

УДК 538.95+945

МАССА ВИХРЯ АБРИКОСОВА: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

*В.В. Чабаненко**, *В.Ф. Русаков*, *С. Васильев**, *Н. Szymczak***,
 *Физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины,
 **Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

Введение. Динамические свойства вихревой материи в сверхпроводниках второго рода, проявляющиеся в диапазоне магнитных полей $H_{c1} < H < H_{c2}$ (фаза Шубникова [1] или смешанное состояние) привлекают значительное внимание исследователей по причине актуальности диапазона с точки зрения важности прикладных свойств этих материалов и интересных физических явлений, сопровождающих проникновение магнитного поля в сверхпроводники. Известно [2], что движение вихревой системы сопровождается генерацией электрического поля и, как следствие, диссипацией энергии, приводящей к разогреву сверхпроводника. При достаточно низких температурах ($T \ll T_c$), вследствие значительного уменьшения теплоемкости, этот механизм в жестких сверхпроводниках может приводить к саморазогреву вихревой системы, который способствует преодолению центров пиннинга и изменению вязкости [3].

Движение вихревой линии (вихря Абрикосова), как структурного элемента вихревой материи, в общем случае может происходить под влиянием различных сил на нее действующих [4,5]: сила Лоренца; сила пиннинга; сила вязкого трения; сила Магнуса; сила Холла; силы, обусловленные градиентом температуры и термическими флуктуациями, и др. Роль каждой силы определяется состоянием вихревой материи (вихревая решетка, вихревая жидкость, вихревое стекло, ...) и рассматриваемого физического процесса.

Ключевой характеристикой любого объекта, участвующего в движении, является его инертность или массивность. Проблема массы вихря возникла более сорока лет назад, но до настоящего времени [7] является достаточно активно дискутируемой проблемой. Следует заметить, что масса вихря является важным параметром, входящим в уравнения его движения при рассмотрении процессов квантового туннелирования вихрей [8-10].

В монографии [11] сформулированы два основных подхода к вычислению массы вихря. Первый, так называемый энергетический, состоит в вычислении энергии, обусловленной движением вихря. Коэффициент пропорциональности между энергией и половиной квадрата скорости и дает массу. Вторым, динамическим подходом, определяет массу как коэффициент пропорциональности между полной силой, обеспечивающей наблюдаемое движение вихря, и его ускорением. Это, так называемая, динамическая масса [6], во многих случаях именно она играет определяющую роль. Таким образом, масса вихря, как структурного элемента смешанного состояния [11], определяется его движением и взаимодействием с квазичастицами, окружающими нормальный кор.

Физические механизмы возникновения инерционных свойств вихря. По-видимому, одной из первых работ по изучению удельной эффективной массы вихря и ее происхождения, была работа Suhl [12]. На основе зависящей от времени теории Гинзбурга-Ландау [13], автором [12] получено значение инертной массы вихря на единицу его длины. Результирующее ускорение вихря было сравнено с диссипативным членом предложенным Strnad, Hempstead и Kim [14] и исследованным Stephen и Vardeen [15]. Было показано, что время релаксации флюксоида меньше, чем 10^{-12} с, откуда следует, что коллективные моды (колебания) флюксоидных систем очень трудно наблюдать. Для оценки порядка величины массы пренебрегалось всеми эффектами в нормальной Ферми-жидкости и, кроме того, предполагалось, что величина щели настолько мала, что можно воспользоваться линейным приближением нестационарной теории Гизбурга-Ландау (TDGL).

Предполагалось, что флюксоиды расположены достаточно далеко друг от друга, во всяком случае, расстояние между ними больше, чем глубина проникновения магнитного поля. В конечном итоге, задача свелась к вычислению массы изолированного вихря локализованного в точке $\vec{r}_0(t)$.

Таким образом, была рассчитана масса вихря, приходящаяся на единицу его длины, величина которой, в основном, определяется вкладом кора:

$$\mu_{core} = \frac{\pi \hbar^2 \psi_{\infty}^2}{4mv^2}.$$

Учитывая, что $\psi_{\infty}^2 = \frac{m \xi^2 H_c^2}{\pi \hbar^2}$, легко получить: $\mu_{core} = m \frac{\xi^2 H_c^2}{4mv^2}$. Здесь H_c – термодинамическое кри-

тическое поле, m – масса свободного электрона, ξ – длина когерентности.

При низких температурах $H_c^2 \sim \frac{4\pi\Delta^2 n_0}{\epsilon_f}$ и

$$\mu_{core} \sim m \frac{12\pi\xi^2 n_0}{8} \left(\frac{\Delta}{\epsilon_f} \right)^2, \quad (1)$$

здесь n_0 – концентрация нормальных электронов, Δ – величина энергетической щели.

Полагая $n_0 = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, $\xi = 10^{-8} \text{ м}$, $\frac{\Delta}{\epsilon_f} \cong 10^{-4}$ [12], легко получить $\mu_{core} = 4 \cdot 10^5$ элек-

тронных масс на метр.

Далее в работе [12] была рассчитана электромагнитная масса μ_{em} . Ее величина определялась из плотности электромагнитной энергии, обусловленной движением вихря, локализованного в точке r_0 , которое порождает электромагнитное поле:

$$\frac{1}{8\pi} \int E^2 dx dy = \frac{\xi H_c^2}{8c^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_d} \right)^2 r_0^2, \\ \mu_{em} = \frac{\xi H_c^2}{4c^2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_d} \right)^2. \quad (2)$$

λ – глубина проникновения, λ_d – длина экранирования. Основной вклад в электромагнитную энергию дает область, размер которой превосходит длину экранирования.

В случае $\lambda \gg \lambda_d$ для отношения масс было получено следующее соотношение:

$$\frac{\mu_{em}}{\mu_{core}} = \frac{1}{3} \left(\frac{v_F}{c} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_d} \right)^2; \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_d} \right) \cong 10^3; \quad \text{при } \frac{v_F}{c} \cong 10^{-2}.$$

Т.е. в этой области доминирует электромагнитная масса.

При $kT > \Delta_\infty \frac{\lambda_d}{\xi}$, вблизи T_c :

$$\frac{\mu_{em}}{\mu_{core}} = \frac{1}{3} k^2 \left(\frac{v_F}{c} \right)^2 \left(\frac{\Delta_\infty}{kT} \right)^2;$$

и при $k = \frac{\lambda}{\xi}$, будет доминировать масса кора. В пределе наличия внутри объема радиуса ξ только нор-

мальной компоненты, λ_d следует заменить на ξ :

$$\frac{\mu_{em}}{\mu_{core}} = \frac{1}{3} k^2 \left(\frac{v_F}{c} \right)^2$$

и для умеренных k , $\mu_{em} < \mu_{core}$

В работе [16] показано, что эффективную массу вихря можно определить из хорошо известной классической модели обтекания твердого кора вихря, движущегося со скоростью v_L , в жидкости, покоящейся на бесконечности (рис. 1а). В случае вихря Абрикосова предполагается, что нормальный кор обтекается сверхтекучей электронной жидкостью. В этой модели эффективная масса равна массе жидкости на единицу длины кора вихря. Таким образом, получается

$$\mu^* = \rho \xi^2, \quad (3)$$

где ρ – массовая плотность сверхтекучей жидкости. Это, так называемая, масса Baum and Chandler.

В работе Копнина [17] рассчитана масса вихря в чистых сверхпроводниках II рода в бездиссипативном режиме $\tau \Delta^2 / \epsilon_f \gg 1$ (τ – время свободного пробега электронов при столкновениях с приме-

сями) и показано, что в таком сверхпроводнике возникают собственные колебания решетки вихревых нитей с квадратичным законом дисперсии.

Электрическое поле, возникающее в сверхпроводнике, обусловлено явлением электромагнитной индукции, возникающей при движении вихревых нитей. Для предельно чистых сверхпроводников в [17] получено:

$$\mu^* = n_0 m_e \xi^2. \quad (4)$$

Воловик [10] проанализировал результаты работ [16,17] и пришел к выводу, что массы Копнина и Baum and Chandler имеют одно и то же происхождение. Обе связаны с нормальной компонентой жидкости захваченной кором.

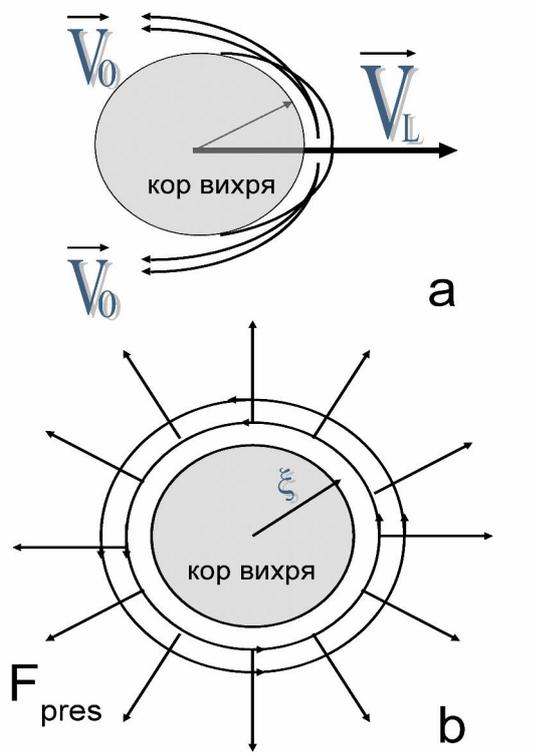


Рис. 1. Схематическое изображение механизма возникновения массы противотока (а) и компрессионной массы (б) вихря. V_L , V_0 – скорости движения вихря и сверхтекучей компоненты, соответственно; F_{pres} – сила давления, возникающая вследствие разности объемов нормальной (кор вихря) и сверхпроводящей фазы

Проблема вихревой массы, гидродинамического происхождения была рассмотрена также в [18]. Авторы [18] получили выражение для электрического поля, индуцированного вихрем, движущимся в заряженной сверхтекучей жидкости при $T = 0$, для сверхпроводников, от грязного до сверхчистого пределов.

В [18] показано, что вклад в массу вихря, происходящий от периферической части его кора, может быть рассчитан без привлечения зависящей от времени теории Гинзбурга – Ландау (TDGL), показано, что можно использовать простую лондонскую электродинамику. В работе [18] проведена классификация различных вкладов в массу вихря.

Электромагнитная масса вихря в сверхпроводнике. В обычных сверхпроводниках радиус кора $r_c \cong \xi$, (ξ – длина когерентности) превосходит Дебаевский радиус λ_D . В этом случае вклад в электромагнитную массу вихря от внешней области кора, может быть записан в виде [18]:

$$\begin{aligned} \mu_{em} \frac{(v_L - v_0)^2}{2} &= \int_{r>r_c} d^2r \frac{E^2}{8\pi} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m}{e}\right)^2 \int_{r>r_c} d^2r [\nabla(\vec{v}_L - \vec{v}_0) \cdot \vec{v}_v]^2 = \\ &= \left(\frac{\Phi_0^2}{c^2 \xi^2}\right) \frac{(\vec{v}_L - \vec{v}_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с массой рассчитанной Suhl [12].

Компрессионная масса (масса сжимаемости) в нейтральной сверхтекучей жидкости. В нейтральной сверхтекучей жидкости вклад в массу вихря от внешней области кора обусловлен изменением плотности частиц.

$$\mu_c = \frac{mn}{4\pi s^2} \left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2 \ln \frac{R}{r_c} \quad (5)$$

Таким образом, компрессионная масса определяется как отношение между статической энергией вихря и квадратом скорости звука (s). В этом пределе масса содержит логарифмическую расходимость, которую необходимо обрезать на некотором гидродинамическом масштабе R , в качестве такого масштаба можно взять межвихревое расстояние. Показано, что компрессионная масса μ_c в сверхтекучей Ферми-жидкости значительно отличается от μ_c в слабо взаимодействующей сверхтекучей Бозе-жидкости.

Таким образом, компрессионная масса может быть того же порядка, что и масса, рассчитанная Suhl'ом [12], полученная из TDGL – теории. Однако, для почти идеального Бозе-газа, сжимаемость и ско-

рость звука $s \sim \hbar/m\xi$, являются малыми и, как следствие, компрессионная масса становится большой $\sim mn\xi^2$. Этот результат совпадает с результатом Baym and Chandler.

Возбуждения в коре вихря и его массивность. Возбуждения в коре вихря в сверхпроводниках являются одночастичными возбуждениями с особым энергетическим спектром [5]. Эти возбуждения ответственны за многие термодинамические свойства, они определяют также динамические характеристики сверхпроводников через взаимодействие возбуждений с вихрями. Наиболее важной частью массы вихря является как раз масса, обусловленная этими возбуждениями, которые могут быть рассчитаны из микроскопического анализа. Такой анализ, как указано выше, впервые был проведен Копниным [17], который решил кинетическое уравнение для тех квазичастиц, которые захвачены в коре. В сверхчистом пределе масса кора $\mu_{core} \sim mn\xi^2$ большая, как если бы все частицы внутри кора двигались бы вместе с вихрем со скоростью V_L , давая вклад в μ_{core} [18]. С другой стороны, в грязном пределе масса кора достаточно мала, по порядку величины как масса Suhl'a $\mu_{core} \sim mk_F$ как указано в [19], k_F – волновой вектор Ферми.

Масса противотока. Вклад в массу вихря, обусловленный противотоком сверхтекучей жидкости при движении вихря, как указано выше, был рассмотрен Baym and Chandler для сверхтекучего 4He [16]. Кинетическая энергия, обусловленная противотоком, дает вклад в массу вихря в виде [18]:

$$\begin{aligned} \mu_{bf} \frac{(\vec{v}_L - \vec{v}_0)^2}{2} = \\ \frac{mnr_c}{2} \int_{r>r_c}^4 d^2r \left| \vec{\nabla} \left[\frac{(\vec{v}_L - \vec{v}_0) \vec{r}}{r^2} \right] \right|^2 = \\ \pi r_c^2 mn \frac{(\vec{v}_L - \vec{v}_0)^2}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

При $r_c \sim \xi$ получается масса противотока $\mu_{bf} \sim \pi mn\xi^2$. Сравнивая эту массу с компрессионной массой (5) для почти идеального Бозе-газа, можно обнаружить, что μ_{bf} меньше на значительный логарифмический множитель. Однако, для BCS сверхпроводников со слабой связью, масса противотока для непроницаемого кора превышает массу кора, полученную Suhl'ом на большой множитель: $\xi^2 k_F^2 \sim \epsilon_f^2 / \Delta^2$ [12].

Деформационные механизмы массивности. Движение вихря приводит как к продольным, так и поперечным деформациям в кристаллической решетке. В работах [20-23] был рассчитан вклад в массу вихря, обусловленный продольными упругими деформациями решетки. Из [21] следует, что основная часть полученного вклада составляет $\mu_d = 10^6$ электронных масс на метр. В работе [20] вклад, связанный с изменением удельных объемов в нормальной и сверхпроводящей фазах (рис.1б), был оценен, как 10^7 электронных масс на метр. Роль деформаций кручения, при движения вихря проанализирована в [23]. Вклад в инертную массу абрикосовского вихря происходит от поперечного смещения кристаллической решетки. Величина этого вклада составляет $\mu_{dir} = \frac{m_e^2 c^2}{64\pi\alpha^2 \mu_{sh} \lambda^4} \ln \frac{\lambda}{\xi}$, где c – скорость света, α – постоянная тонкой структуры, μ_{sh} – модуль сдвига, λ – как и раньше, лондоновская глубина проникновения. Этот вклад сравним с массой вихревого кора, вычисленного Suhl [12].

Таким образом, различные механизмы дают разные вклады в удельную эффективную массу вихря (1)-(6). Эти вклады зависят от степени чистоты образца, значения параметров, определяющих состояние сверхпроводника, для которого было получено то или иное соотношение, характера движения вихрей и т.п. Численные оценки, проведенные с использованием соответствующих значений параметров, показывают, что величина вклада в эффективную массу вихря варьируется в довольно широких пределах – $10^{-20} - 10^{-24}$ кг/м.

Эксперименты по определению удельной эффективной массы вихря. По-видимому, первая попытка экспериментального определения эффективной массы вихря Абрикосова была предпринята в работе [24]. Авторами исследован импеданс жесткого сверхпроводника, помещенного в магнитное поле $H \gg H_{c1}$,

как функции частоты переменного тока. Диапазон частот был широкий от 10^2 до 10^{10} Гц. В эксперименте для некоторой группы материалов была обнаружена критическая частота (~ 10 МГц) – частота депиннинга, выше которой импеданс для субкритического (докритического) тока значительно возрастает и становится равным импедансу «идеальной» (без пиннинга) вихревой материи. В результате на частотах выше частоты депиннинга микроволновое поле обуславливает энергию диссипации, приводя в движение вихревую решетку. Используя сравнение своих данных по проводимости и двухжидкостную модель Гортера-Казимира, авторы [24] определили эффективную массу на единицу длины вихревой нити, которая составляет примерно 10^{10} электронных масс на метр ($\sim 10^{-20}$ кг/м). Этот результат совпадает со значением массы, определенной теми же авторами по измерению реальной части поверхностного импеданса.

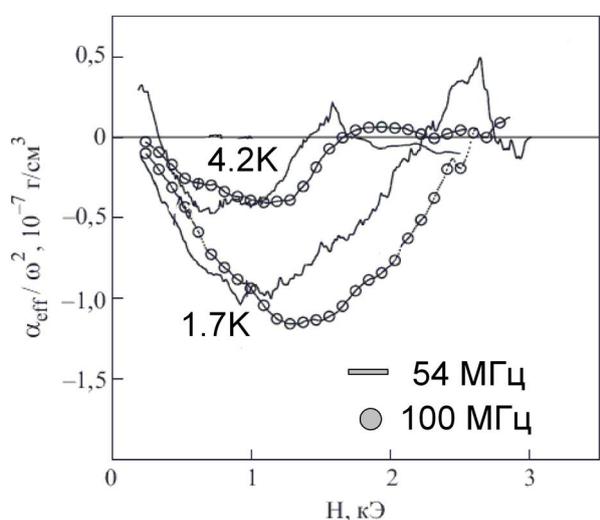


Рис. 2. Полевые зависимости объемной плотности динамических параметров вихревой решетки (сплошная линия – измерения на частоте 54 МГц, кружки – 100 МГц), измеренные при различных температурах [23]

В работе [25] на основе изучения динамического отклика смешанного состояния сверхпроводящего монокристалла YB_6 на возбуждение колебаний вихревой решетки поперечной звуковой волной, была определена масса вихря на единицу его длины. Направление распространения волны совпадало с направлением магнитного поля. Измерения проводились на частотах 50 и 100 МГц. Использованный метод позволил измерить реальную часть квадрата скин-волнового числа, которая связана с объемной плотностью параметра $\alpha_{eff} = \alpha_L - \omega^2 \mu$ (рис.2), α_L – параметр Лабуша. Авторы [25] показали, что поведение α_{eff} определяется величиной α_L и удельной эффективной массой вихрей, которые дают противоположные вклады. В работе было показано, что величина α_{eff} / ω^2 отрицательна,

это говорит о том, что основной вклад связан с конечной величиной массы вихрей. Полученное, при таком подходе, авторами [25] значение удельной эффективной массы вихря составляет 10^{-18} кг/м, что, как минимум, на два порядка больше, приведенных выше оптимистических ее оценок.

Нами, на основании экспериментальных данных по изучению термомагнитных лавин, также была предпринята попытка определения массы вихря. В процессе исследования динамики термомагнитных неустойчивостей обнаружены колебательные моды в смешанном состоянии сверхпроводящего Nb-Ti образца, как результат катастрофической лавины. Для объяснения наблюдаемых осцилляционных процессов была предложена теоретическая модель, которая учитывает инерционные свойства вихревой материи [26, 27]. В работе [28] были изучены динамические свойства вихревой материи в Nb-Ti сверхпроводнике. В этой работе нами наблюдались осцилляции в системе вихрей после термомагнитной лавины. Осцилляционные явления были интерпретированы как результат существования конечной величины эффективной массы вихря, т.е. колебания могут рассматриваться как проявление инерционных свойств вихревой материи. Последний результат является интересным хотя бы потому, что коллективные колебания в вихревой системе очень трудно наблюдать [12]. Кроме того, из-за высокой вязкости вихревой системы, сдвиговые волны в вихревой решетке практически не распространяются.

Структура скачков потока, изучалась при помощи миниатюрного датчика Холла. Он помещался в центре образца (рис. 3d) и измерял поверхностную индукцию B_{surf} . Чувствительность Холловского датчика составляла $100 \mu V/mT$. Напряжение на датчике Холла регистрировалось самописцем быстропротекающих процессов (модель ТСС – 1000, Riken Denshi Co. LTD).

Структура каждого скачка напряжения записывалась в память этого самописца в виде 1024 экспериментальных точек. Температура контролировалась полупроводниковым термометром. В экспериментах по экранированию использовался метод охлаждения в нулевом магнитном поле (ZFC). Представленные результаты были получены на NbTi (50%) образце, размер $(L \times l \times 2R \text{ мм}^3)$ которого был $15 \times 2.8 \times 3.1 \text{ мм}^3$.

Исследование сигналов, записанных с измерительной катушки и дающих интегральную характеристику процессов по всему сечению сверхпроводящего сердечника, показало, что во время развития термомагнитной неустойчивости магнитный поток входит в образец довольно сложным случайным образом.

Поток может входить как в виде дискретных лавин, так и в виде почти непрерывного каскада скачков. Оба типа процессов наблюдаются как при входе потока, так и при его выходе.

Как свидетельствуют результаты, представленные на рис. 4а, лавины заканчиваются осцилляционными процессами. Этот колебательный процесс содержит некоторую суперпозицию колебаний с разными частотами. Экспериментальная оценка основной частоты колебаний составляет $\approx 2,5$ кГц.

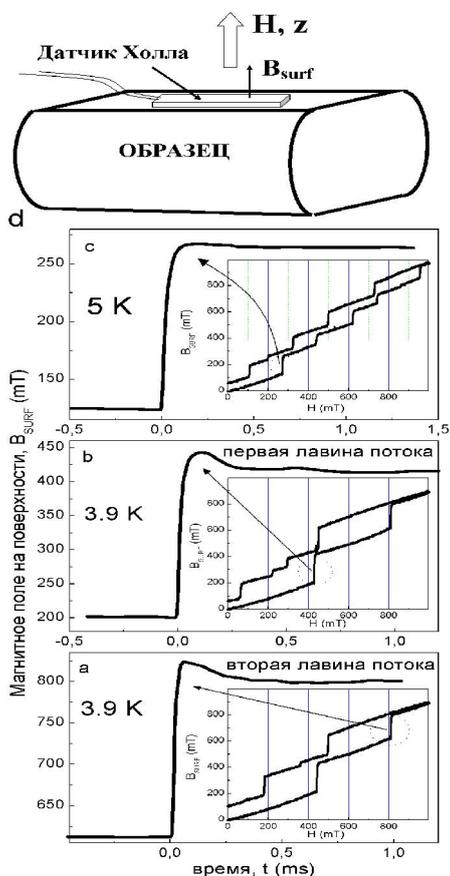


Рис. 3. Временная зависимость поверхностной магнитной индукции B_{surf} для первого (a,b) и второго (c) скачков. На вставках показаны петли гистерезиса $B(H)$, для типичной последовательности скачков потока в возрастающем и убывающем поле. d) – геометрия эксперимента

На рис. 3а-3с представлены температурные и временные зависимости поверхностной магнитной индукции B_{surf} для первого и второго скачков потока в режиме экранирования для NbTi образца при температурах 5К и 3.9К. Структура скачка потока существенно отличается от простой ступеньки. Некоторые принципиальные отличия ясно видны на рис. 4а. Развитие термомагнитной неустойчивости может быть разделено на три стадии.

Скачку потока предшествует некоторое понижение поля в сверхпроводнике. Это первая стадия процесса. Амплитуда отрицательного пика магнитной индукции в эксперименте с Nb составляла около 16% от полной амплитуды скачка потока [30]. Энергетически это уже значительная величина, которая позволяет говорить о некотором динамическом потенциальном барьере, препятствующем изменению потока, т.е. на этой стадии наблюдается увеличение экранирующих свойств изучаемого сверхпроводящего образца.

Вторая стадия фактически есть лавинообразное проникновение потока, магнитный поток, как видно из представленных результатов, очень быстро проникает в образец.

Наконец, на последней стадии происходит релаксация термических и проводящих свойств сверхпроводника (рис. 4а). В большинстве случаев этот процесс является немонотонным. Проанализируем эту стадию более детально.

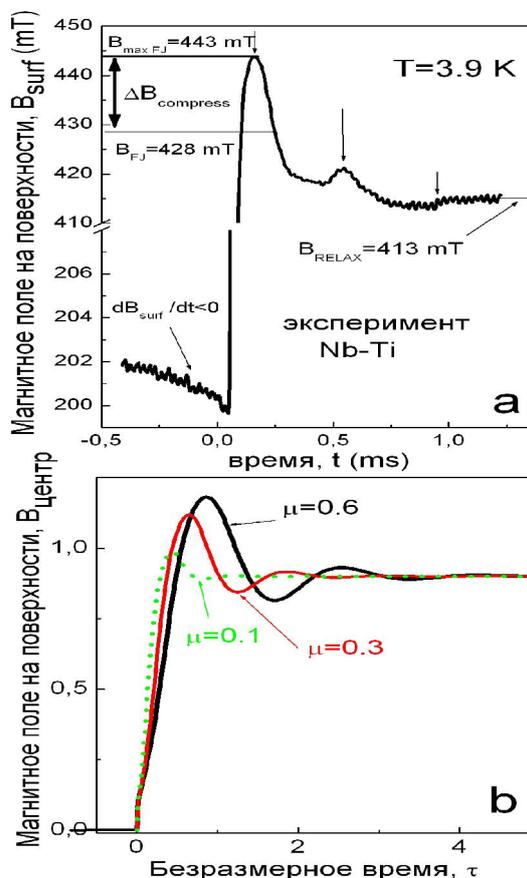


Рис. 4. а) – структура гигантской лавины магнитной индукции $B_{surf}(t)$; б) – результаты модельного расчета Рис. 4. а) – структура гигантской лавины магнитной индукции $B_{surf}(t)$; б) – результаты модельного расчета изменения магнитной индукции во времени в образце при различных значениях эффективной массы μ

Как показано на рис. 4а, после проникновения лавины в образец, индукция $B_{surf}(t)$ в центре образца превышает внешнее магнитное поле на величину ΔB_{comp} . В работе [31] было показано, что большие лавины очень похожи на систему пружин; как результат этого, после лавины, значительная часть ниобиевой пластины имела большую магнитную индукцию, чем индукция приложенного поля. Вероятно Coffey [32], наблюдал подобное сжатие вихревой решетки, измеряя распределение магнитной индукции внутри образца после скачка потока. Далее, в конце релаксационной кривой наблюдались затухающие колебания с характерной частотой $f \approx 2.5$ кГц, как указано выше.

Ограниченное число наблюдаемых осцилляций обусловлено сильным затуханием, которое делает невозможным существование колебательного процесса в вихревой структуре, в обычных условиях, т.е. без гигантских скачков потока. Нам удалось наблюдать этот процесс только благодаря сильному сжатию вихревой структуры в результате гигантской лавины потока. Уже на втором скачке потока в экранирующем режиме (рис. 3а), на стадии лавинного процесса наблюдается только монотонное убывание на кривой $B_{surf}(t)$, в отсутствие колебательных мод. Процесс затухающих колебаний (рис. 3б), наблюдаемых на эксперименте обусловлен, как мы полагаем, концентрацией потока в центре образца.

По-видимому, наиболее поразительным эффектом является сжатие магнитного потока в результате вхождения лавины в образец. Очень важно подчеркнуть, что магнитная индукция в середине образца может превосходить величину внешнего магнитного поля. В этом случае, некоторые из вихрей движутся в направлении от области с низкой плотностью, в направлении области более высокой плотности вихрей, т.е. против общей силы отталкивания. Это обозначает, что эти вихри движутся, несмотря на то, что все силы действуют в направлении, противоположном этому движению. Такое движение возможно только благодаря существованию некоторой эффективной массы вихревой материи и является ничем иным, как проявлением ее инертных свойств.

Наблюдаемые процессы проникновения магнитного потока и затухающих осцилляций, как результат термомагнитных неустойчивостей, нами описаны в рамках теоретической модели, которая использует уравнение движения массивной вихревой системы, с учетом известных сил, на нее действующих, уравнение непрерывности и уравнение теплопроводности.

Уравнение непрерывности в безразмерных переменных имеет вид:

$$\dot{b} + (bv)' = 0, \quad (7)$$

здесь $b = \frac{B}{B_p} = \frac{2B}{\mu_0 J_c(0)d}$ – нормированная магнитная индукция, d – толщина образца (предполагается, что образец имеет форму бесконечной пластины и внешнее магнитное поле параллельно ее поверхности), $J_c(0)$ – плотность критического тока при начальной температуре (перед прохождением лавины),

точка обозначает частную производную по $\tau = \frac{t}{t_0} = \frac{t\Phi_0 H_p}{4\pi d^2 \eta}$, Φ_0 – квант потока, η – коэффициент вязкости, штрих обозначает частную производную по координате $\zeta = \frac{x}{d}$, $v = \frac{V}{V_0} = V \frac{t_0}{d}$ –

безразмерная скорость вихря, H_p – поле полного проникновения. Второе уравнение модели описывает движение вихревой системы под действием сил Лоренца, пиннинга и вязкости:

$$\mu v' v + \mu \dot{v} = -b' - 2 \text{sign}(v) f(\theta) - v. \quad (8)$$

Здесь $\mu = \frac{\mu_{eff}}{m_0} = \frac{\mu_{eff} \Phi_0 H_p}{4\pi d^2 \eta^2}$ – нормированная масса вихря, $\theta = \frac{4\pi C \Delta T}{H_p^2}$, C –

удельная теплоемкость, $\Delta T = T - T_0$ – отклонение температуры от ее начального значения T_0 , перед скачком потока, функция $f(\theta)$ описывает температурную зависимость критической плотности тока, $J_c(\theta) = J_c(0)f(\theta)$,

$f(\theta) = 1$ при $\theta=0$ и $f(\theta)=0$ при $\theta = \frac{4\pi C(T_c - T_0)}{H_p^2}$, T_c – критическая температура.

Первое, второе и третье слагаемые в правой части уравнения (8) представляют силу Лоренца, силу пиннинга и силу вязкости, соответственно.

Температура меняется вследствие выделения джоулева тепла. В пренебрежении процессом теплопроводности (адиабатический предел), можно использовать следующее уравнение баланса энергии:

$$\dot{\theta} = bv^2 + 2|v|bf(\theta). \quad (9)$$

Написанная система уравнений, может быть решена внутри пространственного интервала $-\frac{1}{2} < \zeta < \frac{1}{2}$, с использованием соответствующих граничных и начальных условий, обеспечивающих инициацию лавины [27]. Результаты расчета осцилляционных процессов при соответствующем выборе параметров представлены на рис. 4b, 5. На рис. 4b представлен теоретический расчет величины поверхностной магнитной индукции в центре рассматриваемого образца. Видно, что расчетная кривая, рис.4b, подобна экспериментальной кривой, представленной на рис. 4a.

Из рисунка 4b также видно, что вихревая материя с большой массой вихрей (μ) ускоряется более медленно и приводит к большей амплитуде осцилляций. На рисунке 5a показан расчет изменения температуры в центре пластины, обусловленного лавиной потока.

Можно видеть некоторую нерегулярность изменения температуры, индуцированную колебаниями вихревой материи. На рисунках 5b,c представлены эволюция профиля магнитной индукции (рис. 5b) и скорости вихревой материи (рис. 5c), вычисленные для бесконечной пластины. Номера 1-7 обозначают последовательные этапы лавины потока.

Номер 1 обозначает профиль перед скачком потока. На рисунке 5c видно, что скорость меняет знак, т.е. на некотором этапе вихри движутся в противоположную сторону, как и должно быть в колебательном процессе.

Необходимо заметить, что, несмотря на сходство экспериментальной и расчетной кривых, оценка эффективной массы вихря из их сравнения является сильно завышенной. Она оказывается более чем в миллион раз больше, чем это следует из теоретических предсказаний. Это обозначает, что нельзя рассматривать полученную здесь величину μ как массу отдельного вихря, но скорее как некоторую величину, характеризующую инертные свойства структурного элемента колебательной системы вихревой материи, который может представлять собой связку вихрей.

Используя экспериментальные результаты, представленные на рис.4a, оценим удельную эффективную массу структурного элемента колебательной системы, используя упругие свойства смешанного состояния и частоту наблюдаемых осцилляций f . Удельная плотность вихревой материи в такой модели определяется соотношением:

$$\rho_v = \mu_{vortex} \frac{B}{\Phi_0}, \quad (10)$$

здесь μ_{vortex} – масса вихря на единицу длины, B – индукция магнитного поля в образце, $\Phi_0=2 \cdot 10^{-15}$ Вб – квант магнитного потока. С другой стороны, плотность ρ_v можно получить из закона Юнга, рассматривая вихревую материю, как упругую среду:

$$\rho_v = \frac{E}{u^2}, \quad (11)$$

здесь u – скорость распространения возмущения, E – модуль Юнга вихревой материи, который, при условии, что волновой фронт является плоским, может быть взят приблизительно равным C_{11} компоненте тензора упругости: $E \cong C_{11} \approx \frac{B^2}{\mu_0}$ [33]. В рамках рассматриваемой модели осцилляций в пластине толщиной d , легко определить скорость распространения возмущения $u=d \cdot f$. Таким образом, из уравнений (10) и (11) для массы на единицу длины вихревой линии получаем соотношение:

$$\mu_{vortex} = \frac{B \Phi_0}{\mu_0 d^2 f^2}. \quad (12)$$

Подставляя экспериментально найденные значения параметров в выражение (12): поле скачка потока $B_{FJ}=0.428$ Т, толщину образца $3 \cdot 10^{-3}$ м, частоту наблюдаемых колебаний $f=2.5$ кГц, найдем следующее значение массы: $\mu_{vortex} \approx 10^{-12}$ кг на метр длины вихревой линии, что, как и в предыдущем случае, в 10^6 больше значения полученного в работе [25] и в 10^8 раз превосходит максимальное значение теоретических оценок. Откуда опять можно сделать вывод, что структурным элементом колебательной системы является связка вихрей.

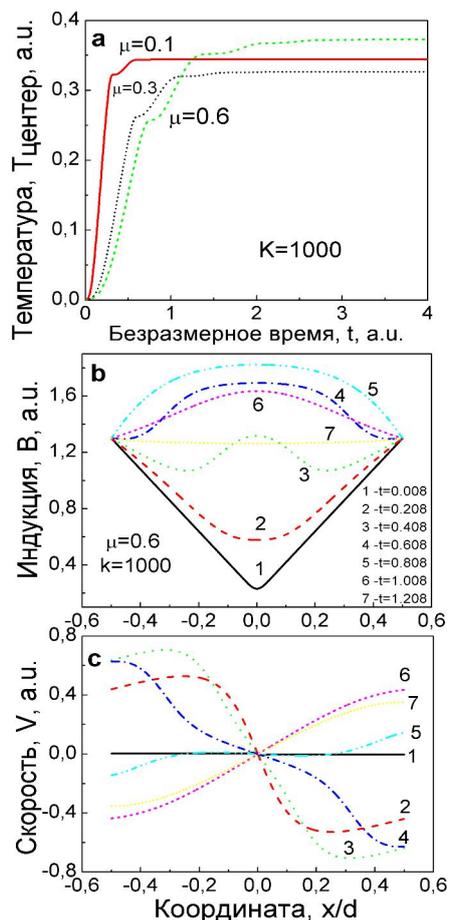


Рис. 5. Расчет временной зависимости: а) – температуры T в центре поверхности образца, для различных значений массы μ , б) – распределение индукции $B(x)$ и в) – скорости $v(x)$ движения магнитного потока в пластине. Номера обозначают последовательные профили распределения соответствующих величин во времени

дующим образом $v = \Delta x / \Delta t$, где Δx – путь, пройденный вихрем за время, пока длится скачок потока. Мы считали, что $\Delta x = d / 3$, где d – характерный размер образца. При таком допущении учтено, что поле всегда частично проникает в образец за время развития скачка потока, т.е. вихрь всегда находится на некотором расстоянии от фронта вихревой системы, который сталкивается с встречным фронтом в центре образца.

Для коэффициента вязкости мы воспользовались оценкой, приведенной в работе [14]: $\eta = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ Нс/м}^2$.

Учитывая, что вихри начинают двигаться с нулевой начальной скоростью, можно считать, что

$$\Delta v = v_k, \text{ а } v = \frac{v_n + v_k}{2} = \frac{v_k}{2}.$$

С учетом выражения для скорости вихря, выражение для массы, может быть переписано в виде:

$$\mu_v = (6J \frac{\Phi_0}{d} (\Delta t)^2 - 2\eta \Delta t) \left(\frac{1}{4 + \left(1 + \frac{B}{\Delta B}\right)^{-1}} \right).$$

Далее нами была выполнена оценка эффективной массы вихря на основе анализа структуры скачков потока, полученных в эксперименте, с использованием теоремы об изменении кинетической энергии. Приращение кинетической энергии вихря, приравнявалось работе всех сил, на него действующих. Рассмотрим вихрь в сверхпроводнике, находящемся в смешанном состоянии, из экранирующего слоя сверхпроводника. Вихрь движется со скоростью v , под действием силы Лоренца, в результате термомагнитной лавины. Предполагается, что сила Лоренца значительно больше силы пиннинга. Соответственно вклад в противодействие силе Лоренца обусловлен только сопротивлением в режиме течения потока, которое характеризуется вязкостью.

Используя выражение для силы Лоренца $f_L = J\Phi_0$, где J – плотность экранирующего тока и теорему об изменении кинетической энергии, легко получить следующее соотношение:

$$\mu_v \left[\frac{v^2}{2} + v\Delta v \left(\frac{n}{\Delta n} + 1 \right) \right] = -\eta v \Delta x \left(1 + \frac{n}{\Delta n} \right) + f_L \Delta x \left(1 + \frac{n}{\Delta n} \right),$$

Считая, что концентрация вихрей пропорциональна индукции магнитного поля: $\frac{n}{\Delta n} \approx \frac{B}{\Delta B}$, и учитывая, что

$\Delta x = v\Delta t$, где Δt – длительность скачка потока, выражение для массы можно переписать через глубину проникновения лавины и Δt . Эту величину, также как и скорость потока, можно оценить либо из коэффициента диффузии магнитного потока, либо из экспериментальных данных по скачку потока.

Нами это время было оценено из полученной в эксперименте зависимости $B(t)$. Анализ этих данных показывает, что характерное время развития неустойчивости $\Delta t \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

Среднюю скорость движения вихря можно определить следующим образом

Предполагая, что плотность транспортного тока равна плотности критического тока для изучаемого образца (из магнитных измерений его величина равна $J_c = 3.8 \cdot 10^7 \text{ A/M}^2$), легко получить для эффективной инертной массы единицы длины вихря следующую величину $\mu_v \approx 10^{-12} \text{ кг} \cdot \text{м}$.

Это тот же самый результат, который был получен в двух предыдущих подходах. Ясно, что полученная оценка для эффективной массы вихря является сильно завышенной, однако, удивительным, на наш взгляд является совпадение результатов, полученных с использованием различных подходов.

Спектр колебаний одиночного вихря Абрикосова, роль пиннинга, вязкости, эффективной массы.

С целью выяснения природы наблюдаемых колебаний, нами был рассчитан и проанализирован спектр колебаний одиночной вихревой линии, обладающей инерционными свойствами в силу вышеприведенных механизмов, когда вихрь закреплен на центре пиннинга и движение его является диссипативным.

В 1964 De Gennes and Matricon [34] рассмотрели движение вихревой линии в сверхпроводнике второго рода в случае, когда сила Лоренца \vec{F}_L уравнивается силой линейного натяжения вихревой нити F_{str} . Глубина проникновения λ много больше, чем длина когерентности ξ .

$$\vec{F}_L = \{\alpha V_y; -\alpha V_x; 0\},$$

$$\vec{F}_{str} = J \cdot \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial z^2}.$$

где $\alpha = \frac{m_{eff} \cdot \Phi_0}{\mu_0 \cdot \lambda^2 \cdot e}$, m_{eff} – эффективная масса электрона, Φ_0 – квант магнитного потока, $\lambda^2 = 4\pi n_s e^2 / m_{eff} c^2$. Энергия, приходящаяся на единицу длины вихревой нити равна:

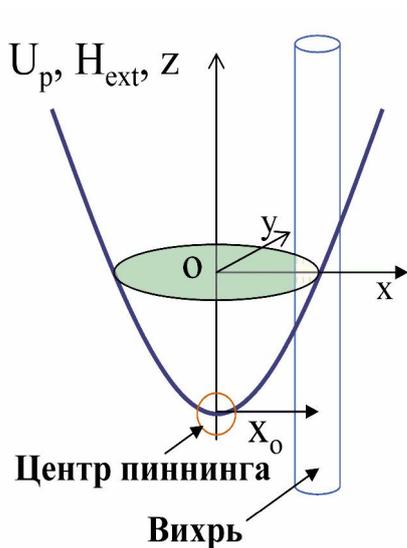


Рис. 6. Схематическое изображение движущегося вихря в потенциале пиннинга

$$J = \int_{r>\xi} dx dy \left(\frac{H^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} n_s \mu v_s^2 \right) =$$

$$\int_{r>\xi} dx dy (1/2\mu_0) \cdot (H^2 + \lambda^2 \cdot rot^2 H) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{4\mu_0} [rH \cdot rotH]_{r=\xi} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi}.$$

В результате, после решения системы уравнений, был получен следующий закон дисперсии для вихревой линии [34]:

$$\omega = \frac{\hbar}{4 m_{eff}} k^2 \cdot \ln \frac{\lambda}{\xi}.$$

Для эффективной массы электрона авторы [34] использовали значение $m_{eff} \approx 50m_e$ (m_e – масса свободного электрона), при $k^{-1} < 10^{-6} \text{ м}$ и $\ln(\lambda/\xi) \approx 4$ (что выполняется, например, для материалов типа Nb₃Sn), получаются частоты порядка мегагерц: $\omega \approx 2 \cdot 10^6 \text{ рад/сек}$.

В работах [35, 36] аналогичная задача решена при включении дополнительно в уравнение движения эффективной массы вихря, силы вязкости и силы пиннинга. Для такой ситуации был рассчитан спектр поперечных колебаний вихревой линии и выяснена роль всех сил, определяющих её динамику [35].

Рассмотрим уединенный вихрь, находящийся в жестком сверхпроводнике II рода (рис. 6). На него действуют следующие силы: сила вязкого трения, сила Лоренца, сила линейного натяжения вихря и сила пиннинга. Тогда для движущегося вихря можно написать уравнение Ньютона (на единицу длины):

$$\vec{F}_l + \vec{F}_v + \vec{F}_{str} + \vec{F}_p = \mu \frac{d\vec{V}}{dt}, \tag{16}$$

где F_{str} – сила линейного натяжения, \vec{F}_v – сила вязкости, \vec{F}_l – сила Лоренца, \vec{F}_p – сила пиннинга, \vec{V} – скорость движения кора вихря, μ – эффективная масса вихря на единицу длины.

Выбирая ось Oz вдоль оси вихря, и вводя вектор смещения $\vec{s} = (s_x, s_y, 0)$, можно записать силу пиннинга в виде:

$$\vec{F}_p = -\beta \cdot \vec{s}.$$

Для силы вязкого трения, действующей на вихрь, используем линейное приближение по скорости [14]:

$$\vec{F}_v = -\eta \vec{V}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot B_{c2} \cdot \sigma_n \Phi_0,$$

где B_{c2} – второе критическое поле, σ_n – проводимость в нормальном состоянии. Подставляя значения сил в (16) и проектируя последнее уравнение на оси Ox и Oy, получим систему уравнений для определения собственных частот.

С учетом того, что для рассматриваемых колебаний должно выполняться неравенство $k \ll 2\pi / \xi$,

что для NbTi дает $k \ll 10^8 \text{ м}^{-1}$, для характерных значений $J = 0.385 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Кл} \cdot \text{М}}{\text{с}^2}$,

$\eta = 0.3569 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\alpha = 0.3683 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Кл}}{\text{м} \cdot \text{с}}$, $\beta = 0.1 \frac{\text{Кл}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$ [33] и $\mu = 10^{-18} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$ величина

$\left| \frac{Jk^2 + \beta}{(\alpha \pm i\eta)^2} \mu \right| \ll 1$, получим две ветви спектра:

$$\omega_1 \approx \frac{\alpha(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2} - \frac{(Jk^2 + \beta)^2 \cdot \mu \cdot (\alpha^3 - 3\alpha\eta^2)}{(\alpha^2 + \eta^2)^3} +$$

$$+ i \cdot \left(\frac{\eta(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2} - \frac{(Jk^2 + \beta)^2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \alpha^2 \eta - \eta^3)}{(\alpha^2 + \eta^2)^3} \right) \quad (17)$$

$$\omega_2 \approx \frac{\alpha}{\mu} + \frac{\alpha(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2} - \frac{(Jk^2 + \beta)^2 \cdot \mu \cdot (\alpha^3 - 3\alpha\eta^2)}{(\alpha^2 + \eta^2)^3} +$$

$$+ i \cdot \left(\frac{\eta}{\mu} - \frac{\eta(Jk^2 + \beta)}{\alpha^2 + \eta^2} + \frac{(Jk^2 + \beta)^2 \cdot \mu \cdot (3 \cdot \alpha^2 \eta - \eta^3)}{(\alpha^2 + \eta^2)^3} \right)$$

Видно, что возникновение второй ветви спектра определяется введением массы. При устремлении массы к нулю одна (высокочастотная) ветвь теряет смысл, другая же (низкочастотная) совпадает с полученной ранее в работе [34] при нулевых силах пиннинга и вязкости.

Включение в уравнение движения вихря силы вязкости в линейном приближении по скорости привело как к сдвигу кривой (меняется значение частоты в начальной точке), так и к изменению ее формы.

Учет массы вихря в уравнениях движения приводит к возникновению второй ветви колебаний (17) с пороговой частотой равной $\alpha/m \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, которая соответствует «циклотронной частоте» колебаний вихря, если взять для массы оценку, приведенную в работе [24]. Учет всех рассмотренных выше вкладов в массу вихря, может понизить это значение максимум на порядок. Тем не менее, она все равно будет на несколько порядков выше, чем частота наблюдаемых колебаний поверхностной магнитной индукции, описанных выше. Это может служить подтверждением того, что частота коллективных колебаний вихревой материи не определяется частотой колебаний отдельных вихрей, а имеет более сложную природу. По-видимому, следует рассматривать скорелированные колебания связок вихрей, закрепленных на центрах пиннинга. Если предположить, что структурными элементами колебательной системы являются связки вихрей, каждая из которых, по некоторым оценкам, может содержать до $10^5 - 10^6$ вихрей, становится понятной и величина, определенной нами, эффективной массы. Это масса всей связки, но тогда эффективная масса отдельного вихря будет соответствовать значению, приведенному, например, в работе [25]. В пользу такой трактовки говорят и результаты, представленные в обзоре [6],

где проанализированы области магнитных полей и температур, в которых пиннингуются изолированные вихри, малые и большие связки вихрей. Область магнитных полей и температур, в которой работаем мы, как раз и соответствует области закрепления больших связок вихрей.

Используя полученное значение частоты второй ветви колебаний вихря сравним энергию колебаний с энергией распаривания, которая, как известно, определяется следующим выражением: $2\Delta = 3.52kT_c$, что для ниобиевого сверхпроводника дает 5×10^{-22} Дж, в то время как энергия колебаний составляет 10^{-22} Дж, т.е. в 5 раз меньше, что говорит о возможности существования и наблюдения колебаний в указанном диапазоне.

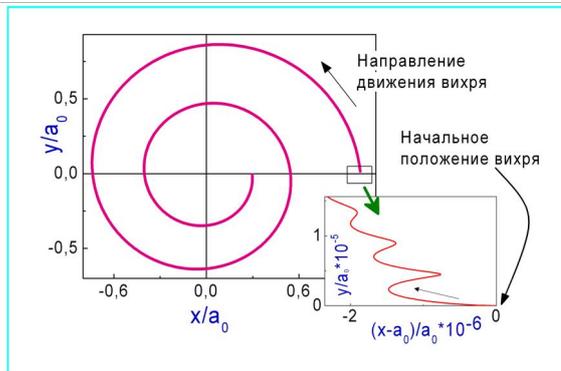


Рис. 7. Траектория вихревой линии в случае учета сил пиннинга, Лоренца и вязкости для $\kappa=0$. Начальное положение вихря задается координатами $x=a$, $y=0$. Начальная скорость предполагается равной нулю: $V_x=V_y=0$

зудется сильно отличающимися временными масштабами в соответствии с диапазонами частот первой и второй ветви спектра (10^4 Гц и 10^{12} Гц) и амплитуд колебаний. Поэтому рисунок, представляющий траекторию движения содержит два графика, отдельно начальный этап движения и завершающий. Начальный этап движения охватывает масштаб $\tau_1=10^{-11}$ с и представляет высокочастотные быстро затухающие ($\gamma_2 \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$) колебания. Траектория на масштабе $\tau_2=10^{-4}$ с, как следует из рисунка, представляет собой сходящуюся спираль. Поведение траектории на начальном участке обусловлено конечной величиной эффективной массы.

Выводы. Масса вихря обусловлена многими факторами, определяющими как его взаимодействие с окружающей сверхпроводящей средой, так и состояние его движения в этой среде. Известные экспериментальные результаты по определению удельной эффективной массы вихря дают значения, на несколько порядков превышающие ее теоретические оценки. На сегодняшний день, нет однозначного объяснения наблюдаемым расхождениям между экспериментальными и теоретическими данными. Этот вопрос требует проведения дальнейших исследований и более детального анализа.

РЕЗЮМЕ

Проаналізовано механізми виникнення ефективної маси вихру Абрикосова, проведено оцінку її величині на основі експериментальних даних, а також оцінена роль цієї маси у спектрі коливань ізольованої вихревої лінії при урахуванні сил пінінгу та в'язкості.

SUMMARY

The mechanisms of the origin of effective mass of Abrikosov vortex have been analyzed; the estimation of the magnitude has been carried out basing on the experimental data and the role of the mass in the spectrum of oscillations of a single vortex line with taking into account the forces of pinning and viscosity.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шубников Л.В. Магнитные свойства сверхпроводящих металлов и сплавов / Л.В.Шубников, В.И.Хоткевич, Ю.Д.Шепелев, Ю.И.Рябинин // ЖЭТФ – 1937. – Т. 7, №2. – С. 221-227.
2. Горьков Л.П. Движение вихрей и электросопротивление сверхпроводников второго рода в магнитном поле / Л.П.Горьков, Н.Б. Копнин // УФН. – 1975. – Т. 116. – С. 413-448.
3. Shklovskij V.A. Local self-heating of flux bundle during its motion // ФНТ – 1994. – Т.20, №8. – С. 843-844.
4. Huebener R.P. Dynamics of magnetic flux structures in superconductors / Huebener R.P. // Phys. Reports. – 1974. – Vol.13. – P. 144-189.
5. Kopnin N. B. Vortex dynamics and mutual friction in superconductors and Fermi superfluids // Rep. Progr. Phys. – 2002. – Vol.65. – P.1633-1678.

6. Kopnin N.B. Dynamic vortex mass in clean Fermi superfluids and superconductors / N.B. Kopnin, V.M. Vinokur. // Phys. Rev.Lett. – 1998. – Vol.81. – P. 3952-3955.
7. Thouless D.J. Vortex mass in superfluid at low frequencies. /D.J. Thouless, J.R. Anglin. //Phys. Rev.Lett. – 2007. – Vol.99. – P. 105301.
8. Blatter G. Vortices in high-temperature superconductors / G. Blatter, M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin and V.M. Vinokur // Rev. Mod. Phys. – 1994. – Vol. 66. – P. 1125-1388.
9. Ao P. Tunneling of a quantized vortex: roles of pinning and dissipation /P. Ao and D. J. Thouless // Phys. Rev. Lett. – 1994. – Vol.72. –P. 132 -135.
10. а) G.E. Volovik. *Pis'ma v ZhETF* **67**, 502 (1998); б) Volovik G. Comment on vortex mass and quantum tunneling of vortices / G. Volovik // JhETF Lett. – 1997. – Vol. 65. – P. 201-206.
11. N. B. Kopnin, Theory of Nonequilibrium Superconductivity /Kopnin N. B. // (Oxford University Press, Oxford, 2001).
12. Suhl H. Inertial mass of a moving fluxoid / H. Suhl // Phys. Rev. Lett. – 1965. – Vol. 14. – P. 226-229.
13. Stephen M.J. Weak time dependence in pure superconductors / M.J. Stephen and H. Suhl // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol.13. – P. 797-799.
14. Strnad A.R. Dissipative mechanism in type-II superconductors / A.R. Strnad, C.F. Hempstead, Y.B. Kim // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol. 13. – P. 794-797.
15. Stephen M.J. Viscosity of Type-II Superconductors / M.J. Stephen, J. Bardin // Phys. Rev. Lett. – 1965. – Vol. 14. – P.112-113.
16. Baym G. The Hydrodynamics of Rotating Superfluids / G. Baym, E. Chandler // Journ. Low Temp. Phys. – 1983. – Vol. 50. – P. 57-87.
17. Копнин Н.Б. Частотные особенности диссипации в смешанном состоянии чистых сверхпроводников второго рода при низких температурах / Н.Б. Копнин // Письма в ЖЭТФ. – 1978. – Т. 27. – с. 417-423.
18. Sonin E.B. Vortex motion in charged and neutral superfluids / E.B. Sonin, V.B. Geshkenbein, A. Otterlo, G. Blatter // Phys.Rev. B. – 1998. – Vol. 57. – P. 575-581.
19. Van Otterlo A. Vortex dynamics and Hall anomaly: a microscopic analysis / A. van Otterlo, M.V. Feigel'man, V.B.Geshkenbein, and G. Blatter// Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 75. – P. 3736-3742.
20. Šimánek E. Inertial mass of fluxon in deformable superconductor / E. Šimánek // Phys. Let. A. – 1991. – Vol. 154. – P.309-311.
21. Coffey M.W. Deformable superconductor model for the fluxion mass / M.W. Coffey // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 49. – P. 9774-9777.M.W.
22. Duan J.-M. Inertial mass of a fluxon in superconductor due to the strain field/ J.-M. Duan, E. Šimánek.//Phys. Let. A. – 1994. – Vol.190. – P. 118-122.
23. Chudnovsky E.M. Inertial mass of the Abrikosov vortex / E.M. Chudnovsky, A.B. Kuklov. // Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91. – P. 067004-1-067004-4.
24. Gittleman J.I. The pinning potential and high frequency studies of type-II superconductors / J.I. Gittleman, B. Rosenblum // J. Appl. Phys. – 1968. – Vol. 39. – P. 2617-2621.
25. Филь В.Д. Масса Абрикосовского вихря / В.Д. Филь, Т.В. Игнатова, Д.В. Филь, Н.Г. Бурма, А.И. Петришин, Н.Ю.Шицвалова.// ФНТ. – 2007. – Т. 33. – С. 1342-1346.
26. Чабаненко В.В. Возбуждение колебаний магнитной индукции в пластине Nb-Ti в результате термомагнитной лавины потока / В.В. Чабаненко, В.Ф. Русаков, В.А. Ямпольский, Г. Шимчак, С. Пехота, С. Васильев, А. Набьялек // ФНТ. – 2002. – Т. 28, №6. – с.548-552.
27. Chabanenko V.V. The Structure of Magnetic Avalanches: Experiment and Model for Avalanche Vortex Matter Penetration / V.V. Chabanenko, V.F. Rusakov, V. Yampol'skii, S. Vasiliev, A. Nabialek, G. Szymczak, S. Piechota, O.Mironov // J. Low Temp. Phys. – 2003. – Vol. 130 (3/4). – P. 165-174.
28. Chabanenko V.V. Oscillation mode in the screening properties of Nb-Ti plate as a result of flux jump / V.V.Chabanenko, V.F.Rusakov, A. Nabialek, S. Piechota, S. Vasiliev, H. Szymczak // Physica C. – 2002. – Vol. 369. – P. 77-82.
29. Mironov O.A. Proc. 10th International Conference on Narrow Gap Semiconductors and Related Small Energy Phenomena, Physics and Applications (NGS 10), Published by the Institute Pure and Applied Physics, Tokyo / O.A.Mironov, V.T. Igumenov, V.M. Konstantinov, L. Dobrzanski, A. Gilewski, T. Palewski, J. Klamut, D. Poplavskyy, M.L. Hsieh, R.A. Stradling – Japan. IPAP Conf. Series 2 – 2001. – P. 151-154.
30. Chabanenko V.V. The structure of vortex matter avalanches in a niobium plate / V.V. Chabanenko, V.F.Rusakov, S.Piechota, A. Nabialek, S. Vasiliev, H. Szymczak // Physica C. – 2002. – Vol. 369. – P. 82-86.
31. Nowak E.R. Magnetic flux instabilities in superconducting niobium rings: tuning the avalanche behavior / E.R.Nowak, O.W. Taylor, Li Liu, H.M. Jaeger, T.I. Selinder // Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 55. – P. 11702 – 11705.
32. Coffey H.T. Distribution of magnetic fields and currents in type II superconductors / H.T. Coffey // Cryogenics. – 1967. – Vol. 7. – P. 73–77.
33. Кемпбелл П. Критические токи в сверхпроводниках / П.Кемпбелл, Д.Иветс – М.: Мир, 1975. – 332 с.
34. De Gennes P.G. Collective modes of vortex lines in superconductors of the second kind / P.G. de Gennes, J. Matricon // Rev. Mod. Phys. – 1964. – Vol. 36, №1. – P. 45-50.
35. Русаков В.Ф. Спектр колебаний одиночного вихря Абрикосова / В.Ф. Русаков, С.В. Васильев, В.В. Чабаненко, А.Ю.Юров // Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки. – 2005. – Вип.1, ч. 2. – С. 260-263.
36. Rusakov V. Oscillating Dynamics and Trajectory of the Single Vortex Line / V. Rusakov, S. Vasiliev, V. Chabanenko, A.Yurov, A. Nabialek, S. Piechota, H. Szymczak. // Acta Phys. Pol. A. – 2006. – Vol. 109, № 4-5. – P. 641-646.

Поступила в редакцію 20.11.2009 з.