УДК 531.38

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРИОЛИ–ПУАССОНА В СЛУЧАЕ ИНВАРИАНТНОГО СООТНОШЕНИЯ

Е. К. Щетинина
Донецкий университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, г. Донецк

Выполнено интегрирование дифференциальных уравнений Гриоли–Пуассона в случае, когда они допускают одно инвариантное соотношение, которое является линейным по компонентам кинетического момента и нелинейным по компонентам единичного вектора оси симметрии силового поля. На основании первых интегралов и исходного инвариантного соотношения система уравнений Гриоли–Пуассона преобразована к системе второго порядка. С помощью теории интегрирующего множителя для определенных классов инвариантных соотношений получены новые решения дифференциальных уравнений движения.

Ключевые слова: динамика твердого тела, гиростат, уравнения Гриоли–Пуассона, инвариантное соотношение, первый интеграл, уравнение Леви-Чивиты, уравнение Риккати.

Введение и постановка задачи. Многие задачи динамики твердого тела, имеющего неподвижную точку, описываются системой шести дифференциальных уравнений, допускающих три первых интеграла. Наиболее общие дифференциальные уравнения задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, допускающие три первых интеграла, получены в 1963 году итальянским механиком Д.Гриоли. В векторном виде они таковы [1]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\times a\mathbf{x} + \mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)(\mathbf{v}\times a\mathbf{x}) + \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \mathbf{v}}\times a\mathbf{x} + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \mathbf{v}}\times \mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times a\mathbf{x}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ – вектор момента количества движения; $\mathbf{v}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – скалярные функции компонент вектора $\mathbf{v}$; $\mu(a\mathbf{x},\mathbf{v})$ – скалярная дифференцируемая функция компонент вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}=a\mathbf{x}$ и вектора $\mathbf{v}$; a – гирационный тензор; $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \nu_1},\frac{\partial L}{\partial \nu_2},\frac{\partial L}{\partial \nu_3}\right)$, $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1},\frac{\partial U}{\partial \nu_2},\frac{\partial U}{\partial \nu_3}\right)$.

Уравнения (1), (2) допускают три первых интеграла

$$\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x} - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=1, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k, \tag{3}$$

где E, k – произвольные постоянные.

Поскольку уравнения динамики твердого тела не интегрируемы в квадратурах, то в научной литературе по динамике твердого тела интенсивно изучаются инвариантные соотношения. При этом наиболее полно исследованы линейные инвариантные соотношения, которые обладают свойством, что производная в силу уравнений движения от инвариантного соотношения тождественно равна нулю на этом инвариантном соотношении. В.Гесс [2] изучал линейные инвариантные соотношения в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, Л.Н.Сретенский [3] – в задаче о движении тяжелого гиростата, С.А.Чаплыгин [4] и П.В.Харламов [5] – в задаче о движении твердого тела в жидкости. В работе [6] выполнено интегрирование уравнений Гриоли–М.П.Харламова и Пуассона (1), (2) в случае, когда эти уравнения допускают линейное инвариантное соотношение по всем переменным. Работы [7, 8] посвящены исследованию вопросов существования у уравнений (1), (2) инвариантного соотношения вида

$$x_1 - g(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0, \tag{4}$$

где $g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – заданная дифференцируемая функция переменных ν_1,ν_2,ν_3.

В данной работе продолжено изучение соотношения (4), начатое в работе [8]. Интегрирование системы (1), (2) сведено к интегрированию скалярной системы третьего порядка. Для определенных типов инвариантного соотношения (4) выполнено интегрирование редуцированной системы [8], что позволяет получить зависимости основных переменных задачи (1), (2) от времени.

Условия существования инвариантного соотношения (4). Потребуем, чтобы производная от левой части инвариантного соотношения (4) в силу скалярных уравнений, вытекающих из векторной системы (1), (2) была тождественно равна нулю при $x_1 = g(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. Тогда получим условия

$$a_{23} = a_{12} = 0, \qquad a_{33} = a_{22}, \tag{5}$$

$$a_{13}g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)+a_{22}\left(\nu_3\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_1}-\nu_1\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}-\frac{\partial L\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}-\right.$$
$$\left.-\nu_3\mu\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\right)=0, \tag{6}$$

$$a_{22}\left(\nu_1\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}-\nu_2\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_1}+\frac{\partial L\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}+\right.$$
$$\left.+\nu_2\mu\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\right)+a_{13}\left(\nu_2\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}\right)=0, \tag{7}$$

$$g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\left[a_{13}\left(\nu_1\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}-\nu_2\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_1}+\frac{\partial L\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}+\nu_2\mu\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\right)+\right.$$
$$\left.+a_{11}\left(\nu_2\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}\right)\right]+\nu_3\frac{\partial U\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}-\nu_2\frac{\partial U\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}=0. \tag{8}$$

Из равенств (5) вытекает, что первая координатная ось, проекция вектора $\mathbf{x}$ на которую определена соотношением (4), перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида. То есть условия (5) являются аналогом условий Гесса [2].

Выпишем общее решение уравнений (6)–(8) на сфере Пуассона: $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$. С помощью теории интегрирования уравнений в частных производных получим

$$L\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)=\frac{1}{a_{22}}\left[g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\left(a_{13}\nu_3-a_{22}\nu_1\right)+\Phi\left(\nu_1\right)\right], \tag{9}$$

$$U\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)=\frac{1}{2a_{22}}\left[\left(a_{11}a_{22}-a_{13}^2\right)g^2\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)+f\left(\nu_1\right)\right], \tag{10}$$

$$\mu\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)=\frac{1}{a_{22}}\left[a_{22}\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_1}-a_{13}\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}\right]. \tag{11}$$

Здесь $\Phi\left(\nu_1\right)$ и $f\left(\nu_1\right)$ – произвольные дифференцируемые функции переменной ν_1.
При наличии соотношений (9)–(11) из первого уравнения системы (1) и уравнений Пуассона (2) следует

$$\left(x_1-g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\right)^{\bullet}=\left(x_1-g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)\right)\left[a_{13}x_2+\frac{\left(a_{11}a_{22}-a_{13}^2\right)}{a_{22}}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\nu_2\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_3}-\nu_3\frac{\partial g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}{\partial\nu_2}\right)\right]. \tag{12}$$

Уравнение (12) является уравнением Леви-Чивиты [9] для инвариантного соотношения (4).

Интегрирование системы уравнений Гриоли–Пуассона. Для интегрирования системы уравнений (1), (2) с учетом соотношений (4), (5), (9)–(11) обратимся к интегралам (3). Из них найдем

$$x_2=\frac{\nu_2\left(a_{22}k-\Phi\left(\nu_1\right)\right)-\nu_3\sqrt{D\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}}{a_{22}\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}, \tag{13}$$

$$x_3=\frac{\nu_3\left(a_{22}k-\Phi\left(\nu_1\right)\right)-a_{13}\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)g\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)+\nu_2\sqrt{D\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)}}{a_{22}\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)}, \tag{14}$$

где $D\left(\nu_1,\nu_2,\nu_3\right)=\left(\nu_2^2+\nu_3^2\right)\left(2a_{22}E+f\left(\nu_1\right)\right)-\left(a_{22}k-\Phi\left(\nu_1\right)\right)^2$. Поскольку выражения (13), (14) не содержат других особенностей, кроме случая $\nu_2^2+\nu_3^2=0$, то в дальнейшем полагаем $\left|\nu_1\right|\neq 1$. Тогда вместо второго и третьего скалярных уравнений, вытекающих из динамического уравнения (1), можно рассмотреть соотношения (13), (14).

На сфере Пуассона введем вместо переменных ν_1,ν_2,ν_3 переменные $\theta,\ \varphi$ по формулам

$$\nu_1=\cos\theta,\qquad \nu_2=\sin\theta\cos\varphi,\qquad \nu_3=\sin\theta\sin\varphi. \tag{15}$$

Используя формулы (13)–(15), внесем выражение для x_1 из (4) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения Пуассона (2)

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\Big/\sin\theta\,, \tag{16}$$

$$\begin{gathered} a_{22}\sin\theta\sqrt{\Delta(\cos\theta)}d\varphi - \Big[\left(a_{11}a_{22} - a_{13}^2\right)g\left(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi\right)\sin^2\theta + \\ +\left(a_{13}\sin\theta\sin\varphi - a_{22}\cos\theta\right)\left(a_{22}k - \Phi(\cos\theta)\right) + a_{13}\sin\theta\cos\varphi\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\Big]d\theta = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\Delta(\cos\theta) = \left(1-\cos^2\theta\right)\left(2a_{22}E + f(\cos\theta)\right) - \left(a_{22}k - \Phi(\cos\theta)\right)^2. \tag{18}$$

Уравнение (16) интегрируется независимо от уравнения (17)

$$\int\limits_{\cos\theta_0}^{\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}} = t - t_0\,. \tag{19}$$

Зависимость $\theta = \theta(t)$ находится путем обращения интеграла (19).

Для интегрирования уравнения (17) положим [8]

$$g\left(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi\right) = G_0(\theta) + G_1(\theta)\cos\varphi + G_2(\theta)\sin\varphi\,, \tag{20}$$

где G_i $(i = 0,1,2)$ – заданные функции от переменной θ. Тогда в силу (20) из соотношения (17) получим

$$a_{22}\sin\theta\sqrt{\Delta(\cos\theta)}d\varphi - \left(L_0(\theta) + L_1(\theta)\cos\varphi + L_2(\theta)\sin\varphi\right)d\theta = 0\,. \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &L_0(\theta) = a_0G_0(\theta)\sin^2\theta - a_{22}\left(a_{22}k - \Phi(\cos\theta)\right)\cos\theta, \qquad \left(a_0 = a_{11}a_{22} - a_{13}^2\right) \\ &L_1(\theta) = \left(a_0G_1(\theta)\sin\theta + a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\right)\sin\theta, \\ &L_2(\theta) = \left[a_0G_2(\theta)\sin\theta + a_{13}\left(a_{22}k - \Phi(\cos\theta)\right)\right]\sin\theta. \end{aligned} \tag{22}$$

Известно, что уравнения типа (21) сводятся к уравнению Риккати. Например, замена $u = \mathrm{tg}(\varphi/2)$ позволяет уравнение (21) привести к виду

$$2a_{22}\sin\theta\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\,u_\theta' + \left(L_1(\theta) - L_0(\theta)\right)u^2 - 2L_2(\theta)u - L_0(\theta) - L_1(\theta) = 0. \tag{23}$$

Случай 1. Пусть $L_1(\theta) + L_0(\theta) = 0$, то есть выполняется равенство

$$a_{22}\left(a_{22}k - \Phi(\cos\theta)\right)\cos\theta = \left[a_0\left(G_0(\theta) + G_1(\theta)\right)\sin\theta + a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\right]\sin\theta\,. \tag{24}$$

Из соотношения (21) следует, что зависимость $\varphi(\theta)$ в случае (24) имеет вид

$$\varphi(\theta) = 2\mathrm{arctg}\left[2a_{22}\Big/\left(c - \int P(\theta)N(\theta)d\theta\right)\right], \tag{25}$$

где c – произвольная постоянная, а через $P(\theta)$ и $N(\theta)$ обозначены функции

$$P(\theta) = \frac{L_1(\theta) - L_0(\theta)}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}, \quad N(\theta) = \exp\left(\frac{1}{a_{22}}\int\frac{L_2(\theta)d\theta}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}\right).$$

Случай 2. Положим $L_1(\theta) + L_2(\theta) = 0$, то есть в силу (22) потребуем выполнения условия

$$\sin\theta\left[a_0\left(G_1(\theta) + G_2(\theta)\right)\sin\theta + a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)} + a_{13}\left(a_{22}k - \Phi(\cos\theta)\right)\right] = 0\,. \tag{26}$$

Зависимость $\varphi(\theta)$ в случае (26) такова

$$\varphi(\theta) = 2\mathrm{arctg}\left[\frac{c + \int G(\theta)E(\theta)d\theta - a_{22}E(\theta)}{c + \int G(\theta)E(\theta)d\theta + a_{22}E(\theta)}\right], \tag{27}$$

где

$$G(\theta)=\frac{L_1(\theta)}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta},\quad E(\theta)=\exp\left(-\frac{1}{a_{22}}\int\frac{L_0(\theta)}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}d\theta\right),$$

c – произвольная постоянная.

Случай 3. Пусть выполнено условие

$$L_1(\theta)+L_0(\theta)=c^2\left(L_1(\theta)-L_0(\theta)\right)\exp\left(\frac{2}{a_{22}}\int\frac{L_2(\theta)}{\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}d\theta\right), \tag{28}$$

в котором $L_1^2(\theta)-L_0^2(\theta)>0$. На основании обозначений (22) данное неравенство можно привести к виду

$$\begin{gathered}\left(a_0G_1(\theta)\sin\theta+a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\right)^2\sin^2\theta-\\ -\left(a_0G_0(\theta)\sin^2\theta-a_{22}\left(a_{22}k-\Phi(\cos\theta)\right)\cos\theta\right)^2>0.\end{gathered} \tag{29}$$

Зависимость $\varphi(\theta)$ получим из уравнения (23)

$$\varphi(\theta)=2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{-\frac{Z_1(\theta)}{Z_2(\theta)}}\ \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2a_{22}}\int\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{-\frac{Z_1(\theta)Z_2(\theta)}{\Delta(\cos\theta)}}d\theta+c\right)\right]. \tag{30}$$

Здесь $Z_1(\theta)=L_0(\theta)+L_1(\theta)$, $Z_2(\theta)=L_0(\theta)-L_1(\theta)$.

При выполнении условия (28) в случае $L_1^2(\theta)-L_0^2(\theta)<0$ получим зависимость $\varphi(\theta)$

$$\varphi(\theta)=2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{Z_1(\theta)}{Z_2(\theta)}}\ \operatorname{th}\left(\frac{1}{2a_{22}}\int\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{Z_1(\theta)Z_2(\theta)}{\Delta(\cos\theta)}}d\theta+c\right)\right]. \tag{31}$$

В соотношениях (30) и (31) c – произвольная постоянная.

Случай 4. Уравнение (23) также легко интегрируется при условии $L_1(\theta)=L_0(\theta)$, то есть при выполнении равенства

$$a_{22}\left(a_{22}k-\Phi(\cos\theta)\right)\cos\theta=\left[a_0\left(G_0(\theta)-G_1(\theta)\right)\sin\theta-a_{13}\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\right]\sin\theta. \tag{32}$$

Зависимость $\varphi=\varphi(\theta)$ при этом определяется формулой

$$\varphi(\theta)=2\operatorname{arctg}\left[N(\theta)\left(\frac{1}{a_{22}}\int\frac{L_0(\theta)d\theta}{N(\theta)\sqrt{\Delta(\cos\theta)}\sin\theta}+c\right)\right], \tag{33}$$

где c – произвольная постоянная, а $N(\theta)$ введено выше.

Равенство (32) связывает функции $\Phi(\cos\theta)$ и $f(\cos\theta)$. Если $a_{13}=0$, то из (32) имеем условие

$$\Phi(\cos\theta)=a_{22}k+a_{11}\left(G_0(\theta)-G_1(\theta)\right)\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta},$$

при этом функция $f(\cos\theta)$ остается произвольной. Поскольку выражение (18) принимает вид

$$\Delta(\cos\theta)=\left(2a_{22}E+f(\cos\theta)\right)\left(1-\cos^2\theta\right)-\left(G_0(\theta)-G_1(\theta)\right)^2\frac{\left(1-\cos^2\theta\right)^2}{\cos^2\theta},$$

то функции $\theta(t)$ и $\varphi(\theta)$ определяются соотношениями (19) и (33) и будут действительными, если постоянную E взять достаточно большой.

Выводы. Таким образом, на основе редукции исходной системы к ситеме второго порядка в четырех случаях проведено интегрирование в квадратурах дифференциальных уравнений Гриоли–Пуассона при условии, что они допускают одно инвариантное соотношение, которое является линейным по компонентам кинетического момента и нелинейным по компонентам единичного вектора вертикали.

РЕЗЮМЕ

Виконано інтегрування диференціальних рівнянь Гріолі–Пуассона у випадку, коли вони допускають одне інваріантне співвідношення, яке є лінійним по компонентах кінетичного моменту і нелінійним по компонентах одиничного вектора осі симетрії силового поля. На основі перших інтегралів і вихідного інваріантного співвідношення система рівнянь Гріолі–Пуассона перетворена до системи другого порядку. За допомогою теорії інтегруючого множника для певних класів інваріантних співвідношень отримано нові розв'язки диференціальних рівнянь руху.

Ключові слова: динаміка твердого тіла, гіростат, рівняння Гріолі–Пуассона, інваріантне співвідношення, перший інтеграл, рівняння Леві-Чивіти, рівняння Ріккаті.

SUMMARY

The integration of the Grioli–Poisson differential equations in a case when they suppose one invariant relation which is linear on components of the kinetic moment and nonlinear on components of an unit vector of an axis of symmetry of a force field is fulfilled. On the basis of the first integrals and an initial invariant relation the system of the Grioli– Poisson equations is transformed to the second order system. By means of the theory integrating factor for certain classes of invariant relation the new solutions of the movement's differential equations are received.

Keywords: the rigid body dynamics, a gyrostat, the Grioli– Poisson's equations, the invariant relation, the first integral, the Levi-Civita's equation, the equation of Riccati.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grioli G. Questioni di dinamica del corpo rigido / G. Grioli // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur. – 1963. – V. 35, f. 1–2. – P. 35-39.
2. Hess W. Über das Gyroskop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystem / W. Hess // Math. Ann. – 1887. – B. 29. – S. 500-582.
3. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата / Л. Н. Сретенский // Докл. АН СССР. – 1963. – Т.149, №2. – С. 292-294.
4. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С. А. Чаплыгин // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. – 1897. – Т. 20, вып. 1. – С. 115-170.
5. Харламов П. В. О решениях уравнений динамики твердого тела / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – Т. 29, вып. 3. – С. 567-572.
6. Щетинина Е. К. Об интегрировании уравнений Гриоли в случае линейного инвариантного соотношения / Е. К. Щетинина // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2005. – Вып. 10. – С. 229-236.
7. Yehia H. M. Particular Integrable Cases in Rigid Body Dynamics / H. M. Yehia // Z. angew. Math., Mech. – 1988. – V. 68. – № 1. – P. 33-37.
8. Горр Г. В. Об интегрировании уравнений Гриоли в случае одного инвариантного соотношения / Г .В. Горр, Х. М. Яхья, Е. К. Щетинина // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 49-57.
9. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики: в 2 т. / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – М.: Изд-во иностр. литер, 1951. – Т. 2., ч. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 555 с.

Поступила в редакцию 15.05.2010 г.