$\omega(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \\ \omega(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

Представим неопределенные компоненты структуры решения в виде разложения по какой-либо полной системе функций $\{\Phi_i\}$:

$$P_r = \sum_{i=1}^{n_r} a_i^{(r)} \Phi_i^{(r)} \quad (r = \overline{1, 5}). \quad (7)$$

Тогда последовательности координатных функций определяются как:

$$\begin{aligned} u_i &= \omega \Phi_i^{(u)}, & v_i &= \omega \Phi_i^{(v)}, \\ w_i &= \omega \Phi_i^{(w)}, & \psi_{xi} &= \omega \Phi_i^{(\psi_x)}, & \psi_{yi} &= \omega \Phi_i^{(\psi_y)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Численные результаты. Для проверки достоверности предложенного подхода и созданного программного обеспечения рассмотрим некоторые тестовые задачи и сравним полученные результаты с известными. Решение будем выполнять в рамках классической и уточненной теорий первого порядка. При этом для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах будем использовать обычные степенные полиномы. В качестве ФГМ выберем комбинацию Al / Al_2O_3 . Механические характеристики для материалов, составляющих такой сплав, представляются следующими параметрами [5, 7]:

$$Al : \quad E_m = 70 GPa, \quad \nu_m = 0.3, \quad \rho_m = 2707 kg / m^3; \quad (9)$$

$$Al_2O_3 : \quad E_c = 380 GPa, \quad \nu_c = 0.3, \quad \rho_c = 3800 kg / m^3. \quad (10)$$

Задача 1. Исследуем собственные колебания пластины и полой оболочки (сферической, цилиндрической или в форме гиперболического параболоида), опирающейся на квадратный план со стороной a . Соотношение характерного геометрического размера к толщине принято равным $a/h = 10$. Предположим,

что оболочка свободно оперта по всему контуру. В табл. 1 представлено сравнение основных частот, вычисленных при использовании RFM на базе классической (CST) и уточненной теорий Тимошенко (FSDT), с результатами работ [4, 5, 7]. Результаты для основной частоты представлены в виде безразмерного параметра $\Omega_1 = \lambda_1 h \sqrt{\rho_c / E_c}$. Для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах (6) были выбраны степенные полиномы. При этом макси-

Таблица 1

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	k	RFM (CST)	RFM (FSDT)	(CST) [4]	(FSDT) [5]	(HSDT) [7]		
0	0	0	0,0597	0,0576	0,0597	0,0577	0,0578		
		0,5	0,0505	0,0489	0,0506	0,0490	0,0492		
		1	0,0455	0,0441	0,0456	0,0442	0,0443		
		4	0,0395	0,0382	0,0396	0,0383	0,0381		
		10	0,0380	0,0365	0,0380	0,0366	0,0364		
		0,5	0,5	0	0,0770	0,0753	0,0779	0,0762	0,0751
				0,5	0,0665	0,0652	0,0676	0,0664	0,0657
				1	0,0605	0,0593	0,0617	0,0607	0,0601
				4	0,0508	0,0496	0,0519	0,0509	0,0503
		0	0,5	10	0,0472	0,0462	0,0482	0,0471	0,0464
0	0,0642			0,0622	0,0648	0,0629	0,0622		
0,5	0,0546			0,0531	0,0553	0,0540	0,0535		
1	0,0494			0,0481	0,0501	0,0490	0,0485		
4	0,0423			0,0411	0,0430	0,0419	0,0413		
10	0,0403			0,0389	0,0408	0,0395	0,0390		
0,5	-0,5	0	0,0582	0,0562	0,0597	0,0580	0,0563		
		0,5	0,0493	0,0477	0,0506	0,0493	0,0479		
		1	0,0444	0,0430	0,0456	0,0445	0,0432		
		4	0,0385	0,0372	0,0396	0,0385	0,0372		
		10	0,0370	0,0356	0,0380	0,0368	0,0355		

мальные степени полиномов ($n_r, r = \overline{1, 5}$) в разложениях (7) для функций u, v, w, ψ_x, ψ_y выбирались равными соответственно 9, 9, 10, 9, 9. Анализ сравнения показывает, что результаты, полученные с помощью уточненной теории первого порядка (RFM, FSDT), практически совпадают с представленными в работе [5]. Отклонения от результатов теории более высокого порядка (HSDT) [7] не превышают 4 %. Отклонения результатов при использовании классической теории (RFM, CST) с результатами работы [4] не превосходят 2%. В целом следует отметить, что классическая теория приводит в большинстве случаев к завышенным значениям основных частот по сравнению с уточненными теориями.

Задача 2. Тестирование разработанного программного обеспечения было выполнено также для жестко защемленной сферической оболочки с эллиптической формой плана. Геометрические параметры исследуемой оболочки выбраны следующими:

$$R_x / R_y = 1, \quad a / b = 2, \quad h / 2a = 0.1, \quad 2a / R_x = 0.2,$$

где a и b – полуоси эллипса. Механические характеристики рассматриваемых сплавов такие же, как и в работе [5]:

FG1:

$$Al / Al_2O_3 : E_m / E_c = 70 / 380 GPa,$$

$$\nu_m = \nu_c = 0.3, \quad \rho_m / \rho_c = 2707 / 3800 \text{ kg} / m^3;$$

FG2:

$$Al / ZrO_2 : E_m / E_c = 70 / 151 GPa,$$

$$\nu_m = \nu_c = 0.3, \quad \rho_m / \rho_c = 2707 / 3000 \text{ kg} / m^3.$$

На рис. 1 представлена зависимость основного безразмерного частотного параметра $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ от показателей степени k объемной доли керамики.

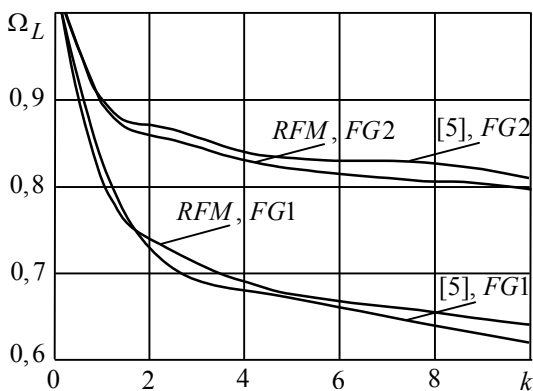


Рис. 1

Проведенное тестирование предложенного метода и разработанного программного обеспечения позволяет рассматривать пластины и оболочки со сложной формой плана и различными видами граничных условий. Ниже представлена одна из таких задач.

Задача 3. Исследуем свободные колебания функционально-градиентной жестко защемленной по всему контуру оболочки, опирающейся на план, изображенный на рис. 2.

Предположим, что геометрические параметры оболочки выбраны следующими:

$$R_x / R_y = 1, \quad b / 2a = 0.5,$$

$$h / 2a = 0.1, \quad 2a / R_x = 0.2,$$

$$b_1 / 2a = 0.35, \quad a_1 / 2a = 0.2.$$

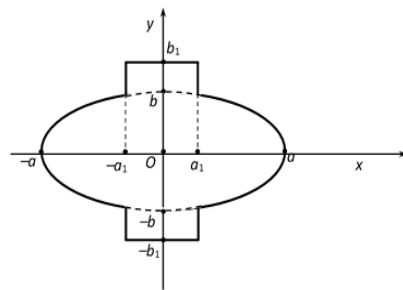


Рис.2

Механические характеристики сплавов выберем такими же, как и в задаче 2.

Для конкретизации структуры решения (6) необходимо описать в аналитическом виде уравнение границы области $\omega = 0$. Используя R-операции \wedge_0, \vee_0 [3], построим это уравнение в виде:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \vee_0 f_3,$$

где $f_1 = \left((a_1^2 - x^2) / 2a_1 \right) \geq 0$ – вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = \pm a_1$; $f_2 = \left((b_1^2 - y^2) / 2b_1 \right) \geq 0$ – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = \pm b_1$; $f_3 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \geq 0$ – часть плоскости, находящаяся внутри эллипса.

При численной реализации разработанного программного обеспечения была учтена симметрия поставленной задачи относительно осей Ox и Oy . Поэтому интегрирование выполнялось по 1/4 области и последовательности полиномов были выбраны в виде:

$$\Phi_i^{(u)}, \Phi_i^{(\psi_x)}: x, x^3, xy^2, x^5, x^3y^2, xy^4, x^7, x^5y^2, x^3y^4, xy^6, \dots;$$

$$\Phi_i^{(v)}, \Phi_i^{(\psi_y)}: y, x^2y, y^3, x^4y, x^2y^3, y^5, x^6y, x^4y^3, x^2y^5, y^7, \dots;$$

$$\Phi_i^{(w)}: 1, x^2, y^2, x^4, x^2y^2, y^4, x^6, x^4y^2, x^2y^4, y^6, \dots$$

Для исследования сходимости значений собственных частот был проведен вычислительный эксперимент при использовании различного количества координатных функций. Было установлено, что третий знак после запятой стабилизируется при сохранении степеней аппроксимирующих полиномов (11, 11, 14, 11, 11), что соответствует следующему количеству координатных функций для u, v, w, ψ_x, ψ_y : (21, 21, 36, 21, 21).

На рис. 3 представлены зависимости собственных частот от значений k -степени показателя закона распределения составляющих материалов. Для проверки достоверности полученных результатов был выполнен расчет при значении параметра $b_1 / 2a = 0,51$. В этом случае форма, представленная на рис. 2, очень близка к эллиптической. Пунктирные кривые соответствуют этому значению параметра b_1 . Как видно из рис. 3, значения собственных частот для этого значения параметра и соответствующие значения частот для эллиптической формы практически совпадают. Такая проверка позволяет сделать вывод о правильности работы программ-

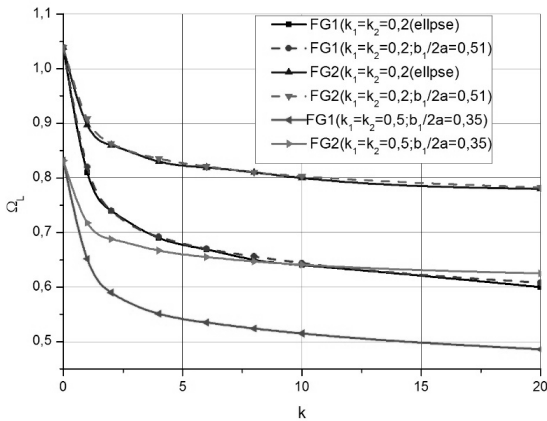


Рис.3

В табл. 2 приведены значения основного частотного параметра $\Omega_L = \lambda_1 a^2 h \sqrt{\rho_c / E_c}$ для жестко защемленных оболочек двоякой кривизны (рис. 2) для различных значений показателя степени объемной доли керамики k . Расчет выполнен для сферических панелей, цилиндрических, в виде гиперболического параболоида, а также для пластин.

Из табл. 2 следует, что при росте величины k , вне зависимости от типа кривизны оболочки и механических характеристик смесей наблюдается

уменьшение значений основной частоты колебаний. Частоты «асимптотически» приближаются к соответствующим значениям частот металлической оболочки или пластины.

Следует заметить, что во всем диапазоне изменения значений величины $k \in [0, 10]$ наибольшие величины основных частот имеют сферические обо-

лочки, а наименьшие пластины.

В заключение отметим, что программное обеспечение, созданное на базе системы POLE-RL, протестировано на примерах функционально-градиентных пологих оболочек с прямоугольным и эллиптическим планом. Достаточно хорошее совпадение результатов для тестовых задач позволило использовать разработанный подход для оболочек, опирающихся на план сложной формы.

РЕЗЮМЕ. З використанням теорії R-функцій та варіаційного методу Рунца запропоновано підхід для розв'язку задач про вільні коливання функціонально градієнтних (ФГ) пологих оболонок з довільною формою плану. Алгоритм розроблено для уточненої теорії ФГ пологих оболонок типу теорії С.П.Тимошенко. За допомогою розробленого програмного забезпечення розв'язано тестові задачі для ФГ пологих оболонок з квадратним

ного забезпечення. На цьому жє рисунку представлені значення для сферических оболонок з значеннями радіусів кривизни рівними: $\frac{2a}{R_x} = k_1 = 0.5$

и $\frac{2a}{R_y} = k_2 = 0.5$. Результати по-

лучены для двух видов материалов. Как и в случае оболочек с эллиптическим планом значения частот для смеси FG2 существенно больше чем для смеси FG1.

Таблица 2

$\frac{a}{R_x}$	$\frac{a}{R_y}$	Вид FGM	$k = 0$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$
0	0	FG1	0,8248	0,6457	0,5472	0,5109
		FG2	0,8248	0,7121	0,6633	0,6363
0,5	0,5	FG1	0,8707	0,6839	0,5760	0,5355
		FG2	0,8707	0,7518	0,6958	0,6692
0	0,5	FG1	0,8429	0,6604	0,5581	0,5203
		FG2	0,8429	0,7275	0,6747	0,6491
0,5	-0,5	FG1	0,8510	0,6681	0,5643	0,5254
		FG2	0,8510	0,7351	0,6813	0,6552

та еліптичним планом. Для підтвердження ефективності та універсальності запропонованого підходу досліджено оболонки різної кривизни, які мають складну форму плану.

Ключові слова: функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), пологі оболонки, теорія R-функцій, RFM, метод Ритца, складна форма, теорія Тимошенко.

SUMMARY. *The approach for solving problems about free vibrations of shallow shells with complex plan-form consisting of functionally graded materials is developed. The solution method is based on the joint usage of refined shallow shell theory of the first order (Timoshenko's type), Ritz variational method and R-function theory. Test problems have been solved for FG shallow shells with square and elliptical plan form. In order to confirm the advantage of the proposed approach the double-curved shallow shells with complex plan form are investigated.*

Key words: *functionally-graded materials (FGM), shallow shells, R-functions theory, (RFM), method by Ritz, complex plan form, Timoshenko's type theory.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Об учете неоднородности деформаций поперечного сдвига по толщине в слоистых оболочках.//Прикладная механика.– 1977.– 13, № 10.– С. 36–42
2. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек.– Харьков, 2009.– 408 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения.– К.: Наук. думка, 1982.– 551 с.
4. Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells// J. of Sound and Vibration.– 2011.– 330.– P. 1432–1454.
5. Chorfi S.M., Houmat A. Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures.– 2010.– 92.– P. 2573–2581.
6. Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells// Int J. Mech Sci.– 1999.– 41.– P. 309–324.
7. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory// Composite Structures.– 2008.– Vol. 84.– P. 132–46.
8. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates//International Journal for numerical methods in engineering.– 2000.– Vol. 47.– P. 663–684

Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков

Поступила 11.04.2014

УДК 539.3: 534.1

*А. В. ЕЛАГИН, канд. физ.-мат. наук,
И. А. МОЙСЕЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
В. И. СТОРОЖЕВ, д-р техн. наук*

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВТОРЫХ ГАРМОНИК НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В СВОБОДНОМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ

Представлены результаты теоретического численно-аналитического исследования свойств нелинейных вторых гармоник, генерируемых при распространении монохроматических осесимметричных нормальных упругих волн кручения вдоль осевого направления в трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения со свободной боковой поверхностью. Для цилиндров из титаната бария, титаната-цирконата свинца и монокристаллического цинка проведен частотный параметрический анализ амплитуд и форм волновых движений во вторых гармониках для нормальных волн исследуемого типа. Описан ряд закономерностей, свойственных рассматриваемому типу волновых процессов.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, свободная боковая поверхность, геометрическая нелинейность, монохроматические нормальные крутильные волны, нелинейные ангармонические возмущения, амплитудно-частотные характеристики вторых гармоник.

Анализ нелинейных ангармонических эффектов при распространении волн деформаций остается актуальной фундаментальной и прикладной научной проблемой с обширным рядом аспектов [4–6, 12, 13, 16, 17]. К наименее изученным из них относятся задачи описания нелинейных ангармонических возмущений для нормальных упругих волн вдоль волноводов пространственной геометрии [7–11, 14, 15]. Так, анализ свойств нелинейных вторых гармоник для уединенных монохроматических нормальных волн в протяженных упругих цилиндрах проведен только в случаях распространения осесимметричных крутильных и продольно-сдвиговых волн в изотропных цилиндрах кругового сечения с несколькими типами краевых условий на боковой поверхности в рамках модели геометрически и физически нелинейного деформирования с использованием потенциала Мурнагана и теории конечных деформаций [1–3, 18–20].

В данной работе исследования характеристик малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндрических волноводах реализуются применительно к случаю модели геометрически нелинейного волнового деформирования свободных по боковой поверхности трансверсально-изотропных цилиндров.

Постановка задачи. Рассматривается протяженный трансверсально-изотропный цилиндр кругового сечения с радиусом R , занимающий в отнесенных к нормирующему параметру $R_* \equiv R$ безразмерных цилиндрических $O r \theta z$ и прямоугольных $O x_1 x_2 x_3$ координатах область

$$V = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\} = \left\{ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1, -\infty < x_3 < \infty \right\}.$$

Для описания геометрически нелинейного волнового динамического деформирования цилиндра из материала с осью упругой симметрии, ориентированной вдоль координатной оси Oz , используется модель, базирующаяся на тензорной форме упругого потенциала $U = \frac{1}{2} c_{jqpk} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{pk}$ с квадратичными членами по конечным деформациям $\varepsilon_{jq} = \frac{1}{2} (u_{j,q} + u_{q,j} + u_{l,q} u_{l,j})$, $u_{j,q} = \partial u_j / \partial u_q$ в прямоугольных координатах $Ox_1 x_2 x_3$. Представления для механических напряжений на основных площадках этих координат следуют из соотношений $\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d}$. Компоненты вектора волновых упругих перемещений в прямоугольных u_j ($j = \overline{1, 3}$) и цилиндрически u_α ($\alpha = r, \theta, z$) координатах считаются безразмерными, отнесенными к нормирующему параметру вида $u_* = \max_{\{r, \theta, z, t, \alpha\}} |\tilde{u}_\alpha(r, \theta, z, t)|$ с линейной размерностью. Отношение $\delta = u_* / R_*$ в рамках гипотезы о малости исследуемых нелинейных волновых эффектов [1–4] интерпретируется как малый параметр $\delta \ll 1$. Компоненты тензора упругих постоянных материала цилиндра c_{ij} и динамические напряжения $\sigma_{jd} = \partial U / \partial u_{j,d}$ являются безразмерными характеристиками, отнесенными к нормирующему параметру c_* .

В соответствии с концепцией анализа малых нелинейных ангармонических эффектов для компонентов вектора волновых перемещений u_α ($\alpha = r, \theta, z$) вводятся представления $u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta u_\alpha^{(n)}$, включающие линейные составляющие $u_\alpha^{(l)}$ и нелинейные ангармонические возмущения $u_\alpha^{(n)}$. Выражения для компонентов тензора динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ на основных площадках цилиндрической системы координат, соответствующие такому варианту представления u_α , являются суммами линейных и квадратичных членов по степеням параметра δ

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(l)}) \delta + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(n)}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) \right) \delta^2 \quad (\alpha, \beta = r, \theta, z),$$

а входящие в эти представления характеристики тензоров $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)})$ ($q = l; n$) и $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})$ в рамках рассматриваемой модели для случая осесимметричного геометрически нелинейного деформирования трансверсально-изотропного цилиндра имеют вид

$$\sigma_{rr}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{13} \partial_z u_z^{(q)} + c_{12} r^{-1} u_r^{(q)} + c_{11} \partial_r u_r^{(q)},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) &= c_{13}\partial_z u_z^{(q)} + c_{11}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{12}\partial_r u_r^{(q)}, \\
\sigma_{zz}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) &= c_{33}\partial_z u_z^{(q)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{13}\partial_r u_r^{(q)}, \\
\sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\left(\partial_r u_\theta^{(q)} - r^{-1}u_\theta^{(q)}\right), \\
\sigma_{rz}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) &= c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)} \quad (q=l; n); \quad (1) \\
\sigma_{rr}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + c_{11}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + c_{12}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{12}\left(\partial_z u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{11}r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}\right)^2 + 2c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + (c_{13} + 2c_{44})\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + 3c_{11}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 - (c_{11} + c_{12})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}\right)^2\right), \\
\sigma_{\theta\theta}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + 3c_{11}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{12}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + c_{11}\left(\partial_z u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{11}r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{13}\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{12}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 + 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} - \right. \\
&\quad \left. - (c_{11} - c_{12})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}\right)^2\right), \\
\sigma_{zz}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left(3c_{33}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_z^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + (c_{13} + 2c_{44})\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + c_{13}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + (c_{13} + 2c_{44})\left(\partial_z u_\theta^{(l)}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{13}r^{-2}\left(u_\theta^{(l)}\right)^2 + c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + c_{33}\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + c_{13}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 + c_{13}\left(\partial_r u_\theta^{(l)}\right)^2\right), \\
\sigma_{r\theta}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left((c_{12} - c_{11})\partial_z u_r^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{12} - c_{11})r^{-2}u_r^{(l)}u_\theta^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + 2c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + (c_{12} - c_{11})r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11}\partial_r u_r^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}\right), \\
\sigma_{rz}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) &= c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + c_{33}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + \\
&\quad + c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44})\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + c_{44}\partial_z u_\theta^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)}, \\
\sigma_{\theta z}^{(n)}\left(u_\alpha^{(l)}\right) &= c_{44}\partial_z u_z^{(l)}\partial_z u_\theta^{(l)} - c_{44}r^{-1}u_\theta^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + c_{44}\partial_r u_z^{(l)}\partial_r u_\theta^{(l)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta r}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left(-2c_{13} r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_z u_z^{(l)} + (c_{12} - c_{11}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_z u_\theta^{(l)} - \right. \\
&\quad \left. -2c_{11} r^{-2} u_r^{(l)} u_\theta^{(l)} - 2c_{11} r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + (c_{11} - c_{12}) r^{-1} u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) \partial_r u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \right), \\
\sigma_{zr}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left(2(c_{13} + 2c_{44}) \partial_z u_z^{(l)} \partial_z u_r^{(l)} + 2c_{12} r^{-1} (\partial_z u_r^{(l)})^2 + \right. \\
&\quad \left. + (c_{12} - c_{11}) r^{-1} (\partial_z u_r^{(l)})^2 + 2c_{44} \partial_z u_z^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + 2c_{11} \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + 2c_{44} \partial_r u_z^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \right), \\
\sigma_{z\theta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) &= \frac{1}{2} \left(2(c_{13} + 2c_{44}) \partial_z u_z^{(l)} \partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{11} + c_{12}) r^{-1} u_r^{(l)} u_\theta^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + 2c_{12} \partial_z u_\theta^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{44} \partial_r u_z^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \right). \quad (2)
\end{aligned}$$

В соотношениях (1) – (2) величины c_{ij} являются упругими постоянными второго порядка для трансверсально-изотропного материала цилиндра; $\partial_\alpha = \partial / \partial \alpha$ ($\alpha = r, z$).

Подстановка общих представлений для компонентов тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ в виде сумм линейных и квадратичных членов по степеням параметра δ в уравнения движения

$$\begin{aligned}
r^{-1} \partial_r (r \sigma_{rr}) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta} + \partial_z \sigma_{rz} - r^{-1} \sigma_{\theta\theta} - \delta (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r &= 0, \\
r^{-1} \partial_r (r \sigma_{\theta r}) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + \partial_z \sigma_{\theta z} - r^{-1} \sigma_{r\theta} - \delta (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta &= 0, \\
r^{-1} \partial_r (r \sigma_{zr}) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{z\theta} + \partial_z \sigma_{zz} - \delta (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_z &= 0, \quad (3)
\end{aligned}$$

а также в граничные условия на свободной боковой поверхности цилиндра

$$(\sigma_{r\alpha})_{r=1} = 0 \quad (\alpha = r, \theta, z) \quad (4)$$

с последующим приравниванием слагаемых одинакового порядка малости по степеням малого параметра δ в приводит к следующей рекуррентной последовательности краевых задач определения амплитудных составляющих для комплексных функций перемещений $u_\alpha^{(l)}$ и $u_\alpha^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
r^{-1} \partial_r \left(r \sigma_{rr}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) \right) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{r\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \\
+ \partial_z \sigma_{rz}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - r^{-1} \sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_r^{(l)} &= 0, \\
r^{-1} \partial_r \left(r \sigma_{\theta r}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) \right) + r^{-1} \partial_\theta \sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \\
+ \partial_z \sigma_{\theta z}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - r^{-1} \sigma_{r\theta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) - (\rho R_*^2 / c_*) \partial_t^2 u_\theta^{(l)} &= 0,
\end{aligned}$$

$$r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{zr}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{z\theta}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \\ + \partial_z \sigma_{zz}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) - \left(\rho R_*^2 / c_* \right) \partial_t^2 u_z^{(l)} = 0; \quad (5)$$

$$\left(\sigma_{r\alpha}^{(l)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right)_{r=1} = 0 \quad (\alpha = r, \theta, z); \quad (6)$$

$$r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{rr}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) \right) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{r\theta}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) + \\ + \partial_z \sigma_{rz}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) - r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) - \\ - \left(\rho R_*^2 / c_* \right) \partial_t^2 u_r^{(n)} = - \left(r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{rr}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + \right. \\ \left. + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{r\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \partial_z \sigma_{rz}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) - \right. \\ \left. - r^{-1}\sigma_{\theta\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right),$$

$$r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{\theta r}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) \right) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{\theta\theta}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) + \\ + \partial_z \sigma_{\theta z}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) - r^{-1}\sigma_{r\theta}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) - \\ - \left(\rho R_*^2 / c_* \right) \partial_t^2 u_\theta^{(n)} = - \left(r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{\theta r}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + \right. \\ \left. + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{\theta\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + \partial_z \sigma_{\theta z}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) - \right. \\ \left. - r^{-1}\sigma_{r\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right),$$

$$r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{zr}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) \right) + r^{-1}\partial_\theta \sigma_{z\theta}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) + \\ + \partial_z \sigma_{zz}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) - \left(\rho R_*^2 / c_* \right) \partial_t^2 u_z^{(n)} = \\ = - \left(r^{-1}\partial_\theta \sigma_{z\theta}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) + r^{-1}\partial_r \left(r\sigma_{zr}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right) + \right. \\ \left. + \partial_z \sigma_{zz}^{(n)} \left(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)} \right) \right); \quad (7)$$

$$\left(\sigma_{r\alpha}^{(l)} \left(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}, u_z^{(n)} \right) \right)_{r=1} = 0 \quad (\alpha = r, \theta, z). \quad (8)$$

В случае определения вторых гармоник для уединенных монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения с круговой частотой ω в свободном цилиндре после введения исходных представлений

$$u_\theta^{(l)} = u_\theta^{(0,l)}(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \quad u_r^{(l)} = u_z^{(l)} = 0, \\ u_\alpha^{(n)} = u_\alpha^{(0,n)}(r) \exp(-2i(\omega t - kz)) \quad (\alpha = r, \theta, z) \quad (9)$$

задача сводится к последовательному нахождению амплитудных составляющих $u_\theta^{(0,l)}(r)$, $u_\alpha^{(0,n)}(r)$ из граничных задач

$$r^2 \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'' + r \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \left((\beta r)^2 - 1 \right) u_\theta^{(0,l)} = 0; \quad (10)$$

$$\sigma_{r\theta} \left(u_\theta^{(0,l)} \right) (\mathbf{1}) = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2} \right) u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} \left(u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{14}^{(1)} \left(u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{15}^{(1)} \left(u_r^{(0,n)} \right)'' = \\ & = \left(\Delta_{11}^{(2)} r^{-3} + \Delta_{12}^{(2)} r^{-1} \right) \left(u_\theta^{(0,l)} \right)^2 + \left(\Delta_{13}^{(2)} + \Delta_{14}^{(2)} r^{-2} \right) u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \\ & + \Delta_{15}^{(2)} r^{-1} \left(\left(u_\theta^{(0,l)} \right)' \right)^2 + \Delta_{16}^{(2)} r^{-1} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'' + \Delta_{17}^{(2)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'' , \\ & \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} \left(u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} \left(u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{25}^{(1)} \left(u_z^{(0,n)} \right)'' = \\ & = \left(\Delta_{21}^{(2)} + \Delta_{22}^{(2)} r^{-2} \right) \left(u_\theta^{(0,l)} \right)^2 + \Delta_{23}^{(2)} r^{-1} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)' + \\ & + \Delta_{24}^{(2)} \left(\left(u_\theta^{(0,l)} \right)' \right)^2 + \Delta_{25}^{(2)} u_\theta^{(0,l)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right)'' ; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(\sigma_{r\alpha}^{(n)} \left(u_\theta^{(0,l)} \right) \right)_{r=1} + \left(\sigma_{r\alpha}^{(l)} \left(u_r^{(0,n)}, u_z^{(0,n)} \right) \right)_{r=1} = 0 \quad (\alpha = r, z). \quad (13)$$

В соотношении (10) введено обозначение $\beta = \sqrt{\Omega^2 - 2c_{44}k^2 / (c_{11} - c_{12})}$, где $\Omega = \sqrt{2\rho\omega^2 / (c_{11} - c_{12})}$, а величины $\Delta_{ij}^{(p)}$ в соотношениях (12) выражаются через упругие постоянные материала цилиндра, параметры приведенной частоты и нормированного волнового числа следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{(1)} &= \Omega^2 - c_{44}k^2, & \Delta_{12}^{(1)} &= -c_{11}, & \Delta_{13}^{(1)} &= c_{11}, \\ \Delta_{14}^{(1)} &= ik(c_{13} + c_{44}), & \Delta_{15}^{(1)} &= c_{11}, & \Delta_{11}^{(2)} &= c_{11}, \\ \Delta_{12}^{(2)} &= k^2(c_{12} - c_{11})/2, & \Delta_{13}^{(2)} &= k^2(c_{12} + c_{44})/2, \\ \Delta_{14}^{(2)} &= (c_{12} - 3c_{11})/2, & \Delta_{15}^{(2)} &= (c_{11} - c_{12})/2, \\ \Delta_{16}^{(2)} &= (c_{11} - c_{12})/2, & \Delta_{17}^{(2)} &= -c_{11}, & \Delta_{21}^{(1)} &= \Omega^2 - c_{33}k^2, \\ \Delta_{22}^{(1)} &= ik(c_{13} + c_{44}), & \Delta_{23}^{(1)} &= ik(c_{13} + c_{44}), \\ \Delta_{24}^{(1)} &= c_{44}, & \Delta_{25}^{(1)} &= c_{44}, & \Delta_{21}^{(2)} &= ik^3(c_{44} - c_{13}/2), \\ \Delta_{22}^{(2)} &= -ic_{13}k/2, & \Delta_{23}^{(2)} &= ik(c_{11} - c_{12})/2, \\ \Delta_{24}^{(2)} &= ik(c_{12} - c_{11} - c_{13})/2, & \Delta_{25}^{(2)} &= ik(c_{12} - c_{11})/2. \end{aligned}$$

Базисные решения задачи первого приближения (10) – (11), описывающие моды крутильных волн с номером p , имеют вид

$u_0^{(0,l)}(r) = u^{(0)} \beta_p^* J_1(\beta_p^* r)$, где β_p^* ($p = \overline{1, \infty}$) – корни трансцендентного дисперсионного уравнения $\beta^* J_0(\beta^*) - 2J_1(\beta^*) = 0$. Структура соотношений краевой задачи (12)–(13) показывает, что искомые вторые гармоники априори являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой. Для построения частных решений системы неоднородных дифференциальных уравнений (12) используется прием замены их правых частей степенными рядами по переменной r с использованием абсолютно сходящихся степенных разложений для входящих в выражение $u_0^{(0,l)}(r)$ цилиндрических функций Бесселя первого рода. В результате система (12) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2}) u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} (u_r^{(0,n)})' + \Delta_{14}^{(1)} (u_z^{(0,n)})' + \\ & + \Delta_{15}^{(1)} (u_r^{(0,n)})'' = (u^{(0)})^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p r^p, \\ & \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} (u_r^{(0,n)})' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} (u_z^{(0,n)})' + \\ & + \Delta_{25}^{(1)} (u_z^{(0,n)})'' = (u^{(0)})^2 \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p r^p. \end{aligned} \quad (14)$$

Для коэффициентов α_p и β_p в представлениях (14) получены крайне громоздкие аналитические представления. Таким образом, полное решение системы дифференциальных уравнений (12) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= \left(-D_1 \xi_1 J_1(\xi_1 r) - D_2 \xi_2 J_1(\xi_2 r) + (u^{(0)})^2 F_1(r) \right) Q(t, z), \\ u_z^{(n)} &= \left(D_1 \eta_1 J_0(\xi_1 r) + D_2 \eta_2 J_0(\xi_2 r) + (u^{(0)})^2 F_2(r) \right) Q(t, z), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_j &= \sqrt{\frac{-B - (-1)^j \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad \eta_j = \frac{ik \xi_j^2 (c_{13} + c_{44})}{\Omega^2 - c_{33} k^2 - c_{44} \xi_j^2} \quad (j = 1, 2), \\ A &= c_{11} c_{44}, \quad B = -(c_{11} + c_{44}) \Omega^2 - (c_{13}^2 + 2c_{13} c_{44} - c_{11} c_{33} k^2), \\ C &= (\Omega^2 - c_{33} k^2) (\Omega^2 - c_{44} k^2), \quad Q(t, z) = \exp(-2i(\omega t - kz)), \end{aligned}$$

D_j – произвольные постоянные коэффициенты; $F_j(r)$ – частные решения системы уравнений (12) в виде рядов

$$F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p, \quad F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p$$

с коэффициентами, определяемыми из рекуррентных формул

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\alpha_1}{\Delta_{13}^{(n)}}, \quad b_1 = \frac{\beta_1}{\Delta_{23}^{(n)}}, \quad a_2 = \frac{\alpha_2 - b_1 \Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)} + 2\Delta_{13}^{(n)} + 2\Delta_{15}^{(n)}}, \\
b_2 &= \frac{\beta_2 - a_1 (\Delta_{22}^{(n)} - \Delta_{24}^{(n)})}{2(\Delta_{23}^{(n)} + \Delta_{25}^{(n)})}, \quad a_{p+2} = \frac{\alpha_{p+2} - \Delta_{11}^{(n)} a_p - \Delta_{14}^{(n)} (p+1) b_{p+1}}{\Delta_{12}^{(n)} + \Delta_{13}^{(n)} (p+2) + \Delta_{15}^{(n)} (p+1)(p+2)}, \\
b_{p+2} &= \frac{\beta_{p+2} - \Delta_{21}^{(n)} b_p - \Delta_{22}^{(n)} a_{p+1} - \Delta_{24}^{(n)} (p+1) a_{p+1}}{\Delta_{23}^{(n)} (p+2) + \Delta_{25}^{(n)} (p+1)(p+2)} \quad (p = \overline{1, \infty}).
\end{aligned}$$

В результате подстановки представлений (15) в краевые условия (13), в предположении о том, что точки $(2k, 2\Omega)$ не принадлежат какой-либо из мод дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в свободном цилиндре, определяются выражения для коэффициентов D_j , записываемые в виде

$$\begin{aligned}
D_1 &= (u^0)^2 \frac{\chi_{12} P_2 - \chi_{22} P_1}{\chi_{11} \chi_{22} - \chi_{12} \chi_{21}}, \quad D_2 = (u^0)^2 \frac{\chi_{11} P_2 - \chi_{21} P_1}{\chi_{11} \chi_{22} - \chi_{12} \chi_{21}}, \\
\chi_{11} &= (ic_{13} \eta_1 k - c_{11} \xi_1^2 / 2) J_0(\xi_1) - c_{12} \xi_1 J_1(\xi_1) - J_2(\xi_1), \\
\chi_{12} &= (ic_{13} \eta_2 k - c_{11} \xi_2^2 / 2) J_0(\xi_2) - c_{12} \xi_2 J_1(\xi_2) - J_2(\xi_2), \\
\chi_{21} &= -(c_{44} \eta_1 + ic_{44} k) \xi_1 J_1(\xi_1), \\
\chi_{22} &= -(c_{44} \eta_2 + ic_{44} k) \xi_2 J_1(\xi_2), \\
P_1 &= - \left(ic_{12} F_1(1) + ic_{13} k F_2(1) - \frac{1}{2} c_{12} k^2 (u_\theta^{(l)})^2 + \frac{1}{2} c_{11} (u_\theta^{(l)})^2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{11} F_1'(1) - \frac{1}{2} (c_{12} - c_{11}) u_\theta^{(l)} (u_\theta^{(l)})' + \frac{1}{2} c_{11} \left((u_\theta^{(l)})' \right)^2 \right), \\
P_2 &= - \left(ic_{44} k F_1(1) + c_{44} k F_2'(1) + ic_{44} k u_\theta^{(l)} (u_\theta^{(l)})' \right). \tag{16}
\end{aligned}$$

Полученная аналитическая форма представлений комплексных функций волновых перемещений в геометрически нелинейных вторых гармониках монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения позволяет провести анализ ряда амплитудно-частотных эффектов в ангармонических возмущениях.

Результаты численных исследований. При исследовании кинематических характеристик нелинейных вторых гармоник осесимметричных монохроматических нормальных волн кручения проведен анализ амплитудно-частотных параметрических распределений для нормированных волновых перемещений в ангармонических возмущениях вдоль радиальной координаты в области сечения волновода.

Представленные на рис. 1–5 результаты расчетов относятся к случаям распространения крутильных волн с варьируемой относительной дли-

ной $\tilde{\lambda} = 2\pi/(kR)$ из двух низших действительных ветвей дисперсионных спектров в цилиндрах из титаната бария (BaTiO_3), титаната-цирконата свинца (ЦТС-19) и монокристаллического цинка (Zn) с физико-механическими характеристиками, приведенными в работе [5]. Зависимости для указанных материалов соответственно представлены на рисунках сплошными, пунктирными и точечно-пунктирными линиями.

Сопоставление зависимостей, приведенных на рис. 1 (распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных

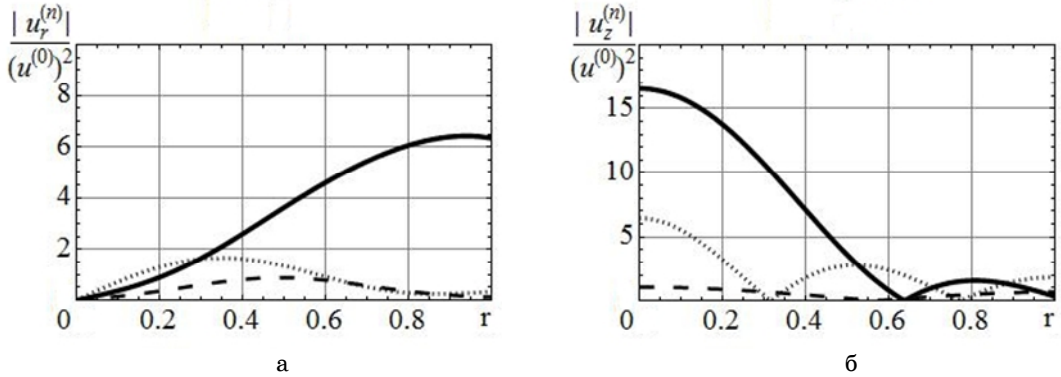


Рис. 1.

гармониках для волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1$ из первой моды спектра) и рис. 2 (распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках для волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из первой моды спектра) для случаев распространения относительно коротких $\tilde{\lambda} = 1$ и относительно длинных $\tilde{\lambda} = 4$ нормальных волн кручения из нижней действительной моды дисперсионных спектров рассматриваемых цилиндров показывает, что увеличение относительной длины приводит к выраженным изменениям в формах распределений радиальных составляющих волновых перемещений для всех рассматриваемых цилиндров, к сохранению общего уровня интенсивности вторых гармоник в цилиндре из титаната бария и к снижению соответствующих уровней более чем в два раза для цилиндров из титана-

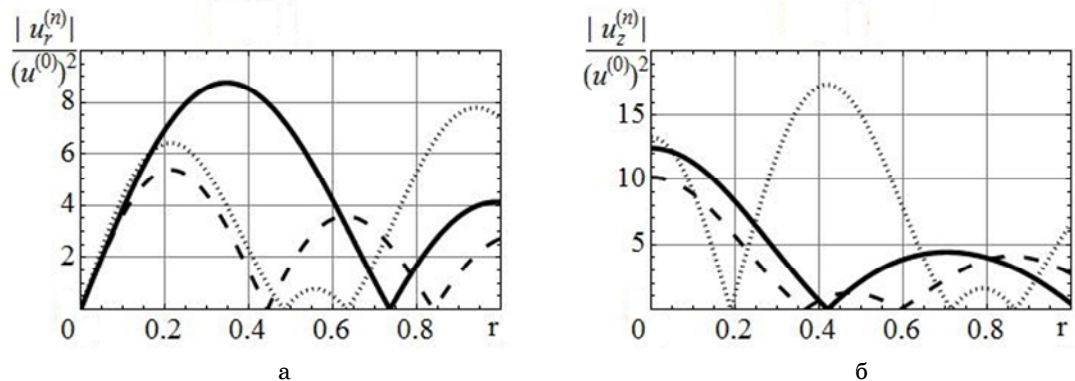


Рис. 2.

та-цирконата свинца и монокристаллического цинка. Максимальные уровни радиальных составляющих в цилиндре из титаната бария для случая $\tilde{\lambda} = 4$ локализируются у свободной граничной поверхности. Специфическими являются также анализируемые распределения при $\tilde{\lambda} = 1$ в цилиндре из цинка – для них свойственна локализация максимальных продольных волновых смещений в окрестности значения $r = 0.41$ и локализация максимальных продольных волновых смещений вблизи границы цилиндра.

Результаты расчета амплитудных характеристик нелинейных ангармонических возмущений для нормальных волн кручения с аналогичными относительными длинами из вторых действительных ветвей дисперсионных спектров отражены на рис. 3 (распределение амплитудных

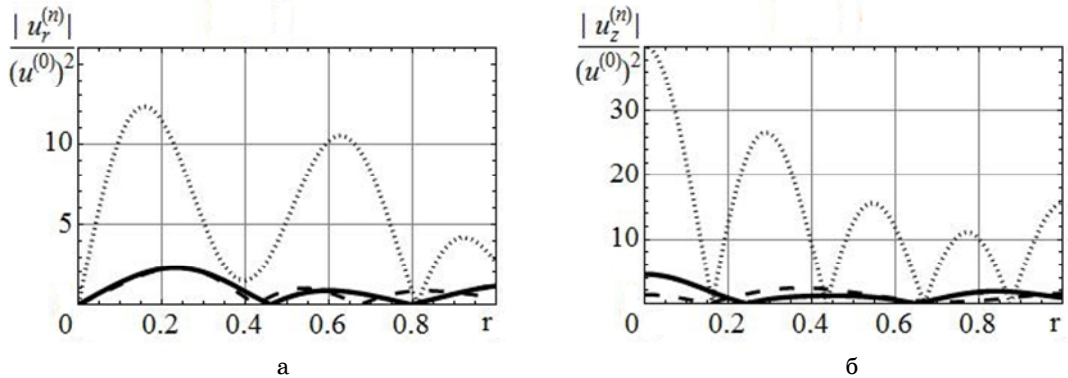


Рис. 3.

характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках для волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 1$ из второй моды спектра), рис. 4 (распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках для волн кручения с относи-

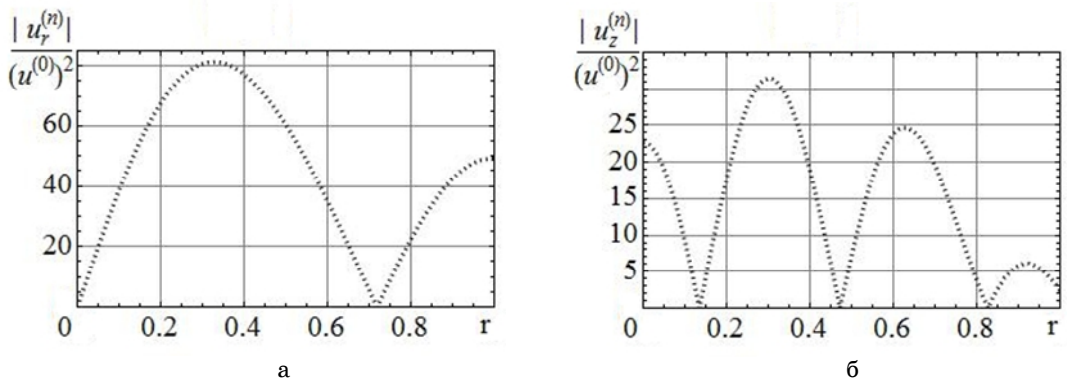


Рис. 4.

тельной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из второй моды спектра) и рис. 5 (распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых нелинейных гармониках для волн кручения с относительной длиной $\tilde{\lambda} = 4$ из второй моды спектра).

В случае коротких волн доминирующими по величине являются вторые гармоники в цилиндре из цинка, имеющие преимущественно продольный тип. В случае же относительно длинных волн общий уровень амплитудных максимумов, как и в предшествующем случае, снижается и

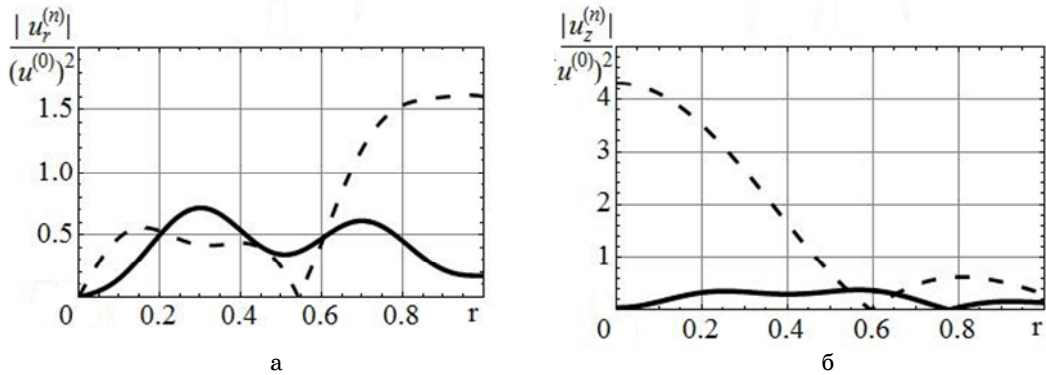


Рис. 5.

отсутствует выраженное доминирование амплитудных максимумов для какого либо из рассматриваемых цилиндров.

РЕЗЮМЕ. У статті представлені результати теоретичного чисельно-аналітичного дослідження властивостей нелінійних другий гармонік, що генеруються при поширенні монохроматичних осесиметричних нормальних пружних хвиль крутіння уздовж осевого напрямку в трансверсально-ізотропному циліндрі кругового перерізу з вільною бічною поверхнею. Для циліндрів з титанату барію, титанату-цирконата свинцю і монокристалічного цинку проведено частотний параметричний аналіз амплітуд і форм хвильових рухів у других гармоніках для нормальних хвиль досліджуваного типу. Описано ряд закономірностей, властивих розглядуваному типу хвильових процесів.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний циліндричний хвилевід, вільна бічна поверхня, геометрична нелінійність, монохроматичні нормальні крутильні хвилі, нелінійні ангармонічним збудження, амплітудно-частотні характеристики других гармонік.

SUMMARY. Are presented the theoretical numerical-analytical investigation of nonlinear second harmonics generated by the propagation of axisymmetric normal elastic torsion waves along the axial direction in an transversely isotropic cylinder of circular cross section with a free lateral surface. The forms and amplitudes of wave motion in geometrical nonlinear wave with variable relative lengths were analyzed for a cylinder made of ceramics of barium titanate, ceramics of plumbum titanate zirconate and of monocrystal zinc.

Key words: transversely isotropic cylindrical waveguide, free lateral surface, geometric nonlinearity, monochromatic normal torsion wave, nonlinear anharmonic perturbation, amplitude-frequency characteristics of the second harmonics.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Елагин А.В., Сторожев В.И. Влияние типа краевых условий на уровни вторых гармоник осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндре // Пробл. общисл. механики і міцності конструкцій.– 2012.– Вип. 20.– С. 315–324.
2. Елагин А.В., Сторожев В.И. Кинематические свойства нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в цилиндрическом волноводе // Актуальные пробл. механики деформированного твердого тела. Матер. VI Междунар. науч. конф.– Донецк: Юго Восток, 2010.– С. 141–145.
3. Елагин О.В., Сторожев В.И. Нелінійні ангармонічні збудження при розповсюдженні осесиметричних поздовжньо-зсувних нормальних хвиль в пружному циліндрі // Вісн. До-

нец. ун-ту. Сер. А: Природ. науки.– 2010.– Вип. 2.– С. 77–83.

4. *Зарембо Л.К., Тимошенко В.И.* Нелинейная акустика.– М.: Изд-во МГУ, 1984.– 104 с.

5. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред.– К.: Наук. думка, 1985.– 176 с.

6. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику.– М.: Наука, 1984.– 400 с.

7. *Куренная К.И., Сторожев В.И.* Ангармонические эффекты при распространении нелинейных нормальных P-SV волн в анизотропном упругом слое // Теорет. и прикладная механика.– 2002.– Вып. 36.– С. 116–124.

8. *Куренная К.И., Сторожев В.И.* Вторые гармоники нелинейных нормальных SH-волн в пластине из монокристалла германия // Теорет. и прикладная механика.– 2002.– Вып. 35.– С. 131–138.

9. *Куслива А.О.* Нелінійні ефекти при розповсюдженні монохроматичних пружних SH хвиль в анізотропному шарі з гнучкими нерозтяжними покриттями граней // Вісн. Донец. ун-ту, Сер. А: Природ. науки.– 2008.– Вип. 2.– С. 81–87.

10. *Кусливая А.А.* Нелинейное взаимодействие нормальных SH волн в слое с разнотипными граничными условиями // Вісн. Донец. ун-ту, Сер. А: Природ. науки.– 2008.– Вип. 1.– С. 182–188.

11. *Кусливая А.А., Сторожев В.И.* Нелинейные эффекты при распространении нормальных P-SV волн в слое со скользящей заделкой граней // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій.– 2010.– Вип. 14.– С. 313–319.

12. *Лямов В.Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах.– М.: Изд-во МГУ, 1983.– 224 с.

13. *Руцицкий Я.Я.* Особливості розвитку теорії пружних нелінійних хвиль // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2003.– Т. 46, № 1.– С. 90–105.

14. *Kurennaia K.I., Storozhev V.I.* Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal layer // J. of Computational and Applied Mechanics.– 2005.– Vol. 6, No 1.– P. 67–82.

15. *Kurennaia K.I., Storozhev V.I.* Nonlinear acoustic effects while spreading of the normal waves in anisotropic elastic layer // Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration (Stockholm, Sweden, 7–10 July 2003).– Stockholm, IIAV, 2003.– P. 3605–3612.

16. *Rushchitsky J.J.* Analysis of a Quadratically Nonlinear Hyperelastic Plane Longitudinal Wave // Int. Appl. Mech.– 2009.– 45, № 2.– P. 148–158.

17. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves: Derivation of Wave Equations for Plane-Strain State // Int. Appl. Mech.– 2005.– 41, № 5.– P. 496–505.

18. *Sugimoto N., Hirao M.* Nonlinear mode coupling of elastic waves // J. Acoust. Soc. Am.– 1977.– Vol. 62, № 1.– P. 23–32.

19. *Sugimoto N.* Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves // J. Acoust. Soc. Am.– 1978.– Vol. 64, N 4.– P. 1190–1195.

20. *Yelagin A.V., Storozhev V.I.* Nonlinear second harmonics axisymmetric waves of torsion in a cylindrical waveguide with a clamped surface // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.– 2010.– Вип. 14.– С. 347–353.

Донецкий национальный университет

Поступила 15.04.2014

УДК 539.3

В. Ф. МЕЙШ, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. МЕЙШ, канд. физ.-мат. наук,
Н. П. КЕПЕНАЧ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Решена задача о вынужденных колебаниях подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения при действии нестационарной нагрузки. Принимается конструктивно – ортотропная модель теории подкрепленных оболочек. Система дифференциальных уравнений основана на использовании теории оболочек и стержней типа Тимошенко. Приведена постановка и разработан численный алгоритм решения задачи. Приведен пример расчета динамического поведения подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического сечения при нестационарной нагрузке.

Ключевые слова: цилиндрические оболочки эллиптического поперечного сечения, конструктивно – ортотропная модель, теория оболочек и стержней типа Тимошенко, вынужденные колебания, численные методы.

При постановке задач теории подкрепленных оболочек в основном применяются два подхода: используется конструктивно-ортотропная модель оболочек и модель подкрепленных оболочек с учетом дискретного размещения ребер. В рамках первой модели решен ряд задач статики и динамики теории подкрепленных оболочек, которые детально изложены в монографиях [1–4]. Решение задач о динамическом поведении подкрепленных оболочек с учетом дискретного расположения ребер в рамках классической модели детально рассмотрены в работах [2, 3, 6]. Уточненная модель теории подкрепленных оболочек при исследовании динамического поведения неоднородных конструкций при нестационарных нагрузках использовалась в работах [5, 7–9]. В указанных работах в основном рассмотрены подкрепленные оболочки канонической формы (цилиндрические и сферические). Поведение продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения с учетом дискретного расположения ребер при нестационарных нагрузках рассмотрено в [10], поперечно подкрепленных оболочек в аналогичной постановке – в работе [11].

В данной статье в рамках конструктивно-ортотропной модели теории подкрепленных оболочек приведена постановка задачи о вынужденных колебаниях подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического сечения, построен численный алгоритм ее решения, проведен анализ полученных результатов.

Постановка задачи. Рассмотрим подкрепленную цилиндрическую оболочку эллиптического сечения при действии на нее распределенной нагрузки $P_3(s_1, s_2, t)$, где s_1, s_2 – пространственные координаты средней поверхности обшивки; t – временная координата. Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности ис-

ходной оболочки записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, \quad k_1 = 0; \\ A_2 &= (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}; \\ k_2 &= ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}; \end{aligned} \quad (1)$$

где a и b – полуоси эллипса, характеризующего поперечное сечение цилиндрической оболочки.

Цилиндрическая оболочка подкреплена регулярным набором продольных и поперечных ребер. Для описания напряженно-деформируемого состояния (НДС) исходной неоднородной оболочечной структуры будем использовать конструктивно-ортотропную модель теории подкрепленных оболочек типа Тимошенко [1, 4]. При этом, подкрепленная оболочка рассматривается как некая двухслойная оболочка, состоящая собственно из обшивки и слоя с приведенными физико-механическими параметрами в направлениях s_1 и s_2 .

НДС обшивки можно определить через обобщенный вектор перемещений срединной поверхности $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2)$. Соответственно, НДС приведенного слоя находится через обобщенный вектор перемещений слоя $\bar{U}_c = (u_{1c}, u_{2c}, u_{3c}, \phi_{1c}, \phi_{2c})$. Связь между компонентами векторов \bar{U} и \bar{U}_c в случае чисто продольного подкрепления определяется формулами

$$\begin{aligned} u_{1c}(s_1, s_2) &= u_1(s_1, s_2) \pm h_{ci} \phi_1(s_1, s_2), \\ u_{2c}(s_1, s_2) &= u_2(s_1, s_2) \pm h_{ci} \phi_2(s_1, s_2), \\ u_{3c}(s_1, s_2) &= u_3(s_1, s_2), \\ \phi_{1c}(s_1, s_2) &= \phi_1(s_1, s_2), \\ \phi_{2c}(s_1, s_2) &= \phi_2(s_1, s_2). \end{aligned} \quad (2)$$

В случае чисто поперечного подкрепления уравнения связи имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1c}(s_1, s_2) &= u_1(s_1, s_2) \pm h_{cj} \phi_1(s_1, s_2), \\ u_{2c}(s_1, s_2) &= u_2(s_1, s_2) \pm h_{cj} \phi_2(s_1, s_2), \\ u_{3c}(s_1, s_2) &= u_3(s_1, s_2), \\ \phi_{1c}(s_1, s_2) &= \phi_1(s_1, s_2), \\ \phi_{2c}(s_1, s_2) &= \phi_2(s_1, s_2). \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (2), (3) $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$, $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$, где h – толщина обшивки; h_i , h_j – высота ребер в продольном и поперечном направлениях. Знаки \pm соответствуют случаям внешнего и внутреннего подкреплений.

Для вывода уравнений колебаний цилиндрической оболочки на упругом основании используем вариационный принцип стационарности Гамильтона–Остроградского [3, 5, 7]. После стандартных преобразований в

вариационном функционале получим такие уравнения колебаний гладкой цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1}(T_{11} + T_{11c}) + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm \\
&\pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}(T_{22} + T_{22c}) + k_2(T_{23} + T_{23c}) &= \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \right. \\
&\left. + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial s_1}(T_{13} + T_{13c}) + \frac{\partial}{\partial s_2}(T_{23} + T_{23c}) - k_2(T_{22} + T_{22c}) + \\
&+ P_3(s_1, s_2, t) = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial}{\partial s_1}(M_{11} + M_{11c} \pm h_{ci} T_{11c}) + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \\
&= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
&+ \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}(M_{22} + M_{22c} \pm h_{cj} T_{22c}) - T_{23} &= \\
&= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
&+ \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Усилия и моменты в уравнениях колебаний для неоднородной оболочки (4) связаны с соответствующими деформациями следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22}, \quad T_{22} = B_{21} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22}, \quad T_{13} = B_{13} \varepsilon_{13}, \\
T_{23} &= B_{23} \varepsilon_{23}, \quad T_{12} = B_{12}^* \varepsilon_{12}, \quad M_{11} = D_{11} \kappa_{11} + D_{12} \kappa_{22}, \\
M_{22} &= D_{21} \kappa_{11} + D_{22} \kappa_{22}, \quad H = D_{12}^* \kappa_{12}, \quad T_{11c} = B_{11c} \varepsilon_{11c}, \\
T_{22c} &= B_{22c} \varepsilon_{22c}, \quad T_{13c} = B_{13c} \varepsilon_{13c}, \quad T_{23c} = B_{23c} \varepsilon_{23c}, \\
M_{11c} &= D_{11c} \kappa_{11c}, \quad M_{22c} = D_{22c} \kappa_{22c}, \tag{5}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_1} + \frac{\partial u_2}{\partial s_2}, \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \phi_1, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_2} + \phi_2 - k_2 u_2; \\
 \kappa_{11} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial s_1}, & \kappa_{22} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial s_2}, & \kappa_{12} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial s_2}; \\
 \varepsilon_{11c} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \phi_1}{\partial s_1}, & \varepsilon_{22c} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial \phi_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, \\
 \varepsilon_{13c} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \phi_1, & \varepsilon_{23c} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_2} + \phi_2 - k_2 (u_2 \pm h_{cj} \phi_2); \\
 \kappa_{11c} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial s_1}, & \kappa_{22c} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial s_2}; \\
 B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, & B_{22} &= \frac{\nu_1 E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, & B_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\
 B_{21} &= B_{12}, & B_{12}^* &= G_{12} h, & B_{13} &= G_{13} h, & B_{23} &= G_{23} h, \\
 D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, & D_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \\
 D_{12} &= \frac{\nu_1 E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, & D_{21} &= D_{12}, & D_{12}^* &= G_{12} \frac{h^3}{12}; \\
 B_{11c} &= \frac{E_{1c} F_1}{l_1}, & B_{13c} &= \frac{G_1 F_1}{l_1}, & D_{11c} &= \frac{E_{1c} I_1}{l_1}, \\
 B_{22c} &= \frac{E_{2c} F_2}{l_2}, & B_{23c} &= \frac{G_{2c} F_2}{l_2}, & D_{22c} &= \frac{E_{2c} I_2}{l_2},
 \end{aligned}$$

$E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – физико-механические параметры ортотропного материала оболочки; l_1, l_2 – расстояние между ребрами для продольного и поперечного набора; a_1, h_1, F_1 – геометрические параметры ребер вдоль оси s_1 ; a_2, h_2, F_2 – геометрические параметры ребер вдоль оси s_2 .

Уравнения (4), (5) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения задачи. Численный алгоритм решения начально – краевой задачи (4), (5) основывается на применении интегро – интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственным координатам s_1, s_2 и явной аппроксимации по временной координате t [5, 7–9].

Рассмотрим область $D = \{s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}; s_{20} \leq s_2 \leq s_{2N}\}$. Выберем подобласть $D_{kl}^1 \subset D$, $D_{kl}^1 = \{s_{1k-1/2} \leq s_1 \leq s_{1k+1/2}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}$ и проинтегрируем уравнения колебаний (4) по этой подобласти. В результате получим следующие разностные соотношения нахождения решения на $(n+1)$ -ом временном слое:

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{11k+1/2,l}^n - T_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{11ck+1/2,l}^n - T_{11ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \\
& + \frac{S_{k,l+1/2}^n - S_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) (u_{1k,l}^n)_{tt} \pm \\
& \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (\phi_{1k,l}^n)_{tt}, \\
& \frac{S_{k+1/2,l}^n - S_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& + \frac{T_{22ck,l+1/2}^n - T_{22ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{k_{2k,l}}{2} \left[(T_{23k,l-1/2}^n + T_{23k,l+1/2}^n) + \right. \\
& \left. + (T_{23ck,l-1/2}^n + T_{23ck,l+1/2}^n) \right] = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) (u_{2k,l}^n)_{tt} \pm \\
& \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (\phi_{2k,l}^n)_{tt}, \\
& \frac{T_{13k+1/2,l}^n - T_{13k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{13ck+1/2,l}^n - T_{13ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \\
& + \frac{T_{23k,l+1/2}^n - T_{23k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{T_{23ck,l+1/2}^n - T_{23ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{k_{2k,l}}{2} \left[(T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n) + (T_{22ck,l+1/2}^n - T_{22ck,l-1/2}^n) \right] + \\
& + P_{3k,l}^n = \left(\rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) (u_{3k,l}^n)_{tt}, \\
& \frac{M_{11k+1/2,l}^n - M_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{11ck+1/2,l}^n - M_{11ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} \pm \\
& \pm h_{ci} \frac{T_{11ck+1/2,l}^n - T_{11ck-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{H_{k,l+1/2}^n - H_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{1}{2} (T_{13k+1/2,l}^n + T_{13k-1/2,l}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\phi_{1k,l}^n)_{tt} \pm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (u_{1k,l})_{\bar{t}\bar{t}} + \\
& + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] (\phi_{1k,l})_{\bar{t}\bar{t}}, \\
& \frac{H_{k+1/2,l}^n - H_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{22k,l+1/2}^n - M_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& + \frac{M_{22ck,l+1/2}^n - M_{22ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{T_{22ck,l+1/2}^n - T_{22ck,l-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{1}{2} (T_{23k,l+1/2}^n + T_{23k,l-1/2}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\phi_{2k,l})_{\bar{t}\bar{t}} \pm \\
& \pm \left(\rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) (u_{2k,l})_{\bar{t}\bar{t}} + \\
& + \left[\rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] (\phi_{2k,l})_{\bar{t}\bar{t}}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Таким образом, в разностных соотношениях величины обобщенных перемещений u_1 , u_2 , u_3 , ϕ_1 , ϕ_2 соотнесены к целым узлам пространственной разностной сетки, а величины усилий и моментов (соответственно деформаций) – к полуцелым узлам $(k \pm 1/2, l)$; $(k, l \pm 1/2)$. Для получения согласованных разностных соотношений для усилий и моментов, уравнения (6) интегрируются по областям:

$$\begin{aligned}
D_{kl}^2 &= \left\{ s_{1k-1} \leq s_1 \leq s_{1k}, \quad s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2} \right\}; \\
D_{kl}^3 &= \left\{ s_{1k} \leq s_1 \leq s_{1k+1}, \quad s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2} \right\}
\end{aligned}$$

и т. д. В соотношениях (6) обозначения разностных производных введены согласно [5, 7, 12].

Анализ полученных числовых результатов. Как числовой пример, рассматривалась задача динамического поведения продольно-поперечно подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки эллиптического сечения при действии распределенной внутренней импульсной нагрузки. Предполагается, что края оболочки при $s_1 = 0$ и $s_2 = L_1$ жестко защемлены, где L_1 – длина оболочки.

Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалась так:

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где $E_1/A = 7 \cdot 10^4$; $T = 0,625L_1/c_{11}$; $c_{11}^2 = E_1/[\rho(1 - \nu_1\nu_2)]$; E_1 , ρ , ν_1 , ν_2 – физико-механические параметры материала оболочки.

Задача решалась при следующих геометрических и физико-механи-

ческих параметрах для оболочки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L_1 = 0,4$ м. Параметры эллиптичности поперечного сечения оболочки брались следующие: 1) $a/b = 1$; 2) $a/b = 1,1$; 3) $a/b = 1,2$. Для подкрепляющих ребер полагалось: $E_i = E_j = E_1$; $F_i = a_i h_i$; $F_j = a_j h_j$; $a_i = a_j = h$; $h_i = h_j = 2h$; $l_1 = L_2 / 4$; $l_2 = L_1 / 4$; $L_2 = [\pi ab + (a - b)^2] / (a + b)$.

Расчеты проводились в области $D = \{0 \leq s_1 \leq L_1, 0 \leq s_2 \leq L_2\}$ на временном отрезке $0 \leq t \leq 80T$. На рис. 1, 2 приведены результаты численных расчетов для величин u_3 соответственно в сечении $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = \pi/2$ вдоль координаты s_1 ($0 \leq s_1 \leq L_1$). Учитывая динамический характер распределения искомых величин по пространственным координатам s_1, s_2 и времени t , проведен анализ напряженно-деформируемого состояния исходной неоднородной конструкции для времен достижения ими максимальных по модулю значений u_3 для случая $a/b = 1$.

На рис. 1 приведены зависимости величин u_3 по пространственной координате s_1 в сечении $\alpha_2 = 0$. Кривая 1 соответствует времени $t = 7,5T$

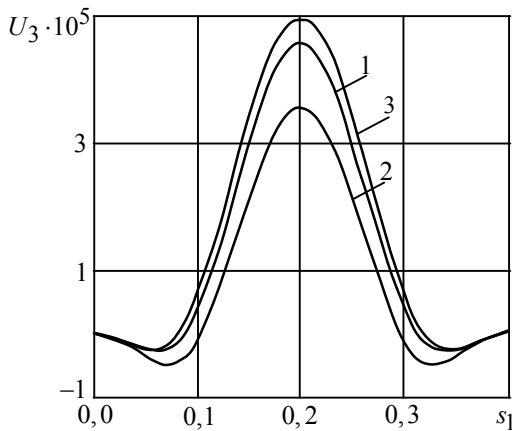


Рис. 1

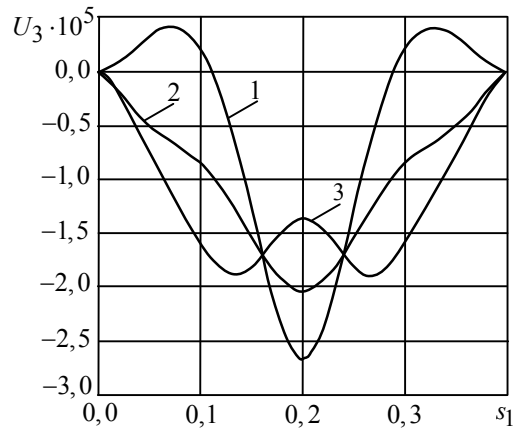


Рис. 2

для $a/b = 1$; кривые 2 и 3 соответствуют случаям $a/b = 1,1$ и $a/b = 1,2$ в тот же момент времени. На рис. 2 приведены аналогичные зависимости в сечении $\alpha_2 = \pi/2$. Кривая 1 соответствует времени $t = 8,5T$ для $a/b = 1$. $a/b = 1$, кривые 2 и 3 соответствуют случаям $a/b = 1,1$ и $a/b = 1,2$ в тот же момент времени. Как видим, что небольшое изменение в параметрах эллиптичности конструкции приводит к значительным расхождениям результатов расчетов по пространственным и временной координатам.

РЕЗЮМЕ. В роботі розглянута задача про вимушене коливання підкріплених циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу під дією нестационарного навантаження. Приймається конструктивно-ортотропна модель теорії підкріплених оболонок.

Приведено постановку та розроблено чисельний алгоритм розв'язування поставленої задачі. Система диференціальних рівнянь базується на використанні теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка. Наведено приклади розрахунку динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарному навантаженні.

Ключові слова: циліндричні оболонки еліптичного перерізу, конструктивно-ортотропна модель, теорія оболонок та стержнів типу Тимошенка, вимушені коливання, чисельні методи

SUMMARY. In this paper we consider the problem of forced oscillations of stiffened cylindrical shells with an elliptical cross section under the action of the nonstationary loads. Structurally – orthotropic model of stiffened shells theory is accepted. Postulation and numerical algorithm for the solution of the put problem is represented. The system of differential equations is based on the theory of shells and rods Timoshenko type. As an example the results of analysis of nonstationary vibrations of stiffened cylindrical shells with elliptical cross - section are presented.

Key words: cylindrical shell with an elliptical cross section, structurally – orthotropic model, the theory of shells and rods Timoshenko type, forced vibrations, numerical methods

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматгиз, 1961. – 384 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с.
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: под ред. А.Н. Гузя. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
6. Колебания ребристых оболочек вращения / Под ред. И.Я. Амиро. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с.
7. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд. Полигр. Центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
8. Мейш В.Ф. Нелинейное деформирование продольно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29, вып. 2. – С. 184–190.
9. Мейш В.Ф. О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 61–67.
10. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Кепенач Н.П. Динамическое поведение продольно – подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при нестационарных нагрузках // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 245–252.
11. Мейш В.Ф., Кепенач Н.П. Вынужденные колебания поперечно-подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках // Пробл. обчисл. механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Ліра, 2013. – Вип. 21. – С. 157–166.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Поступила 06.03.2014

УДК 539.3

В. Г. КАРНАУХОВ, д-р. физ.-мат. наук,
В. И. КОЗЛОВ, д-р. физ.-мат. наук,
Т. В. КАРНАУХОВА, канд. физ.-мат. наук

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ ПЬЕЗОАКТУАТОРОВ ПРИ АКТИВНОМ ДЕМПФИРОВАНИИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ

Получено аналитическое решение задачи об активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний шарнирно опертой трансверсально-изотропной панели при помощи пьезоэлектрических актуаторов. Для моделирования колебаний пластины используются гипотезы С. П. Тимошенко. Получена простая формула для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки при резонансных колебаниях. Исследовано влияние деформаций сдвига на эту разность потенциалов.

Ключевые слова: цилиндрическая панель, активное демпфирование, актуаторы, резонансные колебания.

Цилиндрические оболочки являются самыми распространенными элементами конструкций в современной технике. Гармоническое во времени нагружение является одним из основных типов воздействия на эти элементы. Особенно опасны резонансные колебания, когда частота механической нагрузки совпадает с собственной частотой конструкции. Для уменьшения динамической напряженности оболочки при резонансных колебаниях используются различные методы демпфирования колебаний. Для этой цели широкое распространение получило пассивное демпфирование колебаний, при котором амплитуда колебаний уменьшается за счет включения в конструкцию компонент с высокими гистерезисными потерями, например, вязкоупругих слоев [4, 7]. В последние годы для демпфирования колебаний стержней, пластин и оболочек широко применяются активные методы, основанные на использовании пьезоэлектрических компонент. Одним из основных методов активного демпфирования колебаний является метод, базирующийся на использовании пьезоактуаторов. При этом в структуру тонкостенной конструкции включаются пьезослой, выполняющие функции актуаторов. К последним подводится разность потенциалов, которая компенсирует механическую нагрузку, так что при совместном действии механической и электрической нагрузок уровень колебаний существенно уменьшается. При использовании такого метода основной задачей является расчет указанной разности потенциалов, которая зависит от многих факторов: размещения актуаторов, их размеров, механических граничных условий и т.п. Обзор исследований по этим вопросам представлен, например, в [5, 6, 8]. Для описания механического поведения тонкостенных элементов можно использовать различные гипотезы. Если они изготовлены из анизотропного материала или их толщина недостаточно мала, использование классических гипотез Кирхгоффа-Лява может привести

к значительным погрешностям при расчете указанной разности потенциалов. В связи с этим возникает необходимость при решении этого вопроса использовать уточненные модели тонкостенных элементов, основанные, например, на гипотезах С. П. Тимошенко.

В настоящей статье получено аналитическое решение задачи об активном демпфировании колебаний шарнирно опертой цилиндрической панели при помощи пьезоактуаторов. Для моделирования колебаний панели используются гипотезы С. П. Тимошенко [2, 3]. Рассматривается панель из трансверсально-изотропного вязкоупругого материала. Получена очень простая формула для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки при вынужденных резонансных колебаниях. Исследовано влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоэлектрического актуатора.

Постановка задачи. Рассмотрим трансверсально-изотропную вязкоупругую цилиндрическую панель радиуса R , толщиной h_0 и размером $a \times b$. Края панели шарнирно оперты. На верхней и нижней цилиндрических поверхностях панели нанесены пьезослой толщиной h_1 . На панель действует равномерно распределенное гармоническое во времени давление $p(t) = P_0 e^{i\omega t}$ с частотой, близкой к резонансной. В качестве отсчетной выбрана срединная поверхность трехслойной панели симметричной структуры. Тогда координаты поверхностей, ограничивающих каждый

слой, равны: $z = a_0 = -\frac{h_0}{2} - h_1$ (нижняя цилиндрическая поверхность),

$z = a_1 = -\frac{h_0}{2}$, $z = a_2 = \frac{h_0}{2}$, $z = a_3 = \frac{h_0}{2} + h_1$ (верхняя цилиндрическая поверхность).

Все цилиндрические поверхности, ограничивающие пассивный и пьезоактивные слои, покрыты бесконечно тонкими электродами. При этом на ограничивающих пассивный слой поверхностях $z = a_1$, $z = a_2$ разность потенциалов равна нулю, а на внешних поверхностях $z = a_0$, $z = a_3$ она равна V_0 . Для моделирования механического поведения такой панели применяются гипотезы С. П. Тимошенко, согласно которым перемещения по толщине трехслойной оболочки аппроксимируются линейным законом

$$u = u_0 + u_1 z, \quad v = v_0 + v_1 z, \quad w = w_0. \quad (1)$$

Тогда деформации оболочки также изменяются по ее толщине по линейному закону:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= \varepsilon_{11} + \kappa_{11} z, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{22} + \kappa_{22} z, \\ \varepsilon_{s\theta} &= \varepsilon_{12} + \kappa_{12} z, & \varepsilon_{sz} &= \varepsilon_{13} + \kappa_{13} z, & \varepsilon_{\theta z} &= \varepsilon_{23} + \kappa_{23} z. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом соотношения Коши для цилиндрической панели принимают вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right), & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, & \kappa_{22} &= \frac{\partial v_1}{\partial y}, & \kappa_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Кроме того, считается, что нормальная составляющая тензора напряжений $\sigma_{zz} = 0$. Указанные механические гипотезы дополняются гипотезами относительно электрических полевых величин: предполагается, что нормальная составляющая вектора индукции D_z значительно больше ее тангенциальных составляющих. В результате получаем упрощенные определяющие уравнения электромеханики:

$$\begin{aligned}\sigma_{ss}^k &= A_{11}^k \varepsilon_{ss} + A_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= A_{12}^k \varepsilon_{ss} + A_{11}^k \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}, & \sigma_{zs} &= 2G_{13}^k \varepsilon_{zs}, & \sigma_{\theta z}^k &= 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}, \\ D_z^k &= \gamma_{33}^k E_z^k + \gamma_{11}^k (\varepsilon_{ss}^k + \varepsilon_{\theta z}^k) \quad (k = \overline{1, 3}),\end{aligned}\quad (4)$$

где для трансверсально-изотропного материала [1, 2]

$$\begin{aligned}A_{11}^k &= B_{11}^k + \frac{(\gamma_{11}^k)^2}{\gamma_{33}^k} = B_{11}^k \left(1 + \frac{1 + \nu^k}{2} \frac{(k_p^k)^2}{1 - (k_p^k)^2} \right), \\ B_{11}^k &= \frac{1}{S_{11}^{kE} (1 - \nu^{k2})}, & A_{12}^k &= B_{12}^k + \frac{(\gamma_{11}^k)^2}{\gamma_{33}^k}, \\ B_{12}^k &= \nu^k B_{11}^k = B_{11}^k \left[\nu^k + \frac{(k_p^k)^2}{1 - (k_p^k)^2} \right], \\ \gamma_{11}^k &= d_{31}^k (1 + \nu^k) B_{11}^k, & G_{12}^k &= \frac{1 - \nu^k}{2} B_{11}^k, \\ \sigma_{\theta z}^k &= 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}^k, & G_{13}^k &= G_{23}^k = \frac{\varepsilon_{11}^{kT}}{S_{55}^{kE} \varepsilon_{11}^{kT} - d_{15}^k d_{15}^k}, \\ \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^{kT} (1 - \kappa_p^{k2}), & (\kappa_p^k)^2 &= \frac{2d_{31}^k d_{31}^k}{S_{11}^{kE} \varepsilon_{33}^{kT} (1 - \nu^k)}, & \nu^k &= -\frac{S_{12}^{kE}}{S_{11}^{kE}},\end{aligned}$$

S_{ij}^{kE} – податливости материала; d_{ij}^k – пьезомодули; ε_{ij}^{kT} – диэлектрические проницаемости.

Вводя усилия и моменты, из (4) находим оболочечные определяющие уравнения, связывающие силовые факторы (усилия и моменты) и

кинематические характеристики (3). Другие универсальные соотношения (уравнения движения в усилиях и моментах, механические граничные условия) известны и представлены, например, в монографии [3]. Подставляя в оболочечные определяющие уравнения кинематические соотношения (3), а полученный результат – в уравнения движения в усилиях и моментах, приходим к дифференциальной постановке задачи относительно u_0, v_0, u_1, v_1, w . Эти уравнения здесь не выписываются, а для решения поставленной задачи используем ее вариационную формулировку, эквивалентную дифференциальной. Согласно этой вариационной формулировке исследование вынужденных колебаний цилиндрической пьезопанели сводится к определению стационарных точек комплексного функционала

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3, \quad \delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_1 + \delta\mathcal{E}_2 + \delta\mathcal{E}_3 = 0. \quad (5)$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \iint_F [C_{11}\varepsilon_{11}^2 + 2C_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_{11}\varepsilon_{22}^2 + 4C_{44}\varepsilon_{12}^2 + D_{11}\kappa_{11}^2 + 2D_{12}\kappa_{11}\kappa_{22} + D_{22}\kappa_{22}^2 + 4D_{44}\kappa_{12}^2 + 4C_{55}(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)] dx dy, \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{1}{2} \iint_{(S)} [\omega^2 \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) + \omega^2 \rho_2 (u_1^2 + v_1^2)] dx dy, \quad (7)$$

$$\mathcal{E}_3 = \iint_{(S)} \left\{ (\phi_k - \phi_{k-1}) \left[\frac{H_2^k}{H_1^k} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \frac{H_4^k}{H_1^k} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right] - P_0 w \right\} dx dy. \quad (8)$$

В (8) и в дальнейшем использовано правила суммирования по повторяющемуся индексу. Фигурирующие в (7), (8) параметры определяются по формулам:

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}^k (a_k - a_{k-1}) - (H_2^k)^2 / H_1^k, \\ C_{12} &= A_{12}^k (a_k - a_{k-1}) - (H_2^k)^2 / H_1^k, \\ D_{11} &= \frac{1}{3} A_{11}^k (a_k^3 - a_{k-1}^3) - (H_3^k)^2 / H_1^k, \\ D_{12} &= \frac{1}{3} A_{12}^k (a_k^3 - a_{k-1}^3) - (H_3^k)^2 / H_1^k, \\ C_{44} &= G_{12}^k (a_k - a_{k-1}), \quad C_{55} = G_{13}^k (a_k - a_{k-1}), \\ D_{44} &= \frac{1}{3} G_{12}^k (a_k^3 - a_{k-1}^3), \quad \rho_1 = \rho_k (a_k - a_{k-1}), \end{aligned} \quad (9)$$

где по k производится суммирование, а

$$H_1^k = \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma_{33}^k}, \quad H_2^k = \frac{\gamma_{11}^k (a_k - a_{k-1})}{\gamma_{33}^k},$$

$$\begin{aligned}
H_3^k &= \frac{\gamma_{11}^k (a_k^2 - a_{k-1}^2)}{2\gamma_{33}^k}, & H_4^k &= \frac{\gamma_{11}^k (a_k^2 - a_{k-1}^2)}{2\gamma_{33}^k}, \\
H_4^k &= \frac{1}{2} \frac{B_{11}^k \gamma_{11}^k (a_k^2 - a_{k-1}^2)}{G_{13}^k \gamma_{33}^k} \left(1 - \frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{6a_0^2}\right), \\
a_0 &= -\left(\frac{h_0}{2} + h_1\right), & a_1 &= -\frac{h_0}{2}, & a_2 &= \frac{h_0}{2}, & a_3 &= \frac{h_0}{2} + h_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Метод решения задачи и анализ результатов. Решение вариационной задачи для шарнирного опирания торцов панели представим в виде:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_{mn}^0 \cos k_m x \sin p_n y, & v_0 &= v_{mn}^0 \sin k_m x \cos p_n y, \\
w &= w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, & u_1 &= u_{mn}^1 \cos k_m x \sin p_n y, \\
v_1 &= v_{mn}^1 \sin k_m x \cos p_n y.
\end{aligned} \tag{11}$$

Выражения (11) автоматически удовлетворяют граничным условиям. Подставим (11) в функционалы (6)–(8). Тогда из уравнения (5) находим систему алгебраических уравнений относительно u_{mn}^0 , v_{mn}^0 , u_{mn}^1 , v_{mn}^1 , w_{mn} :

$$\begin{aligned}
(C_{11}k_m^2 + D_{44}p_n^2)u_{mn}^0 + (C_{12} + C_{44})k_m p_n v_{mn}^0 &= \\
&= C_{12}k_m w_{mn} / R + k_m \phi_{mn} H_2 / H_1, \\
(C_{12} + C_{44})k_m p_n u_{mn}^0 + (C_{22}p_n^2 + C_{44}k_m^2)v_{mn}^0 &= \\
&= C_{22}p_n w_{mn} / R + p_n \phi_{mn} H_2 / H_1, \\
(D_{11}k_m^2 + D_{44}p_n^2 + C_{55})u_{mn}^1 + (D_{12} + D_{44})k_m p_n v_{mn}^1 &= \\
&= -C_{55}k_m w_{mn} + k_m \phi_{mn} H_3 / H_1, \\
(D_{12} + D_{44})k_m p_n u_{mn}^1 + (D_{22}p_n^2 + D_{44}k_m^2 + C_{55})v_{mn}^1 &= \\
&= -C_{55}p_n w_{mn} + p_n \phi_{mn} H_3 / H_1, \\
C_{12}k_m u_{mn}^0 / R + C_{11}p_n v_{mn}^0 / R - \\
&- C_{55}[(k_m u_{mn}^1 + p_n v_{mn}^1)] - [C_{55}(k_m^2 + p_n^2) + C_{22} / R^2 - \\
&- \rho_1 \omega^2] w_{mn} - \phi_{mn} H_2 / (H_1 R) + P_{mn}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Ее решение дает

$$\begin{aligned}
u_{mn}^1 &= \frac{-C_{55}k_m w_{mn}}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} + \frac{k_m \phi_{mn}^s H_3^s / H_1^s}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}}, \\
v_{mn}^1 &= \frac{-C_{55}p_n w_{mn}}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} + \frac{p_n \phi_{mn}^s H_3^s / H_1^s}{D_{11}(k_m^2 + p_n^2) + C_{55}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{mn}^0 &= \frac{k_m (C_{12} k_m^2 - C_{11} p_n^2) w_{mn}}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 R} + \phi_{mn}^s \frac{H_2^s}{H_1^s} \frac{k_m}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)}, \\
v_{mn}^0 &= \frac{p_n [C_{11} (k_m^2 + p_n^2) + (C_{11} + C_{12}) k_m^2] w_{mn}}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 R} + \\
&+ \phi_{mn}^s \frac{H_2^s}{H_1^s} \frac{p_n}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Подставляя (13) в последнее из уравнений (12), получим следующие уравнение для поперечного прогиба:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{C_{55} D_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2}{C_{55} + D_{11} (k_m^2 + p_n^2)} + \frac{C_{11}^2 - C_{12}^2}{C_{11} R^2} \frac{k_m^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2} - \rho_1 \omega^2 \right] w_{mn} = P_{mn} - \\
&- \frac{C_{55} (k_m^2 + p_n^2)}{C_{55} + D_{11} (k_m^2 + p_n^2)} \phi_{mn}^k \frac{H_3^k}{H_1^k} - \frac{C_{11}^2 - C_{12}^2}{C_{11} R} \frac{k_m^2}{(k_m^2 + p_n^2)} \phi_{mn}^k \frac{H_2^k}{H_1^k}. \tag{14}
\end{aligned}$$

В этом выражении все электромеханические характеристики являются комплексными. Поэтому множитель при w_{mn} для вещественных ρ_1 и ω никогда не равен нулю. Для определения собственной частоты колебаний панели множитель при w_{mn} полагается равным нулю, а все электромеханические характеристики считаются действительными.

Если правая часть выражения (14) равна нулю, то в силу сказанного комплексный прогиб становится также равным нулю: $w_{mn} = 0$. При этом разность потенциалов, которую необходимо приложить к электродам для компенсации механической нагрузки, определяется из равенства:

$$P_{mn} = \frac{C_{55} (k_m^2 + p_n^2)}{C_{55} + D_{11} (k_m^2 + p_n^2)} \phi_{mn}^k \frac{H_3^k}{H_1^k} - \frac{C_{11}^2 - C_{12}^2}{C_{11} R} \frac{k_m^2}{(k_m^2 + p_n^2)} \phi_{mn}^k \frac{H_2^k}{H_1^k}. \tag{15}$$

Учитывая представленные выше обозначения, находим следующее выражение для потенциала V_0^T , которое компенсирует заданную механическую нагрузку P_0 при учете деформаций сдвига:

$$V_0^T = V_0^K \left[1 + \frac{D_{11} (k_m^2 + p_n^2)}{C_{55}} \right], \tag{16}$$

где величина

$$V_0^K = \frac{P_0}{\gamma_{11} (k_m^2 + p_n^2)} \tag{17}$$

определяет разность потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации заданной механической нагрузки при использовании классических гипотез Киргоффа-Лява, дополненных адекватными им гипотезами относительно электрических полевых величин.

При $h_1 \ll h_0$ формула (16) значительно упрощается и приобретает вид:

$$V_0^T = V_0^K \left\{ 1 + \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 n^2 \right] \frac{\pi^2 \left(\frac{h_0}{a} \right)^2}{1 - \left(\frac{v}{2} \right)^2} \frac{E}{G_{13}} \right\}. \quad (18)$$

Если ввести поправочный коэффициент при модуле сдвига, когда вместо модуля G_{13} вводится величина $\frac{\pi^2}{12} G_{13}$ [3], то формула (18) приобретает вид

$$V_0^T = V_0^K \left\{ 1 + \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 n^2 \right] \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{2}{1 - v} \frac{G}{G'} \right\}. \quad (19)$$

Здесь G , G' – модули сдвига пассивного трансверсально-изотропного материала.

Из (19) следует что кривизна панели не влияет на искомую разность потенциалов, так что она совпадает с разностью потенциалов для пластины.

При этом поправка к классическому результату зависит от отношения модулей сдвигов пассивного трансверсально-изотропного материала

$\left(\frac{G}{G'} \right)$ и отношения толщины панели к планарному размеру a . В зависимости от их значений величина поправки может быть достаточно большой.

Необходимо также отметить, что если механическая нагрузка изменяется во времени по закону $p(t) = P_0 \cos \omega t$, то для вязкоупругой панели для компенсации механической нагрузки к актуатору необходимо подвести разность потенциалов

$$V(t) = V' \cos \omega t - V'' \sin \omega t. \quad (20)$$

Для определения V' и V'' выражение (19) следует представить в виде

$$V_a^T = V' + iV'', \quad (21)$$

поскольку в правой части (19) для вязкоупругого материала фигурируют комплексные характеристики.

РЕЗЮМЕ. Одержано аналітичний розв'язок задачі про активне демпфування вимушених резонансних коливань шарнірно обпертої трансверсально іотропної ортотропної панелі за допомогою п'єзоелектричних актуаторів. Для моделювання коливань панелі використані гіпотези С. П. Тимошенка. Одержана проста формула для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатору для компенсації механічного навантаження. Досліджено вплив деформацій зсуву на цю різницю потенціалів.

Ключові слова: *циліндрична панель, активне демпфування, актуатори, резонансні коливання.*

SUMMARY. Analytical solution of problem about active damping of forced resonance vibrations of the transversely-isotropic hingedly fixed cylindrical panel by piezoelectric ac-

tuators is obtained. To model these vibrations Timoshenko' hypotheses are used. The simple formula is obtained to calculate the potential difference for compensation the mechanical load. The influence of the shear deformations on this difference.

Key words: *cylindrical panel active damping, actuators, resonance vibrations*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость.– К.: Наук. думка.– 1989.– 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5).
2. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость.– К.: Наук. думка, 1988.– 320 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 4).
3. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций.– К.: Изд. Полигр. Центр «Киевский ун-т», 2005.– 537 с.
4. *Савченко Е.В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций: монография.– Неин ООО. Видавництво Аспект Полиграф.– 2006.– 232 с.
5. *Batra R.C., Porfiri M., Spinello D.* Review of modeling electrostatically actuated micro-electromechanical systems// Smart Mater. Struct.– 2007.– Vol. 16.– P. R23–R31.
6. *Jones D.I.G.* Handbook of Viscoelastic Vibration Damping.– John Wiley and Sons.– 2001.– 410 p.
7. *Gabbert U., Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems.– Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London.– 2001.– 384 p.
8. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials// Applied mechanic reviews.– 1998.– Vol. 51, № 8.– P. 505–521.

Институт механики НАН Украины, г. Киев

Национальный технический университет Украины “КПИ” , г. Киев

Поступила 15.03.2014

УДК 539.3: 534.1

*И. А. ГЛУХОВ,
В. И. СТОРОЖЕВ, д-р техн. наук*

СИММЕТРИЧНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ МЕЖДУ ОДНОТИПНЫМИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

В аналитической форме равенства нулю функционального определителя четвертого порядка получено трансцендентное дисперсионное соотношение, описывающее закономерности распространения симметричных по толщинной координате локализованных продольно-сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя идеально контактирующими с ним одностипными по физико-механическим свойствам трансверсально-изотропными полупространствами. Представлены некоторые результаты качественного асимптотического анализа дисперсионного соотношения и результаты расчетов действительных ветвей дисперсионных спектров для нескольких типов рассматриваемых волноводных структур, образуемых реальными геоматериалами.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами, локализованные продольно-сдвиговые упругие волны, трансцендентные дисперсионные уравнения, волноводы с компонентами из геоматериалов, асимптотический и численный анализ, расчеты спектров бегущих волн.

Теоретические исследования спектров, кинематических и энергетических свойств локализованных волн деформаций для волноводов в виде заключенного между упругими полупространствами деформируемого слоя, представляют значительный интерес в связи с заданиями совершенствования ряда геоакустических технологий и методов ультразвукового зондирования пластов полезных ископаемых [4, 8, 9]. Эти проблемы на данный момент частично исследованы в рамках моделей, не учитывающих различные типы анизотропии физико-механических свойств компонентов подобных волноводов. Так в работах [2, 6, 7] представлены численно-аналитические исследования процессов распространения локализованных упругих волн в изотропном слое, заключенном между одностипными изотропными полупространствами при условии идеального механического контакта составляющих рассматриваемой волноводной структуры. В работе [3] рассмотрена волноводная структура, образуемая тонким анизотропным слоем, заключенным между двумя одностипными изотропными слоями произвольной толщины, что в ситуации неограниченно увеличивающейся толщины слоев позволяет интерпретировать волновод как слой, контактирующий с полупространствами. В работе [5] представлены сугубо теоретические аналитические результаты исследований, посвященных формулировке дисперсионных соотношений для волновода в виде заключенного между полупространствами слоя, материалы которых принадлежат произвольному классу анизотропии.

Однако для реальных геоструктур данного типа, составленных из осадочных либо вулканических пород, учет поперечной анизотропии яв-

ляется важным элементом адекватности используемых моделей.

В этом контексте, целью настоящей работы является получение и численно-аналитический анализ дисперсионного соотношения для локализованных волн продольно-сдвигового типа в трансверсально-изотропном слое между однотипными трансверсально-изотропными полупространствами. Рассматривается случай идеального механического контакта компонентов волновода. Исследование касается волн с симметричным по толщине слоя распределением упругих перемещений.

Постановка задачи. Рассматривается волноводная структура, занимающая в отнесенных к нормирующему параметру $R_* = h$ безразмерных прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ область

$$V_{\Sigma} = V^{(H_+)} \cup V^{(L)} \cup V^{(H_-)},$$

где

$$V^{(H_+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h/2\},$$

$$V^{(H_-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h/2\},$$

$$V^{(L)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\}.$$

Компоненты волновода составлены из трансверсально-изотропных материалов с коллинеарными Ox_3 осями упругой симметрии. Физико-механические свойства полупространств $V^{(H_+)}$ и $V^{(H_-)}$ считаются идентичными и отличающимися от физико-механических свойств слоя $V^{(L)}$. Материалы компонентов волновода характеризуются отнесенными к нормирующему параметру c_* модулями упругости $c_{ij}^{(L)}$ и $c_{ij}^{(H)} = c_{ij}^{(H_+)} = c_{ij}^{(H_-)}$, а также плотностями $\rho^{(L)}$ и $\rho^{(H)} = \rho^{(H_+)} = \rho^{(H_-)}$.

Анализу подлежат процессы распространения в данном волноводе симметричных по толщине слоя гармонических упругих волн $P-SV$ типа вдоль произвольного направления в его плоскости. В качестве направления распространения без ограничения общности выбирается координатное направление Ox_1 .

Рассматриваемая модель описывается краевой задачей, включающей системы уравнений волнового деформирования для всех компонентов волновода

$$L_{j1}^{(\xi)} u_1^{(\xi)}(x_1, x_3, t) + L_{j3}^{(\xi)} u_3^{(\xi)}(x_1, x_3, t) = 0 \quad (j = \overline{1, 2}; \xi = L, H_+, H_-) \quad (1)$$

и краевые условия их идеального механического контакта

$$u_s^{(H_-)}(x_1, -h/2, t) = u_s^{(L)}(x_1, -h/2, t),$$

$$\sigma_{3s}^{(H_-)}(x_1, -h/2, t) = \sigma_{3s}^{(L)}(x_1, -h/2, t),$$

$$u_s^{(H_+)}(x_1, h/2, t) = u_s^{(L)}(x_1, h/2, t),$$

$$\sigma_{3s}^{(H_+)}(x_1, h/2, t) = \sigma_{3s}^{(L)}(x_1, h/2, t), \quad (2)$$

в которых

$$\begin{aligned} L_{11}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) &= c_{11}^{(\xi)}\partial_1^2 + c_{44}^{(\xi)}\partial_3^2 + \rho^{(\xi)}\partial_t^2, \\ L_{22}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) &= c_{44}^{(\xi)}\partial_1^2 + c_{33}^{(\xi)}\partial_3^2 + \rho^{(\xi)}\partial_t^2, \\ L_{12}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) &= L_{21}^{(\xi)}(\partial_1, \partial_3, \partial_t) = (c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})\partial_1\partial_3; \\ \partial_s &= \partial / \partial x_s \quad (s = 1; 3), \quad \partial_t = \partial / \partial t; \end{aligned}$$

$u_1^{(\xi)}(x_1, x_3, t)$, $u_3^{(\xi)}(x_1, x_3, t)$ – безразмерные компоненты отнесенного к R_* комплексного вектора динамических перемещений; $\sigma_{ij}^{(\xi)}$ – отнесенные к c_* нормированные компоненты тензора динамических напряжений.

Получение основного дисперсионного соотношения. В процессе построения искомого дисперсионного соотношения для составляющих вектора волновых динамических перемещений в компонентах волновода с учетом идентичности свойств вмещающих полупространств вводятся исходные представления

$$\begin{aligned} u_1^{(H_+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\ u_3^{(H_+)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(-\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(-\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t); \\ u_1^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(L)} \cosh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{21}^{(L)} \cosh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t), \\ u_3^{(L)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(L)} \sinh(\alpha_1^{(L)} x_3) + A_{23}^{(L)} \sinh(\alpha_2^{(L)} x_3))E(x_1, t); \\ u_1^{(H_-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{11}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{21}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t), \\ u_3^{(H_-)}(x_1, x_3, t) &= (A_{13}^{(H)} \exp(\alpha_1^{(H)} x_3) + A_{23}^{(H)} \exp(\alpha_2^{(H)} x_3))E(x_1, t); \\ E(x_1, t) &= \exp[-i(\omega t - kx_1)], \end{aligned} \quad (3)$$

в которых

$$\alpha_j^{(\xi)} = (-b^{(\xi)} + (-1)^j ((b^{(\xi)})^2 - 4a^{(\xi)}c^{(\xi)})^{1/2}) / (2a^{(\xi)}) -$$

корни характеристических полиномов

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + b^{(\xi)} / a^{(\xi)} (\alpha^{(\xi)})^2 + c^{(\xi)} / a^{(\xi)} = 0, \quad (4)$$

с коэффициентами вида

$$\begin{aligned} a^{(\xi)} &= c_{33}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)}, \quad b^{(\xi)} = (c_{33}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})(\Omega^{(\xi)})^2 + ((c_{13}^{(\xi)})^2 - 2c_{13}^{(\xi)}c_{44}^{(\xi)} - c_{11}^{(\xi)}c_{33}^{(\xi)})k^2, \\ c^{(\xi)} &= ((\Omega^{(\xi)})^2 - c_{11}^{(\xi)}k^2)((\Omega^{(\xi)})^2 - c_{44}^{(\xi)}k^2), \\ (\Omega^{(\xi)})^2 &= \rho^{(\xi)}\omega^2 R_*^2 / c_* = (\rho^{(\xi)} / \rho_*)\Omega^2 \quad (\xi = L; H). \end{aligned}$$

Подстановка этих представлений в дифференциальные уравнения (1) позволяет записать соотношения

$$\begin{aligned}
A_{13}^{(H)} &= \delta_{13}^{(H)} A_{11}^{(H)}, & A_{23}^{(H)} &= \delta_{23}^{(H)} A_{21}^{(H)}, \\
A_{13}^{(L)} &= \delta_{13}^{(L)} A_{11}^{(L)}, & A_{23}^{(L)} &= \delta_{23}^{(L)} A_{21}^{(L)}, \\
\delta_{13}^{(H)} &= [((\Omega^{(H)})^2 - c_{11}^{(H)} k^2 - c_{44}^{(H)} (\alpha_1^{(H)})^2) / (ik(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)}) \alpha_1^{(H)} \delta^{(H)})], \\
\delta_{23}^{(H)} &= [(ik(c_{13}^{(H)} + c_{44}^{(H)}) \alpha_1^{(H)} \delta^{(H)}) / ((\Omega^{(H)})^2 - c_{44}^{(H)} k^2 - c_{33}^{(H)} (\alpha_1^{(H)})^2)], \\
\delta_{13}^{(L)} &= [((\Omega^{(L)})^2 - c_{11}^{(L)} k^2 - c_{44}^{(L)} (\alpha_1^{(L)})^2) / (ik(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)}) \alpha_1^{(L)} \delta^{(L)})], \\
\delta_{23}^{(L)} &= [(ik(c_{13}^{(L)} + c_{44}^{(L)}) \alpha_1^{(L)} \delta^{(L)}) / ((\Omega^{(L)})^2 - c_{44}^{(L)} k^2 - c_{33}^{(L)} (\alpha_1^{(L)})^2)]. \quad (5)
\end{aligned}$$

Использование соотношений (3) в краевых условиях (2) порождает однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных коэффициентов $A_{11}^{(H)}$, $A_{21}^{(H)}$, $A_{11}^{(L)}$, $A_{21}^{(L)}$ с матрицей $\|d_{n,m}(\Omega, k)\|$, имеющей ненулевые элементы вида

$$\begin{aligned}
d_{1,m} &= -c_m, & d_{1,m+2} &= e_m^{(H)}, & d_{2,m} &= -\delta_{m3}^{(L)} s_m, & d_{2,m+2} &= \delta_{m3}^{(H)} e_m^{(H)}, \\
d_{3,m} &= c_{44}^{(L)} (ik \delta_{m3}^{(L)} + \alpha_m^{(L)}) s_m, & d_{3,m+2} &= c_{44}^{(H)} (ik \delta_{m3}^{(H)} - \alpha_m^{(H)}) e_m^{(H)}, \\
d_{4,m} &= -(c_{13}^{(L)} ik + c_{33}^{(L)} \delta_{m3}^{(L)} \alpha_m^{(L)}) c_m, \\
d_{4,m+2} &= (c_{13}^{(H)} ik - c_{33}^{(H)} \alpha_m^{(H)} \delta_{m3}^{(H)}) e_m^{(H)} \quad (m = \overline{1, 2}), \\
e_j^{(H)} &= \exp(-\alpha_j^{(H)} h / 2), & c_j &= \cosh(\alpha_j^{(L)} h / 2), & s_j &= \sinh(\alpha_j^{(L)} h / 2).
\end{aligned}$$

Равенство нулю функционального определителя матрицы $\|d_{n,m}(\Omega, k)\|$ представляет собой искомое дисперсионное соотношение, связывающее параметры нормированного безразмерного волнового числа k и приведенной частоты Ω .

Качественное исследование свойств дисперсионного соотношения. Для анализа существования локализованных бегущих волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств проведено качественное исследование распределений корней характеристических полиномов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно зависящих от толщиной координаты x_3 комплексных амплитудных функций волновых перемещений в компонентах волновода.

Схема анализа типологии корней характеристических полиномов заключается в следующем. Область $\{\Omega \in [0, \infty), k \in [0, \infty)\}$ разбивается на секторы прямыми, уравнения которых следуют из условий $c^{(\xi)}(\Omega, k) = 0$ и имеют вид

$$\Omega = (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k, \quad \Omega = (c_{44}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k.$$

Эти секторы являются областями постоянства типа корней характеристических полиномов. Они могут быть классифицированы как секторы вида 1, в которых

$$\Omega > (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k ;$$

секторы вида 2, в которых

$$(c_{44}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k < \Omega < (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k$$

и секторы вида 3, в которых

$$\Omega < (c_{11}^{(\xi)} c_* / \rho^{(\xi)})^{1/2} R_* k .$$

В области изменения (Ω, k) , которая может являться областью существования локализованных бегущих волн исследуемого типа, значения корней $\alpha_j^{(H)}$ характеристического полинома вида (4) должны быть действительными.

Для оценки типа корней в секторах первого вида рассматривается асимптотический вариант характеристического полинома (4) при $\Omega \gg k$, имеющий вид

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + \Omega^2 ((c_{33}^{(\xi)})^{-1} + (c_{44}^{(\xi)})^{-1}) (\alpha^{(\xi)})^2 + \Omega^4 (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^{-1} = 0 .$$

Из его анализа следует, что в секторах вида 1 корни характеристических полиномов имеют мнимые значения.

Тип корней полиномов (4) в секторах вида 3 может быть установлен путем анализа асимптотического варианта характеристического полинома при $\Omega \ll k$

$$(\alpha^{(\xi)})^4 + k^2 ((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2) (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^{-1} (\alpha^{(\xi)})^2 + k^4 c_{11}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)} = 0 .$$

Он зависит от знакоопределенности комбинаций упругих постоянных

$$R_1(c_{ij}^{(\xi)}) = ((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2) / (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)})^2 - 4c_{11}^{(\xi)} / c_{33}^{(\xi)} ,$$

$$R_2^{(\pm)}(c_{ij}^{(\xi)}) = -((c_{13}^{(\xi)} + c_{44}^{(\xi)})^2 - c_{13}^{(\xi)} c_{33}^{(\xi)} - (c_{44}^{(\xi)})^2) / (c_{33}^{(\xi)} c_{44}^{(\xi)}) \pm (R_1(c_{ij}^{(\xi)}))^{1/2} .$$

В частности, при условиях $R_1(c_{ij}^{(\xi)}) \geq 0$, $R_2^{(+)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$, $R_2^{(-)}(c_{ij}^{(\xi)}) > 0$ характеристические полиномы в секторах третьего вида имеют действительные корни, что является необходимым условием для существования анализируемых локализованных волн.

Результаты численных исследований. Численные исследования полученного дисперсионного соотношения реализованы для волноводов рассматриваемой структуры, которые составлены из реальных трансверсально-изотропных геоматериалов с техническими упругими постоянными, приведенными в работе [1]. Значения независимых нормированных модулей упругости c_{ij} и параметров плотности ρ с $\rho_* = 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$ для этих материалов представлены в табл. 1.

Для рассматриваемых волноводов возможны следующие классифицируемые типы взаимозависимостей между характеристиками скоростей

Таблица 1

Геоматериал		$\rho \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_{ij} \cdot 10^{-10} \text{ Па}$				
			c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}
1	Хлористый сланец	2,95	9,19	2,03	3,14	14,76	3,60
2	Базальт 1	2,90	3,68	0,53	0,84	5,04	1,60
3	Базальт 2	2,90	4,26	0,53	0,72	4,52	1,80
4	Песчанистый сланец	2,95	0,66	0,29	0,19	1,15	0,12
5	Песчаник 1	2,30	1,09	0,29	0,39	1,79	0,52
6	Известняк 1	2,72	3,92	1,27	0,93	4,52	1,45
7	Мрамор	2,72	5,30	1,18	0,39	6,91	2,66
8	Известняк 2	2,72	4,04	1,16	0,94	4,30	1,45
9	Гранит 1	2,55	3,24	0,65	0,16	3,81	1,71
10	Песчаник 2	2,30	0,68	0,07	0,07	0,96	0,37
11	Известняк 3	2,72	3,76	0,96	0,85	4,10	1,45
12	Гранит бырый	2,55	5,97	1,37	1,76	7,19	2,56
13	Гранит серый	2,55	5,36	1,27	1,13	7,06	2,53
14	Гранит мелкозернистый	2,55	10,51	3,71	4,12	10,92	3,28
15	Гранит крупнозернистый	2,55	5,56	1,53	1,49	5,65	2,04
16	Гранит красно-серый	2,55	6,19	1,55	1,01	6,25	2,53
17	Гранит свежий	2,55	6,81	1,67	1,70	7,50	2,57
18	Песчаник 3	2,30	4,52	0,67	0,68	4,70	1,92
19	Песчаник 4	2,30	4,83	0,55	0,65	5,33	2,10

объемных волн продольного $c_{l\xi}$ и сдвигового $c_{t\xi}$ типа в слое и полупространстве: тип А – $c_{tL} < c_{lL} < c_{tH} < c_{lH}$; тип В – $c_{tL} < c_{tH} < c_{lL} < c_{lH}$; тип С – $c_{tL} < c_{tH} < c_{lH} < c_{lL}$; тип D – $c_{tH} < c_{lH} < c_{tL} < c_{lL}$; тип E – $c_{tH} < c_{tL} < c_{lH} < c_{lL}$; тип F – $c_{tH} < c_{tL} < c_{lL} < c_{lH}$.

Результаты проведенного анализа типологии таких зависимостей для волноводов с различными сочетаниями геоматериалов слоя и вмещающих полупространств из числа приведенных табл. 1 отражены в табл. 2.

Расчеты ряда низших ветвей спектров локализованных симметричных бегущих волн осуществлены для нескольких волноводов рассматриваемой геометрической структуры, относящихся к типу А по представляемым в табл. 2 и табл. 3 сочетаниям физико-механических свойств компонентов из поперечно-анизотропных геоматериалов. На рис. 1–5 для одинаковых диапазонов изменения приведенной частоты и нормированного волнового числа соответственно приведены фрагменты действительных ветвей дисперсионных спектров для волноводов с компонентами «песчаный сланец (L) – базальт 1 (H)», «песчаный сланец (L) – песчаник 3 (H)», «песчаный сланец (L) – известняк 3 (H)», «песчаник 1 (L) – известняк 3 (H)», «песчаник 1 (L) – известняк 2 (H)».

Обнаруживаемым характерным свойством рассчитанных распреде-

Таблица 2

Виды материалов слоя (L) и полупространств (H) в соответствии с таблицей 1																			
L	H																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	-	E	E	D	D	E	E	E	E	D	E	E	E	E	E	E	E	E	E
2	B	-	B	D	D	E	B	F	C	D	E	B	B	B	B	B	B	B	B
3	B	E	-	D	D	E	B	E	E	D	E	B	B	B	B	B	B	B	B
4	A	A	A	-	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
5	A	A	A	D	-	A	A	A	A	E	A	A	A	A	A	A	A	A	A
6	B	B	B	D	D	-	B	B	C	D	C	B	B	B	B	B	B	B	B
7	B	E	E	D	D	E	-	E	E	D	E	B	B	F	B	B	E	F	F
8	B	C	B	D	D	E	B	-	C	D	E	B	B	B	B	B	B	B	B
9	B	F	B	D	D	F	B	F	-	D	F	B	B	B	B	B	B	B	B
10	A	A	A	D	B	A	A	A	A	-	A	A	A	A	A	A	A	A	A
11	B	B	B	D	D	F	B	B	C	D	-	B	B	B	B	B	B	B	B
12	B	E	E	D	D	E	E	E	E	D	E	-	E	E	F	F	E	E	E
13	B	E	E	D	D	E	E	E	E	D	E	B	-	F	F	F	E	E	F
14	B	E	E	D	D	E	C	E	E	D	E	B	C	-	B	B	C	C	B
15	B	E	E	D	D	E	E	E	E	D	E	C	C	E	-	B	E	E	E
16	B	E	E	D	D	E	E	E	E	D	E	C	C	E	E	-	E	E	E
17	B	E	E	D	D	E	B	E	E	D	E	B	B	F	B	B	-	B	B
18	B	E	E	D	D	E	C	E	E	D	E	B	B	F	B	B	E	-	B
19	B	E	E	D	D	E	C	E	E	D	E	B	C	E	B	B	E	E	-

лений является высокая степень подобия топологии низшей ветви в спектрах для рассмотренных волноводов с однотипными материалами компонентов L. В рассматриваемом диапазоне изменения k и Ω рассчитанные спектры для случая слоя из песчаного сланца содержат по семь фрагментов ветвей с различающимися частотами запираения и относительными длинами волн на этих частотах, а для случая слоя из песчаника 1 – по два фрагмента действительных ветвей спектра. Таким образом, в рассмотренных случаях определяющими для топологической картины распределения действительных ветвей спектров бегущих локализованных волн являются свойства материала слоя.

Проведенный численный анализ позволяет выделить частотные диапазоны, в которых для волноводов рассматриваемого типа существует единственная принадлежащая низшей моде спектра локализованная бегущая волна. Данные диапазоны ограничены частотами запираения для первой и второй мод бегущих локализованных волн. Для волноводов первых трех рассмотренных типов таким диапазоном в приведенных частотах приблизительно является диапазон $\Omega \in (0,6; 2,2)$, а для волноводов четвертого и пятого типов – диапазон $\Omega \in (1,44; 6,45)$. При этом, например, технические частоты волн, приблизительно ограничивающие данные диапазоны для рассматриваемых волноводов с толщиной вмещаемого слоя 0,6 м соответственно равны 503 Гц и 1845 Гц для волноводов первого – третьего из рассматриваемых типов, а также 1208 Гц и 5410 Гц для волноводов четвертого – пятого типов.

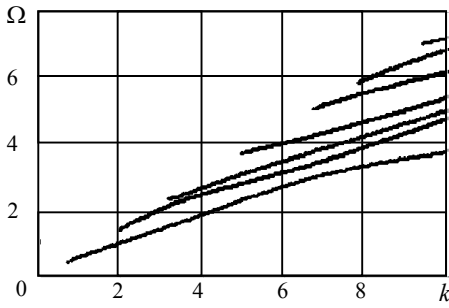


Рис. 1

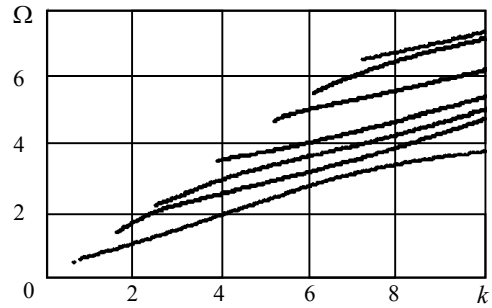


Рис. 2

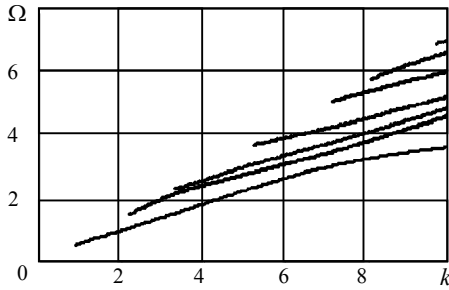


Рис. 3

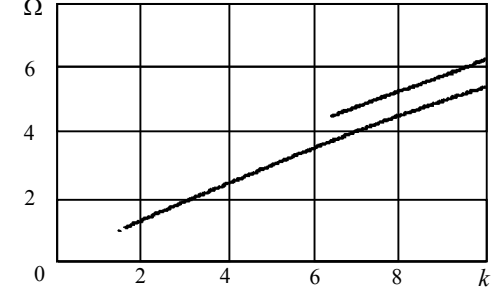


Рис. 4

В итоге проведенных теоретических исследований в аналитической форме равенства нулю функционального определителя четвертого порядка получено трансцендентное дисперсионное уравнение, описывающее спектр симметричных по толщинной координате локализованных продольно-сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропного слоя, заключенного между двумя идеально контактирующими с ним однотипными по физико-механическим свойствам трансверсально-изотропными полупространствами. В качестве элемента анализа существования локализованных бегущих волн исследуемого типа при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств осуществлено качественное асимптотическое исследование распределений корней характеристических полиномов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно зависящих от толщины координаты комплексных амплитудных функций волновых перемещений в компонентах волновода и проведена классификация волноводов рассматриваемой структуры по типологии взаимного расположения секторов постоянства типа корней характеристических уравнений. Реализованы расчеты действительных ветвей дисперсионных спектров для нескольких типов рассматриваемых волноводов, образуемых конкретными геоматериалами, и описаны некоторые особенности структуры построенных спектров.

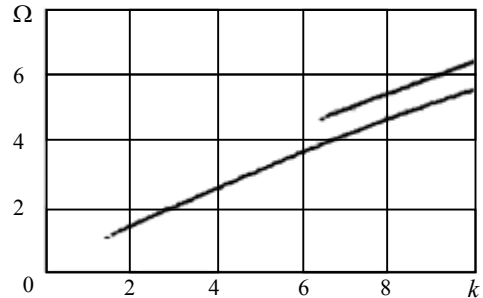


Рис. 5

РЕЗЮМЕ. В аналітичній формі функціонального визначника четвертого порядку визначено дисперсійну функцію, яка опису закономірності поширення симетричних за товщиною координатою локалізованих поздовжньо-зсувних пружних хвиль у трансверсально-ізотропному шарі проміж двома ідеально контактуючими з ним однотипними за фізико-механічними властивостями трансверсально-ізотропними півпросторами. Представлені окремі результати якісного асимптотичного аналізу дисперсійного співвідношення та результати розрахунків дійсних гілок дисперсійних спектрів для декількох типів розглянутих хвилеводних структур, утворених з реальних геоматеріалів.

Ключові слова: трансверсально-ізотропний шар проміж двома трансверсально-ізотропними півпросторами, локалізовані поздовжньо-зсувні пружні хвилі, трансцендентні дисперсійні співвідношення, хвилеводи з компонентами із геоматеріалів, асимптотичний і числовий аналіз, розрахунки спектрів біжучих хвиль.

SUMMARY. In the analytical form of the functional determinant of the fourth order is obtained transcendental dispersion relation describing the properties of localized symmetrical longitudinal-shear elastic waves along a transversely-isotropic layer between two transversely-isotropic half-spaces with identical physical and mechanical properties. Some qualitative results of asymptotic analysis of dispersion equations are obtained. Results of calculation of real branches of dispersion spectrums for considered geomaterials waveguides are presented.

Keywords: transversely isotropic layer between two transversely isotropic half-spaces, localized longitudinal-shear elastic waves, transcendental dispersion relations, waveguides with components of geomaterials, asymptotic and numerical analysis, calculations of the spectra of traveling waves.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ:

1. Аннин Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сибирский журнал индустриальной математики.– 2009.– Т. XII, № 3 (39).– С. 5–14.
2. Григорян В.Г., Вендлер Л. Локализованные акустические волны в слоистых структурах // Физика твердого тела.– 1991.– Т. 33, № 7.– С. 2120–2128.
3. Datta S.K. On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers // J. Acoust. Soc. Am.– 2000.– Vol. 108.– P. 2005–2011.
4. Hoven J.M. Acoustic waves in finely layered media // Geophysics.– 1995.– Vol. 7.60, № 4.– P. 1217–1221.
5. Ting T.C.T. Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves // Mathematics and mechanics of solids.– 2009.– Vol. 14, № 1–2.– P. 52–71.
6. Velasco V.R., Djafari-Rouhani B. Dynamics of systems with two interfaces // Phys. Rev.– 1982.– Vol. B 26.– P. 1929–1941.
7. Wendler L., Grigoryan V.G. Acoustic interface waves in sandwich structures // Surface Science.– 1988.– Vol. 206.– P. 203–224.
8. White J.E. Computed wave forms in transversely isotropic media // Geophysics.– 1982.– Vol. 47.– P. 771–783.
9. White J.E. Underground sound. application of seismic waves.– Elsevier Science Publishers B.V., 1983.– 270 p.

Донецкий национальный университет

Поступила 15.04.2014

УДК 539.3: 534.1

Д. С. ВУКОЛОВ

ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВЫХ ВОЛН НА ТУННЕЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ СО СВОБОДНОЙ ЛИБО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ В УПРУГОМ СЛОЕ

С применением метода изображений построено численно-аналитическое решение двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн продольного сдвига на внутренней цилиндрической полости кругового сечения в изотропном деформируемом слое с закрепленными плоскими гранями. Рассмотрены случаи нормального падения волны произвольной моды дисперсионного спектра на полость со свободной либо закрепленной цилиндрической граничной поверхностью и осью, лежащей в срединной плоскости слоя с закрепленными плоскими гранями. Решения задач сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представления волновых полей в области сечения слоя рядом по базисным частным решениям волновых уравнений в цилиндрических функциях. Представлены результаты численных исследований, характеризующие ряд основных закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании типа граничных условий на поверхности полости, относительного радиуса включения, относительной длины падающей волны из низшей моды дисперсионного спектра.

Ключевые слова: закрепленный изотропный упругий слой, центрально расположенная внутренняя цилиндрическая полость с закрепленной или свободной границей, дифракционное рассеяние нормальных волн сдвига, численно-аналитическое исследование, метод изображений, ряды по базисным решениям волновых уравнений, варьирование геометрических и механических параметров, закономерности распределений волновых перемещений.

Проблемы теоретического исследования двумерных дифракционных полей, формирующихся в результате рассеяния стационарных волн механических деформаций на неоднородностях в виде полостей в упругих средах несмотря на длительный период изучения имеют ряд открытых аспектов. Анализ результатов, представленных в монографиях [1, 2, 11], а также в обзорных разделах публикаций [4–7, 12] свидетельствует, что это заключение касается и задач описания двумерных дифракционных полей, формирующихся в упругом слое при рассеянии нормальных волн продольного сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях с параллельными плоскими гранями слоя образующими. Так, в работе [1] описан численно-аналитический подход к решению задач дифракции волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических полостях в упругом слое, базирующийся на концепции зеркального отражения (методе изображений), который не был численно реализован. В работе [8] без численной реализации описан метод получения дисперсионных соотношений для волн сдвига, распространяющихся вдоль изотропного слоя с периодическим рядом перпендикулярных направлению распространения и параллельных граням внутренних туннельных цилиндрических полостей. Метод базируется на использовании рядов по базисным решениям

волнового уравнения в цилиндрических функциях. В работах [3, 10] исследованы задачи о полях магнитоупругих сдвиговых волн в приграничном градиентно-неоднородном слое изотропного полупространства с внутренней туннельной цилиндрической полостью. В работе [9] для исследования эффектов рассеяния упругих продольно-сдвиговых волн на круговом отверстии в изотропной полосе со свободными от напряжений границами применялся метод интегральных преобразований совместно с приемом интегрирования волновых уравнений в цилиндрических функциях в пространстве изображений.

Целью данной работы является построение и численный анализ решения задачи о рассеянии распространяющихся вдоль слоя с закрепленными гранями симметричных сдвиговых волн при нормальном падении на параллельную граням центрально расположенную внутреннюю туннельную цилиндрическую полость с закрепленной или свободной границей. Используется концепция представления дифракционных волновых полей разложением по базисной системе решений волнового уравнения во вспомогательных локальных координатных системах с полюсами, зеркально расположенными относительно границ слоя.

Постановка задачи. Рассматривается изотропный упругий слой (рис. 1), имеющий толщину $2h$ и занимающий в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ область $V_L = \{-\infty < x_1, x_3 < \infty, |x_2| \leq h\}$. Грани слоя $x_2 = \pm h$ жестко закреплены, а внутри слоя расположена цилиндрическая полость с параллельной граням образующей и сечением в виде области $V_I = \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_3 < \infty\}$. Граница полости свободна от напряжений либо жестко закреплена. Материал слоя характеризуется параметрами плотности ρ и модуля сдвига μ .

Полагается, что в слое вдоль положительного координатного направления x_1 распространяется нормальная симметричная по координате x_2 поляризованная вдоль Ox_3 волна продольного сдвига с круговой частотой ω из произвольной моды дисперсионного спектра, характеризующаяся функцией упругих волновых перемещений $U^{(nad)}(x_1, x_2, t)$.

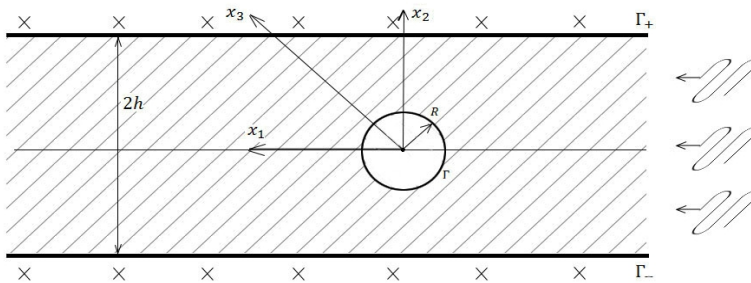


Рис. 1.

Искомые комплексные амплитудные функции для динамических перемещений $U^{(omp)}(x_1, x_2, t)$ в рассеиваемых полостью волнах подлежат

определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний материала слоя, которое после отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру h принимает вид

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \Omega^2)U^{(1)} &= 0, \\ \Omega &= (\rho\omega^2 h^2 / \mu)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$U^{(1)} = U^{(nad)} + U^{(omp)}, \quad (2)$$

В соответствии с постановкой, краевые условия рассматриваемой задачи имеют альтернативные варианты, соответствующие закрепленной цилиндрической граничной поверхности Γ

$$(U^{(1)})_{x_1=\pm h} = 0, \quad (U^{(1)})_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

или свободной от механических напряжений цилиндрической граничной поверхности Γ

$$(U^{(1)})_{x_1=\pm h} = 0, \quad (\sigma_{r3}^{(1)})_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где $(\sigma_{r3}^{(1)})_{\Gamma}$ – отнесенные к нормирующему параметру $\mu_* = \mu$ амплитудные характеристики касательных напряжений на поверхности Γ .

Построение численно-аналитического решения задачи. На исходном этапе для функции волновых упругих перемещений в падающей нормальной упругой SH-волне вводится представление

$$\tilde{U}_3^{(nad)}(x_1, x_2, t) = U_{30} \cos(\alpha_n x_2) e^{-i(\omega t - k_n x_1)}, \quad (5)$$

в котором $\alpha_n = (2n + 1)\pi/2h$, $k_n = (\Omega^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$, n – номер моды нормальных бегущих симметричных SH-волн в закрепленном на плоских гранях слое. Представление (5) априори удовлетворяет первому из краевых условий в парах (3) и (4).

Для записи поля волн, отраженных от полости и удовлетворяющих краевому условию на закрепленных гранях слоя, согласно концепции метода изображений вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами O_k , имеющими в Ox_1x_2 координаты $x_{1,k} = 0$, $x_{2,k} = 2kh$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Соответственно записывается представление

$$\begin{aligned} U_3^{(omp)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega r_0) \cos(n\theta_0) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^k (H_n(\Omega r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})), \end{aligned} \quad (6)$$

где $H_n^{(1)}(\Omega r)$ – цилиндрические функции Ханкеля первого рода индекса n ; (r_k, θ_k) – локальные полярные координаты с полюсами O_k . После применения теорем сложения цилиндрических функций для точек на контуре полости представление (6) преобразуется к виду

$$U_3^{(omp)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] \right] \cos(n\theta), \quad (7)$$

и при использовании обозначения

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k)$$

контурное представление (7) приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром полости

$$U_3^{(omp)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (8)$$

Контурное представление на Γ для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$e^{v_1 x_1 + v_2 x_2} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta},$$

$$Q_p = J_p \left(-i R (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \right) \left(\frac{(i v_1 + v_2)}{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}} \right)^p, \quad (9)$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\tilde{U}_3^{(omp)} = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \times \\ \times \left(\left(\frac{k_n + i \alpha_n}{k_n - i \alpha_n} \right)^{p/2} + \left(\frac{k_n - i \alpha_n}{k_n + i \alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \quad \delta_p^0 = \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

При использовании представлений (8) и (10) для записи функциональных уравнений, следующих краевых условий (3) и (4) на поверхности Γ и их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях по-

лучены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. В случае полости с закрепленной границей Γ эта система имеет вид

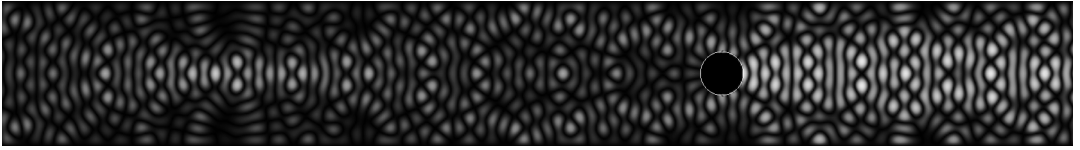
$$\begin{aligned}
 & A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) J_n(\Omega R) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left(\left(\frac{k_n + i \alpha_n}{k_n - i \alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i \alpha_n}{k_n + i \alpha_n} \right)^{n/2} \right), \quad (11)
 \end{aligned}$$

а в случае полости со свободной границей Γ соответственно имеет вид

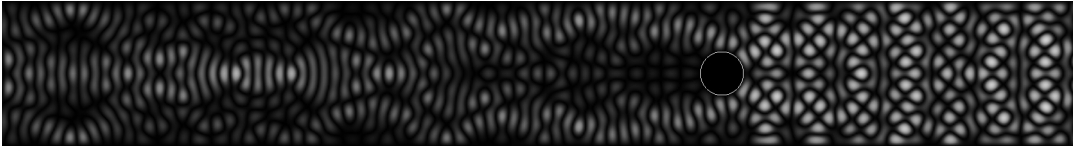
$$\begin{aligned}
 & A_n \left(\frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega R) - \Omega H_{n+1}^{(1)}(\Omega R) \right) + \\
 & + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega R) - \Omega J_{n+1}(\Omega R) \right) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] = \\
 & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{n}{R} J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) \times \\
 & \times i^n \left(\left(\frac{k_n + i \alpha_n}{k_n - i \alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i \alpha_n}{k_n + i \alpha_n} \right)^{n/2} \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

После определения искоемых коэффициентов из приведенных алгебраических систем может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям рассеиваемых полостью волн.

Результаты численных исследований. Анализ структуры дифракционных полей реализован для случаев падения симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной $\lambda = (2\pi/k_n)h^{-1}$ из нижней моды $n=0$ дисперсионного спектра на полости с различными относительными радиусами. Варьируемая относительная длина падающих волн составляла $\lambda_1 = 0.5R/h$, $\lambda_2 = R/h$ и $\lambda_3 = 2R/h$ для каждого из рассматриваемых значений относительного радиуса полости в долях параметра толщины слоя. Картины распределения уровней волновых перемещений в подобласти слоя $x_1 \in [-h, h]$, $x_2 \in [-4h, 8h]$ для моментов времени, соответствующих началу периодов волновых колебаний, представлены на рис. 2–7 в виде тонированных изображений, на которых переход от светлых тонов к темным отвечает нарастанию интенсивности характеризуемых величин. Фрагменты а) этих рисунков характеризуют дифракционные поля вне полости со свободной границей, а фрагменты б) соответствуют случаю закрепленной границы полости. Рис. 2–3 соответственно

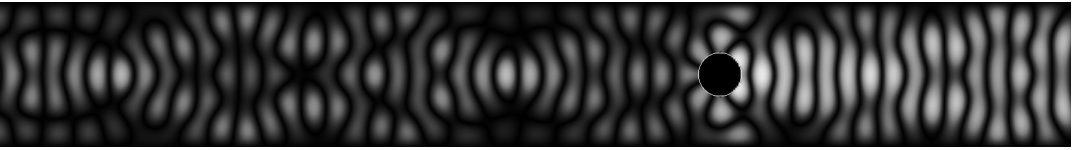


а

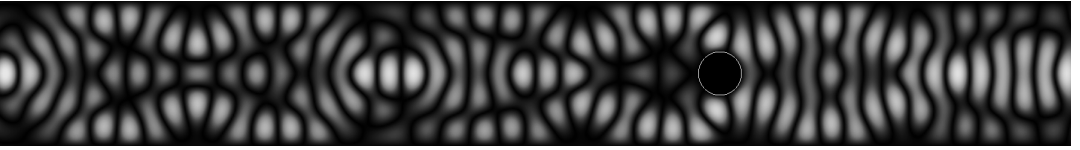


б

Рис. 2

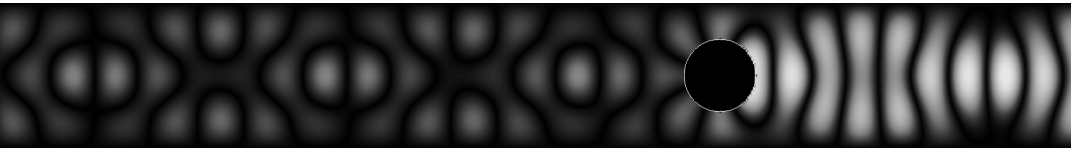


а

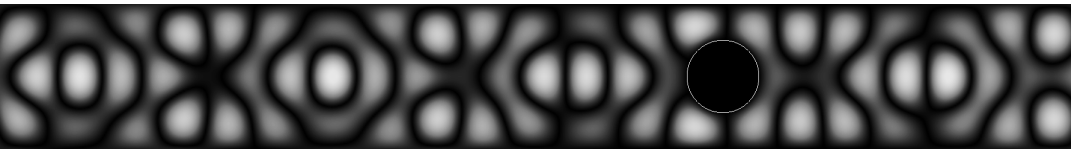


б

Рис. 3



а



б

Рис. 4



а



б

Рис. 5



а



б

Рис. 6



а



б

Рис. 7

иллюстрируют особенности полей рассеиваемых волн относительных длин λ_j ($j=2,3$) на полости относительно малого радиуса $R/h=0.3$. Рис. 4 описывает изменения в структуре дифракционных полей при рассеянии волн относительной длины λ_3 на полости радиуса $R/h=0.5$. Наконец, рис. 5–7 иллюстрируют особенности полей рассеиваемых волн относительной длины λ_j ($j=1,3$) на полости относительно большого радиуса $R/h=0.9$. Анализ приведенных распределений позволяет сделать ряд выводов относительно особенностей формирования дифракционных полей в окрестностях полостей для рассматриваемых случаев.

Общее сопоставление дифракционных полей при идентичных относительных радиусах полостей и относительных длинах падающих волн, но различных краевых условиях на границе полости свидетельствует о том, что полости со свободными границами в большинстве рассмотренных случаев являются более интенсивными отражателями по сравнению с полостями, граница которых закреплена.

По мере синхронизированного согласно описанному выше принципу увеличения относительного радиуса полости в случаях падения волн относительной длины λ_1 и λ_2 все более контрастно проявляется эффект формирования приконтурной зоны высокоинтенсивных перемещений около срединной поверхности в лицевой области взаимодействия падающей волны со свободной по границе полостью. В аналогичной по распо-

ложению приконтурной зоне у полости с закрепленной границей наблюдается противоположный эффект локализованного падения интенсивности анализируемых волновых перемещений.

Для случаев рассеивания волн относительной длины λ_2 и λ_3 на полости приведенного радиуса $R/h=0.3$ с закрепленной границей в тыльных областях взаимодействия формируются существенно более выраженные эффекты затенения по сравнению со случаем полости со свободной границей, о чем свидетельствуют картины распределений на рис. 2 и рис. 3. Также в случае $R/h=0.3$ при рассеянии волн относительной длины λ_3 (рис. 3) на значительном удалении от полости с закрепленной границей в теневой зоне вблизи срединной плоскости формируются области интенсивной фокусировки рассеянных волн.

В целом проведенное численное исследование показывает, что тип граничных условий на поверхности полости оказывает наибольшее влияние на структуру дифракционных полей в случае падения волн относительной длины λ_3 . В частности при $R/h=0.5$ (рис. 4) в теневой зоне дифракционные поля имеют высокую степень подобия, а в лицевой интерференционные картины кардинально отличаются. Эксклюзивной особенностью сопоставляемых распределений при $R/h=0.6$ является более высокий уровень интенсивности поля волн в теневой зоне за полостью со свободной граничной поверхностью и появление элементов подобия в интерференционном поле перед полостью, а при рассеянии волн на полостях с $R/h=0.7$ и $R/h=0.8$ формируется тенденция практически полного затенения в тыльной зоне взаимодействия, сохраняющаяся при дальнейшем увеличении относительного радиуса.

Начиная со значения $R/h=0.8$ при дальнейшем увеличении относительного радиуса полости в случаях рассеивании волн относительной длины λ_3 картины дифракционных полей для обоих рассматриваемых случаев граничных условий на поверхности полости стабилизируются и на некотором удалении от нее в лицевой области взаимодействия приобретают высокую степень подобия. Можно также отметить эффекты высокой степени затенения, создаваемого полостью с $R/h=0.9$ при падении волн всех рассматриваемых относительных длин (рис. 5–7).

В итоге проведенных теоретических исследований с использованием метода изображений получены численно-аналитические решения двумерных краевых задач о дифракционном рассеянии бегущих нормальных волн продольного сдвига на внутренних туннельных круговых цилиндрических полостях в закрепленном по граям изотропном плоскопараллельном деформируемом слое. Рассмотрены случаи нормального падения симметричных по толщине слоя волн из произвольной моды дисперсионного спектра на полости со свободными либо закрепленными поверхностями и параллельными граям образующими. Решения задач сведены к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей рядами по базисным частным решениям соответствующих волновых уравнений в цилиндрических функциях в областях сечения слоя и включения. Представлены результаты численных

исследований для случаев падения волн с варьируемыми относительными длинами из низшей моды дисперсионного спектра на полости с варьируемыми относительными радиусами. В результате этих исследований установлен ряд ведущих закономерностей распределения волновых перемещений в дифракционных полях.

РЕЗЮМЕ. Із застосуванням методу зображень отримано аналітико-числовий розв'язок двовимірної крайової задачі про дифракційне розсіяння біжучих симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву на круговій циліндричній порожнині з вільною від напружень або жорстко закріпленою поверхнею в ізотропному плоско-паралельному деформівному шарі із закріпленими граничними площинами. Розглянуто випадок нормально-го падіння хвилі з довільної моди дисперсійного спектру на порожнині з віссю, що лежить в серединній площині шару. Розв'язок задачі зведено до нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів представлень хвильових полів в області перерізу шару рядами за відповідним базисним частинними розв'язками хвильових рівнянь у циліндричних функціях. Представлені результати числових досліджень, що характеризують ряд провідних закономірностей в розподілах хвильових переміщень в ближньому і далекому дифракційному полі при варіюванні відносного радіуса включення, відносної довжини падаючої хвилі з нижчої моди дисперсійного спектра.

Ключові слова: закріплений ізотропний пружний шар, центрально розташована внутрішня циліндрична порожнина з вільною або закріпленою поверхнею, дифракційне розсіювання нормальних хвиль зсуву, аналітико-числове дослідження, метод зображень, ряди за базисним розв'язками хвильових рівнянь, варіювання геометричних параметрів, закономірності розподілів хвильових переміщень.

SUMMARY. Using the method of images obtained by numerical-analytical solution of two-dimensional boundary problem of diffraction scattering running symmetric normal shear waves by a circular cylindrical cavities with free or clamped boundary surface in plane-parallel deformable layer are obtained. Normal incidence the waves on cavities with the axis lying in the median plane of the layer with fixed faces are investigated. Solution of the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of representations of wave fields in the areas of cross-section layer in rows by the basic particular solutions of wave equations in cylindrical functions. The results of numerical investigation of characterizing a number of leading effects in the distribution of the wave motion in the near- and far- field diffraction by varying the relative radius of cavities, the relative length of the incident wave on the lowest mode of dispersion spectrum are presented.

Keywords: fixed isotropic elastic layer with centrally located inner cylindrical cavity, diffractive scattering of normal shear waves, numerical-analytical study, the method of images, the series of basic solutions of wave equations, variation of geometrical parameters, effects of distribution of wave motion fields.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Гузь А.Н., Головчан Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах.– К.: Наук. думка, 1972.– 254 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн.– К.: Наук. думка, 1978.– 308 с.
3. Острик В.И., Фильштинский Л.А. Динамические задачи магнитоупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями и трещинами продольного сдвига // Известия Национальной Академии Наук республики Армения. Механика.– 1991.– Т. 44, № 4.– С. 34–45.
4. *Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves* / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, et al. // *Compos. Sci. Technol.*– 2009.– Vol. 69.– P. 1115–1123.
5. *Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves* / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // *Phil. Mag. Lett.*– 2010.– Vol. 90.– P. 361–380.

6. *Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves* / X.-Q Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // *Mater. Struct.*– 2011.– Vol. 44.– P. 67–75.

7. *Fang X.-Q.* Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // *Int. J. Solids Struct.*– 2008.– Vol. 45.– P. 5716–5729.

8. *Golovchan V.T., Guz A.N.* Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities // *Soviet Appl. Mechanics.*– 1976.– Vol. 12. Iss. 9.– P. 888–892.

9. *Itou S.* Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip // *Lett. Appl. Engng. Sci.*– 1984.– Vol. 22. № 4.– P. 475–490.

10. *Ostrik V.I., Filshinskii L.A.* The interaction of a magnetoelastic shear wave with longitudinal cavities in a conducting layer // *J. of Mathematical Sciences.*– 1996.– Vol. 79. Iss. 6.– P. 1450–1454.

11. *Pao Y.-H., Mow C.C.* Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations.– New York: Crane Russak, 1973.– 308 p.

12. *Yang Y.-H., Wu L.-Z., Fang X.-Q.* Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves // *J. Nondestructive Eval.*– 2010.– Vol. 29.– P. 233–240.

Донецкий национальный университет

Поступила 16.03.2014