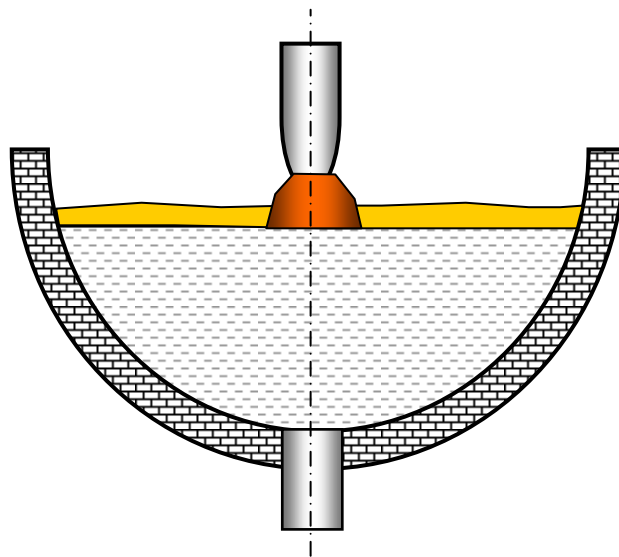


*Недопёкин Ф.В., Казак О.В.,
Семко А.Н.*

**Моделирование
гидродинамических и
теплофизических процессов
в сталеплавильных печах
постоянного тока**



ДОНЕЦК 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Ф. В. Недопёкин, О. В. Казак, А. Н. Семко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В
СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧАХ
ПОСТОЯННОГО ТОКА**

Донецк - 2014

ББК К327.410.3-51+В253.345
УДК 532.5:519.872:669.187
Н42

Моделирование гидродинамических и теплофизических процессов в сталеплавильных печах постоянного тока / Недопекин Ф.В., Казак О.В., Семко А.Н. – Донецк: ДонНУ, 2014. – 315 с.

Монография посвящена теоретическому исследованию электровихревых течений в дуговых печах постоянного тока с подовым электродом. В теоретической части монографии изложены основы гидромеханики (элементы кинематики сплошной среды, теория ламинарного и турбулентного пограничного слоя), теория тепломассопереноса (уравнения конвективного переноса для многокомпонентной среды, классификация краевых условий, теория подобия и моделирование, теплоперенос при естественной конвекции, теплоперенос при затвердевании расплава). Изложена теория электровихревых течений, которые возникают в расплаве металла при пропускании тока. Модель магнитной гидродинамики адаптирована для широкого спектра электровихревых течений в различных технологических устройствах. Компьютерное моделирование лабораторных и промышленных устройств проводилось с использованием современных численных методов и пакетов прикладных программ. Предложены новые критерии для оценки влияния движения расплава на повышенный износ футеровки в области подового электрода. Разработана методика управления электровихревыми течениями в дуговых печах постоянного тока с подовым электродом, позволяющая уменьшить износ футеровки и выбрать рациональный режим работы печи.

Рецензенты:

Бирюков А.Б. - заведующий кафедрой технической теплотехники Донецкого национального технического университета, профессор, д.т.н.

Самохвалов С.Е. - заведующий кафедрой прикладной математики Днепропетровского государственного технического университета, профессор, д.т.н.

Рекомендовано к изданию решением Ученого совета Донецкого национального университета (протокол № 20 от 28.02.2014 г.)

ISBN

© Донецкий национальный университет
© Недопёкин Ф.В., 2014

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	6
Часть 1 ГИДРОМЕХАНИКА.....	10
1 ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА СУБСТАНЦИИ.....	10
1.1 <i>Субстанция. Величина и плотность. Потoki</i>	10
1.2 <i>Кинематическое уравнение переноса субстанции</i>	11
1.3 <i>Закон сохранения субстанции для изолированного и неизолированного объемов.....</i>	12
2 ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.....	16
2.1 <i>Поле скорости и ускорений. Линия тока и трубка тока. Расхождение, циркуляция и вихрь.....</i>	16
2.2 <i>Вторая теорема Гельмгольца. Теорема Стокса о вихрях</i>	19
2.3 <i>Основная теорема кинематики</i>	21
3 ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ.....	25
3.1 <i>Пограничный слой и его характерные толщины.....</i>	25
3.2 <i>Уравнения динамического, теплового и диффузионного пограничного слоя.....</i>	27
3.3 <i>Интегральные соотношения для динамического, теплового и диффузионного пограничного слоя.....</i>	30
4 ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ.....	33
4.1 <i>Структура и профили скоростей турбулентного пограничного слоя</i>	33
4.2 <i>Турбулентный пограничный слой на пластине</i>	35
4.3 <i>Профильное сопротивление.....</i>	37
4.4 <i>Затопленные турбулентные струи.....</i>	38
Часть 2. ТЕОРИЯ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА.....	45
5 УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ.....	45
5.1 <i>Обобщенное уравнение переноса субстанции.....</i>	45
5.2 <i>Уравнение переноса массы для многокомпонентной системы. Уравнение неразрывности.....</i>	48
5.3 <i>Уравнение переноса импульса. Уравнение Навье-Стокса.....</i>	51
5.4 <i>Уравнение переноса полной и внутренней энергии. Уравнение телопереноса.....</i>	55
5.5 <i>Замыкание системы уравнений переноса. Уравнение переноса магнитной индукции.....</i>	60
6 КЛАССИФИКАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ.....	63
6.1 <i>Линейные граничные условия (ЛГУ).....</i>	63
6.2 <i>Нелинейные граничные условия.....</i>	65
6.3 <i>Специальные граничные условия (СГУ).....</i>	66
7 ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	69
7.1 <i>Общие понятия.....</i>	69
7.2 <i>Гидродинамическое подобие.....</i>	70
7.3 <i>Тепловое подобие.....</i>	71
7.4 <i>Диффузионное подобие.....</i>	73
7.5 <i>Подобие при естественной конвекции.....</i>	75
7.6 <i>Стационарная и нестационарная теплопроводность.....</i>	80

8 ТЕПЛОПЕРЕНОС ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ	87
8.1 Приближение пограничного слоя при тепловой конвекции	87
8.2 Тепловая конвекция от холодной вертикальной пластины	90
8.3 Тепловая конвекция при затвердевании расплава в замкнутом объеме	95
9 ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ РАСПЛАВА В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ	113
9.1 Обобщенная математическая модель процессов переноса при затвердевании бинарных расплавов	113
9.2 Теплоперенос в расплаве при наполнении литейных форм	118
9.3 Тепломассоперенос в условиях термоконцентрационной и смешанной конвекции	133
9.4 Теплоперенос в условиях фильтрационной и электровихревой конвекции	144
10 ТЕПЛОПЕРЕНОС В РАСПЛАВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ (ПЛАВЛЕНИЯ ИЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ)	156
10.1 Общая формулировка задачи. Учет усадки расплава при его затвердевании	156
10.2 Затвердевание полупространства, заполненного перегретым расплавом. Задача Стефана	161
10.3 Теплоперенос при обтекании полубесконечной пластины кристаллизующимся металлическим расплавом	169
Часть 3. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ (ЭВТ)	176
11 ЭВТ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА	176
11.1 Физические основы возникновения ЭВТ	176
11.2 Инженерные устройства и природные процессы с ЭВТ	178
11.3 Физические основы ЭВТ в дуговых сталеплавильных печах	182
11.4 Особенности износа подового электрода в дуговых печах постоянного тока	194
12 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВТ	198
12.1 Физическая и математическая модель ЭВТ	198
12.1.1 Формулировка физической и математической модели ЭВТ	198
12.1.2 Критерии подобия для электросталеплавильных печей	202
12.1.3 Граничные условия	206
12.2 Численные методы решения задач магнитной гидромеханики	207
12.3 Анализ возможностей существующих пакетов прикладных программ для моделирования задач магнитной гидромеханики	212
Часть 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВТ	232
13 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВТ В ЛАБОРАТОРНЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ УСТРОЙСТВАХ	232
13.1 Моделирование ЭВТ в лабораторной установке	232
13.1.1 Построение расчетной модели	232
13.1.2 Моделирование ламинарного ЭВТ	237
13.1.3 Моделирование турбулентных ЭВТ	240
13.2 Моделирование ЭВТ на модельной задаче электросталеплавильной печи	247
13.2.1 Расчетная модель электросталеплавильной печи	247
13.2.2 Результаты моделирования процессов в печи	249

14 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВТ В ПРОМЫШЛЕННЫХ СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПОДОВЫМ ЭЛЕКТРОДОМ	253
14.1 Моделирование ЭВТ в сталеплавильной печи постоянного тока цилиндрической формы	253
14.1.1 Построение расчетной модели печи	253
14.1.2 Моделирование ЭВТ для изотермического и неизотермического режимов работы печи	258
14.2 Моделирование ЭВТ в сталеплавильной печи постоянного тока на 420 тонн	266
14.2.1 Модель промышленной печи	266
14.4.2 Моделирование ЭВТ в печи	268
14.3 Верификация результатов расчетов	274
Часть 5. УПРАВЛЕНИЕ ЭВТ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ПЕЧАХ	278
15 ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ЭВТ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ПЕЧАХ	278
15.1 Выбор критериев оценки влияния ЭВТ на повышенный износ футеровки	278
15.2 Снижение воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем понижения температуры подового электрода	284
15.3 Снижение воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем изменения положения подового электрода	284
15.4 Снижение воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем изменения угла наклона подины печи	293
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	296

Посвящается 105-летию со дня рождения члена-корреспондента АН Украины, проф., д.т.н. Повха И.Л.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с возрастающим общемировым потреблением продукции металлургической промышленности, а также повышением требований к экологической безопасности используемых сталеплавильных печей особый интерес вызывают новые технологии выплавки металла. В последнее время в мировой практике выплавки стали интенсивно развивается электрометаллургия. Повышение доли электрометаллургии при производстве стали связано с возникновением дополнительных проблем энергетического и экологического характера. Высокие показатели работы печей достигаются путем модернизации производства, применения альтернативных источников энергии, средств интенсификации плавки.

В дуговых сталеплавильных печах (ДСП) выплавляют около 35% всей производимой в мире стали (1650 млн. т в 2012г.), что позволяет электросталеплавильному производству занимать вторую позицию, уступая только кислородно-конвертерному процессу.

Универсальность ДСП относительно исходной шихты, возможность последовательного проведения окислительных и восстановительных процессов, возможность концентрированного ввода энергии от внешнего источника являются определяющими критериями их широкого распространения. Дуговые печи используют при выплавке полупродукта по интенсивной технологии на металлургических мини-заводах, получивших распространение в мире за последние 20 лет (их число уже превышает 1000), и при производстве готового металла по классической технологии в литейных цехах предприятий машиностроения. Эти разновидности металлургического производства принято называть «большой» и «малой» металлургией соответственно.

В мировом парке печей дуговые сталеплавильные печи переменного тока составляют около 85%, но в последние 20 лет определенный сектор в сталеплавильном производстве завоевали дуговые печи постоянного тока с подовыми электродами. Новая технология выплавки стали в дуговых печах постоянного тока с подовыми электродами по многим показателям превосходит традиционные ДСП на переменном токе, но и она имеет свои недостатки.

Наиболее существенной проблемой, сдерживающей дальнейшее распространение этой перспективной технологии, является отсутствие надежных и эффективных методов моделирования гидродинамических и теплофизических процессов протекающих в расплаве металла во время работы печи.

В печах такого типа присутствует сложное сочетание электровихревых и конвективных потоков расплава металла. Электровихревые течения (ЭВТ) представляют собой особый тип течений проводящей жидкости, возникающий в результате взаимодействия неоднородного тока проводимости с собственным магнитным полем.

Стоит также отметить проблему повышенного износа футеровки в окрестности подового электрода. В среднем подовый электрод и футеровка в его окрестности служат в десятки раз меньше, чем все основные элементы печи, и работает до нескольких тысяч часов. Выход из строя подового электрода приводит к длительным простоям, технически сложной и дорогостоящей замене кладки подины и самого подового электрода. По мнению ряда специалистов «DANIELI» (Италия), «SIEMENS» (Германия), И.М. Ячикова (МГТУ, Россия), П.И. Тищенко («РОУД», Украина), X. Liu (Шанхайский университет, Китай), основной причиной повышенного износа футеровки является вихревое движение расплава под действием сил Лоренца в непосредственной близости подового электрода. Как показывают исследования, повысить надежность и эффективность, и тем самым снизить эксплуатационные затраты дуговых печей постоянного тока с подовыми электродами, можно управляя характером и интенсивностью ЭВТ в ванне печи во время приготовления стали путем изменения конструкции печи.

В работах И.М. Ячикова, И.В. Портновой, В.Н. Манагарова, F. Wang, В. Henning и других авторов были разработаны компьютерные модели и численные методы для расчета ЭВТ, а также предложены некоторые методы управления ЭВТ. Итальянской фирмой «DANIELI» был предложен способ уменьшения воздействия ЭВТ на подовый электрод и футеровку путем снижения температуры за счет водяного охлаждения подового электрода. Авторами M. Ramirez и G. Tgaraга был предложен способ управления ЭВТ посредством вдувания инертного газа в область подового электрода. Тем не менее, учитывая всю сложность процесса и его зависимость от целого ряда факторов, вопрос об изучении и управлении ЭВТ в дуговой печи постоянного тока остается открытым. Стоит также отметить отсутствие общепринятого критерия оценки влияния ЭВТ на повышенный износ футеровки. Поэтому актуальным является вопрос моделирования и управления ЭВТ в различных процессах.

Настоящая работа посвящена компьютерному моделированию ЭВТ в различных технологических устройствах. В первом разделе приводится общая теория гидродинамических процессов, а также теория ламинарного и турбулентного пограничного слоя. Во втором разделе дана полная теория процессов тепломассопереноса, включая процессы фазовых переходов на примере металлургических установок. В третьем разделе дается общая характеристика ЭВТ и выполнен обзор исследований по ЭВТ в различных устройствах. Также рассмотрены особенности физической и математической модели ЭВТ, проанализированы численные методы расчета установившегося

движения токопроводящей жидкости на модели дуговой печи постоянного тока с подовым электродом.

Четвертый раздел посвящен обработке методов и подходов моделирования ЭВТ в различных лабораторных и промышленных устройствах. Моделирование ЭВТ проводилось в полусферическом объеме расплава металла, для которого имеется аналитическое решение, полученное Э.В. Щербининым для ламинарного течения жидкой ртути, и экспериментальные данные для турбулентного течения эвтектического расплава, выполненные в Объединенном институте высоких температур РАН при помощи волоконно-оптического датчика скорости. При расчетах опробовано несколько моделей турбулентности. Показано, что $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ модели турбулентности адекватно описывают турбулентные ЭВТ. Результаты расчетов по этим моделям хорошо согласуются с расчетами других авторов и с экспериментальными данными.

Для обработки методов и подходов моделирования ЭВТ в дуговой печи постоянного тока с подовым электродом была разработана осесимметричная модель электросталеплавильной печи. По результатам моделирования ЭВТ произведен анализ настроек в конкретных пакетах прикладных программ, определены оптимальные. Проанализированы различные типы построения расчетных сеток. Оценено влияние различных физических эффектов на ЭВТ в расплаве, выяснено определяющее влияние силы Лоренца. Адаптированы граничные условия к конкретным пакетам прикладных программ, уточнены размеры расчетной области, а также возможность уменьшения размеров расчетной области до размеров расплава и электродов. Показано, что предложенные модели и методы позволяют рассчитывать электромагнитные, гидродинамические и тепловые поля для дуговой печи постоянного тока. Также проведено исследование структуры и особенностей ЭВТ в дуговой печи постоянного тока с подовыми электродами различной конструкции. Рассмотрены физические процессы, поставлена и решена модельная задача для цилиндрической дуговой печи постоянного тока с подовым электродом. За основу выбрана промышленная печь ёмкостью 100 тонн разработки фирмы «DANIELI». Для описания процессов в электрической печи использовались модели и методы, отработанные на модельных задачах. Разработана стратегия решения поставленной сопряженной задачи в рамках стандартных пакетов программ. Моделирование проводилось как для изотермического режима работы печи, так и для неизотермического режима работы на максимальной тепловой мощности. Сравнение результатов расчетов для изотермического и неизотермического режимов выявило определяющее действие объемной электромагнитной силы на вихревое движение расплава.

Расчеты проводились в двумерной осесимметричной и трехмерной постановках. Расхождение результатов расчетов не превышало 5 %, однако время расчета в трехмерной постановке увеличилось на 1-2 порядка. Хорошее совпадение результатов расчетов позволяет рассчитывать пространственные трехмерные течения, при несимметричной конструкции печи, ис-

пользуя отработанные методы и подходы. С использованием отработанных методов была рассмотрена промышленная дуговая печь постоянного тока с четырьмя подовыми и двумя верхними электродами разработки фирмы «DANIELI» ёмкостью 420 тонн. На данный момент это крупнейшая в мире электросталеплавильная печь, работающая на постоянном токе.

Результаты расчетов в ANSYS сравнивались с аналитическими решениями и экспериментальными данными, а также расчетами в COMSOL. Хорошее совпадение численных результатов с теоретическими предположениями, практическими данными, а также расчетов выполненных разными методами и пакетами говорит о надежности методов и достоверности результатов.

В пятом разделе работы приведены результаты численного моделирования возможности управления ЭВТ в дуговой печи постоянного тока с подовым электродом при изменении физических характеристик расплава и конструктивных особенностей печи с целью повышения устойчивости футеровки в непосредственной близости подового электрода.

Для количественной оценки влияния движущегося расплава на износ футеровки выбраны числовые критерии: модуль ротора силы Лоренца для предварительной оценки и величина сдвигового напряжения на поверхности футеровки. Согласно результатам исследования, изменение конструктивных характеристик дуговой печи постоянного тока с подовым электродом приводит к увеличению или уменьшению интенсивности ЭВТ в непосредственной близости подового электрода. Изменение параметров проводилось с определенным шагом для каждого из варьируемых параметров.

Воздействие на интенсивность ЭВТ в дуговой печи постоянного тока с подовым электродом осуществлялось изменением температуры подового электрода при его охлаждении, изменением положения подового электрода при его поднимании или опускании, изменением угла наклона пода печи. По результатам проведенного анализа составлены практические рекомендации по управлению ЭВТ в дуговой печи постоянного тока с подовым электродом путем изменения ее конструкции, которые получили внедрение в промышленных печах с подовым электродом.

Часть 1. ГИДРОМЕХАНИКА

1 ЗАКОНЫ ПЕРЕНОСА СУБСТАНЦИИ

1.1 Субстанция. Величина и плотность. Потoki

Субстанция в физике - это основная физическая величина, определяющая меру количества материи, содержащуюся в некотором объеме, перемещающемся в пространстве [1 - 20]. Она является аддитивной величиной, например, масса, тепло, энергия, импульс, заряд - все сохраняемые величины в физике. Неаддитивные величины: давление, температура, плотность массы, т.е. величины субстанции, отнесенной к единице объема.

Величина субстанции S , содержащейся в данном объеме U , и ее плотность Φ связаны формулой:

$$S = \int_U \Phi dU . \quad (1.1)$$

Поток субстанции - полная производная субстанции по времени:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_U \Phi dU . \quad (1.2)$$

Важной величиной является также поток плотности субстанции $\frac{d\Phi}{dt}$.

Следует отметить, что потоки субстанции и плотности являются фундаментальными в теории процессов переноса. Бесконечное многообразие сохраняемых величин в природе сводится к пяти: масса (m), импульс (\vec{P}), энергия (E), момент импульса (\vec{L}) и заряд (e). Ограничиваясь в настоящем пособии первыми тремя субстанциями, имеем:

$$\begin{aligned} S = m = \rho U ; S = m_\alpha = C_\alpha U ; S = \vec{P} = \rho \vec{V} U ; \\ S = E = (\varepsilon_k + \varepsilon_n + \varepsilon_T) U ; S = \varepsilon_T U = \rho c T U , \end{aligned} \quad (1.3)$$

где ε_k , ε_n , ε_T - плотность кинетической, потенциальной и тепловой энергий; ρ - плотность вещества; c - удельная теплоемкость; \vec{V} - скорость; C_α - массовая концентрация α компонента; m_α - масса α компонента; E - полная энергия; T - температура.

Размерность потоков субстанций следующая: для потока импульса - это сила, для энергии - мощность, для массы - массовый секундный расход. Необходимо различать плотность потока субстанции $A = \Phi \vec{V}$ и поток плотно-

сти субстанции, равной размерности субстанции, отнесенной к единице объема и времени. Размерность $[A]$ равна размерности S , отнесенной к единице площади и единице времени.

Напомним, что в термодинамике аддитивные величины называются экстенсивными, а остальные - интенсивными. Повх И.Л. утверждает, что “любая аддитивная величина является субстанцией и что понятие аддитивности более общее, чем сохраняемость” [8].

1.2 Кинематическое уравнение переноса субстанции

В курсе процессов переноса под кинематикой понимают раздел физики, изучающий геометрию движения объема любой субстанции без учета внешних воздействий.

Абсолютное изменение плотности субстанции - это полный дифференциал $d\Phi$, а относительное - это субстанциональная производная:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}. \quad (1.4)$$

Учитывая, что $\frac{dx_i}{dt} = u_i$ ($i = 1, 2, 3$), уравнение (1.4) принимает вид:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\Phi. \quad (1.5)$$

Т. к. $\nabla(\Phi\vec{V}) = \Phi(\nabla\vec{V}) + (\vec{V}\nabla)\Phi = (\vec{V}\nabla)\Phi$ при $\nabla\vec{V} = 0$, то (1.5) запишется следующим образом:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi\vec{V}). \quad (1.6)$$

Учитывая аддитивность субстанции S (1.1), уравнение (1.6) в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_U \Phi dU = \int_U \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi\vec{V}) \right) dU.$$

Воспользовавшись формулой Остроградского-Гаусса, последнее равенство преобразуется к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_U \Phi dU = \int_U \frac{\partial\Phi}{\partial t} dU + \int_S \Phi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) представляют собой кинематические уравнения переноса субстанции в дифференциальной и интегральной форме соответственно, которые говорят о том, что изменение любой субстанции состоит из двух составляющих: изменений во времени и в пространстве.

1.3 Закон сохранения субстанции для изолированного и неизолированного объемов

Изолированный объем. Если субстанция не обменивается с соответствующей субстанцией окружающей среды, или количество входящей и выходящей субстанции будут одинаковы, то уравнение переноса называется законом сохранения субстанции:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\Phi = 0, \quad (1.8, a)$$

или при $div\vec{V} = 0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + div(\Phi\vec{V}) = 0. \quad (1.8, б)$$

Уравнения (1.8,а) и (1.8,б) называются уравнениями сплошности или неразрывности. Для стационарных процессов, когда $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$, они принимают вид:

$$\vec{V}grad\Phi = 0 \text{ или } div(\Phi\vec{V}) = 0. \quad (1.9)$$

В частности, для массы, обозначив в уравнении (1.8,б) $\Phi = \rho$, получаем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = 0. \quad (1.10)$$

Для стационарного случая

$$div(\rho\vec{V}) = 0, \quad (1.11)$$

при $\rho = Const$

$$div\vec{V} = 0. \quad (1.12)$$

Т.о. уравнения (1.10) - (1.12) представляют собой классические уравнения сохранения массы, сплошности или неразрывности.

Для других субстанций аналогичным образом могут быть получены законы сохранения путем формальной подстановки соответствующих значений Φ . При отсутствии “внешних” воздействий в замкнутой системе поток суб-

станции (9.8, а) называют инерционным. Поэтому уравнения (1.8, а) и (1.8, б) отражают только инерционное изменение субстанции, которое состоит из двух слагаемых: локальное $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, зависящее только от времени, и конвективное - $div(\Phi \vec{V})$.

Неизолированный объем. При внешнем воздействии на движущийся объем соответствующие изменения содержания субстанции (потoki субстанции) запишутся так (интегральная форма):

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_U \Phi dU = \int_U \frac{\partial \Phi}{\partial t} dU + \int_S \Phi \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_U \vec{j}_o dU + \int_S \vec{j}_s ds, \quad (1.13)$$

или используя формулу Остроградского - Гаусса

$$\int_U \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + div(\Phi \vec{V}) \right) dU = \int_U (\vec{j}_o + div \vec{j}_s) dU, \quad (1.14)$$

где \vec{j}_o и \vec{j}_s - плотность потока “внешних” воздействий, изменяющих субстанцию, отнесенную к единице объема и к единице поверхности соответственно. Размерности

$$[\vec{j}_o] = \frac{[S]}{(m^3 \cdot c)} \quad \text{и} \quad [\vec{j}_s] = \frac{[S]}{(m^2 \cdot c)}.$$

К внешним воздействиям относят химические, ядерные реакции и др.

Дифференциальная форма:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + div(\Phi \cdot \vec{V}) = \vec{j}_o + div \vec{j}_s. \quad (1.15)$$

Уравнения переноса величины субстанции (1.14) и ее плотности (1.15) выражают общие законы переноса любых субстанций, являясь динамическими уравнениями. В термодинамике их называют уравнениями баланса, определяющие неравновесные процессы переноса.

Если сумму “внешних” воздействий $\vec{j}_o + div \vec{j}_s$ обозначить через общее воздействие \vec{j} , то уравнения (1.14) и (1.15) примут вид:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_U \Phi dU = \int_U (\vec{j}_o + div \vec{j}_s) dU = \int_U \vec{j} dU; \quad (1.16)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \vec{j}. \quad (1.17)$$

Т.о. общий закон переноса субстанции может быть сформулирован следующим образом: поток субстанции, заключенный в некотором объеме, равен сумме потоков “внешних” воздействий, изменяющих субстанцию.

Уравнение переноса импульса. Положив в уравнении (1.15) $\Phi = \rho \vec{V}$, $\vec{j}_o = \rho \vec{F}$ - плотность массовых сил, $\vec{j}_s = \bar{\bar{P}}$ - плотность поверхностных сил (или тензор напряжений, получим уравнение переноса импульса в напряжениях:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{V} \text{grad}(\rho \vec{V}) = \rho \vec{F} + \text{div} \bar{\bar{P}}, \quad (1.18)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \vec{V} \text{grad}(\rho \vec{V}) = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}, \quad (1.19)$$

где \vec{P}_x , \vec{P}_y , \vec{P}_z - векторы поверхностных сил, приложенные к площадкам, нормальным к осям x , y , z .

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_x &= P_{xx} \vec{i} + P_{xy} \vec{j} + P_{xz} \vec{k} \\ \vec{P}_y &= P_{yx} \vec{i} + P_{yy} \vec{j} + P_{yz} \vec{k} \\ \vec{P}_z &= P_{zx} \vec{i} + P_{zy} \vec{j} + P_{zz} \vec{k} \end{aligned} \right\}, \quad (1.20)$$

где P_{ij} ($i, j, k = 1, 2, 3$) - компоненты тензора напряжений, уравнение (1.19) запишется в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Используя для ньютоновских жидкостей линейную зависимость тензора напряжений от тензора скоростей деформации

$$P_{ii} = -p + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad P_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.22)$$

Получаем уравнение переноса импульса для несжимаемой жидкости, которое в литературе именуется уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V}, \quad (1.23)$$

где p - гидродинамическое давление.

Уравнение теплопереноса. Положив в уравнении (1.15) $\Phi = \rho c T$ - плотность субстанции тепла, $\vec{j}_o = 0$, $\vec{j}_s = \lambda \text{grad} T$, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) T = a \Delta T, \quad (1.24)$$

где $a = \lambda / \rho c$ - коэффициент температуропроводности. Полученное уравнение (1.24) называется уравнением теплопереноса. Если скорость $\vec{V} = 0$, т.е. среда неподвижна уравнение (1.24) преобразуется к уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T. \quad (1.25)$$

Уравнение массопереноса. Это уравнение выводится таким же образом, как и предыдущие (1.23), (1.25). Положив $\Phi = C_\alpha$ - концентрация примеси α - компонента, $\vec{j}_o = 0$ и $\vec{j}_s = D_\alpha \text{grad} C_\alpha$, получаем уравнение переноса массы:

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) C_\alpha = D_\alpha \Delta C_\alpha. \quad (1.26)$$

Если среда неподвижна $\vec{V} = 0$, то уравнение массопереноса переходит в уравнение диффузии примеси α - компонента:

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial t} = D_\alpha \Delta C_\alpha. \quad (1.27)$$

Полученные уравнения переноса импульса (1.23), тепла (1.24) и вещества (1.27) совместно с краевыми условиями представляют собой математическую модель процессов переноса в сплошной многокомпонентной движущейся среде.

Изложенный выше метод вывода уравнений переноса разработан профессором Повхом И.Л. [8].

2 ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

1.2.1 Поле скорости и ускорений. Линия тока и трубка тока. Расхождение, циркуляция и вихрь

Кинематика - часть механики, изучающая общие свойства движения тел без выяснения причин его возникновения. Ее называют еще геометрией движения. Существуют два метода изучения движения: Лагранжа (L) и Эйлера (\mathcal{E}). Метод L - изучает движение в каждой точке пространства в любой момент времени, поведением отдельной частицы не интересуется. В любой момент времени t координаты частиц определяются по формулам:

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = f_2(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = f_3(x_0, y_0, z_0, t),$$

где x_0, y_0, z_0 , - переменные L

В методе \mathcal{E} все величины изучаются как функции от координат и времени (x_0, y_0, z_0, t) , называемые переменными \mathcal{E} . Например, $T = T(x, y, z, t)$ - температура; $C_\alpha = C_\alpha(x, y, z, t)$ - концентрация α - компонента.

Движение среды характеризуется скоростями ее частиц \vec{V} и ускорением \vec{W} :

$$\vec{V} = \frac{1}{t_0} \int_{t_1}^{t_1+t_0} V dt; \quad V_s = \frac{1}{S} \int V ds; \quad (2.1)$$

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}, \quad (2.2)$$

где \vec{V} и V_s - средняя скорость по времени и площади соответственно.

Линия и трубка тока. Линия тока, это векторная линия, в каждой точке которой вектор скорости касательный к ней (рис. 2.1 а).

Совокупность линий тока, проходящих через все точки контура, называются трубкой тока (рис. 2.1 б).

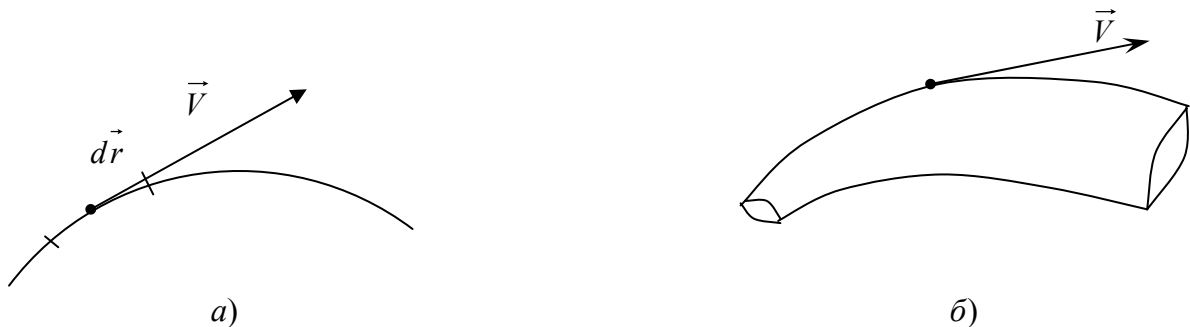


Рис. 2.1. Линия и трубка тока

Уравнение линии тока:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \quad (2.3)$$

вытекает из соотношения $\vec{V} \times d\vec{r} = 0$, где $d\vec{r}$ - элементарный вектор.

Траектория - это линия, по которой перемещается тело. Линия тока и траектория совпадают только при стационарном движении.

Необходимо ответить, что через линию тока нет перетекания. Это обусловлено равенством нулю в ее каждой точке нормальной компоненты скорости. Поэтому между двумя произвольными линиями тока количество протекающей энергии сохраняется. Поверхность, через которую жидкость не протекает называется поверхностью тока. При плоском обтекании - это нулевая линия тока. (Рис. 2.2) Точки, в которых линии тока пересекаются называются особыми. В них скорость равна 0

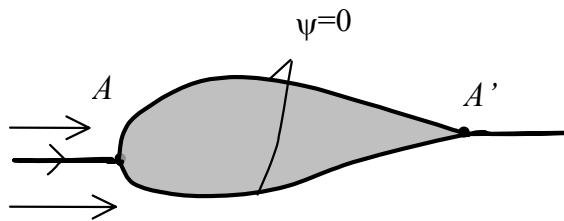


Рис. 2.2. Критические точки A и A' , нулевая линия тока $\psi = 0$

или ∞ , т.к. вектор скорости должен иметь разные направления, что физически невозможно. При обтекании тела особые точки A и A' (рис. 2.2), в которых скорость равна нулю, называются критическими. Примером течения, где скорость в особых точках обращается в ∞ , является источник или сток (рис.2.3).

Учитывая, что трубка тока образована линиями тока, для нее также будет выполняться закон сохранения количества вещества, проходящего через любое сечение.

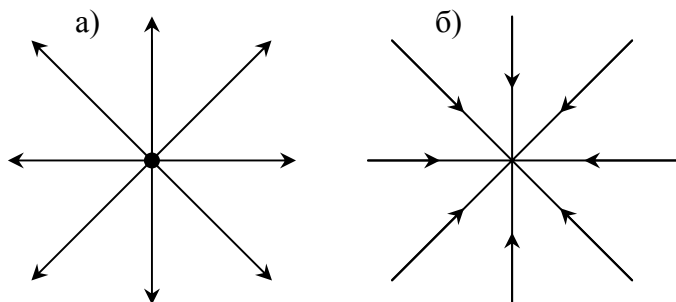


Рис. 2.3. Источник (а) и сток (б)

Поток вектора скорости через поверхность S - это секундный или объемный расход:

$$Q = \int_S V_n ds = \int (u dy dz + v dx dz + w dx dy), \quad (2.4)$$

где u , v и w - проекции вектора скорости \vec{V} на оси x , y и z ; V_n - проекция вектора скорости на нормаль \vec{n} .

При отсутствии внутри поверхности S источников или стоков справедливо равенство:

$$Q = \oint_S V_n ds = 0.$$

Размерность определяется так: $[Q] = [V] = [S] = \text{м}^3/\text{с}$.

Градиент произвольной скалярной функции $\phi = \phi(x, y, z)$ определяется так:

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\phi. \quad (2.5)$$

В качестве ϕ могут быть давление p , температура T , плотность ρ , концентрация C_α , компоненты скорости u , v и w . Линии равных значений скалярной функции $\phi = \phi(x, y, z) = \text{Const}$ образуют скалярное поле. При $T = \text{Const}$ - это изотермы, $P = \text{Const}$ - изобары, для проекций скорости - изотахи и т.д.

Напомним, что $\nabla\phi$ - вектор, направленный по нормали к линии постоянного значения ϕ и равный по величине производной $\partial\phi/\partial n$.

Дивергенция (расхождение) - скалярное произведение оператора ∇ на вектор \vec{V} :

$$\nabla \circ \vec{V} = \text{div}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

Циркуляцию вектора скорости \vec{V} по контуру на участке AB . Определяют с помощью криволинейного интеграла:

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{V} d\vec{z} = \int_A^B |\vec{V}| \cos\alpha dl = \int_A^B (u dx + v dy + w dz). \quad (2.7)$$

Или для замкнутой кривой l

$$\Gamma_{AB} = \oint u dx + v dy + w dz. \quad (2.8)$$

Вихрь вектора скорости:

$$\text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Рассмотрев вращение твердого тела, можно показать, что $\text{rot}\vec{V}$ можно выразить через угловую скорость:

$$\vec{\omega} = 0,5 \text{rot}\vec{V}. \quad (2.9)$$

Следует иметь в виду, что вихревое движение может быть и ламинарным, и турбулентным, осредненное движение может быть в свою очередь и вихревым, и безвихревым.

Для безвихревого движения

$$\text{rot}\vec{V} = 0.$$

Тогда существует некий потенциал ϕ

и течение называется потенциальным:

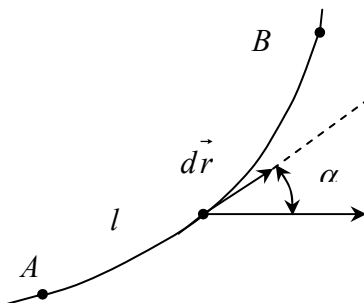


Рис. 2.4. Понятие циркуляции:

$d\vec{r}$ - элементарный вектор, касательный к кривой AB

$$\vec{V} = \text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}. \quad (2.10)$$

Очевидно, что если вектор скорости \vec{V} имеет ϕ , что

$$\text{rot}\vec{V} = \text{rotgrad}\phi = 0. \quad (2.11)$$

2.2 Вторая теорема Гельмгольца. Теорема Стокса о вихрях

Вихревой линией называется линия, в каждой точке которой вихри $\text{rot}\vec{V}$ касательные к ней. Уравнение вихревых линий:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (2.12)$$

Вихревые линии образуют вихревую поверхность, если они проведены через каждую точку замкнутого контура. Часть жидкости, ограниченная этой поверхностью, называется вихревой трубкой.

Теорема. Поток вектора $\text{rot}\vec{V}$ сквозь произвольно проведенное сечение вихревой трубки (рис. 2.5) одинаков вдоль всей трубки [1].

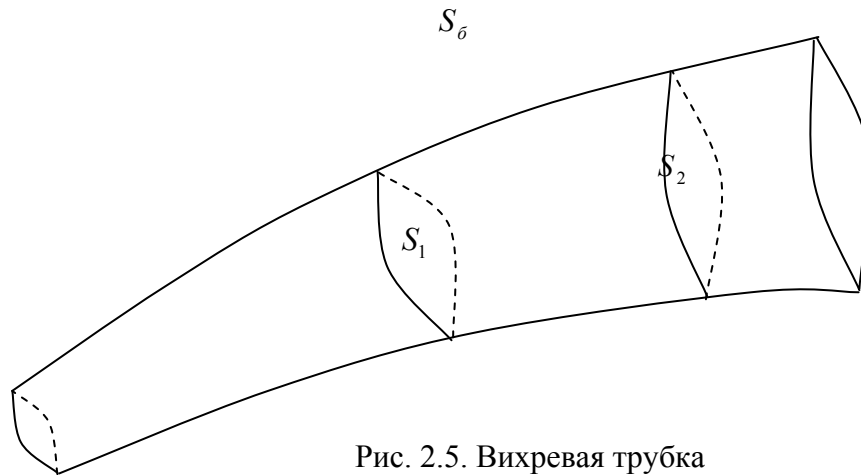


Рис. 2.5. Вихревая трубка

Доказательство. Т.к. поток любого вектора через любую замкнутую поверхность, внутри которой нет особенностей, равен 0, то

$$\int_S \text{rot}_n \vec{V} dS \text{ или } \int_{S_0} \text{rot}_n \vec{V} dS + \int_{S_1} \text{rot}_n \vec{V} dS + \int_{S_2} \text{rot}_n \vec{V} dS = 0.$$

Учитывая, что $\int_{S_0} \text{rot}_n \vec{V} dS = 0$, получаем

$$\int_{S_1} \text{rot}_n \vec{V} dS = \int_{S_2} \text{rot}_n \vec{V} dS = i.$$

С учетом формулы (2.2) можно записать:

$$i = \int_S \text{rot}_n \vec{V} dS = 2 \int_S \omega_n dS . \quad (2.13)$$

Отсюда следует модифицированная форма записи 2-й теоремы Гемгольца:

$$S_1 \omega_{n1} = S_2 \omega_{n2} = S_i \omega_{ni} = \text{Const} . \quad (2.14)$$

Следствия: 1) сечение вихревой трубки не может обращаться в 0, т.к. в этом случае $\omega_{ni} = \infty$, что физически невозможно.

2) вихревые трубки не могут заканчиваться внутри жидкости: они либо замыкаются на себя (вихревые кольца), либо опираются на стенку или свободную поверхность (водяные и воздушные смерчи).

Вязкость играет решающую роль в появлении и затем в исчезновении вихрей.

Теорема Стокса о вихрях. Интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по замкнутому контуру, один раз опоясывающему вихревую трубку.

Доказательство. Определим циркуляцию по бесконечно малому контуру $OCBAO$ (рис.2.6):

$$d\Gamma_{OCBAO} = v dy + \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - u dx = \text{rot}_z \vec{V} dx dy$$

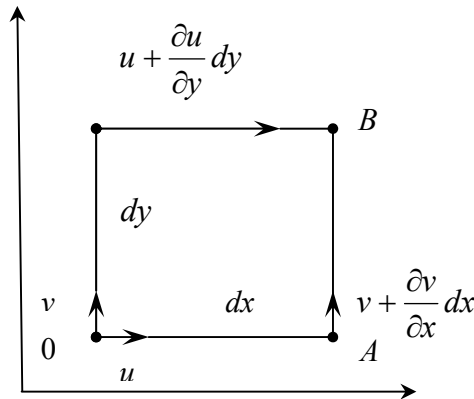


Рис. 2.6. Бесконечно малый контур $OCBAO$

Сделав аналогичные выкладки для площадок остальных проекций, получим для произвольной площадки dS :

$$d\Gamma = \text{rot}_n \vec{V} dS .$$

Для всей площади рассматриваем поверхности:

$$\Gamma = \int_S \text{rot}_n \vec{V} dS = \int_l \vec{V} d\vec{r} \quad (2.15)$$

Анализ соотношения (2.15) позволяет получить еще одну формулировку теоремы Стокса: Поток вихря скорость через любую поверхность, опирающуюся на замкнутый контур, равен циркуляции скорости по этому контуру.

2.3 Основная теорема кинематики

Известно, что скорость любой точки M твердого тела (рис.2.7) определяется геометрической суммой скорости поступательного движения \vec{V}_0 и вращательного $\vec{\omega} \times \vec{r}_0$ вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс 0 :

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_0).$$

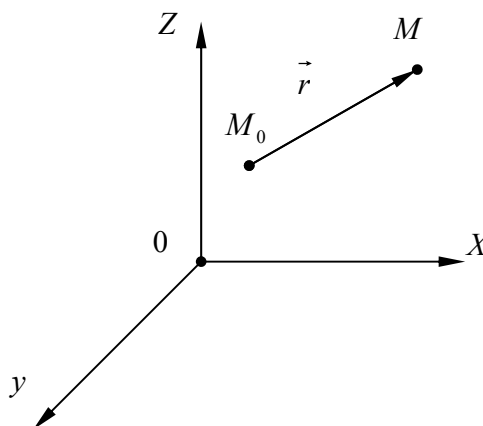


Рис. 2.7. Скорость движения жидкой частицы

Теорема. Скорость движения \vec{V} любой точки жидкой частицы складывается из скорости квазитвердого движения \vec{V}_1 и скорости движения \vec{V}_0 :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_0 \quad (2.17)$$

Доказательство. Скорость в точке M можно представить в виде ряда:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + x_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + y_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + z_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + \dots \\ v &= v_0 + x_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 + y_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 + z_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 + \dots \\ w &= w_0 + x_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 + y_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.18),$$

где u_0, v_0 и w_0 - проекции скорости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$x_1 = x - x_0, y_1 = y - y_0, z_1 = z - z_0.$$

Выполним некоторые простейшие преобразования. Прибавим и вычтем в выражении (2.18) для компоненты скорости u комплекс:

$$0,5 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 z_1 \right]. \text{ Получим:}$$

$$\begin{aligned}
u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 z_1 \\
+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 y_1.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 = \dot{S}_{11}, \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 = \dot{S}_{22}, \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 = \dot{S}_{33}; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 = \dot{S}_{12} = \dot{S}_{21} \\
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 = \dot{S}_{13} = \dot{S}_{31}; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 = \dot{S}_{23} = \dot{S}_{32}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

С учетом обозначений (2.20) уравнение (2.19) примет вид:

$$u = u_0 + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + \left(\dot{S}_{11} x_1 + \dot{S}_{21} y_1 + \dot{S}_{31} z_1 \right). \tag{2.21}$$

Аналогичным образом получаем уравнения для V и W :

$$V = V_0 + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + \left(\dot{S}_{12} x_1 + \dot{S}_{22} y_1 + \dot{S}_{32} z_1 \right); \tag{2.22}$$

$$w = w_0 + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + \left(\dot{S}_{13} x_1 + \dot{S}_{23} y_1 + \dot{S}_{33} z_1 \right). \tag{2.23}$$

Первые два слагаемых в (2.21) - (2.23) представляют собой скорость квазитвердого движения, 3-е - скорость деформации. Введем функцию F , которая описывает скорость деформации:

$$F = 0,5 \left(\dot{S}_{11} x_1^2 + \dot{S}_{22} y_1^2 + \dot{S}_{33} z_1^2 \right) + \dot{S}_{12} x_1 y_1 + \dot{S}_{13} y_1 z_1. \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \dot{S}_{11} x_1 + \dot{S}_{12} z_1; \frac{\partial F}{\partial y_1} = \dot{S}_{21} x_1 + \dot{S}_{22} y_1 + \dot{S}_{23} z_1; \frac{\partial F}{\partial z_1} = \dot{S}_{33} x_1 + \dot{S}_{33} y_1 + \dot{S}_{33} z_1. \tag{2.25}$$

Окончательно для компоненты u получим:

$$u = u_0 + (\omega \times r)_z + \frac{\partial F}{\partial x_1}, \tag{2.26}$$

Или векторном виде:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \mathit{grad} F, \tag{2.27}$$

где $\mathit{grad} F$ - скорость чистой деформации, которая в матричной форме имеет вид:

$$\dot{S} = \begin{vmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} & \dot{S}_{13} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} & \dot{S}_{23} \\ \dot{S}_{31} & \dot{S}_{32} & \dot{S}_{33} \end{vmatrix}; \quad (2.28)$$

$$\dot{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (2.29)$$

где \dot{S} - тензор скорости деформации; \dot{S}_{ij} - компонента тензора скоростей деформации.

Кубическое расширение. Объем U сферической частицы радиуса R через малый промежуток времени dt изменится и станет U_1 . Форма частицы в общем случае превратится в трехосный эллипсоид с полуосями a, b и c :

$$a = R \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right); b = R \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \right); c = R \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} dt \right). \quad (2.30)$$

Относительное изменение радиуса по осям x, y и z :

$$\frac{a - R}{R dt} = \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{S}_{11}; \frac{b - R}{R dt} = \frac{\partial v}{\partial y} = \dot{S}_{22}; \frac{c - R}{R dt} = \frac{\partial w}{\partial z} = \dot{S}_{33}. \quad (2.31)$$

Найдем относительное изменение U в единицу времени:

$$\frac{U_1 - U}{U dt} = \frac{\frac{4}{3} \pi a b c v - \frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi R^3 dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{V}. \quad (2.32)$$

Т.о. диагональные элементы тензора \dot{S} характеризуют скорость относительного изменения длины отрезка, а их сумма - объема жидкости.

Скорость деформации сдвига. В некоторый момент времени жидкая частица в плоскости xu имела форму квадрата $OCBA$ (рис. 2.8) со сторонами dx и dy . Через единицу времени он принимает форму параллелограмма $O'C'B'A'$ (рис. 2.8). Это связано с различием скорости в его вершинах. Углы сдвига между осью y и стороной $O'C'$ $\gamma_1 = \text{tg} \gamma_1 = \partial u / \partial y$ и между осью x и стороной $O'A'$ $\gamma_2 \approx \text{tg} \gamma_2 = \partial v / \partial x$.

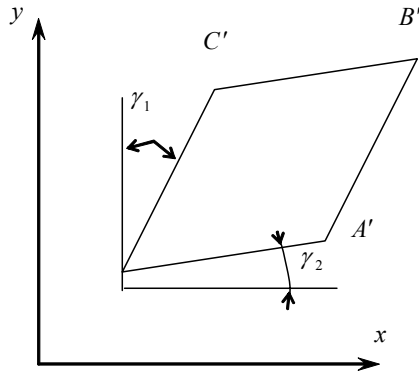


Рис. 2.8. Схема деформации жидкой частицы

Тогда изменение прямого угла за единицу времени $\gamma = 0,5(\gamma_1 + \gamma_2)$ - скорость изменения угла COA , т.е.:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \dot{S}_{12}, \quad (2.33)$$

где γ - скорость деформации скоса угла или сдвига. Аналогично показывается скорость деформации скоса \dot{S}_{23} и \dot{S}_{13} в плоскости yz и xz соответственно.

3 ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

3.1 Пограничный слой и его характерные толщины

Наибольшее распространение на практике получило движение жидкости при больших числах Рейнольдса Re . Из опыта известно, что жидкость, обладающая вязкостью, прилипает к поверхности тела, т. е. скорость на поверхности неподвижного тела равна нулю. Если бы жидкость не обладала вязкостью, то поток скользил бы по поверхности тела. Поэтому сколь бы ни мала была вязкость жидкости, она будет оказывать существенное влияние на течение непосредственно у поверхности. Можно ожидать, что при $Re \gg 1$ влияние трения будет ощущаться только в тонком слое возле поверхности тела, который получил название динамического пограничного слоя II (рис. 3.1) с толщиной δ .

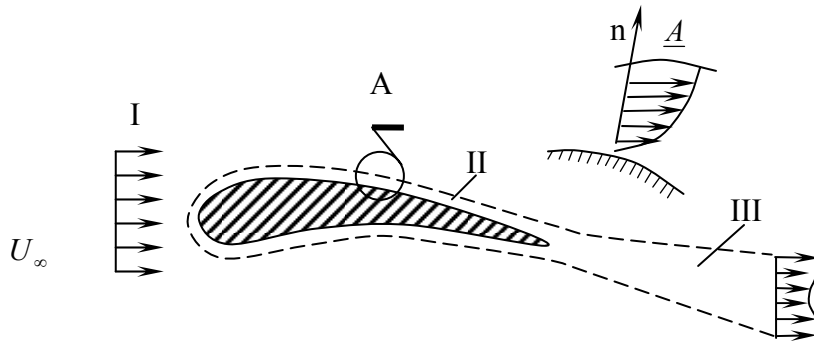


Рис. 3.1. Схема обтекания крылового профиля потоком вязкой жидкости при большом числе Re .

Скорости внутри пограничного слоя (ПС) монотонно увеличиваются от нуля на стенке до значения на границе слоя U_∞ (рис. 3.1, А). Подторможенные в ПС частицы жидкости сбегают с обтекаемого тела и образуют след за обтекаемым телом III. В области I вне ПС и следа влиянием вязкости можно пренебречь и рассматривать потенциальное течение.

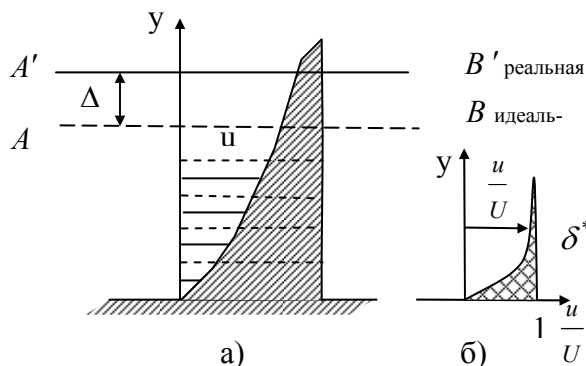


Рис. 3.2. Схема определения толщины вытеснения

По аналогии с полем скоростей рассматриваются поля температур T и концентраций вещества C при наличии диффузии. Если концентрация (или температура) на поверхности обтекаемого тела отлична от концентрации (или температуры) в потоке во все время движения, то при больших значениях диффузионного числа Re_δ (или теплового числа Re_T) установится диффузионный пограничный слой с толщи-

ной δ_θ (или тепловой пограничный слой с толщиной δ_T).

При обтекании тела могут существовать одновременно все три ПС, скорости внутри которого монотонно увеличиваются (рис. 3.1, А), а температура и концентрация могут либо расти, либо убывать. За толщину ПС принимается такое значение координаты y , при котором u , T и C отличаются от соответствующей величины вне слоя на 1 - 2%.

Выясним физический смысл некоторых характерных толщин пограничного слоя.

Толщина вытеснения. Определим величину смещения Δ линий тока за счет влияния вязкости, имея в виду, что линии тока являются линиями равных расходов: AB - для идеальной жидкости, $A'B'$ - для реальной (рис. 3.2, а). Тогда из условия равенства расходов $Q_{u\delta} = Q_p$ или:

$$U(y - \Delta) = \int_0^y u dy,$$

имеем

$$\Delta = \int_0^y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (3.1)$$

А максимальное смещение Δ_{\max} называется толщиной вытеснения δ^* и определяется при $y = \delta$:

$$\Delta_{\max} = \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (3.2)$$

На рис. 3.2, б толщина вытеснения показана в виде заштрихованной площадки.

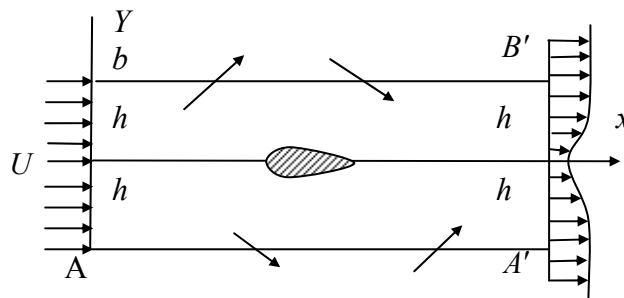


Рис. 3.3. Схема определения толщины потери импульса

Толщина потери импульса. Рассмотрим динамическое влияние вязкости на обтекание тела (рис. 3.3). Из-за наличия вязкости появится сила сопротивления X , определяемая из теоремы импульсов применительно к некоторому контуру:

$$X = \rho U \int_{-h}^{+h} u dy - \rho \int_{-h}^h u^2 dy + q' \quad (3.3)$$

(1) (2) (3)

где (1) - количество движения через AB ; (2) - через $A'B'$; (3) - BB' и AA' .
 При $h \rightarrow \infty$ $q' \rightarrow 0$, тогда из (3.3) следует:

$$X = \rho U \int_{-\infty}^{+\infty} u \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (3.4)$$

Коэффициент сопротивления будет равен

$$C_x = \frac{X}{\rho \frac{U^2}{2} b} = \frac{2}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{2\delta_{\infty}^{**}}{b}, \quad (3.5)$$

где

$$\delta_{\infty}^{**} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (3.6)$$

- толщина потери импульса, характеризующая динамическое влияние вязкости. В ПС формула (3.6) принимает вид:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (3.7)$$

3.2 Уравнения динамического, теплового и диффузионного пограничного слоя

Уравнения ламинарного ПС можно получить при $Re \gg 1$ из уравнений движения оценкой порядка величины слагаемых. При этом прежде всего учитывается, что поперечные размеры в ПС значительно меньше продольных ($\delta \ll l$, где l - длина крыла или характерный продольный размер обтекаемого тела). В таком же соотношении находятся поперечная u и продольная v составляющие скорости.

Из равенства порядков сил инерции и вязкости имеем:

$$\frac{\mu U}{\delta^2} : \frac{\rho U^2}{l} \sim 1$$

откуда

$$\frac{\delta^2}{l^2} \sim \frac{\nu}{Ul} = \frac{1}{Re}$$

или

$$\bar{\delta} = \delta/l = 1/\sqrt{Re}. \quad (3.8)$$

Т. о., установлено, что безразмерная толщина ПС $\bar{\delta}$ обратно пропорциональна корню квадратному из числа Re.

Представим уравнения Навье-Стокса для плоского стационарного движения реальной несжимаемой жидкости в безразмерном виде:

$$u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{Vl}{U\delta} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{p_0}{\rho U^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\nu}{Ul} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\nu l}{U\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}; \quad (3.9)$$

$$u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{Vl}{U\delta} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{p_0}{\rho U} \frac{l}{\delta V} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\nu}{Ul} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\nu l}{U\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}; \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{Vl}{U\delta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

где $x = \bar{x}l; y = \bar{y}\delta; u = \bar{u}U; v = \bar{v}V; p = \bar{p}p_0; l, \delta, U, V, p_0$ - характерные масштабы.

Из уравнения (3.11) получаем еще одно важное соотношение:

$$\frac{V}{U} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (3.12)$$

Оценивая порядок величин слагаемых уравнения (3.9) и учитывая, что $p_0 \sim \rho U^2$ и $\text{Re} \rightarrow \infty$, получим

$$u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.10) при этом сведется ко второму важному соотношению в теории ПС:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (3.14)$$

т.е. давление внутри ПС не меняется по нормали к стенке.

Из уравнения Бернулли для потока вне ПС имеем соотношение (в размерном виде):

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}, \quad (3.15)$$

где U - скорость на границе ПС.

Тогда уравнения ПС в размерном виде с учетом (3.15) запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Уравнения (3.16) называют уравнениями ПС Прандтля.
Граничные условия:

$$y = 0 : u = v = 0; y = \delta : u = U(x). \quad (3.17)$$

В отличие от уравнений Навье-Стокса уравнения ПС (3.16) представляют систему 2-х уравнений с 2-мя неизвестными u и v (3.16), а давление p или скорость на внешней границе слоя U предполагаются заданными.

Воспользуемся уравнением стационарной конвективной теплопроводности:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.18)$$

Вводя в уравнение (3.18) безразмерные величины, получим:

$$u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{v}{U\delta} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{a}{Ul} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{a}{U\delta} \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2}, \quad (3.19)$$

где $T = \bar{T} \cdot T_0$; T_0 - масштаб температуры.

Учитывая, что

$$\frac{v}{U\delta} \sim 1; \frac{a}{Ul} \sim \frac{1}{\text{Re}_T} \sim \frac{1}{\text{Pr Re}}; \frac{a}{U\delta} \cdot \frac{l^2}{\delta^2} = \frac{\text{Re}}{\text{Re}_T} = \frac{1}{\text{Pr}};$$

$$\text{Pr} \sim 1; \text{Re} \gg 1,$$

уравнение (3.19) после оценки порядков его слагаемых принимает вид:

$$u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2}. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) представляет собой уравнение теплового ПС в безразмерном виде, которое в размерном виде запишется следующим образом:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.21)$$

Воспользуемся уравнением стационарной конвективной диффузии:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right). \quad (3.22)$$

Представим (3.22) в безразмерной форме

$$u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{Vl}{U\delta} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{D}{Ul} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{D}{U\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2},$$

где $C = \bar{C} \cdot C_0$, C_0 - масштаб концентрации.

При оценке порядка слагаемых последнего уравнения следует иметь в виду, что

$$\frac{D}{Ul} = \frac{1}{\text{Re}_0} = \frac{1}{\text{RePr}_0} \rightarrow 0; \quad \frac{Dl}{U\delta^2} = \frac{D}{Vl} \cdot \frac{l^2}{\delta^2} = \frac{\text{Re}}{\text{Re}_0} = \frac{1}{\text{Pr}_0} = \frac{1}{\text{Sm}}, \quad \frac{Vl}{U\delta} \sim 1,$$

где $\text{Sm} = \frac{v}{D}$ - число Шмидта.

Поэтому уравнение диффузионного ПС запишется так

$$u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Sm}} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} \quad (3.23)$$

или в размерном виде:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (3.24)$$

3.3 Интегральные соотношения для динамического, теплового и диффузионного пограничного слоя

В этом разделе будет получено интегральное соотношение, позволяющее приближенно решать задачу о пограничном слое при заданной форме профиля скорости в нем.

Преобразуем уравнения Прандтля (3.16) следующим образом:

$$\frac{\partial(Uu)}{\partial x} - u \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial(Uv)}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uV)}{\partial y} = UU' + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.26)$$

Вычтя уравнение (3.26) из (3.25) и интегрируя эту разность по y от 0 до δ , получим:

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + v(U-u) \Big|_0^\delta + U' \int_0^\delta (U-u) dy = -v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^\delta.$$

Меняя порядок операций интегрирования и дифференцирования в первом слагаемом последнего уравнения, также учитывая граничные условия на стенке

$$y = 0 : v = 0; \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w$$

и на границе ПС

$$y = \delta : u = U; \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

и после элементарных преобразований, имеем:

$$\frac{d}{dx} U^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + UU' \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (3.27)$$

Принимая во внимание соотношения (3.2) и (3.7), окончательно уравнение (3.27) можно записать так

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta^{**}) + UU' \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad (3.28)$$

или

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}, \quad (3.29)$$

которое представляет собой интегральное соотношение для динамического ПС.

Преобразуем уравнение теплового ПС (3.21) и уравнение неразрывности к виду:

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial(uT_{\infty})}{\partial x} + \frac{\partial(vT_{\infty})}{\partial y} = 0. \quad (3.31)$$

Вычтем из уравнения (3.31) уравнение (3.30) и затем проинтегрируем от 0 до толщины теплового ПС δ_T с учетом граничных условий:

$$y = \delta_T : T = T_{\infty}; \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$y = 0 : v = 0$$

После преобразований получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} u (T_{\infty} - T) dy = a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Разделив последнее уравнение на $U_{\infty} T_{\infty}$, имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{T}{T_{\infty}}\right) dy = \frac{a}{U_{\infty} T_{\infty}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.32)$$

Введем величину δ_T^{**} по аналогии с толщиной потери импульса δ^{**} :

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{T}{T_\infty} \right) dy. \quad (3.33)$$

Тогда уравнение (3.33) примет вид:

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} = \frac{a}{U_\infty T_\infty} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.34)$$

и представляет собой интегральное соотношение для теплового ПС. Если ввести температуру поверхности T_{CT}

$$T_\infty - T = (T_\infty - T_{CT}) - (T - T_{CT}) = \theta_1 - \theta,$$

то уравнение (3.34) запишется так

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} = \frac{a}{\theta_1 U_\infty} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3.35)$$

где $\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_1} \right) dy.$

Уравнения теплового ПС (3.21) и диффузионного (3.24) также как и их граничные условия по форме одинаковы, уравнение неразрывности является общим. Поэтому заменяя тепловые величины на соответствующие диффузионные, можно получить интегральное соотношение для диффузионного ПС:

$$\frac{d\delta_\delta^{**}}{dx} = \frac{D}{U_\infty \theta_{1\delta}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3.36)$$

где $\delta_\delta^{**} = \int_0^{\delta_\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{\theta_\delta}{\theta_{1\delta}} \right) dy$; $\theta_\delta = C - C_{CT}$; $\theta_{1\delta} = C_\infty - C_{CT}$; C_{CT} и C_∞ - концентрация вещества на стенке и на границе слоя соответственно.

4 ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

4.1 Структура и профили скоростей турбулентного пограничного слоя

На основании результатов экспериментальных исследований получено следующее приближенное представление о кинематической структуре течения в пристенном турбулентном ПС.

Условно всю толщину ПС можно разделить на две области: внутреннюю и внешнюю. В свою очередь каждая область делится на две подобласти: собственно турбулентных движений (внутренняя и внешняя) и нетурбулентные; внутри вязкий подслой и вне - подслой перемежаемости.

По структуре слой можно разделить на три области: турбулентное ядро (внутреннее и внешнее), подслой и надслой. Резких границ между областями не существует.

В непосредственной близости к стенке существует вязкий подслой, в котором течение хотя и не является чисто ламинарным в силу проникновения в него отдельных вихрей, но распределение скоростей подчиняется линейному закону:

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y = V_*^2 \frac{y}{\nu} \text{ или } \phi = \frac{u}{V_*} = \text{Re}_* \quad (4.1)$$

Не существует резкой границы между вязким подслоем и турбулентной частью течения: между ними имеется промежуточный или буферный участок. Вязкий подслой составляет ~1% от всего турбулентного ПС, являясь самой тонкой его составляющей. В нем процессы переноса определяются коэффициентами молекулярного переноса ν, λ и D , а на буферном участке коэффициенты молекулярного и турбулентного переносов соизмеримы: $\nu \sim \nu_T, \lambda \sim \lambda_T$ и $D \sim D_T$.

Внутренняя турбулентная область составляет ~20% от толщины слоя, в ней порождается главная часть его пульсационной энергии (75-80%). Т. е. в пристенном ПС турбулентность генерируется в основном вблизи стенки в области гораздо более узкой, чем вся толщина ПС. Степень интенсивности турбулентности здесь также максимальна и достигает десятков процентов. Профиль в этой части области строго логарифмический (рис. 4.1)

$$\phi = \frac{u}{V_*} = A \ln \frac{V_* y}{\nu} + B, \quad (4.2)$$

где: $A = 2,4$ и $B = 4,9$.

Внешняя турбулентная область характеризуется относительно небольшой генерацией турбулентных пульсаций, степень интенсивности турбулентности здесь снижается до нескольких единиц процентов. Распределение скоростей отклоняется от логарифмического (рис. 4.1), о чем свидетельствует несовпадение экспериментальных и расчетных данных. Область надслоя перемежаемости характерна явлениями нестационарности и перемежаемости,

обусловленной периодическим проникновением в него малотурбулизированных масс из внешнего потока и восстановлением степени турбулентности. Толщина надслоя составляет ~35% толщины всего слоя, степень интенсивности турбулентности ~2-3%.

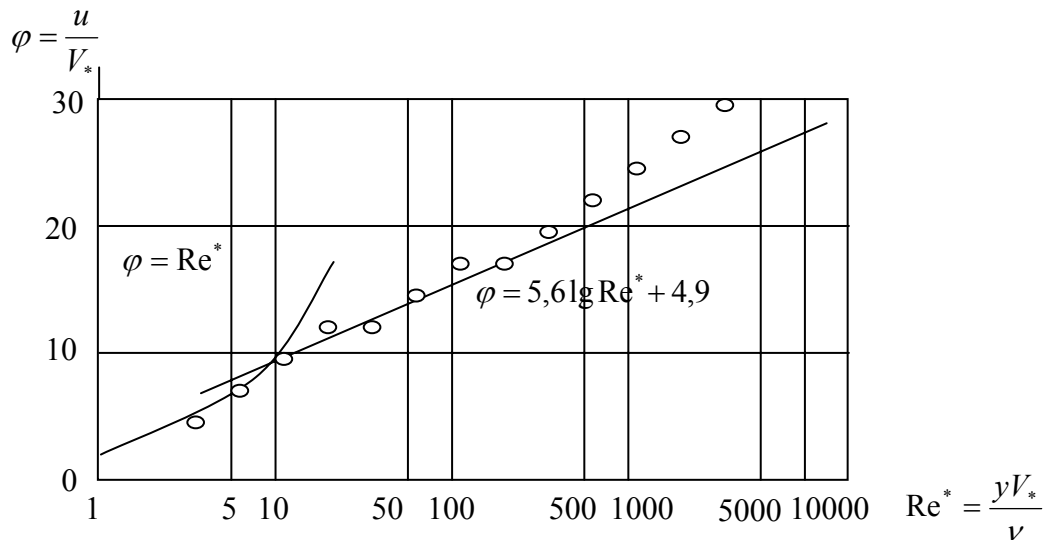


Рис. 4.1. Изменение скорости внутри турбулентного ПС в зависимости от Re^*

Для корректировки логарифмического профиля скорости (4.2) во внешней области предложено вводить некоторую поправку:

$$\phi_P = \frac{\Pi}{\kappa} W\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

где: Π - параметр профиля; $W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$ - универсальная функция следа.

Т.о. структура турбулентного ПС значительно более сложная, чем ламинарного ПС. Поэтому при построении методов расчета турбулентного ПС вынуждены прибегать к схематизации и эмпирическим соотношениям.

Уравнения турбулентного ПС. При выводе уравнений турбулентного ПС, как и ламинарного, исходят из допущения о возможности пренебречь в уравнениях движения членами, малость которых обусловлена малостью его толщины. После такой оценки уравнения Рейнольдса примут вид:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u'v'}), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

Т.к. во внешнем потоке справедливо уравнение Бернулли:

$$p + \rho \frac{U^2}{2} = const ,$$

то из уравнения (4.3) можно исключить давление p . Тогда уравнение (4.3) заменится следующим:

$$u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} , \quad (4.5)$$

где $\tau = \tau_w + \tau_T = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$ - вязкие и турбулентные напряжения.

Т.о. уравнения (4.4) и (4.5) представляют собой уравнения турбулентного ПС.

Интегральные соотношения или уравнение импульсов для турбулентного ПС получается так же, как это было сделано для ламинарного ПС:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \delta^{**} \left(2 + \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \right) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} , \quad (4.6)$$

где τ_w - напряжение трения на стенке; $\frac{\delta^*}{\delta^{**}} = H$ - формпараметр.

4.2 Турбулентный пограничный слой на пластине

Считаем, что ламинарный участок ПС вблизи переднего края пластины пренебрежимо малый. Для внешнего потока имеем условия: $U = const, U' = 0$. Поэтому интегральное соотношение (4.6) имеет вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} . \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) содержит две неизвестных функции $\delta^{**}(x)$ и τ_w . Недостающее уравнение получается на основе экспериментальной связи между касательным напряжением τ_w и толщиной потери импульса δ^{**} , представляющей собой степенной закон сопротивления:

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0,00655 \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/6} . \quad (4.8)$$

После подстановки (4.8) в уравнение (4.7), имеем:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = 0,00655 \left(\frac{U \delta^{**}}{\nu} \right)^{-1/6} .$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\frac{6}{7}(\delta^{**})^{7/6} = 0,00655 \left(\frac{U}{\nu}\right)^{-1/6} x + C. \quad (4.9)$$

Используя граничное условие: $\delta^{**}|_{x=0} = 0$, получаем $C = 0$. Тогда уравнение (4.9) приводится к виду:

$$\delta^{**}/x = 0,0153 \text{Re}_x^{-1/7}. \quad (4.10)$$

Т.о. δ^{**} в турбулентном ПС, а значит и другие условные толщины (δ^* и δ) возрастают пропорционально $x^{6/7}$, тогда как для ламинарного ПС они пропорциональны \sqrt{x} . Т.е. δ турбулентного ПС нарастает быстрее, чем δ ламинарного ПС.

Местный коэффициент сопротивления трения равен:

$$c_x = 0,0263 \text{Re}_x^{-1/7}, \quad (4.11)$$

касательное напряжение с учетом (4.8):

$$\tau_w = 0,01315 U^{14/7} \text{Re}_x^{-1/7}, \quad (4.12)$$

полное сопротивление пластины:

$$X = 0,0307 \rho \nu^{1/7} l^{6/7} U^{13/7}, \quad (4.13)$$

и полный коэффициент сопротивления трения:

$$C_x = 0,0307 \text{Re}^{-1/7}. \quad (4.14)$$

Следует отметить, что использованная форма связи между τ_w и δ^{**} , соответствует степенному распределению скорости в ПС:

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n,$$

при $n = 1/11$.

Анализ полученных формул при одном и том же числе Рейнольдса ($\text{Re} = 10^6$) показывает, что при турбулентном режиме течения коэффициент сопротивления в 3 раза больше, чем при ламинарном. Поэтому стремятся сохранить ламинарный режим ПС на поверхности обтекаемых тел и предотвратить или затян timer его переход в турбулентный.

4.3 Профильное сопротивление

Профильное сопротивление крыла представляет собой сумму сопротивления трения и сопротивления давлений.

Все силы, приложенные к элементам поверхности крыла со стороны набегающего потока, подразделяются на касательные и нормальные. Проекцию главного вектора касательных сил на направление потока на бесконечности называют сопротивлением трения. Нормальные силы давления потока на поверхность крыла образуют главный вектор сил давлений, проекция которого на направление потока на бесконечности называется сопротивлением давлений.

Профильное сопротивление крыла или тела вращения может быть определено по формуле:

$$c_{xp} = \frac{X}{\rho \frac{U^2}{2} b} = \frac{2}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{2\delta_{\infty}^{**}}{b}, \quad (4.15)$$

где b - хорда крылового профиля. Однако воспользоваться формулой (4.15) невозможно, т.к. нельзя определить δ_{∞}^{**} на бесконечности. Поэтому привлекаются методы определения δ_{∞}^{**} через параметры потока на задней кромке обтекаемого тела.

Применим интегральное соотношение ПС (4.6) к следу за обтекаемым телом. Учтя, что $\tau_w = 0$ в виду отсутствия стенки, получим:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{2}{U} U' \delta^{**} + \frac{U'}{U} \delta^* = 0. \quad (4.16)$$

Проинтегрировав (4.16) от задней кромки до ∞ , после деления на δ^{**} имеем

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_k^{**}} - \ln \frac{U_k^2}{U_{\infty}^2} + \int_{x_k}^{\infty} \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \frac{U'}{U} dx = 0. \quad (4.17)$$

Экспериментом установлено, что $H(x) = \delta^* / \delta^{**}$ зависит от формы профиля и его обтекания:

$$H_{cp} = 0,5(H_k + H_{\infty}).$$

После подстановки последнего выражения в уравнение (4.17) получим:

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_k^{**}} - \ln \frac{U_k^2}{U_{\infty}^2} + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty}) \ln \frac{U_{\infty}}{U_k} = 0,$$

или

$$\ln \frac{\delta_{\infty}^{**}}{\delta_k^{**}} = \ln \left(\frac{U_k}{U_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty})},$$

или

$$\delta_{\infty}^{**} = \delta_k^{**} \left(\frac{U_k}{U_{\infty}} \right)^{2 + \frac{1}{2}(H_k + H_{\infty})} \quad (4.18)$$

На ∞ поле скоростей выравнивается и $U - u = u_1$ будет малой величиной, поэтому пренебрегая квадратом u_1 в формуле для толщины потери импульса на бесконечности, получим:

$$\delta_{\infty}^{**} = \delta_{\infty}^*,$$

т.е. $H_{\infty} \cong 1$. Значение H_k на задней кромке берут $H_k = 1,4$. Поэтому выражение (4.18) запишется следующим образом:

$$\delta_{\infty}^{**} = \delta_k^{**} \left(\frac{U_k}{U_{\infty}} \right)^{3,2}. \quad (4.19)$$

Подставляя (4.12) в формулу (4.15), получим окончательное выражение определения профильного сопротивления:

$$C_{xp} = 2 \left(\frac{U_k}{U_{\infty}} \right)^{3,2} \frac{\delta_k^{**}}{b}. \quad (4.20)$$

Формула (4.20) неплохо себя зарекомендовала при нахождении профильного сопротивления для широкого класса обтекаемых профилей.

4.4 Затопленные турбулентные струи

Круглая и плоская затопленная струя

В технике встречаются потоки, относящиеся к области свободной турбулентности, характерной особенностью которой является отсутствие стенок, ограничивающих течение жидкости. К свободной турбулентности относят три вида потоков:

- 1) два взаимодействующих потока, движущихся с различными скоростями;
- 2) след за неподвижным телом, обтекаемым потоком, или спутное течение за движущимся телом;
- 3) затопленная струя (рис. 4.2).

Все три течения обладают свойствами ПС: линейные размеры поперечных сечений потоков малы по сравнению с продольными, скорость поперек потока изменяется более интенсивно, чем вдоль него. Поэтому для описания потоков со свободной турбулентностью можно воспользоваться дифферен-

циальными уравнениями ПС (4.4) и (4.5), которые с учетом постоянства давления во всей области потока примут вид:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (4.22)$$

В настоящем параграфе остановимся лишь на рассмотрении третьего типа свободной турбулентности - затопленных струй [1, 3]. В некоторых технических задачах, например, при проектировании устройств струйной гидропневмоавтоматики, приходится встречаться с турбулентными затопленными струями, образующимися при истечениях жидкости из отверстий и сопел в среду тех же физических свойств, что и струя.

Предполагается, что в выходном сечении струи величина и направление скорости постоянные по всему сечению (рис. 4.2). По потоку ядро струи с постоянной скоростью убывает, с краев образуется область заторможенной жидкости, которую называют ПС струи. Участок от выходного сечения до окончания ядра струи называется начальным участком. Далее идет основной участок, в котором область постоянных скоростей отсутствует и ПС занимает все поперечное сечение. На основном участке скорость на оси струи убывает, а сама струя с ростом продольной координаты x расширяется.

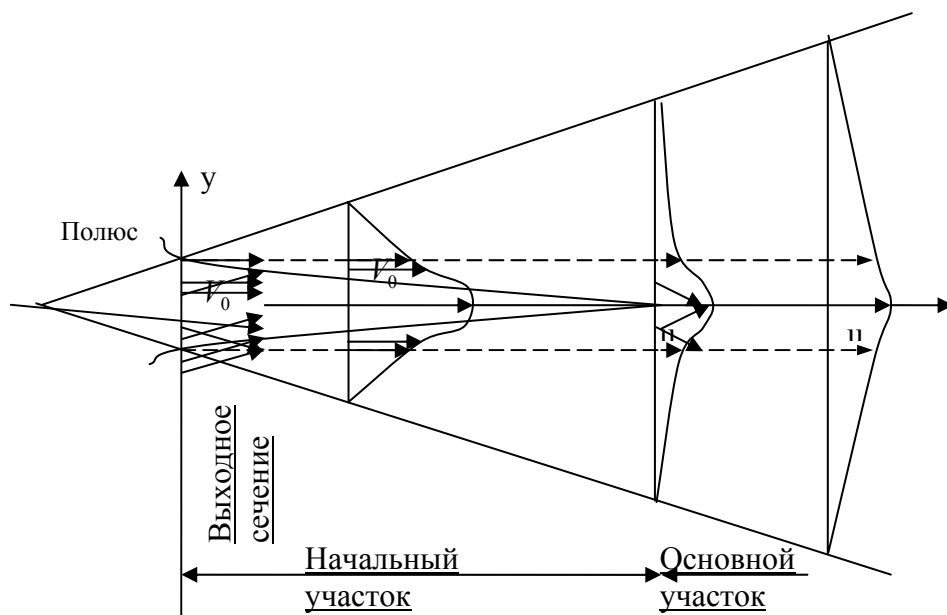


Рис. 4.2. Схема затопленной струи

Интерес вызывают безразмерные профили скоростей на основном участке турбулентной струи в следующей системе координат: на оси ординат отложены продольные скорости, отнесенные к осевой скорости (u/u_m),

а по оси абсцисс расстояние от оси, отнесенное к расстоянию до точки, в которой скорость равна половине максимальной ($y/y_{0,5,u_m}$). Результаты построения показывают, что в таких безразмерных координатах все профили скоростей совпадают, т. е. выполняется полное подобие безразмерных профилей на основном участке как плоской, так и круглой струи. Универсальность безразмерных профилей можно представить следующим образом:

$$\frac{u}{u_m} = \phi\left(\frac{y}{b}\right) \text{ и } \frac{u}{u_m} = \phi_1\left(\frac{y}{r_r}\right), \quad (4.23)$$

где b - ширина плоской струи; r_r - радиус границы круглой струи.

Установлено, что граница струи - линейная функция от x :

$$b = ax \text{ и } r_r = a_1x,$$

где x - расстояние от полюса струи, образованного пересечением продолжения границ струи (рис.4.2). Поэтому выражения (4.23) могут быть представлены так:

$$\frac{u}{u_m} = j\left(\frac{y}{x}\right) \text{ и } \frac{u}{u_m} = f_1\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.24)$$

Найдем зависимость максимальной скорости на оси круглой и плоской струи, используя условие постоянства количества движения вдоль струи:

$$\int_s \rho u^2 ds = const. \quad (4.25)$$

Для осесимметричной струи последнее равенство имеет вид:

$$2\pi \int_0^{r_r} \rho u^2 r dr = \pi r_0^2 \rho_0 u_0^2, \quad (4.26)$$

а для плоской -

$$\int_0^b \rho u^2 dy = \rho_0 u_0^2 b_0, \quad (4.27)$$

где индекс "0" соответствует величинам в начальном сечении.

Равенства (4.26) и (4.27) можно представить в безразмерной форме:

$$2 \int_0^{\frac{r_r}{r_0}} \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 \left(\frac{r}{r_0}\right) d\left(\frac{r}{r_0}\right) = 1; \int_0^{\frac{b}{b_0}} \left(\frac{u}{u_0}\right)^2 d\left(\frac{y}{b}\right). \quad (4.28)$$

Выполним следующие преобразования:

$$\frac{r}{r_0} = \frac{r}{r_r} \frac{r_r}{r_0}, \frac{u}{u_0} = \frac{u}{u_m} \frac{u_m}{u_0}, \frac{y}{b_0} = \frac{y}{b} \frac{b}{b_0}.$$

Интегралы (4.28) примут вид:

$$2 \left(\frac{u_m}{u_0} \right)^2 \left(\frac{r_\Gamma}{r_0} \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 \frac{r}{r_\Gamma} d \left(\frac{r}{r_\Gamma} \right) = 1; \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{u_m}{u_0} \right)^2 \frac{b}{b_0} \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 d \left(\frac{y}{b} \right) = 1. \quad (4.30)$$

Или последние интегралы можно переписать так:

$$2 \left(\frac{u_m}{u_0} \right)^2 \left(\frac{r_\Gamma}{r_0} \right)^2 0,00464 = 1; \quad (4.31)$$

$$\left(\frac{u_m}{u_0} \right)^2 \frac{b}{b_0} 1,65 = 1. \quad (4.32)$$

Тогда величина максимальной скорости на оси круглой струи:

$$u_m = \frac{const}{r_\Gamma} \sim \frac{const}{x} \quad (4.33)$$

и на оси плоской струи

$$u_m = \frac{const}{\sqrt{b}} \sim \frac{const}{\sqrt{x}}. \quad (4.34)$$

Сопоставление формул (4.33) и (4.34) показывает, что скорость на оси круглой струи затухает быстрее, чем на оси плоской.

Осесимметричные струи. Такие струи широко распространены в технике. Из равенства (4.31) имеем:

$$\frac{r_\Gamma}{r_0} = 3,3 \frac{u_0}{u_m}. \quad (4.35)$$

В переходном сечении, где заканчивается ядро струи, $u_0 = u_m$ и безразмерный радиус в этом сечении всегда равен:

$$r_r/r_0 = 3,3. \quad (4.36)$$

Определим объемный расход:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_r} u r dr = 2\pi u_m r_r^2 \int_0^1 \frac{u}{u_m} \eta d\eta = 2\pi r_0^2 u_0 \frac{u_m}{u_0} \left(\frac{r_\Gamma}{r_0} \right)^2 \int_0^1 \frac{u}{u_m} \eta d\eta,$$

где $\eta = r/r_r$.

С учетом равенства (4.35) получаем величину безразмерного расхода жидкости:

$$\bar{Q} = Q/Q_0 = 2,13 u_0/u_m, \quad (4.37)$$

где $Q_0 = \pi r^2 u_0$ - расход в начальном сечении.

Для переходного сечения, где $u_0 = u_m$

$$\bar{Q}_\Pi = Q_\Pi/Q_0 = 2,13. \quad (4.38)$$

Т.о. для переходного сечения не только граница струи, но и безразмерная величина расхода имеет постоянное значение.

В технике также часто встречаются струи, температура которых T отличается от температуры окружающей среды T_H . Струи, T которых выше T_H (например, ракетные двигатели), называются горячими и распространяются в более плотную среду. Струи, для которых $T < T_H$, называют холодными и распространяются в менее плотной среде. Поэтому скорость у горячих струй должна убывать быстрее, чем у холодных.

Необходимо отметить, что для таких струй соблюдаются два условия сохранения: количества движения (4.25) и избыточного теплосодержания.

Введем обозначения:

$$\Delta T = T - T_H, \Delta T_m = T_m - T_H, \Delta T_0 = T_0 - T_H,$$

где T_0, T_m - температура в начальном сечении и на оси струи соответственно.

Тогда условие равенства избыточного теплосодержания массы жидкости в любом и начальном сечениях запишется так:

$$2\pi \int_0^{r_r} \rho u \Delta T r dr = \pi \rho_0 u_0 \Delta T_0 r_0^2. \quad (4.39)$$

Для струи справедлив закон Гей-Люссака при $p = const$:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T}. \quad (4.40)$$

Заменив ρ/ρ_0 на T_0/T в соотношениях (4.26) и (4.39), получим:

$$2 \int_0^{\bar{r}_r} \frac{T_0}{T} \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 \frac{r}{r_0} d \left(\frac{r}{r_0} \right) = 1; \quad 2 \int_0^{\bar{r}_r} \frac{T_0}{T} \frac{u}{u_0} \frac{\Delta T}{\Delta T_0} \frac{r}{r_0} d \left(\frac{r}{r_0} \right) = 1, \quad (4.41)$$

где $\bar{r} = r_r / r_0$.

Сделаем следующие замены:

$$\frac{r}{r_0} = \bar{r}_r \frac{r}{r_r} \quad \text{и} \quad \frac{u}{u_0} = \frac{u}{u_m} \frac{u_m}{u_0};$$

$$\frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{T_H + \Delta T} = \frac{T_0}{T_H} \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T_H}} = \theta \frac{1}{1 + (\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \frac{\Delta T}{\Delta T_m}};$$

$$\frac{\Delta T}{T_H} = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \frac{\Delta T_0}{T_H}; \quad \frac{\Delta T_0}{T_H} = \theta - 1$$

где $\theta = T_0 / T_H$.

Тогда условия (4.41) примут вид:

$$2\theta \left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 (\bar{r}_r)^2 \int_0^1 \frac{\left(\frac{u}{u_m}\right)^2 \eta d\eta}{1 + (\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \frac{\Delta T}{\Delta T_m}} = 1. \quad (4.42)$$

$$2\theta \frac{u_m}{u_0} \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} (\bar{r}_r)^2 \int_0^1 \frac{\frac{u}{u_m} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \eta d\eta}{1 + (\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \frac{\Delta T}{\Delta T_m}} = 1. \quad (4.43)$$

Интегралы (4.42) и (4.43) можно определить для 2-х предельных случаев: 1) струя подогрета слабо; 2) для бесконечно сильного подогрева.

В первом случае $T_0 \sim T_H$ и $\theta = 1$, поэтому знаменатели в (4.42) и (4.43) равны единице. Во втором случае $T_0 \gg T_H$ $\theta \rightarrow \infty$, поэтому в знаменателях можно пренебречь единицей.

Для решения уравнений (4.42) и (4.43) делаются следующие предположения:

$$\text{а) } \frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \sqrt{\frac{u}{u_m}} \text{ и } \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = 0,32 \frac{u_m}{u_0}; \quad (4.44)$$

б) угол раскрытия струи не зависит от степени нагрева

$$\bar{r}_r = 3,4 \frac{ax}{r_0}. \quad (4.45)$$

С учетом предположений (4.44) и (4.45) получаем зависимости:

$$\frac{ax}{r_0} = \frac{0,71}{\sqrt{\theta}} \frac{\Delta T_0}{\Delta T_m} \sqrt{1 + 0,72(\theta - 1) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}}; \quad (4.46)$$

$$\frac{ax}{r_0} = \frac{0,975}{\sqrt{\theta}} \frac{u_0}{u_m} \sqrt{1 + 0,526(\theta - 1) \frac{u_m}{u_0}}.$$

Видно, что при охлаждении струи осевая скорость (рис. 4.3,а) и температура (рис. 4.3, б) увеличиваются и начальный участок ($u_m = u_0, \Delta T_m = \Delta T_0$) растет, а при нагревании наоборот.

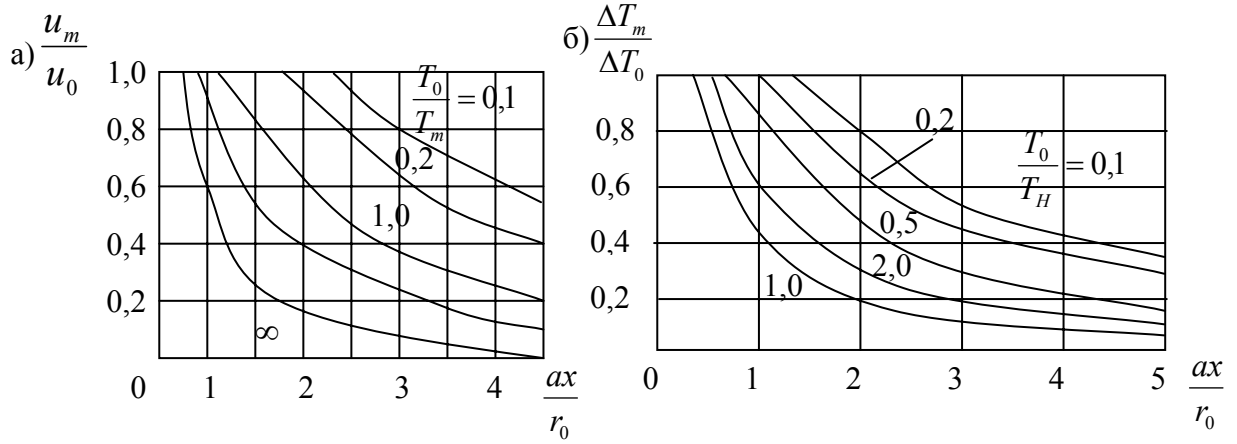


Рис. 4.3. Изменение осевой скорости (а) и температуры (б) в зависимости от продольной координаты.

Часть 2. ТЕОРИЯ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

5 УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

5.1 Обобщенное уравнение переноса субстанции

Обобщенное уравнение переноса произвольной субстанции может быть получено формальным образом: без учета каких-либо физических соображений и того, составляется ли уравнение переноса энергии, массы, импульса или какой-либо другой величины.

Обобщенное уравнение переноса аддитивной скалярной субстанции. Пусть имеется некоторая произвольная аддитивная скалярная субстанция B , под которой подразумевается энергия, масса, заряд и т.д. Рассмотрим в данной среде некоторый неподвижный произвольный объем V (рис. 5.1), ограниченный поверхностью Ω . Нас будет интересовать, как изменяется аддитивная величина B , отнесенная в единице объема выделенной системы. Скорость изменения величины B во всем объеме V определится объемным интегралом $\int_V \frac{\partial B}{\partial t} dV$. Это изменение субстанции B в открытой системе может происходить:

- а) из-за наличия потока плотностью \vec{J}_B величины B через поверхность Ω . вовнутрь (или вовне) выделенного объема V ;
- б) в результате возникновения величины B внутри выделенного объема V

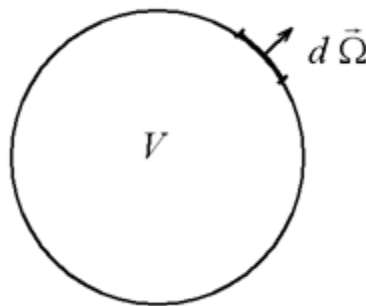


Рис. 5.1. Произвольный объем для определения
баланса субстанции

Под \vec{J}_B понимается плотность полного потока субстанции B , который складывается из конвективного потока B , возникающего вследствие движения всей среды, и кондуктивного (молекулярного), появляющегося в результате хаотического движения молекул. Молекулярный перенос обусловлен

перемешиванием молекул, что является причиной выравнивания концентрации субстанции в рассматриваемом объеме.

Количество субстанции, втекающей в объем V извне в единицу времени, определится поверхностным интегралом $\int_{\Omega} \vec{J}_B d\vec{\Omega}$. Здесь $d\vec{\Omega}$ - элементарный вектор, по модулю равный элементу поверхности $d\vec{\Omega}$ (рис. 5.1) и направленный по нормали к этой поверхности. Положительным направлением этого вектора считается направление из объема наружу.

Количество субстанции B , возникающее во всем объеме V за единицу времени, определится объемным интегралом $\int_V W_B dV$, где W_B - интенсивность (плотность) источника величины B в любой точке системы.

Тогда интегральное уравнение переноса субстанции B запишем следующим образом:

$$\int_V \frac{\partial B}{\partial t} dV = - \int_{\Omega} \vec{J}_B d\vec{\Omega} + \int_V W_B dV. \quad (5.1)$$

Пользуясь теоремой Остроградского - Гаусса, поверхностный интеграл в правой части уравнения баланса (5.1) преобразуем в объемный:

$$\int_{\Omega} \vec{J}_B d\vec{\Omega} = \int_V \text{div} \vec{J}_B dV. \quad (5.2)$$

Тогда уравнение (5.1) с учетом (5.2) запишем так:

$$\int_V \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_B - W_B \right) dV = 0. \quad (5.3)$$

Так как объем V выбран произвольно, то выполнение равенства (5.3) возможно лишь в случае обращения в нуль подынтегральной функции, т.е.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_B + W_B. \quad (5.4)$$

Соотношение и есть обобщенная форма записи уравнения переноса произвольной скалярной субстанции в дифференциальной форме. В дальнейшем оно будет широко использоваться.

В правой части уравнения (5.4) первый член $\text{div} \vec{J}_B$ обусловлен втеканьем (вытеканием) величины B через поверхность элементарного объема и характеризует конвективный и молекулярный переносы, а второй член представляет собой плотность внутренних источников величины B и характеризует действие источника.

Необходимо отметить, что для трех частных случаев, когда субстанция B представляет собой общую массу единицы объема системы ρ , полную энергию единицы объема $e\rho$ и полный заряд единицы объема $z\rho$, плотность внутренних источников W_B тождественно равна нулю. Это следует из зако-

нов сохранения и изменения соответственно массы, полной энергии и заряда: они не могут возникнуть или уничтожиться, и поэтому изменение величин может происходить лишь в результате их обмена с окружающей средой за счет потоков массы, энергии и заряда, втекающих или вытекающих из выделенного объема.

Обобщенное уравнение переноса аддитивной векторной субстанции.
Для любой аддитивной векторной субстанции B справедлива следующая запись:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i B_i, \quad (5.5)$$

где \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) - единичные орты.

Для каждой скалярной величины B_i - проекции вектора \vec{B} на оси координат x_i может быть записано уравнение баланса (5.4):

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}_{B_i} + W_{B_i}. \quad (5.6)$$

Домножив уравнение (5.6) на орт \vec{e}_i и просуммировав по i , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i B_i = -\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \text{div} \vec{J}_{B_i} + \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i W_{B_i}. \quad (5.7)$$

В соответствии с тензорным анализом первый член правой части уравнения (5.7) есть дивергенция тензора:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \text{div} \vec{J}_{B_i} = \text{Div} \vec{\bar{J}}_{\vec{B}}, \quad (5.8)$$

а второй член - вектор;

$$\vec{W}_{\vec{B}} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i W_{B_i}. \quad (5.9)$$

С учетом (5.8) и (5.9) уравнение (5.7) примет вид:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{Div} \vec{\bar{J}}_{\vec{B}} + \vec{W}_{\vec{B}}. \quad (5.10)$$

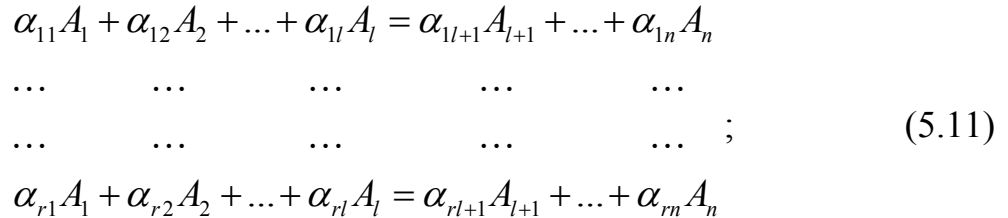
Уравнение (5.10) представляет собой обобщенное уравнение переноса аддитивной векторной величины в дифференциальной форме.

Тензор второго ранга $\vec{\bar{J}}_{\vec{B}}$ - плотность потока векторной величины \vec{B} , вектор $\vec{W}_{\vec{B}}$ - плотность внутренних источников величины \vec{B} .

Более простая форма уравнения баланса векторной величины, не содержащая плотности внутренних источников $\vec{W}_{\vec{B}}$, может быть получена лишь в одном частном случае, когда аддитивная векторная субстанция является полным импульсом единицы объема системы. Это следует из закона изменения и сохранения полного импульса.

5.2 Уравнение переноса массы для многокомпонентной системы. Уравнение неразрывности

Рассматриваем систему, состоящую из n компонентов, между которыми возможны η химических реакций:



где A_k - условные химические символы компонентов системы; α_{jk} - стехиометрические коэффициенты, численные значения которых зависят от вида реакции и химической природы компонента; символы j и k определяют принадлежность к реакции и к компоненту соответственно.

Скорость образования k -го компонента в j -й реакции

$$w_k = \nu_{jk} W_j, \quad (5.12)$$

где W_j - скорость j -й реакции, которая определяется как масса продуктов реакции, образующаяся в единице объема в единицу времени; ν_{jk} - коэффициент пропорциональности, пропорциональный относительной молекулярной массе M_k k -го компонента, образующегося в j -й реакции:

$$\nu_{jk} = \alpha_{jk} \frac{M_k}{\sum_{i=l+1}^n \alpha_{ji} M_i}. \quad (5.13)$$

Для продуктов реакции $\nu_{jk} > 0$, для сырья реакции $\nu_{jk} < 0$. Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^n \nu_{jk} = 0. \quad (5.14)$$

Уравнение переноса массы k -го компонента получаем из обобщенного уравнения переноса скалярной субстанции (5.4), положив $B = \rho_k$ (ρ_k - плотность k -го компонента). Плотность полного потока k -го компонента определяется выражением

$$\vec{J}_B = \vec{J}_{\rho_k} = \rho_k \vec{U}_k = \vec{q}_k + \rho_k \vec{U}, \quad (5.15)$$

где \vec{U}_k - вектор скорости k -го компонента; \vec{q}_k - диффузионный поток вещества компонента k , определяемый перемещением компонента к относительно центра масс; \vec{U} -среднемассовая скорость смеси n компонентов, или скорость центра масс смеси

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{U}_k / \rho, \quad (5.16)$$

где ρ - массовая плотность смеси или раствора,

$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k. \quad (5.17)$$

Наконец, плотность внутренних источников компонента k легко определить из выражения (5.12), просуммировав его по всем реакциям:

$$W_B = W_{\rho_k} = \sum_{j=1}^r \nu_{jk} W_j. \quad (5.18)$$

Подставляя выражения (5.15) и (5.18) в уравнение (5.4), получим:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_k \vec{U}_k) + \sum_{j=1}^r \nu_{jk} w_j. \quad (5.19)$$

Уравнение (5.19) и есть искомое уравнение переноса массы k -го компонента. Последний член этого уравнения имеет смысл внутреннего источника компоненты k .

Уравнение неразрывности для всей системы получаем также из уравнения (5.4), положив $B = \rho$, поток массы $\vec{J}_B = \vec{J}_\rho = \rho \vec{U}$ (диффузионный поток в этом случае отсутствует). Из закона сохранения массы (материи) следует, что $W_B = W_\rho = 0$. Тогда, подставляя все эти величины в уравнение (5.4), получим искомое уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{U}), \quad (5.20)$$

или в декартовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (5.21)$$

где u, v, w - проекции вектора скорости \vec{U} на оси координат.

Для установившегося процесса уравнение неразрывности упрощается:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0. \quad (5.22)$$

Если среда несжимаемая ($\rho = \text{const}$), то уравнение неразрывности еще упрощается:

$$\operatorname{div}(\vec{U}) = 0. \quad (5.23)$$

Уравнение (5.23) справедливо для течений жидкости с малыми изменениями температуры и давления. Учитывая, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} - \vec{U} \operatorname{grad} \rho,$$

уравнение неразрывности (5.20) может быть записано в иной форме:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{U}. \quad (5.24)$$

Другие формы уравнения массопереноса k -го компонента. Уравнение диффузии. Уравнение (5.19) может быть преобразовано к общепринятому виду уравнения массопереноса (или диффузии) путем введения в него концентрации массы k -го компонента:

$$C_k = \rho_k / \rho. \quad (5.25)$$

При этом имеет место соотношение:

$$\sum_{k=1}^n C_k = 1. \quad (5.26)$$

Используя (5.15) и учитывая, что

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = \frac{\partial \rho_k}{\partial t} - \vec{U} \nabla \rho_k, \quad (5.27)$$

уравнение (5.19) преобразуем к виду:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = -\nabla \vec{q}_k - \rho_k \nabla \vec{U} + \sum_{j=1}^r v_{jk} W_j. \quad (5.28)$$

Используя уравнение неразрывности в форме (5.24) и заменяя ρ_k на C_k из соотношения (5.25), уравнение (5.28) преобразуем следующим образом:

$$\rho \frac{dC_k}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q}_k + \sum_{j=1}^r v_{jk} W_j. \quad (5.29)$$

Диффузионный поток k -го компонента \vec{q}_k базируется на позициях неравновесной термодинамики и определяется по следующей формуле [21 - 25]:

$$\vec{q}_k = -\rho \sum_{k=1}^{n-1} D_k (\nabla C_k + b_k \nabla P), \quad (5.30)$$

где P – гидродинамическое давление или нормальное давление в жидкости при отсутствии вязкости; b_k – коэффициент бародиффузии, определяющий вклад градиента давления в диффузионный поток.

Уравнение (5.29) с учетом линейного соотношения (5.30) преобразуем к виду:

$$\rho \frac{dC_k}{dt} = \operatorname{div} \left[\rho \sum_{k=1}^{n-1} D_k (\nabla C_k + b_k \nabla P) \right] + \sum_{j=1}^r v_{jk} W_j. \quad (5.31)$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому из уравнения (5.31) следует:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) C_k = \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{n-1} D_k \operatorname{grad} C_k \right) + \operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^{n-1} D_k b_k \operatorname{grad} P \right) + \sum_{j=1}^r v_{jk} W_j. \quad (5.32)$$

Если система двухкомпонентная (бинарная смесь), то уравнение (5.32) запишется так:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + (\vec{U}\vec{\nabla})C_1 = \text{div}(D_1 \text{grad}C_1) + \text{div}(D_1 b_1 \text{grad}p) + v_{11}W_1 / \rho. \quad (5.33)$$

Для компонента 2 уравнение массопереноса не пишется, так как

$$C_2 = 1 - C_1.$$

Вместо скорости химической реакции W_1 в правую часть уравнения (5.33) можно было бы подставить химическое сродство реакции A_1 , используя выражение [22 - 24]

$$W_1 = -l_{11}A_1 / T, \quad (5.34)$$

где l_{11} – феноменологический (кинетический) коэффициент; T – температура смеси. Однако в отличие от многих других линейных соотношений между потоками и термодинамическими силами, линейная зависимость скорости реакции от химического сродства справедлива лишь вблизи условий равновесия. Поэтому обычно вместо соотношения (5.34) используется экспериментальная зависимость величины W_1 от температуры, давления и концентрации.

Если эффект барродиффузии пренебрежимо мал, а химическая реакция между компонентами отсутствует, то уравнение массопереноса (5.33) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} + (\vec{U}\vec{\nabla})C_1 = \text{div}(D_1 \nabla C_1). \quad (5.35)$$

Для неподвижной среды $\vec{U} = 0$ уравнение массопереноса сведем к уравнению молекулярной диффузии:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \text{div}(D_1 \nabla C_1), \quad (5.36)$$

если $D_1 = \text{const}$, то:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_1 \Delta C_1. \quad (5.37)$$

5.3 Уравнение переноса импульса. Уравнение Навье-Стокса

Уравнение переноса импульса, или количества движения выражает закон изменения и сохранения количества движения в сплошной среде. Оно называется еще уравнением движения.

Это уравнение может быть получено и из обобщенного уравнения переноса векторной аддитивной субстанции (5.10). В качестве последней в данном случае принимаем среднемассовую величину импульса движущейся жидкости:

$$\vec{B} = \rho \vec{U} = \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{U}_k. \quad (5.38)$$

В основе уравнения переноса импульса заложен второй закон Ньютона: результирующая сила, действующая на выделенный объем, обусловлена объемными и поверхностными силами, равна общему изменению импульса в этом объеме. Поэтому скорость изменения импульса для произвольного объема V равна сумме поверхностного интеграла от плотности конвективного потока $\overline{\rho U U}$ через границу объема и от тензора напряжений \overline{P} и объемного интеграла от полного вектора массовых сил. Последние могут быть результатом воздействия гравитационного, электромагнитного и других силовых полей.

Положим плотность полного потока импульса

$$\overline{J_B} = \overline{\rho U U} + \overline{P}, \quad (5.39)$$

плотность внутренних источников суммарного импульса

$$\vec{W}_B = \sum_{k=1}^n \rho_k \left[\vec{f}_k + z_k (\vec{E} + \vec{U}_k \times \vec{B}) \right], \quad (5.40)$$

где \vec{f}_k - консервативная потенциальная сила, которая получается из независящего от времени потенциала ψ_k , т. е.

$$\vec{f}_k = -\text{grad} \psi_k, \quad (5.41)$$

где $z_k (\vec{E} + \vec{U}_k \times \vec{B})$ - электромагнитная сила (сила Лоренца); \vec{E} - напряженность электрического поля; \vec{B} - магнитная индукция; z_k - электрический заряд k -го компонента.

Подставляя выражения (5.38), (5.40) и (5.41) в уравнения (5.10), имеем:

$$\frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} = -\text{Div}(\overline{\rho U U} + \overline{P}) + \sum_{k=1}^n \rho_k \left[\vec{f}_k + z_k (\vec{E} + \vec{U}_k \times \vec{B}) \right]. \quad (5.42)$$

Полученное уравнение (5.42) представляет собой уравнение переноса импульса.

Уравнение (5.42) может быть преобразовано к другому виду. Для этого необходимо воспользоваться следующим тождеством, записанным для произвольной векторной величины \vec{M} :

$$\frac{\partial(\rho \vec{M})}{\partial t} = \rho \frac{d\vec{M}}{dt} - \text{Div}(\overline{\rho M U}). \quad (5.43)$$

Воспользовавшись тождеством (5.43), положив в нем $\vec{M} = \vec{U}$, уравнение (5.43) преобразуем к виду:

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\text{Div} \overline{P} + \sum_{k=1}^n \rho_k \left[\vec{f}_k + z_k (\vec{E} + \vec{U}_k \times \vec{B}) \right]. \quad (5.44)$$

Воспользовавшись уравнением для диффузионного потока (5.45) и введя ток проводимости

$$\vec{i} = \sum_{k=1}^n z_k \vec{q}_k, \quad (5.45)$$

выражение для внешних консервативных и электромагнитных сил преобразуем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \left[\vec{f}_k + z_k (\vec{E} + \vec{U}_k \times \vec{B}) \right] = \rho \vec{f} + \rho z (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) + \vec{i} \times \vec{B}, \quad (5.46)$$

где $\vec{f} = \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{f}_k / \rho$ среднemasсовая сила.

С учетом соотношения (5.46) уравнение переноса импульса приобретает еще одну форму записи:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right] = -\text{Div} \overline{\overline{P}} + \rho \vec{f} + \rho z (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) + \vec{i} \times \vec{B}. \quad (5.47)$$

Левая часть уравнения (5.47) представляет собой сумму локального изменения импульса в единицу времени и его изменения за счет конвективного переноса. Первое слагаемое правой части - изменение импульса в единицу времени за счет давления и внутреннего трения, последние три - за счет действия внешних консервативных потенциальных и электромагнитных сил.

Уравнение Навье-Стокса. В уравнении переноса импульса (5.47) содержится неизвестная пока величина наряду с вектором скорости плотности молекулярного потока импульса $\overline{\overline{P}}$ или тензор напряжений. Поэтому возникает необходимость в уменьшении количества неизвестных. Это достигается путем установления связи между вектором скорости и тензором напряжений в предположении изотропности сплошной среды.

Представим тензор напряжений в виде суммы гидродинамического тензора давлений и тензора вязких напряжений:

$$\overline{\overline{P}} = p \overline{\overline{\delta}} + \overline{\overline{P}}_b, \quad (5.48)$$

где $\overline{\overline{\delta}}$ - единичный, или дельта-тензор Кронекера. В свою очередь, тензор вязких напряжений может быть представлен в виде суммы двух тензоров:

$$\overline{\overline{P}}_b = \overline{\overline{\delta}} \Pi + \overline{\overline{P}}_b^0, \quad (5.49)$$

где Π - первый инвариант, обусловленный объемной вязкостью;

$\overline{\overline{P}}_b^0$ - девиатор тензора вязких напряжений, обусловленный сдвиговой вязкостью.

Базируясь на позициях неравновесной термодинамики и используя принцип Кюри, устанавливающий линейные соотношения между потоками и термодинамическими силами

$$\Pi = -\xi \operatorname{div} \vec{U}, \quad (5.50)$$

$$\bar{\Pi}_b^0 = -2\eta \left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)^s, \quad (5.51)$$

тензор напряжений запишем следующим образом:

$$\bar{P} = \bar{p} \delta - \xi \operatorname{div} \vec{U} - 2\eta \left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)^s, \quad (5.52)$$

где ξ - коэффициент объемной вязкости; η - коэффициент молекулярной (динамической) вязкости; $\left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)^s$ - симметричная часть дивергента тензора скоростей деформации

$$\left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)^s = \sum_{i,j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{U} \right]; \quad (5.53)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера.

С учетом (5.52) для изотермического течения вязкой жидкости ($\eta = \text{const}, \xi = \text{const}$) имеем:

$$\operatorname{Div} \bar{P} = \operatorname{Div} (p \bar{\delta}) - 2\eta \operatorname{Div} \left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)^s - \xi \operatorname{Div} (\bar{\delta} \operatorname{div} \vec{U}). \quad (5.54)$$

Выполним преобразование членов, составляющих правую часть выражения (5.54):

$$\operatorname{Div} (P \bar{\delta}) = \bar{e}_1 \frac{\partial P}{\partial x} + \bar{e}_2 \frac{\partial P}{\partial y} + \bar{e}_3 \frac{\partial P}{\partial z} = \operatorname{grad} P; \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)^s &= \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \operatorname{div} \left(\operatorname{Grad} \vec{U} \right)_i^s = \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{U} \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\sum_{i=1}^3 u_i \bar{e}_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \\ &- \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \bar{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{U}) = \frac{1}{2} \Delta \vec{U} + \frac{1}{6} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\operatorname{Div} (\bar{\delta} \operatorname{div} \vec{U}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U}. \quad (5.57)$$

С учетом преобразований (5.55) - (5.57) получаем:

$$\operatorname{Div} \bar{P} = \operatorname{grad} P - \eta \Delta \vec{U} - \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U}. \quad (5.58)$$

Подставляя выражение (5.58) в уравнение (5.47), имеем:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{U} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \text{grad div} \vec{U} + \rho \vec{f} + \rho z (\vec{E} + \vec{U} + \vec{B}) + \vec{i} \times \vec{B} \quad (5.59)$$

или после деления левой и правой частей на ρ

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{U} + \left(\frac{\nu}{3} + \xi' \right) \text{grad div} \vec{U} + \vec{f} + z (\vec{E} + \vec{U} + \vec{B}) + \frac{\vec{i} \times \vec{B}}{\rho}, \quad (5.60)$$

где $\nu = \eta / \rho$ - кинематический коэффициент вязкости; $\xi' = \xi / \rho$.

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$, $\text{div} \vec{U} = 0$) уравнение (5.60) упрощается:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{U} + \vec{f} + z (\vec{E} + \vec{U} + \vec{B}) + \frac{\vec{i} \times \vec{B}}{\rho}. \quad (5.61)$$

При отсутствии электрических и магнитных сил уравнение (5.61) запишем в виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{U} + \vec{f}. \quad (5.62)$$

Уравнение движения сплошной однокомпонентной среды (5.62) впервые получено с позицией взаимодействия молекул в 1822 г. Навье, затем в 1845 г. Стоксом и именуется как уравнение Навье-Стокса [2, 16].

5.4 Уравнение переноса полной и внутренней энергии. Уравнение теплопереноса

Уравнение переноса полной энергии. В соответствии с законом сохранения энергии полное количество энергии в любом объеме может изменяться только в том случае, если энергия втекает или вытекает из этого объема. Таким образом, полагая в обобщенном уравнении переноса аддитивной величины (5.4) $B = \rho e$ (полная энергия единицы объема), $\vec{J}_B = \vec{J}_e = \vec{q}_e$ (плотность полного потока энергии), $W_B = W_e = 0$ (плотность внутренних источников энергии), имеем:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = -\text{div} \vec{q}_e, \quad (5.63)$$

где e – полная энергия единицы массы системы или полная удельная энергия.

Полная энергия e состоит из удельной кинетической энергии $U^2/2$, удельной потенциальной энергии ψ (если на систему действуют потенциальные силы), удельной внутренней энергии системы Q (сумма кинетических энергий движущихся молекул и потенциальной энергии их взаимодействия) и удельной электромагнитной энергии e_3 :

$$e = \vec{U}^2 / 2 + \psi + e_3 + Q. \quad (5.64)$$

Полный поток энергии состоит из конвективного потока энергии $\rho e' \vec{U}$ ($e' = e - e_3$); потока энергии, обусловленного механической работой, совершаемой над системой $\vec{U} \cdot \vec{P}$; потока потенциальной энергии $\sum_{k=1}^n \vec{q}_k \psi_k$, возникающего вследствие диффузии различных компонентов в поле потенциальных сил; потока электромагнитной энергии \vec{q}_3 , и теплового потока \vec{q}_T :

$$\vec{q}_e = \rho e' \vec{U} + \vec{U} \vec{P} + \sum_{k=1}^n \psi_k \vec{q}_k + \vec{q}_3 + \vec{q}_T, \quad (5.65)$$

где ψ_k – удельная потенциальная энергия k – го компонента.

Соотношения (5.64), (5.65) можно рассматривать с макроскопической точки зрения определения удельной внутренней энергии Q , и потока тепла \vec{q}_T соответственно.

Уравнение переноса внутренней энергии многокомпонентной системы. Из анализа переноса полной энергии (5.63) и соотношений (5.64) - (5.65) становится ясным, что для вывода уравнения переноса внутренней энергии необходимо определить величины кинетической, потенциальной и электромагнитной энергии, а затем использовать уравнение баланса полной энергии (5.63).

Дифференциальное уравнение переноса кинетической энергии многокомпонентной системы может быть получено в результате скалярного умножения уравнения переноса импульса (5.44) на вектор скорости \vec{U} . После ряда преобразований уравнение переноса кинетической энергии запишем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{U}^2}{2} \right) = -div \left(\vec{U} \vec{P} + \rho \frac{\vec{U}^2}{2} \vec{U} \right) + \vec{P} : Grad \vec{U} + \rho \vec{U} \vec{f} + \rho z \vec{U} \vec{E} - \vec{i} (\vec{U} \times \vec{B}) \quad (5.66)$$

Из уравнения (5.66) следует, что скорость локального изменения кинетической энергии обусловлена кондуктивным и конвективным ее переносом через поверхность за счет полного потока кинетической энергии $(\vec{U} \vec{P} + 0,5 \rho \vec{U}^2 \vec{U})$, с одной стороны, и наличием внутренних источников (сто-

ков) кинетической энергии, обусловленных воздействием поверхностных $(\vec{P} : Grad \vec{U})$, внешних потенциальных $(\rho \vec{U} \vec{f})$ и электромагнитных $(\rho z \vec{U} \vec{E} - \vec{i} (\vec{U} \times \vec{B}))$ сил, с другой.

Уравнение переноса потенциальной энергии получается в результате умножения уравнения переноса массы k -го компонента (5.19) на величину удельной потенциальной энергии:

$$\frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} = -div\left(\rho\psi\vec{U} + \sum_{k=1}^n \psi_k \vec{q}_k\right) - \rho \vec{f} \vec{U} - \sum_{k=1}^n \vec{q}_k \vec{f}_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \psi_k v_{jk} w_j. \quad (5.67)$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии в единицу времени в единице объема вызвано кондуктивным $\sum \psi_k \vec{q}_k$ и конвективным $\rho\psi\vec{U}$ потоками потенциальной энергии и внутренними источниками (стоками) потенциальной энергии, которые обусловлены внешними потенциальными силами $-\rho\vec{U}\vec{f}$, диффузией компонент в поле массовых сил $-\sum \vec{q}_k \vec{f}_k$ и химическими реакциями $\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \psi_k v_{jk} w_j$.

Уравнение переноса электромагнитной энергии e_3 (уравнение Умова–Пойтинга) может быть получено из обобщенного уравнения переноса скалярной аддитивной величины (5.3). Положим в (5.3) $B = e_3 = 0,5(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})/\rho$ (где \vec{D} - вектор электрической индукции; \vec{H} - вектор напряженности магнитного поля),

$$\vec{J}_B = \vec{J}_3 = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (5.68)$$

- вектор плотности электромагнитной энергии (вектор Умова–Пойтинга),

$$W_B = W_3 = (\vec{i} + \rho z \vec{U}) \vec{E} = -\vec{j} \vec{E}, \quad (5.69)$$

- плотность внутренних стоков электромагнитной энергии (джоулево тепло), которые возникают вследствие диссипации электромагнитной энергии в тепловую (\vec{j} - полная плотность потока зарядов).

С учетом принятых обозначений уравнение переноса электромагнитной энергии запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{2} \right] = -div(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{j} \vec{E}. \quad (5.70)$$

Таким образом, скорость изменения электромагнитной энергии обусловлена ее потоком через поверхность (\vec{E} и \vec{H}) и наличием источника электромагнитной энергии $(-\vec{j} \cdot \vec{E})$.

Наконец, уравнение переноса внутренней энергии получается в результате почленного вычитания из уравнения переноса полной энергии (5.63) уравнений переноса кинетической (5.66), потенциальной (5.67) и электромагнитной (5.70) энергий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} = & -div(\vec{q}_r + \rho \vec{U} Q) - \bar{\bar{P}} : Grad \vec{U} + \sum_{k=1}^n \vec{q}_k \vec{f}_k + \vec{i} (\vec{E} \times \vec{U} \times \vec{B}) - \\ & - \sum_{j=1}^{\eta} \sum_{k=1}^n \psi_k v_{jk} W_j \end{aligned} \quad . \quad (5.71)$$

Из анализа уравнения (5.71) следует, что изменение внутренней энергии системы происходит, во-первых, за счет молекулярного и конвективного потоков этой энергии и, во-вторых, за счет наличия источников и стоков внутренней энергии, которые обусловлены поверхностными и электромагнитными силами, а также химическими реакциями между компонентами системы.

Используя соотношение (5.43), уравнение (5.71) запишем в иной форме:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) Q \right] = & -div \vec{q}_r - \bar{\bar{P}} : Grad \vec{U} + \sum_{k=1}^n \vec{q}_k \vec{f}_k + \vec{i} (\vec{E} \times \vec{U} \times \vec{B}) - \\ & - \sum_{j=1}^{\eta} \sum_{k=1}^n \psi_k v_{jk} W_j \end{aligned} \quad . \quad (5.72)$$

Уравнение теплопереноса получается из уравнения переноса внутренней энергии системы (5.72) после некоторых несложных преобразований. Для простоты предположим, что рассматриваемая система однокомпонентная ($k=1$). Поэтому 3-е и 5-е слагаемые в уравнении (5.72) обращаются в нуль.

Используя уравнение состояния:

$$Q = Q(P, T), \quad (5.73)$$

установим связь между внутренней энергией и температурой:

$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial Q}{\partial P} \right)_T dP = c_P dT + c_V dP, \quad (5.74)$$

где c_P и c_V удельные теплоемкости при постоянном давлении в объеме соответственно. В дальнейшем примем следующее предположение, справедливое для несжимаемой жидкости:

$$dQ \approx c_P dT. \quad (5.75)$$

С учетом (5.75) левая часть уравнения (5.72) примет вид:

$$\rho \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) Q \right] = \rho \frac{dQ}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p \left[\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) T \right]. \quad (5.76)$$

Привлекая закон Фурье, кондуктивный поток тепла может быть записан так:

$$\vec{q}_T = -\lambda \text{grad} T, \quad (5.77)$$

где λ - коэффициент теплопроводности среды.

Далее с учетом соотношений (5.52) и (5.53), диадное произведение тензоров напряжений и скоростей деформаций запишем так:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{P}} : \text{grad} \vec{U} &= \left(P \bar{\bar{\delta}} + \Pi \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\Pi}}_b^0 \right) : \left(\text{Grad} \vec{U} + \frac{1}{3} \text{div} \vec{U} \bar{\bar{\delta}} \right) = \\ &= P \text{div} \vec{U} + \Pi \text{div} \vec{U} + \bar{\bar{\Pi}}_b^0 : \text{Grad} \vec{U} = \\ &= P \text{div} \vec{U} - \zeta (\text{div} \vec{U})^2 - 2\eta \left[\left(\text{Grad} \vec{U} \right)^3 \right]^2 \end{aligned} \quad (5.78)$$

где

$$\begin{aligned} \left[\left(\text{Grad} \vec{U} \right)^3 \right]^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{div} \vec{U} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} \text{div} \vec{U} + \\ &+ \frac{1}{9} \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij}^2 (\text{div} \vec{U})^2 = \frac{1}{2} \text{Diss} \vec{U} - \frac{1}{3} (\text{div} \vec{U})^2 \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\text{Diss} \vec{U} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (5.80)$$

- диссипативная функция, определяющая диссипацию механической энергии движения в тепловую.

Подставляя соотношение (5.79) в (5.78), получаем:

$$\bar{\bar{P}} : \text{Grad} \vec{U} = p \text{div} \vec{U} - \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) (\text{div} \vec{U})^2 - \eta \text{Diss} \vec{U}. \quad (5.81)$$

С учетом выполненных преобразований (5.76), (5.81) и линейного соотношения (5.77) уравнение (5.72) запишем следующим образом:

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) T \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \times \\ \times (\text{div} \vec{U})^2 + \eta \text{Diss} \vec{U} - P \text{div} \vec{U} + \vec{i} (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}). \quad (5.82)$$

Для несжимаемой жидкости $\text{div} \vec{U} = 0$ уравнение (5.82) примет вид

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) T \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \eta \text{Diss} \vec{U} + \vec{i} (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}). \quad (5.83)$$

При отсутствии электромагнитного поля и постоянстве коэффициента теплопроводности уравнение теплопереноса (5.83) становится проще:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) T = a \Delta T + \frac{\eta}{\rho c_p} \text{Diss} \vec{U}. \quad (5.84)$$

Если диссипация пренебрежимо мала, то уравнение (5.84) может быть записано в проекциях на оси координат в следующей традиционной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (5.85)$$

где $a = \lambda / (\rho c_p)$ коэффициент температуропроводности;

u, v, w - проекции вектора скорости \vec{U} на оси координат X, Y, Z .

При отсутствии конвективного теплопереноса ($u = v = w = 0$) уравнение (5.85) примет вид уравнения теплопроводности, или уравнение Фурье [25]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (0.1)$$

5.5 Замыкание системы уравнений переноса. Уравнение переноса магнитной индукции

Полученная в подразделе 5.1-5.4 система состоит из четырех уравнений переноса (5.20), (5.32), (5.60), (5.82). В ней число неизвестных, подлежащих определению, превосходит число уравнений. С целью доопределения системы, во-первых, необходимо знать величину массовой плотности, которая в общем случае может быть функцией температуры и давления:

$$\rho = \rho(T, P). \quad (5.87)$$

Для несжимаемой жидкости плотность не будет функцией давления. Ее зависимость от температуры может быть учтена следующим эмпирическим соотношением:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{T=T_0} (T - T_0) \right] = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0)], \quad (5.88)$$

где β_T - температурный коэффициент объемного расширения;

ρ_0 - плотность при характерной температуре T_0 , для которой известны теплофизические параметры среды.

Во-вторых, в сформулированной системе уравнений имеются неизвестные величины для электромагнитных процессов: \vec{i} , \vec{E} и \vec{B} . Для определения вектора магнитной индукции получим уравнение переноса магнитной индукции.

Воспользуемся системой уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot} \vec{H} = -\vec{j}; \quad (5.89)$$

$$\partial \vec{B} / \partial t + \text{rot} \vec{E} = 0; \quad (5.90)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0; \quad (5.91)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho z, \quad (5.92)$$

и закон Ома:

$$\vec{i} = \chi (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}), \quad (5.93)$$

где χ - коэффициент электропроводности.

Сделаем следующие допустимые упрощения: а) среда имеет высокую электропроводность, поэтому $z = 0$; б) конвективная составляющая полной плотности потока электрических зарядов мала по сравнению с потоком проводимости, поэтому $\vec{j} = \rho z \vec{U} + \vec{i} \approx \vec{i}$; в) медленно меняющееся электрическое поле позволяет пренебречь “током смещения” по сравнению с током проводимости, т.е. $\partial \vec{D} / \partial t + \vec{j} \approx \partial \vec{D} / \partial t + \vec{i} \approx \vec{i}$.

При этом уравнения (5.89) и (5.92) примут вид:

$$\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{B} = -\vec{i}; \quad (5.94)$$

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad (5.95)$$

где μ - коэффициент магнитной индукции.

Применяя операцию “rot” к уравнению (5.94) и учитывая (5.91), имеем:

$$-\Delta \vec{B} = \mu \text{rot} \vec{i}. \quad (5.96)$$

Далее, применяя операцию “*rot*” к уравнению (5.93) и используя уравнения (5.90) и (5.96), приходим к уравнению переноса магнитной индукции:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\Delta \vec{B}}{\mu \chi} + \text{rot}(\vec{U} \times \vec{B}). \quad (5.97)$$

Напряженность электрического поля может быть определена из уравнения

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (5.98)$$

Величину электрического потенциала φ находим из уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad (5.99)$$

полученного путем подстановки соотношения (5.98) в уравнение Максвелла (5.97).

Таким образом, уравнения (5.94), (5.97) - (5.99) замыкают сформулированную ранее систему уравнений переноса импульса, тепла и массы вещества.

6 КЛАССИФИКАЦИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

6.1 Линейные граничные условия (ЛГУ)

Линейные граничные условия наиболее просты и удобны при выполнении математического моделирования процессов переноса [14]. Рассмотрим линейные граничные условия пяти родов.

ЛГУ-1. На границе области Γ задаются искомые функции температуры, концентрации, скорости и т. д.:

$$T|_{\Gamma} = T_{\Gamma}; \quad C|_{\Gamma} = C_{\Gamma}; \quad \vec{U}|_{\Gamma} = \vec{U}_{\Gamma}, \quad (6.1)$$

где $T_{\Gamma}, C_{\Gamma}, \vec{U}_{\Gamma}$ в общем случае заданные функции координат и времени.

ЛГУ-2. На границе среды задается поток тепла или массы:

$$-\lambda(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T)|_{\Gamma} = q_{T_{\Gamma}}; \quad -\rho D_k(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_k)|_{\Gamma} = q_{k_{\Gamma}} \quad (6.2)$$

где \vec{n} – единичный вектор - нормаль к границе исследуемой области.

ЛГУ-3. Задается линейная зависимость между потоком тепла (вещества) и температурой (концентрацией) на границе среды:

$$-\lambda(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T)|_{\Gamma} = \alpha(T - T_{cp})|_{\Gamma}; \quad (6.3)$$

$$-D_k(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_k)|_{\Gamma} = \beta(C_k - C_{cp})|_{\Gamma}, \quad (6.4)$$

где α и β - коэффициенты теплообмена.

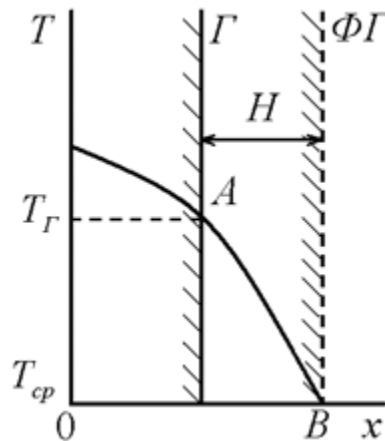


Рис. 6.1. Схема к ЛГУ-3

Физический смысл ЛГУ-3 можно выяснить следующим образом. Выполним некоторые графические построения, за счет которых увеличим толщину тела на фиктивную величину H (рис. 6.1). Для этого к точке пересечения A температурной кривой с поверхностью тела Γ проведем касательную и продолжим ее до пересечения с осью координат Ox в точке B , соответствующей температуре T_{cp} . Проведя из точки B изотерму $T = T_{cp}$, получим со-

ответствующую ей фиктивную поверхность $\Phi\Gamma$, отстоящую от прежней поверхности на расстоянии H .

Такое построение равносильно предположению, что теплопроводность фиктивного тела такая же, как и основного, но температура в первом распределяется линейно. Поэтому величину градиента температуры на поверхности Γ можно заменить, конечно-разностным аналогом на участке фиктивного тела. Тогда конечно-разностное представление ЛГУ-3 (6.3) дает следующее соотношение:

$$H = \lambda/\alpha. \quad (6.5)$$

Величина H представляет собой дополнительное термическое сопротивление [27] между поверхностью тела и средой и по аналогии с электрическим сопротивлением характеризует величину теплового потока от тела в окружающую среду.

Предположим, что $H \rightarrow \infty$. Это возможно при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда из условия (6.3) следует, что поток тепла от тела в среду стремится к нулю: $\partial T/\partial n|_{\Gamma} \rightarrow 0$. Предположим, что $H \rightarrow 0$. Это возможно при $\alpha \rightarrow \infty$. Тогда из (6.3) следует, что поток тепла в окружающую среду настолько велик, что тело охлаждается до температуры, равной температуре окружающей среды практически мгновенно, т.е. $T_{\Gamma} \rightarrow T_{cp}$.

Аналогичным образом может быть получена и величина массообменного сопротивления:

$$H_D = D/\beta. \quad (6.6)$$

ЛГУ-4. Задается на границе контакта двух сред: твердого тела с твердым, твердого с жидким, твердого с газообразным и т.д. в том случае, если в одном из контактирующих тел нельзя пренебречь нелинейностью распределения температуры. Если это можно сделать, то задаются ЛГУ-3.

ЛГУ-4 состоят из двух выражений. Первое устанавливает равенство потоков тепла

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n}|_{\Gamma} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}|_{\Gamma}, \quad (6.7)$$

или массы

$$\rho_1 D_1 \frac{\partial C_1}{\partial n}|_{\Gamma} = \rho_2 D_2 \frac{\partial C_2}{\partial n}|_{\Gamma}, \quad (6.8)$$

где индексы 1, 2 соответствуют первой и второй среде.

Второе выражение устанавливает равенство температуры

$$T_1|_{\Gamma} = T_2|_{\Gamma}, \quad (6.9)$$

или концентрации на поверхности

$$C_1|_{\Gamma} = C_2|_{\Gamma}. \quad (6.10)$$

Граничные условия (6.9) и (6.10) реализуются при идеальном контакте сред. В самом общем случае между контактирующими поверхностями может быть прослойка, вносящая дополнительное термическое или массообменное сопротивление. При этом соотношения (6.9) и (6.10) заменяются граничными условиями, по форме и физическому смыслу напоминающими ЛГУ-3 (6.3) и (6.4). Если прослойка представляет собой поверхностно - активное вещество, обладающее способностью поглощать или выделять тепло (вещество), то в соотношения (6.7) и (6.8) вводятся плотности источников или стоков тепла (вещества).

ЛГУ-5. Задаются в том случае, если одна из контактирующих сред является идеальным проводником тепла или вещества. Известно, что в каждой точке проводника в данный момент поддерживается одинаковая температура или концентрация, однако закон изменения ее во времени неизвестен. ЛГУ-5 получается из уравнения теплового баланса идеального проводника:

$$-\lambda_1 \int_{S_1} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T_1) \Big|_r dS_1 + Q_2 - \rho_2 c_{p_2} W_2 \frac{dT_2}{dt} = 0, \quad (6.11)$$

где индекс 2 - соответствует идеальной среде; S_1 - площадь поверхности раздела между средами 1 и 2; Q_2 - количество тепла; поступающего в идеальный проводник из окружающей среды; W_2 - объем идеального проводника.

Аналогично для массообменных процессов:

$$-\rho_1 D_1 \int_{S_1} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} C_1) \Big|_r dS_1 - \rho_2 W_2 \frac{dC_2}{dt} = 0. \quad (6.12)$$

В общем случае, когда на границе сред имеется прослойка, вносящая дополнительное термическое или массообменное сопротивление, условия (6.11) и (6.12) дополняются ЛГУ - 3.

6.2 Нелинейные граничные условия

Они наиболее распространены в задачах тепломассопереноса. В первом случае часто встречающимся типом нелинейного граничного условия является условие теплообмена излучением по закону Стефана - Больцмана [13] между поверхностью Γ , ограничивающей рассматриваемое тело, и окружающей средой:

$$-\lambda (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} T) \Big|_{\Gamma} = \varepsilon_L \sigma (T^4 - T_{CP}^4) \Big|_{\Gamma}, \quad (6.13)$$

где ε_L приведенная степень черноты поверхности тела; σ - постоянная излучения.

Для задач массообмена типична следующая ситуация. Поток вещества q_k к границе среды, на которой происходит реакция, равен количеству примеси, превращающемуся в продукт химической реакции на единице поверхности границы. Поэтому граничное условие имеет вид:

$$-\rho D_k (\vec{n} \cdot \nabla C_k) \Big|_{\Gamma} = k C_k^m \Big|_{\Gamma}, \quad (6.14)$$

где k – коэффициент пропорциональности, экспоненциально зависящий от температуры; $m \geq 0$ – показатель порядка реакции. В случае, когда $m \neq 0$ и $m \neq 1$, условие (6.14) является нелинейным.

6.3 Специальные граничные условия (СГУ)

Примерами СГУ являются условия на подвижной границе фазового перехода, разделяющей две фазы разного состава с различными физическими свойствами. Эти условия имеют сходства с ЛГУ-4. Однако существенные отличия состоят в том, что-либо граница, разделяющая два тела, не может быть задана, а должна быть определена из решения задачи; либо она меняется во времени; либо эта граница и неизвестна и меняется во времени.

Здесь будут рассмотрены СГУ трех типов: СГУ в процессах теплопереноса, массопереноса и переноса импульса [13, 26, 27].

СГУ-1. Характерны для процессов переноса тепла при наличии фазовых превращений, например, плавление и затвердевание, испарение или конденсация и т.д. На подвижной границе фазового перехода имеет место поглощение или выделение тепла фазового превращения.

Рассмотрим для большей определенности процесс затвердевания расплава. В этом случае СГУ-1 состоят из двух выражений. Первое выражение представляет собой условие равенства температур в обеих фазах на подвижной границе:

$$T_1 \Big|_{\Gamma} = T_2 \Big|_{\Gamma} = T_k, \quad (6.15)$$

где T_k – температура кристаллизации расплава.

Второе выражение представляет собой уравнение теплового баланса на границе раздела фаз. Из него видно, что количество тепла, выделяемое вследствие фазового превращения в единицу времени на единице поверхности фронта, равно разности потоков тепла от жидкой фазы к фронту и потоков тепла от фронта к твердой фазе [27]:

$$-\lambda_2 (\vec{n} \cdot \nabla T_2) \Big|_{\Gamma} + \lambda_1 (\vec{n} \cdot \nabla T_1) \Big|_{\Gamma} = \rho_1 L \frac{d\xi}{dt}, \quad (6.16)$$

где $d\xi/dt$ – скорость продвижения фронта кристаллизации; индексы 1, 2 соответствуют твердой и жидкой фазам.

СГУ-2. Характерны для диффузионных процессов, протекающих при фазовых превращениях, когда растворимость примеси в различных фазах различна, например, при затвердевании бинарного расплава *Fe-C*. При этом на фронте фазового превращения Γ из фазы 1 в фазу 2 вытесняется избыточное содержание примеси, равное разности между ее предельной растворимостью в фазах 2 и 1. Соответствующее балансовое условие на границе раздела фаз свидетельствует о том, что разность потоков примеси в жидкой фазе 2 и твердой фазе 1 в единицу времени на единицу поверхности подвижного фронта [28]

$$-\rho_2 D_2 (\vec{n} \cdot \nabla C_2) \Big|_{\Gamma} + \rho_1 D_1 (\vec{n} \cdot \nabla C_1) \Big|_{\Gamma} = (\rho_2 C_2 - \rho_1 C_1) \Big|_{\Gamma} \frac{d\xi}{dt} \quad (6.17)$$

Второе выражение для СГУ-2 может быть получено из равновесной диаграммы сплава. Оно справедливо для условий равновесия, когда обе фазы находятся при одной и той же температуре и имеют следующий вид:

$$\rho_1 C_1 \Big|_{\Gamma} = k_0 \rho_2 C_2 \Big|_{\Gamma} . \quad (6.18)$$

С учетом выражения (6.18) условие (6.17) преобразуем к виду

$$-D_2 (\vec{n} \cdot \nabla C_2) \Big|_{\Gamma} + \frac{\rho_1}{\rho_2} D_1 k_0 (\vec{n} \cdot \nabla C_1) \Big|_{\Gamma} = \left(1 - k_0 \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) C_2 \Big|_{\Gamma} \frac{d\xi}{dt} . \quad (6.19)$$

В ряде случаев можно пренебречь диффузионным потоком в твердой фазе по сравнению с диффузионным потоком в жидкой фазе. Тогда условие (6.19) значительно упрощается [29]:

$$-D_2 (\vec{n} \cdot \nabla C_2) \Big|_{\Gamma} = \left(1 - k_0 \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) C_2 \Big|_{\Gamma} \frac{d\xi}{dt} , \quad (6.20)$$

СГУ-3. Задаются на поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей или жидкостей и газа, когда имеют место процессы переноса механического импульса. Они выводятся на основе условия динамического равновесия некоторой замкнутой области массой M и объемом V , включающей поверхность раздела S и ограниченной поверхностью S_0 [26]:

$$\int_V \rho q dV + \int_S P_n ds + \int_{S_0} P_\tau ds = M \frac{dU}{dt} , \quad (6.21)$$

где P_n и P_τ - нормальная и касательная составляющие тензора напряжений $\overline{\overline{P}}$.

Устремим в (6.21) объем V к нулю, стягивая тем самым поверхность S_0 к поверхности раздела фаз S . Тогда массовые и инерционные силы обратятся в нуль, а равенство (6.21) будет выполняться при условиях:

$$P_{n1} \Big|_{\Gamma} = P_{n2} \Big|_{\Gamma}; \quad (6.22)$$

$$P_{\tau 1} \Big|_{\Gamma} = P_{\tau 2} \Big|_{\Gamma}. \quad (6.23)$$

Условия (6.22) и (6.23) и есть первая группа СГУ-3; которое в развернутом виде запишем следующим образом:

$$\left[P_1 - \xi_1 \operatorname{div} \vec{U}_1 - 2\eta_1 \left(\frac{\partial U_{1i}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \nabla \vec{U}_1 \right) \right] \Big|_{\Gamma} =$$

$$= \left[P_2 - \xi_2 \operatorname{div} \vec{U}_2 - 2\eta_2 \left(\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \nabla \vec{U}_2 \right) \right] \Big|_{\Gamma}, \quad (6.24)$$

$$\eta_1 \left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{1k}}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma} = \eta_2 \left(\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{2k}}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma}. \quad (6.25)$$

При этом надо иметь в виду скачок давления, вызванный кривизной поверхности раздела фаз (формула Лапласа):

$$P_2 \Big|_{\Gamma} = P_1 \Big|_{\Gamma} \pm \sigma (1/R_1 + 1/R_2), \quad (6.26)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения; R_1 и R_2 - главные радиусы кривизны границы раздела фаз.

Вторая группа СГУ-3 вытекает из условий отсутствия скольжения фаз в местах их контакта

$$U_{\tau 1} \Big|_{\Gamma} = U_{\tau 2} \Big|_{\Gamma}, \quad (6.27)$$

а также равенства нормальных составляющих плотности потока импульса к границе раздела фаз:

$$\rho_1 U_{n1} \Big|_{\Gamma} = \rho_2 U_{n2} \Big|_{\Gamma}, \quad (6.28)$$

где индексы n и τ соответствуют нормальной и касательной составляющим скорости.

7 ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

7.1 Общие понятия

В настоящее время широкое распространение для решения ряда сложных научно-технических задач получил метод моделирования. Это обусловлено тем, что решение многих задач, в том числе и металлургических, в натуральных условиях по ряду причин (непрозрачность и высокая температура металла, громоздкость и дороговизна установки, агрессивность свойств расплавленного металла и т. д.) весьма затруднено. Моделирование же позволяет значительно проще и полнее, чем в натуре [16, 30], исследовать процесс на модели и, обобщив результаты единичного опыта, распространить их на группу явлений, подобных исследуемому.

Моделирование физических явлений базируется на теории подобия, которая изучает свойства процессов. Общая теория подобия в основном разработана русскими и советскими учеными и излагается в работах [31-34]. Подобие двух явлений обеспечивается, если они протекают в геометрически подобных условиях и если безразмерные уравнения, описывающие их, тождественно одинаковы. Это позволяет путем простого пересчета определить параметры одного явления на основании параметров другого. Основное свойство подобия явлений заключается в существовании и равенстве безразмерных комплексов, составленных из величин, характеризующих явление и называемых числами или критериями подобия.

Если процесс может быть описан соответствующим дифференциальным уравнением, то числами подобия являются коэффициенты этих уравнений, записанных в безразмерном виде. В противном случае пользуются теорией размерностей [33]. Таким образом, теория подобия позволяет на основании несложного анализа дифференциальных уравнений и условий однозначности получить некоторые результаты и выводы, не прибегая к процедуре интегрирования уравнений. Дифференциальные уравнения, описывающие процессы переноса импульса, тепла и массы, в общем случае представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Эти уравнения к настоящему времени аналитически не решены. Однако метод моделирования, основанный на определении чисел подобия процесса, совершенно не зависит от степени сложности уравнений, так как при этом не возникает необходимости их решения.

В данной главе на основании анализа уравнений движения и тепломассопереноса сделана попытка систематизации основных чисел подобия, имеющих место, например, при исследовании процессов затвердевания слитков и отливок.

7.2 Гидродинамическое подобие

Моделирование процессов переноса импульса требует геометрического, кинематического и динамического подобия [30]. Это значит, что модель и натура должны быть подобными, безразмерные поля скоростей в рассматриваемых потоках - одинаковыми, дифференциальные уравнения движения и краевые условия также должны быть подобными.

Для выяснения условий динамического подобия необходимо систему уравнений движения и краевые условия к ней записать в безразмерном виде.

Рассмотрим случай движения несжимаемой жидкости при отсутствии электромагнитных полей, но при наличии массовой силы тяжести $\vec{f} = \vec{q}$. Тогда движение жидкости описывается уравнением Навье-Стокса (6.62), которое следует из уравнения (6.49). С учетом принятых условий имеем:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U} + g \vec{e}_g, \quad (7.1)$$

где \vec{e}_g - единичный вектор направления ускорения свободного падения.

Введем следующие безразмерные переменные величины: скорость $\vec{V} = \vec{U} / u_0$; координаты $x = X / x_0$, $y = Y / x_0$, $z = Z / x_0$; давление $\Pi = p / P_0$; время или динамическое число Фурье (число гомохронности) $Fo_\nu = t\nu / x_0^2$, где u_0 , x_0 , P_0 - масштабы соответственно скорости, координаты, давления. Введем также безразмерные операторы:

$$\overset{0}{\nabla} = x_0 \nabla; \quad \overset{0}{div} = x_0 div; \quad \overset{0}{grad} = x_0 grad; \quad \overset{0}{\Delta} = x_0^2 \Delta.$$

Подставляя, принятые безразмерные величины и операторы в уравнения (7.1) и (6.23), получаем после несложных преобразований уравнения Стокса и неразрывности в безразмерной (критериальной) форме:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + \text{Re} \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) \vec{V} = -Eu \text{Re} \overset{0}{\nabla} \Pi + \overset{0}{\Delta} \vec{V} + \frac{\text{Re}}{Fr} \vec{e}_g; \quad (7.2)$$

$$\overset{0}{\Delta} \vec{V} = 0. \quad (7.3)$$

Таким образом, для подобия двух потоков при одинаковых краевых условиях, записанных в безразмерной форме, требуется, чтобы безразмерные комплексы уравнения (7.2) были одинаковы по величине

$$\text{Re} = idem; \quad Eu = idem; \quad Fr = idem; \quad Fo_\nu = idem, \quad (7.4)$$

где $\text{Re} = u_0 x_0 / \nu$ - число Рейнольдса; $Eu = P_0 / \rho u_0^2$ - число Эйлера; $Fr = u_0^2 / g x_0$ - число Фруда.

Выясним физический смысл полученных чисел подобия. Число Re , являющееся критерием режима течения среды в незамкнутых объемах, характеризует отношение сил инерции к силам вязкости. Число Eu представ-

ляет собой отношение потенциальной энергии к кинетической энергии потока, число гравитационного подобия Fr - отношение сил инерции к силам тяжести, а динамическое число Fo_v - отношение сил вязкости к локальной составляющей сил инерции.

Если безразмерное время определить как t/t_0 , то после преобразования уравнения (7.1) к безразмерной форме в первом слагаемом левой части получим безразмерную величину $Sh = x_0/t_0 u_0$. Она называется числом Струхала и характеризует отношение локальной составляющей сил инерции к конвективной. Аналогично числу Fo_v , число Sh характеризует нестационарность движения.

7.3 Тепловое подобие

Выясним условия теплового подобия на примере уравнения теплопереноса (5.84), записанного для несжимаемой двухкомпонентной жидкости при отсутствии химической реакции ($W_1 = 0$) и электрического тока в ней ($i = 0$):

$$\rho c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \vec{\nabla}) T \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \eta \text{Diss} \vec{U}. \quad (7.5)$$

Введем дополнительно безразмерные переменные величины: температура $\Theta = (T - T_{\max}) / (T_{\max} - T_{\min})$, время или тепловое число Фурье $Fo = at / x_0^2$, коэффициент теплопроводности $\ell = \lambda / \lambda_0$, где T_{\max} и T_{\min} - максимальная и минимальная температуры, достигаемые в какой-либо точке потока; λ_0 - масштаб коэффициента теплопроводности. Подставляя принятые безразмерные величины в уравнение (7.5), получим:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + \frac{u_0 x_0}{a} \left(\vec{V} \vec{\nabla} \right) \Theta = \text{div} \left(\ell \text{grad} \Theta \right) + \frac{u_0^2 \nu}{c_p (T_{\max} - T_{\min}) a} \text{Diss} \vec{V}. \quad (7.6)$$

Очевидно, что для подобия тепловых процессов необходимо соблюдать равенство чисел:
числа Пекле

$$Pe_T = u_0 x_0 / a, \quad (7.7)$$

выражающего отношение количеств тепла, переносимых конвективным и молекулярным путем;
числа Прандтля, явно содержащего лишь определяющие физические свойства среды величины

$$Pr = \nu / a, \quad (7.8)$$

и характеризующего отношение скоростных и температурных полей в потоке:

числа Эккерта

$$Ek = \frac{u_0^2}{c_p (T_{\max} - T_{\min})}, \quad (7.9)$$

выражающего отношение кинетической энергии и тепловой энергии потока; $Fo = at / x_0^2$ - число Фурье, характеризует нестационарность процесса теплопереноса.

С учетом обозначений (7.7) - (7.9) уравнение (7.6) примет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} + Pe \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \Theta = \text{div} \left(\ell \text{grad} \Theta \right) + Pr Ek \text{Diss} \vec{V}. \quad (7.10)$$

Для выполнения теплового подобия одинаковыми должны быть также начальные и граничные условия, записанные в безразмерном виде. Если на границе тела с окружающей средой задается ЛГУ-3, то в безразмерном виде оно запишется так:

$$-\left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \theta \right) \Big|_{\Gamma} = Bi (\theta - \theta_{cp}) \Big|_{\Gamma}, \quad (7.11)$$

где θ_{cp} - безразмерная температура среды; \vec{n} - безразмерная нормаль к поверхности тела;

$$Bi = \alpha x_0 / \lambda \quad (7.12)$$

- число Био, которое представляет собой отношение параметров, характеризующих интенсивность внешнего и внутреннего теплообмена или отношение внутреннего сопротивления к наружному. Поэтому чем больше величина Bi , тем больше интенсивность внешнего теплообмена по сравнению с интенсивностью внутреннего [24]. В (7.12) в качестве λ используется коэффициент теплопроводности материала стенки, которая контактирует с окружающей средой.

Если речь идет о расчете теплового потока от поверхности обтекаемого жидкостью (газом) тела - то такое условие, записанное в безразмерном виде, позволяет получить число Нуссельта:

$$Nu = \alpha x_0 / \lambda_{cp}, \quad (7.13)$$

где λ_{cp} - коэффициент теплопроводности жидкости (газа). Число характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела и кондуктивным (молекулярным) через слой жидкости толщиной x_0 . Числа Bi и Nu по структуре сходны, однако отличие состоит в том, что в последнее входит коэффициент теплопроводности жидкости (газа), а не твердого тела. Физический смысл у них также различный.

По существу, число Nu представляет собой безразмерный коэффициент теплоотдачи (или теплопередачи). Зная его, можно рассчитать для данно-

го тела поток тепла от его поверхности. Например, при продольном обтекании ламинарным потоком пластины [18].

$$Nu = 0,322 Pr^{1/3} Re^{1/2}. \quad (7.14)$$

В общем случае число Nu - функция чисел Pr и Re .

При теплообмене тела с окружающей средой излучение необходимо привлекать нелинейное граничное условие, которое в безразмерной форме имеет вид [27]:

$$-\left(\vec{n} \overset{0}{\nabla} \theta\right)\Big|_{\Gamma} = Sk(\theta - \theta_{cp})\Big|_{\Gamma}, \quad (7.15)$$

где Sk - число Старка,

$$Sk = \frac{x_0 \varepsilon_L \sigma}{\lambda} (T_{\Gamma}^2 + T_{cp}^2) (T_{\Gamma} - T_{cp}), \quad (7.16)$$

имеющее физический смысл, аналогичный критерию Био.

Решение задач теплопереноса в затвердевающем расплаве требует рассмотрения специальных граничных условий СГУ-1 на подвижной границе, которые в безразмерном виде запишем следующим образом:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_*+0} - \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_*-0} = K \frac{d\varepsilon}{dFo}, \quad (7.17)$$

где $d\varepsilon/dFo$ - безразмерная скорость продвижения фронта кристаллизации; Γ_* - граница раздела фаз, на которой $T_* = 0,5(T_L + T_c)$; T_L и T_c - температуры ликвидус и солидус расплава; критерий кристаллизации

$$K = \frac{L}{c_p (T^0 - T_c)}, \quad (7.18)$$

представляющий собой отношение скрытой теплоты фазового превращения к затратам тепла на нагрев тела от температуры солидус T_c до начальной температуры расплава T^0 .

Таким образом, для выполнения теплового подобия необходимо дополнительно обеспечить также равенства чисел Bi , Nu , Sk и K в натуре и на модели.

7.4 Диффузионное подобие

Методика получения чисел подобия для диффузионных процессов такая же, как для процессов переноса импульса и тепла. Приведем уравнение (6.36) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + Pe_{\mathcal{D}} \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) S = \overset{0}{\Delta} S, \quad (7.19)$$

где $S = C / C_0$ - безразмерная концентрация; C_0 - масштаб концентрации, например, начальное содержание примеси в расплаве; Fo_D - безразмерное время, или число Фурье диффузионное,

$$Fo_D = tD / x_0^2; \quad (7.20)$$

Pe_D - диффузионное число Пекле,

$$Pe_D = u_0 x_0 / D, \quad (7.21)$$

выражающее отношение количеств вещества, переносимых конвективным и молекулярным путем.

Видно, что число Pe_D по структуре и физической природе аналогично числам Re и тепловому числу Pe . Поэтому оно также характеризует структуру потока. При $Pe_D \gg 1$ конвективный перенос вещества превалирует над кондуктивным, а при $Pe_D \ll 1$, наоборот.

Если в качестве безразмерного времени выбрать тепловое число Фурье Fo , то уравнение массопереноса в критериальной форме запишется так:

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \nabla \right) S = Lu \Delta S, \quad (7.22)$$

где Lu - число Льюиса,

$$Lu = D / a, \quad (7.23)$$

содержащее лишь величины, определяющие физические свойства среды и характеризующие соотношение полей концентрации и температуры [18]. Поэтому при $Lu = 1$ эти поля будут подобными.

Комбинация чисел Re и Pe_D позволяет получить диффузионное число Pr_D , или так называемое число Шмидта

$$Sm = Pe_D / Re = \nu / D, \quad (7.24)$$

характеризующее соотношение между полями скорости и концентрации. Для газов величина $Sm \approx 1$, для воды и подобных ей жидкостей $Sm \approx 10^3$, для расплавов, включая жидкие металлы и шлаки, число $Sm \approx 10^2 + 10^4$ [25].

Решение конкретных задач массопереноса требует привлечения граничных условий. При этом часто применяется ЛГУ-3, которое в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$-\frac{\partial S}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = Nu_D (S - S_{cp}) \Big|_{\Gamma}, \quad (7.25)$$

где

$$Nu_D = \beta x_0 / D, \quad (7.26)$$

диффузионное число Нуссельта, представляющее собой безразмерный коэффициент массопередачи и позволяющее рассчитать поток вещества от поверхности обтекаемого тела.

На границе фазового перехода при затвердевании расплавов используется специальное граничное условие СГУ-2, которое в критериальной форме запишется так:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{D_1}{D_2} \frac{\partial S_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{*+0}} - \frac{\partial S_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{*-0}} = \frac{1}{Lu} S_2 \left(1 - k_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \frac{d\varepsilon}{dFo}. \quad (7.27)$$

7.5 Подобие при естественной конвекции

Постановка задачи естественной конвекции. Существует обширный класс практически важных задач, в которых разделение задачи на гидродинамическую, тепловую и диффузионную части невозможно, и поэтому соответствующие уравнения переноса импульса, тепла и массы необходимо решать совместно. К таким задачам относятся, в частности, задачи, связанные с расчетом полей скорости, температуры и концентрации при естественной термоконцентрационной конвекции в затвердевающем бинарном расплаве, например $Fe - C$.

Естественная конвекция в жидкости вызывается наличием в последней градиентов температуры и концентрации и вследствие этого - различием плотности различных участков жидкости. Градиент концентрации обусловлен различной зависимостью примеси в твердой и жидкой фазах, что приводит к накоплению ее у границ затвердевания расплава и деформированию диффузионного слоя. Участки жидкости с различной плотностью, в свою очередь, по-разному взаимодействуют с гравитационным полем Земли, что приводит к более или менее интенсивному перемешиванию жидкости. Более плотные объемы жидкости имеют тенденцию опускаться, менее плотные - подниматься. Это перемешивание, в свою очередь, оказывает влияние на поля температуры и концентрации. Поэтому в общем случае при исследовании термоконцентрационной конвекции приходится решать совместно уравнения движения и тепломассопереноса.

Формулировку задачи о естественной конвекции удобно осуществлять для условий, когда сжимаемость жидкости незначительна [26]. В этом случае весьма эффективным является приближение Буссинеска, сущность которого состоит в следующем: изменения плотности жидкости вследствие градиентов температуры и концентрации представляются достаточно малыми и ими можно пренебречь в уравнениях тепломассопереноса, в уравнении движения (6.62) эти изменения учитываются лишь в члене с подъемной архимедовой силой \vec{f} .

Вывод уравнения естественной конвекции, возникающей, например, при затвердевании бинарного расплава, целесообразно начать с упрощения уравнения состояния:

$$\rho = \rho(T, C, P). \quad (7.28)$$

Предполагая, что $\Delta T = T - T_C$, $\Delta C = C - C_0$, $\Delta P = P - P_0$, настолько малые, что вызываемые ими изменения плотности $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ малы по сравнению с ρ_0 , запишем уравнение (7.28) в виде ряда Тейлора [25, 26, 28 - 30]:

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{C_0 P_0} \Delta T + \left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{T_C P_0} \Delta C + \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_{T_C C_0} \Delta P + \dots, \quad (7.29)$$

где $\rho_0 = \rho(T_C, C_0, P_0)$ - известная величина плотности. Учитывая, что изменения плотности из-за неоднородности давления малы по сравнению с изменениями, обусловленными неоднородностью температуры и концентрации, из уравнения (7.29) имеем:

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T \Delta T - \beta_D \Delta C), \quad (7.30)$$

где β_T и β_D - тепловой и концентрационный коэффициенты объемного расширения,

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{C_0 P_0}; \quad \beta_D = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{T_C P_0}. \quad (7.31)$$

Введя в (7.1) вместо давления p некоторое приведенное давление \tilde{p} , отличающееся от p отсутствием аддитивной составляющей, пропорциональной гидростатическому давлению $\tilde{p} = p - \rho_0 |\vec{g}| Y$, уравнение движения с учетом (7.30) запишем в виде:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla\tilde{p} + \nu\Delta\vec{U} - \beta_T \Delta T \cdot \vec{g} - \beta_D \Delta C \cdot \vec{g}. \quad (7.32)$$

Уравнение теплопереноса (7.5) в соответствии с приближением Буссинеска и в пренебрежении диссипативным членом (так как скорости естественной конвекции обычно невелики) запишем так:

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)T \right] = \lambda \Delta T, \quad (7.33)$$

где λ - коэффициент теплопроводности среды (предполагается постоянной и определенной величиной).

Система уравнений (6.36), (7.32), (7.33) совместно с уравнениями неразрывности (6.23) представляет собой полную систему уравнений для расчета полей скорости, давления, температуры, концентрации при естественной термоконцентрационной конвекции в среде, например, в бинарном затвердевающем расплаве.

Критериальная форма записи уравнений термokonцентрационной конвекции. Переходя размерных величин к безразмерным в соответствии с приведенными ранее выражениями и используя критериальные обозначения соответствующих комбинаций физических величин, систему уравнений для термokonцентрационной конвекции запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) \vec{V} = -EuPe \overset{0}{\nabla} \tilde{\Pi} + Pr \overset{0}{\Delta} \vec{V} - \frac{Gr_T Pr^2}{Pe} \theta \vec{e}_g - \frac{Gr_D Pr^2}{Pe} (S-1) \vec{e}_g \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) \theta = \overset{0}{\Delta} \theta; \quad (7.35)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) S = Lu \overset{0}{\Delta} S; \quad (7.36)$$

$$\overset{0}{\nabla} \vec{V} = 0, \quad (7.37)$$

где

$$Gr_T = \frac{x_0^3}{\nu^2} g \beta_T \Delta T, \quad (7.38)$$

- тепловое число Грасгофа, характеризующее отношение подъемной силы, обусловленной изменением плотности жидкости вследствие изменения температуры, к силам вязкости;

$$Gr_D = \frac{x_0^3}{\nu^2} g \beta_D C_0, \quad (7.39)$$

- диффузионное число Грасгофа, характеризующее отношение подъемной силы, обусловленной изменением плотности за счет изменения концентрации примеси в жидкости, к силам вязкости.

Если в жидкости имеются частички (например, для твердой фазы в затвердевающем расплаве) с удельным весом, отличным от удельного веса среды, то критерием подобия будет динамическое число Грасгофа:

$$Gr_\Gamma = \frac{x_0^3}{\nu^2} g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho}. \quad (7.40)$$

В литературе в ряде случаев числа Грасгофа Gr_T , Gr_D и Gr_Γ именуют тепловым Ar_T , диффузионным Ar_D и динамическим Ar_Γ числами Архимеда [20, 21].

Таким образом, для подобия процессов переноса импульса, тепла и массы при естественной гравитационной конвекции должны быть одинаковыми не только числа Pe, Eu, Pr, Fo, Lu , но и числа Архимеда.

Практически для всех задач по естественной конвекции из физических соображений по существу не могут быть заранее заданы характерная скорость u_0 и характерное давление P_0 . Поэтому они определяются искусственно из соображений возможного упрощения системы уравнений (7.34) - (7.37). Полагая

$$Eu Re = 1, \quad Pe = 1, \quad (7.41)$$

получаем:

$$u_0 = a / x_0, \quad P_0 = \rho_0 a v / x_0^2. \quad (7.42)$$

С учетом условий (7.42) систему уравнений (7.34) - (7.36) запишем в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) \vec{V} = -Pr \overset{0}{\nabla} \tilde{\Pi} + Pr \overset{0}{\Delta} \vec{V} - Gr_T Pr^2 \theta \vec{e}_g - Gr_D Pr^2 (S-1) \vec{e}_g; \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) \theta = \overset{0}{\Delta} \theta; \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial S}{\partial Fo} + \left(\vec{V} \overset{0}{\nabla} \right) S = Lu \overset{0}{\Delta} S. \quad (7.45)$$

Такая запись уравнений имеет следующие преимущества. Во-первых, уравнение теплопереноса (7.44) теперь не содержит каких бы, то ни было параметров. Во-вторых, в том важном случае, когда движение можно считать достаточно медленным, в уравнении Навье - Стокса (7.43) можно отбросить инерционные члены:

$$\overset{0}{\nabla} \tilde{\pi} = \overset{0}{\Delta} \vec{V} - \left[Pr Gr_T \theta + Pr Gr_D (S-1) \right] \vec{e}_g. \quad (7.46)$$

Уравнение (7.46) содержит только параметры $Gr_T Pr$ и $Gr_D Pr$, которые могут быть названы тепловым и диффузионным числами Релея соответственно:

$$Ra_T = Gr_T Pr; \quad Ra_D = Gr_D Pr. \quad (7.47)$$

Числа Релея и определяют интенсивность движения жидкости. Таким образом, при относительно небольших значениях величин Ra_T и Ra_D , когда движение медленное, его характеристики не зависят от физических свойств жидкости и при одинаковых значениях Ra_T и Ra_D и одинаковых граничных условиях в безразмерной форме совершенно идентичны для малотеплопроводных ($Pr \gg 1$) и высокотеплопроводных ($Pr \ll 1$) жидкостей, например,

для расплавленных металлов $Pr \approx 0,2$ для расплавленной стали и $Pr \approx 0,02$ для расплавленного свинца [37].

В случае естественной конвекции при заданной конфигурации области исследования интенсивность теплоотдачи определяется функцией

$$Nu = f_1(Gr_T, Gr_D, Pr, Lu). \quad (7.48)$$

При смешанной конвекции [42], обусловленной взаимодействием вынужденного и естественного течений, добавляется еще число Re , тогда

$$Nu = f_2(Gr_T, Gr_D, Pr, Lu, Re). \quad (7.49)$$

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что основными критериями, определяющими интенсивность естественной конвекции, являются числа Грасгофа. Чем больше их величина, тем больше сила, возмущающая жидкость и приводящая ее в движение. Поэтому при естественной конвекции переход от ламинарного течения к турбулентному определяется не числом Рейнольдса, не имеющим в этих условиях реального физического смысла, а числом Грасгофа. При достаточно больших значениях числа Грасгофа происходит переход к турбулентному режиму движения.

Другие числа подобия. Иногда числа Грасгофа (7.38) - (7.40) представляются в виде произведения чисел Галилея [30]:

$$Ga = gx_0^3 / \nu^2 \quad (7.50)$$

и чисел $\bar{\rho} = \Delta\rho / \rho_0$ для тепловой, концентрационной и гравитационной конвекции соответственно:

$$\bar{\rho} = \beta_T \Delta T; \quad \bar{\rho}_D = \beta_D \Delta C; \quad \bar{\rho}_G = (\rho_1 - \rho_2) / \rho. \quad (7.51)$$

Число Релея в общем случае может быть записано как произведение

$$Ra = Ar Pr = Gr Pr. \quad (7.52)$$

В ряде задач, например при истечении струи расплава, из сталеразливочного устройства, определяющая роль принадлежит силам поверхностного натяжения [37]. От них зависит форма и устойчивость струи. В таких случаях особая роль отводится числу Вебера

$$We = \rho_0 u_0^2 x_0 / \sigma, \quad (7.53)$$

представляющему отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

Для задач термокапиллярного эффекта, обусловленного градиентом поверхностного натяжения на свободной неизотермической поверхности [35, 38], важное место отводится числу Марангони

$$Ma = \frac{\Delta T x_0}{\alpha \nu \rho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial T}, \quad (7.54)$$

выражающему отношение термокапиллярной силы и вязкости.

Пористая среда. В пористой среде, насыщенной неизотермической жидкостью, может возникнуть термофильтрационное течение. Отличительной особенностью уравнения фильтрационной конвекции от обычного уравнения конвекции (7.32) является то, что в него вместо ньютоновской силы вязкого трения входит сила сопротивления Дарси, пропорциональная скорости [37]:

$$\vec{f} = -\frac{\nu\rho_0}{k}\vec{U}. \quad (7.55)$$

Уравнение движения для термофильтрационного течения в пренебрежении нелинейными членами в ускорении (в связи с малостью величины скорости) в безразмерной форме может быть записано так:

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} = -EuPe^0 \nabla \tilde{\Pi} - \frac{Pr}{Da} \vec{V} + \frac{Gr Pr^2}{Pe} \theta \vec{e}_g, \quad (7.56)$$

где $\zeta = W/W_0$ – пористость среды, отношение объема ко всему объему макро- точки W_0 ;

$$Da = k / x_0^2, \quad (7.57)$$

- число Дарси, характеризующее интенсивность фильтрации жидкости в пористой среде.

7.6 Стационарная и нестационарная теплопроводность

Стационарная теплопроводность тел простейшей формы. Рассмотрим обобщенный метод решения одномерных краевых задач стационарной теплопроводности применительно к плоской, цилиндрической и шаровой стенкам [20].

Пусть температура является функцией одной координаты n - нормали к изотермическим поверхностям, внутренние источники теплоты отсутствуют и изотермические поверхности замкнуты. Тогда согласно закону Фурье тепловой поток

$$Q = -\lambda(T) \frac{dT}{dn} S(n), \quad (7.58)$$

где S - площадь изотермической поверхности.

Проинтегрировав уравнение (7.58) по T и n , получим:

$$Q = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT / \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}, \quad (7.59)$$

где T_1 и T_2 - температуры на внутренней S_1 и внешней S_2 поверхностях тела; n_1 и n_2 - нормали к S_1 и S_2 соответственно.

Величина

$$N_P = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}, \quad (7.60)$$

называется приведенной толщиной стенки. Тогда (7.59) примет вид:

$$Q = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT / N_P. \quad (7.61)$$

Полагая, что в уравнении (7.61)

$$\lambda = \lambda_0 (1 + bT), \quad (7.62)$$

получаем следующее выражение для теплового потока:

$$Q = \lambda_0 (T_1 - T_2) \left[1 + \frac{b}{2} (T_1 + T_2) \right] / N_P, \quad (7.63)$$

где λ_0 - коэффициент теплопроводности при 273 К; Вт/(м К);

b - температурный коэффициент теплопроводности, K^{-1} .

Проинтегрировав уравнение (7.58) в пределах от n_1 до n и от T_1 до T , определим распределение температуры в стенке:

$$T = \sqrt{(1/b + T_1)^2 - 2QN_{P_1} / (\lambda_0 b)} - 1/b. \quad (7.64)$$

Если $\lambda = const$, то

$$T - T_1 - (T_1 - T_2) N_{P_1} / N_P. \quad (7.65)$$

Плоская стенка. В этом случае $n = x$; $n_1 = 0$; $n_2 = \delta$; $S(n) = S = const$;

$$N_{P_1} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)} = \int_0^{\delta} \frac{X}{S} = \frac{X}{S}; \quad (7.66)$$

$$N_P = \frac{\delta}{S}. \quad (7.67)$$

В соответствии с формулами (7.61) и (7.64), получаем

$$Q = \lambda (T_1 - T_2) S / \delta; \quad (7.68)$$

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) X / \delta, \quad (7.69)$$

где δ / λ - тепловое (термическое) сопротивление стенки.

Цилиндрическая стенка. В этом случае параметры обобщенного решения равны:

$$n = r; \quad n_1 = r_1; \quad n_2 = r_2; \quad S(n) = 2\pi r l; \\ N_{P_1} = \int \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r}{r_1}; \quad N_P = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (7.70)$$

Для теплового потока и температуры получаем следующие выражения:

$$Q = 2\pi l \lambda (T_1 - T_2) / \ln (r_2 / r_1); \quad (7.71)$$

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \ln(r/r_1) / \ln(r_2/r_1), \quad (7.72)$$

где $(\ln r_2 / r_1) / 2\lambda$ - линейное термическое сопротивление цилиндрической стенки.

Для шаровой стенки: $n = r$; $n_1 = r_1$; $n_2 = r_2$; $S(n) = 4\pi r^2$;
 $N_{P_1} = (1/r_1 - 1/r) / 4\pi$; $N_P = (1/r_1 - 1/r_2) / 4\pi$.

С учетом обозначений приходим к формулам:

$$Q = 4\pi\lambda (T_1 - T_2) / (1/r_1 - 1/r_2); \quad (7.73)$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{1/r_1 - 1/r_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (7.74)$$

Теплопроводность полуограниченной однородной пластины. Пусть температурное поле пластины не меняется по ее толщине. Краевая задача стационарной теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0; \quad (7.75)$$

$$T|_{Y=0} = f(X); \quad (7.76)$$

$$T|_{X=0} = T|_{X=\delta} = T|_{Y \rightarrow \infty} = T_C, \quad (7.77)$$

где T_C - температура среды.

Введем замену $\theta = T - T_C$, краевая задача (7.75) - (7.77) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = 0; \quad (7.78)$$

$$\theta|_{Y=0} = F(X) = f(X) - T_C; \quad (7.79)$$

$$\theta|_{X=0} = \theta|_{X=\delta} = \theta|_{Y \rightarrow \infty} = 0. \quad (7.80)$$

Используем метод разделения переменных, положив

$$\theta = \varphi(X)\psi(Y). \quad (7.81)$$

Тогда уравнение (7.78) преобразуется к выражению

$$\frac{\varphi''(X)}{\varphi} = -\frac{\psi''(Y)}{\psi} = -k^2, \quad (7.82)$$

из которого получаются два дифференциальных уравнения:

$$\varphi''(X) + k^2\varphi(X) = 0; \quad (7.83)$$

$$\psi''(Y) + k^2\psi(Y) = 0. \quad (7.84)$$

Общее решение уравнений (7.83) и (7.84) имеют вид

$$\varphi(X) = C_1 \cos kX + C_2 \sin kX; \quad (7.85)$$

$$\psi(Y) = C_3 e^{kY} + C_4 e^{-kY}. \quad (7.86)$$

Из условий $\theta|_{X=0} = 0$, $\theta|_{Y \rightarrow \infty} = 0$ следует $C_1 = 0$, $C_3 = 0$.

Поэтому

$$\theta = Ce^{-ky} \sin kX.$$

Из условия $\theta|_{X=\delta} = 0$ имеем

$$\sin k\delta = 0.$$

Откуда

$$k = \frac{n\pi}{\delta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Общее решение ищем в виде

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi Y}{\delta}} \sin \frac{n\pi X}{\delta}.$$

Постоянные C_n определяем из условия (7.79):

$$F(X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi X}{\delta}. \quad (7.87)$$

Так как выражение (7.87) представляет собой разложение функции в ряд Фурье по синусам, то коэффициенты разложения определяем по формулам:

$$C_n = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta} F(X) \sin \frac{n\pi X}{\delta} dX.$$

Поэтому окончательное решение задачи имеет вид

$$\theta = \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi Y}{\delta}} \sin \frac{n\pi X}{\delta} \int_0^{\delta} F(X) \sin \frac{n\pi X}{\delta} dX. \quad (7.88)$$

Нестационарная теплопроводность. Метод Фурье. Пусть в области $\Omega = \Omega(X, Y, Z)$ сформулирована краевая задача нестационарной теплопроводности:

$$c(t)\rho(t) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda(X, Y, Z) \nabla T), \quad t > 0; \quad (7.89)$$

$$T|_{\Gamma} = 0; \quad T|_{t=0} = T^0(X, Y, Z). \quad (7.90)$$

Предположим, что частное решение задачи (7.89) - (7.90) можно представить, как произведение двух функций, одна из которых зависит только от времени $\varphi(t)$, другая - только от координат $\psi(X, Y, Z)$;

$$T(X, Y, Z, t) = A\varphi(t)\psi(X, Y, Z). \quad (7.91)$$

После подстановки решения (7.19) в уравнение (7.89) и разделения переменных задача сводится к двум дифференциальным уравнениям:

$$c(t)\rho(t) \frac{d\varphi}{dt} = -k^2\varphi(t); \quad (7.92)$$

$$\nabla(\lambda(X, Y, Z)\nabla\psi) = -k^2\psi, \quad (7.93)$$

где k^2 - постоянная разделения переменных.

Задача определения значений собственных чисел k_i^2 и соответствующих им собственных функций ψ_i , удовлетворяющих однородным граничным условиям $T|_{\Gamma} = 0$, называется задачей Штурма - Лиувилля.

В случае прямоугольной системы координат собственные функции имеют вид:

$$\psi_i = A_i \sin\left(\frac{n_1\pi X}{d_1}\right) \sin\left(\frac{n_2\pi Y}{d_2}\right) \sin\left(\frac{n_3\pi Z}{d_3}\right), \quad (7.94)$$

(где $A_i = \text{const}$, $n_i = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяют однородному граничному условию и дифференциальному уравнению

$$\Delta\psi_i = -k_i^2\psi_i; \quad k_i^2 = \pi^2 \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{d_i^2}. \quad (7.95)$$

Здесь d_i - размеры параллелепипеда Ω , в котором система функций ортонормированна, если положить

$$A_i = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{d_1 d_2 d_3}}. \quad (7.96)$$

Решение уравнения (7.92) находим обычным интегрированием:

$$\varphi_i(t) = \exp\left(-k_i^2 \int_0^t \frac{dt}{c(t)\rho(t)}\right). \quad (7.97)$$

Тогда общее решение уравнения (7.89) имеет вид:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \psi_i(X, Y, Z) \exp\left(-k_i^2 \int_0^t \frac{dt}{c(t)\rho(t)}\right), \quad (7.98)$$

где A_i определяем из начального условия (7.90),

$$A_i = \frac{1}{N_i^2} \int_{\Omega} \psi_i T^0(X, Y, Z) d\Omega; \quad (7.99)$$

N_i^2 - норма собственной функции,

$$N_i^2 = \int_{\Omega} \psi_i(X, Y, Z) d\Omega. \quad (7.100)$$

Охлаждение неограниченной пластины. Математическая формулировка задачи может быть записана так:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}, \quad 0 < X < \delta, \quad t > 0; \quad (7.101)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta^0 = T^0 - T_{cp} = F(X); \quad (7.102)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0; \quad (7.103)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \theta \Big|_{X=\delta}, \quad (7.104)$$

где; $\theta = T - T_{cp}$; T_{cp} - температура среды при $X = \delta$. Условие (7.103) соответствует идеальной теплоизоляции поверхности $X = 0$.

Частное решение (7.101) - (7.104) в соответствии с методом Фурье ищем в виде (7.91):

$$\theta = A\varphi(t)\psi(X). \quad (7.105)$$

После подстановки выражения (7.105) в уравнение (7.101) и разделения переменных, приходим к двум уравнениям:

$$\varphi'(t) + ak^2\varphi(t) = 0; \quad (7.106)$$

$$\psi''(X) + k^2\psi(X) = 0. \quad (7.107)$$

Решения этих уравнений запишем в виде функций:

$$\varphi(t) = C_1 e^{-ak^2 t}; \quad (7.108)$$

$$\psi(X) = C_2 \sin kX + C_3 \cos kX. \quad (7.109)$$

Частное решение имеет вид:

$$\theta = C_1 e^{-ak^2 t} (C_2 \sin kX + C_3 \cos kX). \quad (7.110)$$

Используя граничное условие (7.103), получаем $C_2 = 0$, а из условия (7.104) находим:

$$\operatorname{ctg} k\delta = \frac{k\delta}{\alpha \cdot \delta / \lambda} = \frac{k\delta}{Bi}, \quad (7.111)$$

где $Bi = \alpha\delta / \lambda$ - число Био, т.е. безразмерный коэффициент теплоотдачи. Пересечение котангенсоиды $\operatorname{ctg} k\delta$ с прямой $k\delta / Bi$ дает значения корней характеристического уравнения (7.111): $k_1\delta < k_2\delta < k_3\delta < \dots$. Тогда общее решение представляем в виде суммы бесконечного ряда:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos k_i X \cdot e^{-k_i^2 at}; \quad (7.112)$$

A_i определяем из начального условия (7.102)

$$\theta^0 = F(X) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos k_i X, \quad (7.113)$$

которое представляет собой разложение в ряд Фурье с заданными параметрами. Используя выражение (7.99), находим

$$A_i = \frac{k_i}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta} \int_{-\delta}^{\delta} F(X) \cos k_i X dX. \quad (7.114)$$

Общее решение запишем так:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta} \left[\int_{-\delta}^{\delta} F(X) \cos k_i X dX \right] \cos k_i X \cdot e^{-k_i^2 at}. \quad (7.115)$$

В частном случае равномерного распределения температуры при $t = 0$ (7.102) выражения для A_i будут следующими:

$$A_i = \frac{2\theta^0 \sin k_i \delta}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta}. \quad (7.116)$$

Тогда общее решение имеет вид:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\theta^0 \sin k_i \delta}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta} \cos k_i X \cdot e^{-k_i^2 at}. \quad (7.117)$$

В безразмерной форме это выражение запишем следующим образом:

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_i \delta}{k_i \delta + \sin k_i \delta \cos k_i \delta} \cos(\delta k_i X) \exp(-k_i^2 \delta^2 Fo), \quad (7.118)$$

где $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta^0}$; $Fo = \frac{at}{\delta^2}$.

8 ТЕПЛОПЕРЕНОС ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

8.1 Приближение пограничного слоя при тепловой конвекции

Рассмотрим пограничный слой, образующийся при внесении в неподвижную среду с температурой T_{\min} некоторого тела с температурой T_{\max} (рис. 8.1).

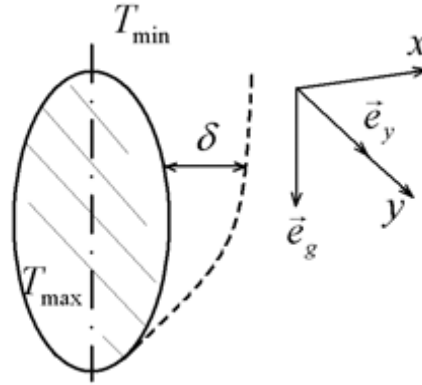


Рис. 8.1. Пограничный слой при естественной температурной конвекции

Наибольшие изменения скорости температуры имеют место в области динамического δ и теплового δ_T пограничных слоев. Толщины этих слоев значительно меньше характерного размера тела, т.е. выполняются следующие условия:

$$\delta \ll 1; \quad \delta_T \ll 1. \quad (8.1)$$

Уравнения тепловой конвекции (7.35) – (7.37) при условии $Re = 1$ в проекциях на оси координат (здесь вводится криволинейная система координат) запишем так:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial u}{\partial Fo} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gr \theta \sin(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y}); \quad (8.2)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v}{\partial Fo} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gr \theta \cos(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y}); \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pr \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \theta}{\partial y} \right); \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8.5)$$

где \vec{e}_g и \vec{e}_y - единичные орты, имеющие направление вектора ускорения свободного падения \vec{g} и оси Oy соответственно.

При записи системы уравнения (8.2) - (8.5) кривизной координатной сетки в пределах пограничного слоя пренебрегаем.

Оценим величины, входящие в уравнения (8.2) - (8.5), учитывая что:

$$x = O(\delta), \quad y = O(1), \quad \theta = O(1), \quad v = O(v_{\max}), \quad (8.6)$$

где v_{\max} - максимальное значение компоненты скорости, параллельной поверхности тела.

При оценке порядка величин учитывая также, что величина градиента давления $\partial\pi/\partial y$ мала по сравнению с основной движущей силой процесса - архимедовой силой:

$$Gr\theta \left| \cos(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y}) \right| \gg \left| \frac{\partial\pi}{\partial y} \right|; \quad (8.7)$$

здесь учтено, что $(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y}) = O(1)$ ввиду малости угла $(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y})$.

Из уравнения неразрывности (8.5) следует

$$u = O(\delta v_{\max}). \quad (8.8)$$

Далее получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = O(\delta v_{\max}^2). \quad (8.9)$$

Чтобы не пренебрегать нестационарностью процесса, следует положить в уравнении (8.2):

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial u}{\partial Fo} = O(\delta v_{\max}^2),$$

поэтому, учитывая (8.8), получаем следующую оценку:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial Fo} = O(v_{\max}). \quad (8.10)$$

С учетом оценок уравнение (8.2) преобразуем к виду:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial u}{\partial Fo} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial\pi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gr\theta \sin(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y}), \quad (8.11)$$

оно служит для расчета поля давления в погранслое и решается после решения уравнений движения и теплопереноса в приближении погранслоя, которые будут получены ниже из уравнений (8.3) и (8.4).

Инерционные члены в левой части уравнения (8.3) имеют порядок:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v}{\partial Fo} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = O(v_{\max}^2). \quad (8.12)$$

Оценка вязкостных слагаемых в этом уравнении дает:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\frac{v_{\max}}{\delta^2}\right) + O(v_{\max}) = O\left(\frac{v_{\max}}{\delta^2}\right). \quad (8.13)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Подставляя эти оценки (8.12), (8.13) в уравнение (8.3), а также учитывая неравенство (8.7), получим:

$$O(v_{\max}^2) = O\left(\frac{v_{\max}}{\delta^2}\right) + O(Gr).$$

Приближение пограничного слоя основывается на предположении одинаковой роли инерционных и вязкостных слагаемых, поэтому можно записать:

$$O(v_{\max}^2) = O\left(\frac{v_{\max}}{\delta^2}\right) = O(Gr).$$

Отсюда получаем

$$v_{\max} = O(\delta^{-2}); \quad v_{\max} = O(\sqrt{Gr}); \quad (8.14)$$

$$\delta = O\left(Gr^{-\frac{1}{4}}\right). \quad (8.15)$$

Из соотношений (8.14) и (8.15) следует, что увеличение числа приводит к уменьшению толщины погранслоя δ и увеличению скорости v_{\max} .

С учетом проведенных оценок уравнение (8.3) в приближении погранслоя запишем так:

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v}{\partial Fo} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Gr \theta \cos(\widehat{\vec{e}_g, \vec{e}_y}). \quad (8.16)$$

Оценим порядок членов в уравнении теплопереноса (8.4), учитывая, что $x = O(\delta_T)$, $\ell = \lambda / \lambda_0 = O(1)$.

Оценка членов правой части уравнения теплопереноса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) + O(1) = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

приводит к следующему неравенству:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \gg \frac{\partial}{\partial y} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \quad (8.17)$$

Оценка всех членов уравнения теплопереноса дает:

$$O(Pr v_{\max}) = O\left(\frac{1}{\delta_T^2}\right).$$

Откуда получаем

$$\delta_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{Pr v_{\max}}}\right). \quad (8.18)$$

Учитывая в соотношении (8.18) формулу (8.14), приходим к следующей зависимости:

$$\delta_T = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}^4 \sqrt{\text{Gr}}}\right). \quad (8.19)$$

Сопоставив выражения (8.15) и (8.19), получим соотношение между толщинами динамического и теплового пограничных слоев:

$$\delta_T = O\left(\frac{\delta}{\sqrt{\text{Pr}}}\right). \quad (8.20)$$

Таким образом, характер связи между δ и δ_T таков же, как и при градиентном течении жидкости [4, 33]. В случае $\text{Pr} = 1$ $\delta = \delta_T$, при $\text{Pr} \gg 1$ $\delta \gg \delta_T$, при $\text{Pr} \ll 1$ $\delta \ll \delta_T$. Из этого анализа при рассмотрении градиентного течения делаем вывод, что приближение пограничного слоя справедливо лишь для жидкостей с числом $\text{Pr} \gg 1$.

При анализе естественной конвекции в приближении пограничного слоя на величину числа $\text{Pr} \ll 1$ поле скорости, нужное для решения уравнения теплопереноса, вполне может быть получено из решения уравнений движения и неразрывности в более узком динамическом погранслое, так как за его пределами все составляющие скорости являются исчезающе малыми величинами в отличие от того, что имеем место при градиентном течении металлов.

Уравнение теплопереноса (8.4) с учетом оценки (8.17) в приближении погранслоя запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \text{Pr} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (8.21)$$

Уравнения (8.5), (8.16), и (8.21) представляют собой полную систему уравнений для определения полей Θ и \vec{V} при тепловой конвекции. Они могут быть преобразованы к виду, удобному для дальнейшего использования:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial v}{\partial Fo} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \text{Gr} \theta \cos(\vec{e}_g, \vec{e}_y); \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \text{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\theta) + \frac{\partial}{\partial y} (v\theta) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ell \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \quad (8.23)$$

8.2 Тепловая конвекция от холодной вертикальной пластины

Постановка задачи. Имеется погруженная в горячую жидкость холодная полубесконечная пластина (рис. 8.2), расположенная параллельно вектору силы тяжести. Температура пластины поддерживается постоянной

$T = T_{\min}$. Температура жидкости на большом удалении от пластины остается постоянной и равной T_{\max} . В качестве базисной температуры выберем $T = T_{\min}$, при которой будем считать определенными значения ρ_0 , c_p и ν . Безразмерную температуру зададим формулой

$$\theta = \frac{T_{\max} - T}{T_{\max} - T_{\min}}.$$

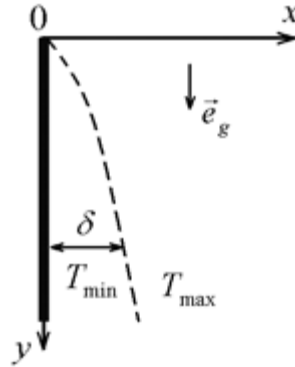


Рис. 8.2. Пограничный слой у вертикальной пластины

Рассматривая задачу в приближении погранслоя, воспользуемся уравнениями (8.5), (8.22), (8.23). Направление координаты y выбрано таким образом, что $\cos(\vec{e}_g, \vec{e}_y) = 1$. Процесс считается установившимся, т.е.

$$\frac{\partial v}{\partial Fo} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = 0.$$

Предполагаем, что коэффициент теплопроводности λ от температуры не зависит, поэтому $l = \lambda / \lambda_0 = 1$. С учетом принятых допущений система уравнений (8.5), (8.22), (8.23) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Gr\theta; \quad (8.24)$$

$$\text{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u\theta) + \frac{\partial}{\partial y}(v\theta) \right] = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (8.26)$$

Граничные условия:

$$u|_{x=0} = v|_{x=0} = v|_{x \rightarrow \infty} = \frac{\partial v}{\partial x}|_{x \rightarrow \infty} = 0; \quad (8.27)$$

$$\theta|_{x=0} = 1; \quad (8.28)$$

$$\theta|_{x \rightarrow \infty} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (8.29)$$

Решение задачи методом Кармана. Наиболее эффективным и простым методом поставленной задачи является метод Кармана [32], в соответствии, с которым принимаем, что отсутствие скорости и нулевая температура достигаются не при $x \rightarrow \infty$, а на конечном расстоянии δ от пластины. При этом в качестве δ выбираем наибольшую из толщин теплового δ_T и динамического δ пограничных слоев.

Величина δ будет зависеть от координаты y . Таким образом, взамен строгих граничных условий на бесконечность запишем приближенные на конечном расстоянии δ от пластины:

$$v|_{x=\delta(y)} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\delta(y)} = 0; \quad (8.30)$$

$$\theta|_{x=\delta(y)} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=\delta(y)} = 0. \quad (8.31)$$

Проинтегрируем уравнения (8.24) и (8.25) по координате x поперек погранслоя в пределах от 0 до $\delta(y)$ с учетом граничных условий (8.28) - (8.31):

$$\text{Pr} \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v\theta) dx + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad (8.32)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v^2) dx + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \text{Gr} \int_0^{\delta} \theta dx. \quad (8.33)$$

Учитывая граничные условия (8.30) - (8.31), покажем возможность перемены порядка действий интегрирования и дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta} v\theta dx = \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v\theta) dx + (v\theta) \Big|_{x=\delta} \frac{d\delta}{dy} = \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v\theta) dx;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta} v dx = \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v^2) dx + v^2 \Big|_{x=\delta} \frac{d\delta}{dy} = \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} (v^2) dx.$$

Поэтому уравнения (8.32) и (8.33) запишем так:

$$\text{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta} v\theta dx + \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad (8.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta} v^2 dx + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \text{Gr} \int_0^{\delta} \theta dx. \quad (8.35)$$

Профиль температуры и скорости постулируем в виде, удовлетворяющем граничным условиям:

$$\theta = (1 - x / \delta)^2; \quad (8.36)$$

$$v = A(y)x / \delta (1 - x / \delta)^2. \quad (8.37)$$

Таким образом, сводим задачу к нахождению неизвестных функций $A(y)$ и $\delta(y)$.

Определим интегралы и производные в уравнениях (8.34) и (8.35) с учетом выражений (8.36) и (8.37):

$$\int_0^{\delta} \theta dx = \delta / 3; \quad \int_0^{\delta} v \theta dx = A \delta / 30; \quad \int_0^{\delta} v dx = A^2 \delta / 105; \quad (8.38)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = -2 / \delta; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = A / \delta. \quad (8.39)$$

Подставляя выражения (8.38), (8.39) в уравнения (8.34), (8.35), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\text{Pr}}{30} \frac{\partial}{\partial y} (A \delta) = 2 / \delta; \quad (8.40)$$

$$\frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial y} (A^2 \delta) - \frac{A}{\delta} = \text{Gr} \frac{\delta}{3}. \quad (8.41)$$

Решение этих уравнений ищем в виде:

$$A = C_1 y^m; \quad \delta = C_2 y^n. \quad (8.42)$$

Подставляя выражения (8.42) в уравнения (8.40), (8.41), получаем:

$$\frac{\text{Pr}}{30} (m+n) C_1 C_2 y^{m+n-1} = \frac{2}{C_2} y^{-n}; \quad (8.43)$$

$$\frac{2m+n}{105} C_1^2 C_2 y^{2m+n-1} - \frac{C_1}{C_2} y^{m-n} = \text{Gr} \frac{C_2}{3} y^n. \quad (8.44)$$

Эти уравнения будут удовлетворяться при любых y в случае совпадения показателей степени при y :

$$m+n-1 = -n;$$

$$2m+n-1 = m-n; \quad m-n = n.$$

Из этих условий находим $m = 1/2$, $n = 1/4$. Учитывая найденные значения для m и n , уравнения (8.43) и (8.44) сведем к уравнениям относительно C_1 и C_2 :

$$\frac{\text{Pr}}{40} C_1 C_2 = \frac{2}{C_2}; \quad (8.45)$$

$$\frac{C_1^2 C_2}{84} + \frac{C_1}{C_2} = \frac{\text{Gr}}{3} C_2. \quad (8.46)$$

Решение уравнений (8.45), (8.46) дает выражения для C_1 и C_2 :

$$C_1 = 5,17Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad C_2 = 3,93Gr^{-\frac{1}{4}} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (8.47)$$

С учетом формул (8.47) и значений для m и n выражения (8.42) примут вид:

$$A = 5,17Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}; \quad (8.48)$$

$$\delta = 3,93Gr^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}. \quad (8.49)$$

Подставляя выражение (8.48) в формулу (8.37), получаем окончательную формулу для компоненты скорости v :

$$v = 5,17Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right)^2. \quad (8.50)$$

Таким образом, задача по определению поля скорости и температуры почти полностью решена.

Анализ решения. Определим v_{\max} из уравнения:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0,$$

где x^* - значение координаты, в которой скорость достигает максимального значения.

Отсюда, используя выражения (8.49) и (8.50), находим:

$$x^* = \frac{\delta}{3} = 1,31Gr^{-\frac{1}{4}} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда величина максимальной скорости

$$v_{\max} = 0,766Gr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}. \quad (8.51)$$

Из последнего выражения следует, что при $Pr \gg 1$ увеличение числа Pr уменьшает v_{\max} . При $Pr \ll 1$ изменение числа Pr очень слабо сказывается на величине v_{\max} , а в предельном случае при $Pr \rightarrow 0$ получаем

$$v_{\max} \Big|_{Pr \rightarrow 0} = 0,78Gr^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}. \quad (8.52)$$

С ростом числа Gr , скорость v_{\max} всегда увеличивается.

Введем безразмерный коэффициент теплоотдачи Nu , позволяющий оценить перенос тепла от потока к пластине:

$$Nu = 2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 1,16 Gr^{\frac{1}{4}} Pr^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}. \quad (8.53)$$

Из выражения (8.53) следует, что по мере удаления от верхнего конца пластины величина Nu уменьшается пропорционально $y^{-1/4}$.

С ростом числа Pr увеличивается тепловой поток к пластине пропорционально $Pr^{\frac{1}{4}}$ при $Pr \gg 1$ и пропорционально $Pr^{\frac{1}{2}}$ при $Pr \ll 1$. Поле $\frac{v}{v_{\max}}$, θ температур и распределение составляющей скорости v показано на рис. 8.3.

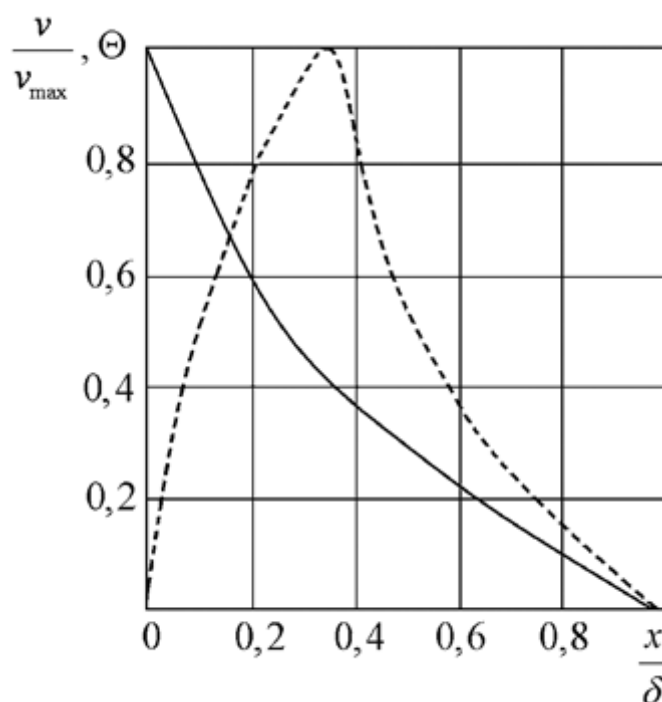


Рис. 8.3. Профили скорости (штриховая линия) и температуры (сплошная линия) в пограничном слое

8.3 Тепловая конвекция при затвердевании расплава в замкнутом объеме

Этот раздел отличается от предшествующих разделов тем, что задача тепловой конвекции в замкнутой области решается без привлечения какого-либо приближения или упрощения (например, приближение пограничного слоя идеальной жидкости или рассмотрение задачи в квазистационарном режиме и пр.). Это достигается путем широкого применения современных методов вычислительной гидродинамики и ЭВМ. Благодаря этому система нелинейных дифференциальных уравнений параболического и эллиптического типов, описывающая взаимообусловленные нестационарные процессы пере-

носа тепла и импульса в затвердевающем расплаве в условиях естественной конвекции, становится разрешимой.

Математическая модель процесса. Рассмотрим вертикальное сечение (рис. 8.4) прямоугольной бесконечной в направлении z области, заполненной в начальный момент времени расплавом с начальной температурой $T_0 > T_K$ (T_K - температура затвердевания расплава). Вследствие теплообмена с окружающей средой в момент времени, отличный от нуля, расплав начинает затвердевать от боковой и нижней стенок области. Процесс считается симметричным относительно вертикальной оси OY , поэтому рассматривается половина области. Затвердевание сверху отсутствует вследствие того, что расплав покрыт теплоизоляционным слоем, обеспечивающим идеальную теплоизоляцию этой части области.

Закон продвижения границы раздела фаз постулируется в виде $\varepsilon_i = l_i - \alpha_i \sqrt{Fo}$ (где $i = 1, 2$; α_i - коэффициенты затвердевания; $Fo = \frac{at}{x_0^2}$ - безразмерное время Фурье; x_0 - размер области, в данном случае это ее ширина; l_i - размер слитка; ε_i - размеры жидкой части области), что следует из решения задачи Стефана.

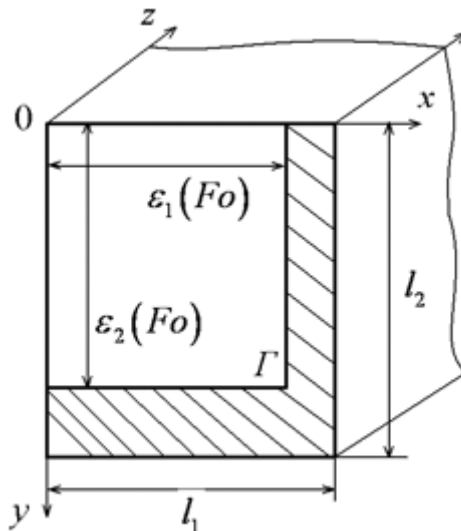


Рис. 8.4. Схема расчетной области

Теплообмен с окружающей средой приводит к возникновению в расплаве горизонтального градиента температуры и, как следствие, градиента плотности. Последний в условиях земного тяготения является причиной возникновения в жидком ядре затвердевающего слитка движения, которое называется термогравитационной, или естественной тепловой конвекцией.

Система уравнений, описывающая тепловую конвекцию, вытекает из системы уравнений (7.34) – (7.37) при условии отсутствия примеси в расплаве, т.е. при $S = 0$:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \nabla^0 \right) \vec{V} = -EuPe \nabla^0 \pi + Pr \Delta^0 \vec{V} + \frac{Gr Pr^2}{Pe} \theta \vec{e}_g ; \quad (8.54)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe \left(\vec{V} \nabla^0 \right) \theta = \Delta^0 \theta ; \quad (8.55)$$

$$\nabla^0 \vec{V} = 0 . \quad (8.56)$$

В дальнейшем критерии Eu и Pe исчезнут из рассмотрения, так как характерная скорость u_0 и характерная разность давления ΔP выбираются в виде

$$u_0 = \frac{a}{x_0} ; \quad \Delta P = \rho u_0^2 = \rho \frac{a^2}{x_0^2} ,$$

а также будут опущены кружочки над безразмерными операторами в уравнениях. Безразмерная температура θ в данной задаче изменяется в пределах $[0, 1]$, так как

$$\theta = \frac{T - T_K}{T_0 - T_K} .$$

Температура кристаллизации расплава T_K достигается лишь на границе раздела фаз, т.е. только на этих границах она является минимальной.

Формулировка математической модели завершается постановкой краевых условий для уравнений (8.54) - (8.56).

Начальные условия:

$$Fo = 0 ; \quad \theta = 1 ; \quad \vec{V} = 0 . \quad (8.57)$$

Граничные условия для скорости, выражающие условия прилипания на твердых стенках, непроницаемости стенок и симметрии на оси имеет вид:

$$u|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \vec{V}|_G = \vec{V}|_{y=0} = 0 . \quad (8.58)$$

Здесь G - граница раздела фаз (рис. 8.4).

Граничные условия для температуры:

$$\theta|_G = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 . \quad (8.59)$$

Переход к переменным функциям тока и вихрь скорости. Для дальнейшего решения задачи вводим функцию тока Ψ и вихрь скорости ω :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} ; \quad rot_z \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \omega . \quad (8.60)$$

С учетом (8.60) система уравнений (8.54)- (8.56) примет форму

$$\frac{\partial \omega}{\partial Fo} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \text{Pr} \Delta \omega - \text{Pr}^2 Gr \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (8.61)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \Delta \theta; \quad (8.62)$$

$$\Delta \Psi = -\omega. \quad (8.63)$$

Проведенные преобразования позволили исключить из рассмотрения давление и заменить две неизвестные величины для компонент скорости u и v на одну Ψ . Таким образом, задача свелась к решению уже не четырех уравнений, а трех относительно ω , θ и Ψ . Уравнение (8.61) представляет собой уравнение переноса вихря скорости и также как (8.62) является параболическим. Уравнение эллиптического типа (8.63) необходимо для определения функции тока. Оно является уравнением Пуассона.

Граничные условия с учетом (8.60) преобразуются следующим образом:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{x=\varepsilon_1} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{y=\varepsilon_2} = 0; \quad (8.64)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=\varepsilon_1} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=\varepsilon_2} = 0. \quad (8.65)$$

Из (8.64) путем интегрирования с точностью до константы, которую можно положить равной нулю, найдем граничное условие для функции тока:

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=\varepsilon_1} = \Psi|_{y=0} = \Psi|_{y=\varepsilon_2} = 0. \quad (8.66)$$

Граничные условия для вихря скорости могут быть получены из уравнения Пуассона (8.63) с учетом (8.64) и (8.65):

$$\omega|_{x=0} = 0; \quad \omega|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{y=0}; \quad \omega|_{x=\varepsilon_1} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{x=\varepsilon_1}. \quad (8.67)$$

Переход к области с неподвижными границами. При решении сформулированной задачи возникает необходимость поиска в каждый момент времени координат границ раздела фаз. Это требует проведения дополнительных процедур и соответственно дополнительных затрат машинного времени. Кроме того, определение положения границ раздела фаз осуществляется с погрешностью, которая может быть весьма значительной. Накопление такой ошибки иногда является причиной существенного отклонения численного решения от истинного или появления неустойчивости.

С целью избежания указанных недостатков целесообразно перейти к новым переменным (ξ_1, ξ_2) , позволяющим исследовать процесс в области с неподвижными границами:

$$\xi_1 = l_1 \frac{x}{\varepsilon_1}; \quad \xi_2 = l_2 \frac{y}{\varepsilon_2}; \quad 0 \leq \xi_i \leq l_i, \quad i = 1, 2. \quad (8.68)$$

Выполним некоторые вспомогательные преобразования производных, входящих в уравнения (8.61)- (8.63) с учетом (8.68):

$$\frac{\partial}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial Fo'} - \sum_{i=1}^2 e_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{k_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{k_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad (8.68)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = k_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = k_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \quad (8.70)$$

где $e_i = \xi_i \varepsilon_i'$, $\sqrt{k_i} = l_i / \varepsilon_i$.

С учетом $Fo = Fo'$ и преобразований (8.68) и (8.70) система уравнений (8.61)- (8.63) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial Fo} + \left(\sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} - \xi_1 l_1 \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi_1} - \left(\sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} + \xi_2 l_2 \right) \frac{\partial \omega}{\partial \xi_2} = \\ = \text{Pr} \Delta_1 \omega - \text{Pr}^2 Gr \sqrt{k_1} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} \end{aligned} \quad ; \quad (8.71)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \left(\sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} - \xi_1 e_1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} - \left(\sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} + \xi_2 e_2 \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2} = \Delta_1 \theta; \quad (8.72)$$

$$\omega = -\Delta_1 \Psi, \quad (8.73)$$

где

$$\Delta_1 = k_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}.$$

Запишем граничные условия для функции тока (8.65), (8.66), температуры (8.59) и вихря скорости (8.67) в новой системе координат (ξ_1, ξ_2) :

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=l_i} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=0} = \Psi \Big|_{\xi_i=0} = \Psi \Big|_{\xi_i=l_i} = 0; \quad (8.74)$$

$$\theta \Big|_{\xi_i=l_i} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_i=0} = 0; \quad (8.75)$$

$$\omega \Big|_{\xi_i=0} = 0; \quad \omega \Big|_{\xi_2=0} = -k_2 \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2=0}; \quad \omega \Big|_{\xi_i=\varepsilon_i} = -k_i \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_i^2} \right|_{\xi_i=\varepsilon_i}. \quad (8.76)$$

Конечно-разностная аппроксимация математической модели. Решить систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

(8.71) - (8.73) с краевыми условиями (8.57), (8.74) - (8.76) можно лишь численным путем. В связи с этим привлекается метод конечных разностей, как наиболее распространенный и развитый в настоящее время.

Применение конечно-разностной схемы требует замены области непрерывного изменения аргументов областью их дискретного изменения, а также формулировки конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений (8.71) - (8.73) и граничных условий (8.74) - (8.76).

Введем неравномерные временную Ω_τ и координатную Ω_h сетки:

$$\Omega_\tau = \left\{ Fo = \sum_n \tau_n, \quad n = 0, 1, \dots, N \right\};$$

$$\Omega_h = \begin{cases} \xi_1 = \sum_{i=1}^I h_i, \\ \xi_2 = \sum_{j=1}^J h_j. \end{cases}$$

Введение неравномерной сетки весьма удобно для проведения более точных исследований в тех областях, где функция претерпевает наиболее существенные изменения. В этих местах сетка сгущается при сохранении общего числа узлов. Последний факт наиболее значителен с точки зрения экономии и рационального использования машинного времени.

Первым шагом при выполнении конечно-разностной аппроксимации является проведение расщепления каждого двумерного уравнения (8.71), (8.72) на цепочку одномерных, т.е. в данном случае применяется локально-одномерная схема. Например, в результате расщепления уравнение теплопереноса (8.72) примет вид:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(k_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi_1} \right) + r_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi_1}; \quad (8.77)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(k_2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \xi_2} \right) + r_2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \xi_2}, \quad (8.78)$$

где $r_1 = \xi_1 l_1 - \sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2}$; $r_2 = \xi_2 l_2 + \sqrt{k_1 k_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1}$; θ , $\bar{\theta}$ и $\hat{\theta}$ - решения для температуры в моменты времени n , $n+0,5$ и $n+1$ соответственно.

Следующий шаг состоит в том, что для построения конечно-разностного аналога дифференциальных уравнений используется интегро-интерполяционный метод или метод баланса, позволяющий построить консервативную однородную разностную схему, которая обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения импульса и тепла в пределах исследуемой сеточной области. Наряду с этим А.А. Самарский рекомендует ис-

пользовать метод возмущенных коэффициентов κ , что обеспечивает построение монотонной схемы второго порядка точности, содержащей односторонние производные, учитывающие знак r :

$$\kappa = (1 + \text{Re}_h)^{-1},$$

где $\text{Re}_h = \frac{1}{k_i} 0,5 h_i |r|$ - разностное число Рейнольдса;

$$r = r^+ + r^-; \quad r^+ = 0,5(r + |r|) \geq 0; \quad r^- = 0,5(r - |r|) \leq 0.$$

Проиллюстрируем получение конечно-разностного аналога уравнений путем применения названных выше методов на примере расщепленного вдоль координаты ξ_1 уравнения теплопереноса (8.77):

$$\frac{\bar{\theta}_{ij} - \theta_{ij}}{\tau} = \frac{\kappa}{h_i} [K_{i+1} \bar{\theta}_{\xi_1} - K_i \bar{\theta}_{\xi_1}] + b_i^+ K_{i+1} \bar{\theta}_{\xi_1} + b^- K_i \bar{\theta}_{\xi_1}, \quad (8.79)$$

где $K_i = \left(\frac{1}{h_i} \int_{i-1}^i \frac{d\xi_1}{k_1} \right)^{-1} = k_1$; $\bar{h}_i = 0,5(h_{i+1} + h_i)$,

$$b^\pm = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{\xi_i - 0,5h_i}^{\xi_i + 0,5h_i} r^\pm(\xi_i) / k_1 d\xi_1 = \frac{h_i}{\bar{h}_i} \int_{0,5}^0 r^\pm(\xi_i + Sh_i) dS + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} \int_0^{0,5} r^\pm(\xi_i + Sh_i) dS = \frac{0,5}{k_1} \times$$

$$\times \left[\xi_i l_i - \sqrt{k_1 k_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \right)_i + l_1 \frac{h_{i+1} - h_i}{4} \pm \left| l_1 \left(\xi_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{4} \right) - \sqrt{k_1 k_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \right)_i \right| \right].$$

Учитывая, что $\bar{\theta}_{\xi_1}$ и $\bar{\theta}_{\xi_2}$ - правая и левая разностные производные, вычисляемые по формулам

$$\bar{\theta}_{\xi_1} = \frac{\bar{\theta}_{i+1,j} - \bar{\theta}_{i,j}}{h_{i+1}}; \quad \bar{\theta}_{\xi_2} = \frac{\bar{\theta}_{i,j} - \bar{\theta}_{i-1,j}}{h_i},$$

уравнение (8.79) преобразуем следующим образом:

$$\frac{k_1}{h_i} \left(\frac{\kappa}{\bar{h}_i} - b_i^- \right) \bar{\theta}_{i-1,j} - \left[\frac{k_1}{h_i} \left(\frac{\kappa}{\bar{h}_i} - b_i^- \right) + \frac{k_1}{h_{i+1}} \left(\frac{\kappa}{\bar{h}_i} + b_i^+ \right) + \frac{1}{\tau} \right] \bar{\theta}_{ij} + \frac{\bar{\theta}_{i+1,j}}{h_{i+1}} \left(\frac{\kappa}{h_i} + b_i^+ \right) \bar{\theta}_{i+1,j} =$$

$$= -\frac{\theta_{i,j}}{\tau}$$

Запишем предыдущее уравнение в каноническом виде, удобном для решения методом прогонки:

$$A_i \bar{\theta}_{i-1,j} - C_i \bar{\theta}_{ij} + B_i \bar{\theta}_{i+1,j} = -F_i; \quad (8.80)$$

где $A_i = \frac{k_1}{h_i} \left(\frac{\kappa}{h_i} - b_i^- \right)$; $B_i = \frac{k_i}{h_{i+1}} \left(\frac{\kappa}{h_i} + b_i^+ \right)$; $C_i = A_i + B_i + \frac{1}{\tau}$; $F_i = \theta_{ij} \frac{1}{\tau}$.

Следует отметить, что подобного рода выкладки выполняются и для уравнения переноса вихря скорости (8.71), которое также расщепляется на два одномерных и в конечном итоге, как и расщепленные уравнения теплопереноса (8.77), (8.78), приводятся к каноническому виду типа (8.80).

Анализ показывает, что в уравнении (8.80) $A_i > 0$, $B_i > 0$, $C_i \geq A_i + B_i$. Согласно [15] схема (8.80) относится к монотонной; она разрешима при любых h_i и r методом прогонки.

Одним из самых удобных методов решения системы алгебраических уравнений (8.80) является метод прогонки. Рассмотрим его сущность и получим формулы прогонки.

Предположим, что имеет место рекуррентное соотношение

$$\bar{\theta}_{i,j} = \alpha_{i+1} \bar{\theta}_{i+1,j} + \beta_{i+1}, \quad (8.81)$$

где α_{i+1} и β_{i+1} - неизвестные коэффициенты.

Кроме того, для уравнений (8.80) граничные условия записываются в общем виде:

$$\bar{\theta}_{0,j} = \kappa_1 \bar{\theta}_{1j} + \mu_1; \quad \bar{\theta}_{l,j} = \kappa_2 \bar{\theta}_{l-1,j} + \mu_2. \quad (8.82)$$

Выражения для $\bar{\theta}_{i-1,j} = \alpha_i \bar{\theta}_{ij} + \beta_i$ и (8.81) подставим в (8.80). Получим

$$\left[(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i \right] \bar{\theta}_{i+1} + A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i)_{\beta_{i+1}} = -F_i.$$

Это уравнение выполняется при любых $\bar{\theta}_i$, если

$$(A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i = 0; \quad A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - C_i)_{\beta_{i+1}} + F_i = 0.$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для α_{i+1} и β_{i+1} :

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}. \quad (8.83)$$

Определим начальные значения для α_i и β_i , используя (8.81) при $i = 0$:

$$\bar{\theta}_{0,j} = \alpha_1 \bar{\theta}_{1,j} + \beta_1. \quad (8.84)$$

Из сопоставления (8.84) с граничным условием (8.82) на левой границы имеем:

$$\alpha_1 = \kappa_1; \quad \beta_1 = \mu_1. \quad (8.85)$$

Таким образом, зная α_1 и β_1 и применяя формулы правой перегонки (8.83), определяем все прогоночные коэффициенты α_i и β_i .

Граничное значение $\bar{\theta}_{l,j}$ находится из решения системы двух уравнений

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{Ij} &= \kappa_2 \bar{\theta}_{I-1,j} + \mu_2; \\ \bar{\theta}_{I-1,j} &= \alpha_I \bar{\theta}_{Ij} + B_I.\end{aligned}$$

Откуда, если $I - \alpha_I \kappa_2 \neq 0$, то

$$\bar{\theta}_{Ij} = \frac{\mu_2 + \kappa_2 B_I}{1 - \alpha_I \kappa_2}. \quad (8.86)$$

Формулы (8.81) и (8.86) представляют собой формулы обратной прогонки, позволяющие определить значение $\bar{\theta}_{ij}$ при всех значениях i . А.А. Самарский доказал достаточные условия устойчивости методом прогонки:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|; \quad |\kappa_1| + |\kappa_2| < 2. \quad (8.87)$$

Выполнение первой половины этих условий устойчивости (8.87) обеспечивается всегда, как показано в подразделе 8.2. Удовлетворение второй половины условий устойчивости станет очевидным при рассмотрении материала подразделе 8.4.

Конечно-разностный аналог граничных условий. В сформулированной математической модели используются граничные условия первого рода, или условия Дирихле и граничные условия второго рода, или условия Неймана. Получение разностных аналогов для граничных условий Дирихле затруднений не вызывает. Граничные условия Неймана требуют при их аппроксимации представление функций в окрестности исследуемой границы области в виде рядов Тейлора.

Граничные условия (Дирихле) для функции тока (8.74) в разностном виде запишутся так:

$$\Psi_{i1} = \Psi_{Ij} = \Psi_{iJ} = \Psi_{1j} = 0. \quad (8.88)$$

Для температуры на оси симметрии используется граничное условие Неймана (8.75), поэтому, разлагая $\bar{\theta}_{2j}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $i = 1$, получим его разностный аналог:

$$\bar{\theta}_{2j} = \bar{\theta}_{1j} + h_1 \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi_1} \right)_{1j} + \frac{h_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \xi_1^2} \right)_{1j} + \dots \quad (8.89)$$

Учитывая, что $(\partial \bar{\theta} / \partial \xi_1)_{1j} = 0$ и определяя $(\partial^2 \bar{\theta} / \partial \xi_1^2)$ из уравнения (8.77), находим:

$$\bar{\theta}_{1j} = \frac{\bar{\theta}_{2j} + h_1^2 \theta_{1j} / 2\tau k_1}{1 + h_1^2 / 2\tau k_1}. \quad (8.90)$$

Из выражения (8.90) определяем с учетом (8.85) первые прогоночные коэффициенты:

$$\kappa_1 = \alpha_1 = \left(1 + \frac{h_1^2}{2\tau k_1}\right)^{-1} < 1; \quad \beta_1 = \alpha_1 \frac{h_1^2}{2\tau k_1} \theta_{1j}.$$

На правой границе имеем:

$$\bar{\theta}_{1j} = 0, \quad (8.91)$$

откуда, учитывая (8.82), получаем $\kappa_2 = \mu_2 = 0$.

Аналогичным образом можно получить разностные граничные условия для температуры на верхней и нижней границах исследуемой области.

Граничное условие для вихря скорости (8.67) на оси области имеет вид

$$\bar{\omega}_{1j} = 0. \quad (8.92)$$

Сопоставляя (8.92) и (8.84), находим $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

Чтобы получить разностное выражение граничного условия для вихря на правой границы, необходимо воспользоваться разложением функции тока $\Psi_{I-1,j}$ в окрестности точки $i = 1$:

$$\Psi_{I-1,j} = \Psi_{Ij} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i}\right)_{Ij} h_I + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2}\right) \frac{h_I^2}{2} - \dots$$

Учитывая, что $\Psi_{Ij} = (\partial \Psi / \partial \xi_1)_{Ij} = 0$ из (8.74), а также что $\bar{\omega}_{1j} = (\partial^2 \Psi / \partial \xi_1^2)_{Ij}$ из (8.76), получаем:

$$\omega_{Ij} = -\frac{2k_1 \Psi_{I-1,j}}{h_I^2}. \quad (8.93)$$

Из (8.93) определяем $\kappa_2 = \mu_2 = 0$.

На верхней и нижней границах области, используя разложение в ряд Тейлора, получаем граничные условия в разностном виде для вихря скорости, подобные (8.93).

Применение такой методики получения конечно-разностного аналога граничных условий позволяет аппроксимировать их, а следовательно, и всю математическую модель, со вторым порядком точности.

Решение уравнения Пуассона для функции тока. Решение уравнения Пуассона (8.73) интегрируем путем использования метода переменных направлений. Для этого запишем его в параболической форме:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau_1} = k_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2} + \omega, \quad (8.94)$$

где τ_1 - параметр релаксации.

Применение метода переменных направлений к (8.93) приводит к появлению следующих двух уравнений:

$$\frac{\Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}} - \Psi_{ij}^S}{0,5\tau_1} = k_1 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} \right)_{ij}^{S+\frac{1}{2}} + k_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2} \right)_{ij}^S + \omega_{ij}; \quad (8.95)$$

$$\frac{\Psi_{ij}^{S+1} - \Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}}}{0,5\tau_1} = k_1 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} \right)_{ij}^{S+1} + k_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2} \right)_{ij}^{S+\frac{1}{2}} + \omega_{ij}, \quad (8.96)$$

где S - номер итерации.

Дальнейшие выкладки проводятся на примере уравнения (8.95), так как для (8.96), они будут аналогичными.

Аппроксимируя вторую производную по ξ_1 на неравномерной сетке, запишем (8.95) в виде:

$$\frac{\Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}} - \Psi_{ij}^S}{0,5\tau_1} = k_1 \frac{1}{\hbar_i} \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^{S+\frac{1}{2}} - \Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}}}{\hbar_{i+1}} - \frac{\Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}} - \Psi_{i-1,j}^{S+\frac{1}{2}}}{\hbar_i} \right) + k_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_2^2} \right)_{ij}^S + \omega_{ij}.$$

Последнее уравнение приведем к каноническому виду, аналогичному (8.80):

$$\begin{aligned} & \frac{k_1}{\hbar_i \hbar_i} \Psi_{i-1,j}^{S+\frac{1}{2}} - \left(\frac{k_1}{\hbar_i \hbar_i} + \frac{k_1}{\hbar_i \hbar_{i+1}} + \frac{1}{0,5\tau} \right) \Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{\hbar_i \hbar_{i+1}} \Psi_{i+1,j}^{S+\frac{1}{2}} = \\ & = - \left(\frac{\Psi_{ij}^S}{0,5\tau_1} + k_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} \right)_{ij}^S + \omega_{ij} \right), \end{aligned}$$

или

$$A_\Psi \Psi_{i-1,j}^{S+\frac{1}{2}} - C_\Psi \Psi_{ij}^{S+\frac{1}{2}} + B_\Psi \Psi_{i+1,j}^{S+\frac{1}{2}} = -F_\Psi, \quad (8.97)$$

где $A_\Psi = \frac{k_1}{\hbar_i \hbar_i}$; $B_\Psi = \frac{k_1}{\hbar_i \hbar_{i+1}}$; $C_\Psi = A_\Psi + B_\Psi + \frac{1}{0,5\tau_1}$; $F_\Psi = \frac{\Psi_{ij}^S}{0,5\tau_1} + k_2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1^2} \right)_{ij}^S + \omega_{ij}$.

Система уравнений (8.97) с граничными условиями (8.88) разрешима методом прогонки, так как удовлетворяет достаточным условиям устойчивости этого метода (8.87).

Значение функции Ψ_{ij}^{S+1} на $(S+1)$ -м итерационном слое определяется при выполнении следующего неравенства:

$$\left| \frac{|\Psi_{i,j \max}^{S+1}| - |\Psi_{i,j \max}^S|}{|\Psi_{i,j \max}^{S+1}|} \right| < \varepsilon, \quad (8.98)$$

где ε - задаваемая точность итерации.

Анализ результатов численного исследования тепловой конвекции. Характер развития термогравитационной конвекции в жидком ядре затвердевающего стального слитка изучался в условиях, наиболее приближенных к реальным: начальный перегрев расплава $T_0 - T_K = 35^{\circ}C$; $Gr = 0,2 \times 10^{10}$; $x_0 = 3$ м; $l_2 = 2$; $Pr = 0,216$.

Расчет выполнялся на неравномерной пространственной сетке, шаги которой изменялись по следующему закону:

$$h_{i-1} = h_i + (I - i + 1)^2 g, \quad i = I, I-1, \dots, 2,$$

где g - множитель, получаемый из условия нормировки $\sum_{i=1}^I h_i = l_1$ и равный

$$g = \frac{12(l_1 - I h_I)}{I^2(I^2 - 1)}. \text{ Сетка выбиралась размером } \Omega_h = 32 \times 40.$$

Особенность такой сетки состоит в том, что она наиболее сгущена в областях, прилегающих к границам затвердевания. Таким образом, разрешающая способность сетки усилена в тех местах исследуемой области, где ожидается развитие наибольших градиентов скорости и температуры.

Закон продвижения границ раздела фаз задавался по формуле, полученной Е.М. Китаевым на основании обобщения ряда экспериментальных работ по исследованию кинетики затвердевания стального слитка. Используемая формула учитывает зависимость скорости продвижения границ затвердевания от конусности и соотношения сторон прямоугольного слитка.

Вследствие охлаждения расплава образуется горизонтальный градиент температуры, приводящий к нарушению состояния покоя и возникновению движения. Холодные слои расплава опускаются вдоль фронта затвердевания, а в центральной части слитка в результате неразрывности жидкости и ограниченности исследуемой области возникают восходящие потоки (рис. 8.5).

Дальнейшее развитие тепловой конвекции определяется особенностями взаимодействия теплового и гидродинамического полей и происходит в три этапа: разгон конвекции; снятие перегрева и «ползучего течения».

Стадия разгона конвекции характеризуется увеличением скорости движения расплава во всем объеме до максимального значения. Изменение максимальных значений вертикальной компоненты скорости «нисходящих» v_m^+ и «восходящих» v_m^- (на оси слитка) потоков может быть описано следующим приближенным выражением (рис. 8.6):

$$v_m^+ = 3,2 \cdot 10^7 Fo; \quad v_m^- = 3,2 \cdot 10^7 Fo^{1,4}. \quad (8.99)$$

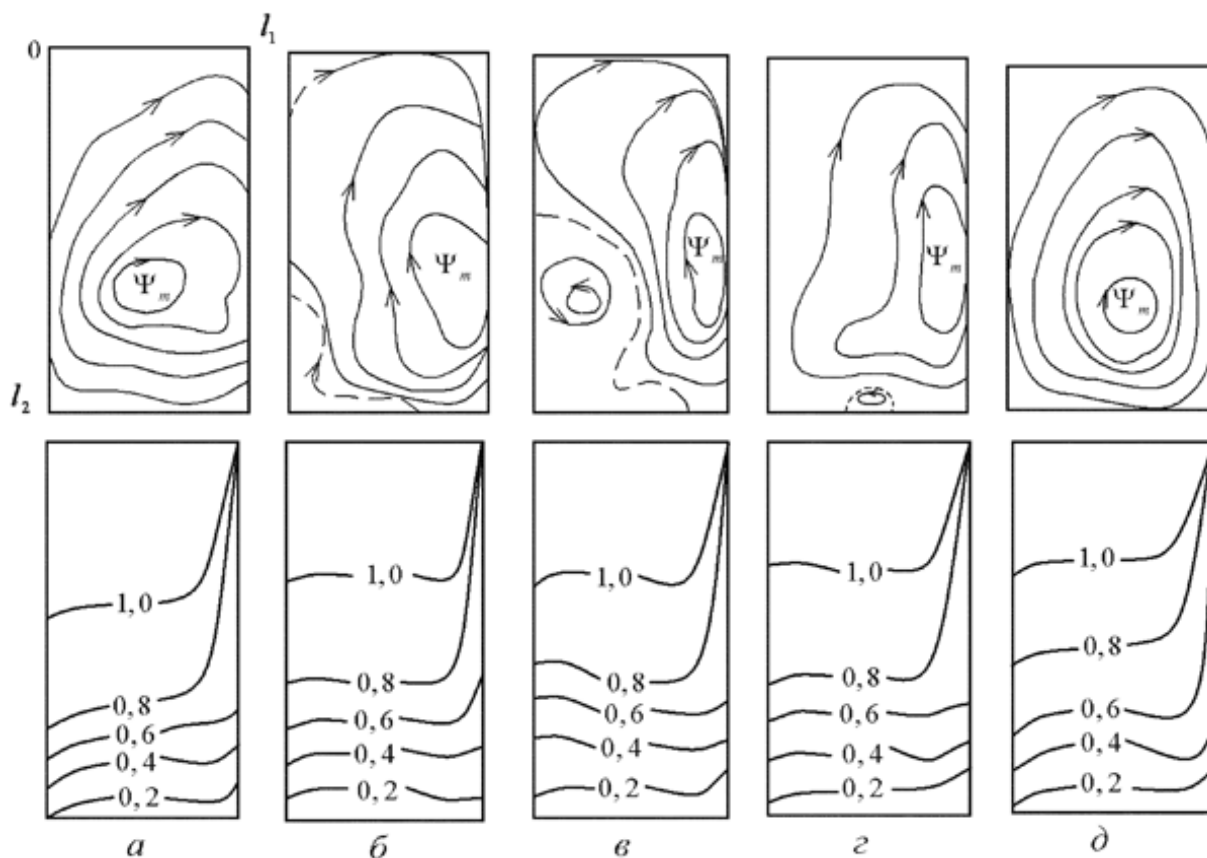


Рис. 8.5. Функции тока (вверху) и изотермы (внизу) в сечении расплава для этапа тепловой конвекции: а - $Fo = 0,0023$ б - $Fo = 0,0026$ в - $Fo = 0,0027$ г - $Fo = 0,003$ д - $Fo = 0,0032$; $\Delta\Psi = 40$; пунктирная линия соответствует $\Psi = 0$

Период разгона тепловой конвекции (до максимального значения скорости) $Fo_m = 0,0003$, что составляет 0,06% полного времени затвердевания слитка. За это время формируется тепловой и динамический пограничный слой у бокового фронта затвердевания (рис. 8.7).

С увеличением расстояния от верха к низу слитка вертикальная компонента скорости расплава в пограничном слое растет приблизительно до 0,75 высоты слитка, затем падает в связи с поворотом течения у дна области. Сравнение численных данных с известным решением Сквайра для значений v_m у полубесконечной вертикальной пластины (рис.8.8)

$$v_m = 0,766 Gr^{0,5} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-0,5} y^{0,5}, \quad (8.100)$$

позволяет сделать вывод об удовлетворительном совпадении полученного численного решения с аналитическим в промежутке изменения вертикальной координаты $0 \div 1,75$. Некоторые несовпадения результатов обусловлены, очевидно, несколькими причинами: ограниченностью объема, наличием восхо-

дящих потоков, наряду с нисходящими (рис. 8.9) нестационарностью процессов переноса тепла и импульса.

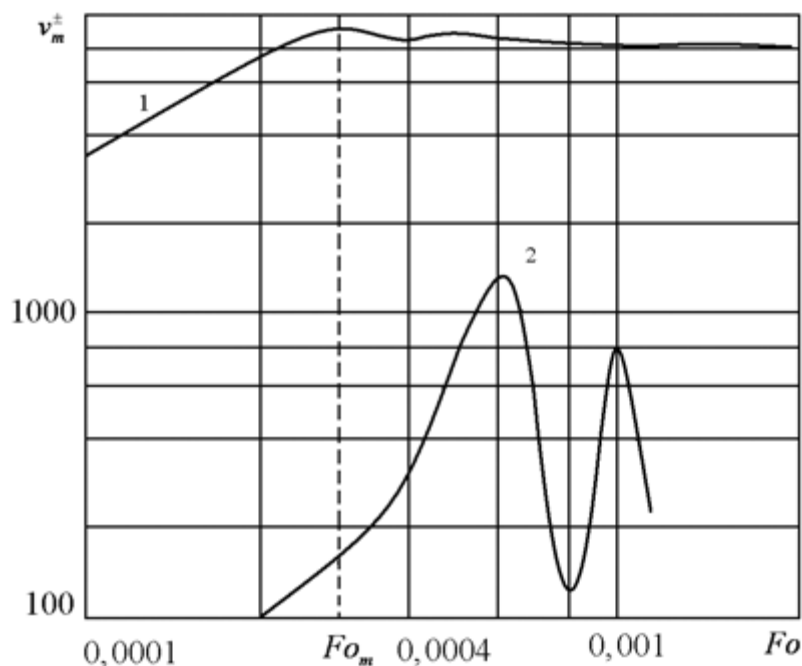


Рис. 8.6. Изменение во времени максимального значения вертикальной компоненты скорости: 1 - нисходящий поток; 2 - восходящий поток

Стадия снятия перегрева характеризуется немонотонным снижением температуры в осевой части области (рис. 8.10) и немонотонным уменьшением кинетической энергии расплава со временем. Имеющиеся на температурных кривых экстремумы по форме напоминают колебания, которые со временем распространяются в направлении к верхним сечениям области. Вертикальной компоненте скорости на оси области также присущ пульсирующий характер (рис. 8.10), где она изменяется со временем по величине и направлению. Последнее свидетельствует об образовании в осевой части слитка периодических возвратных течений, что подтверждается результатами, приведенными на рис. 8.5.

Изменение кинетической энергии расплава (рис. 8.10) свидетельствует о цикличности движения на фоне его общего снижения. Фазы одного такого цикла в соответствующие моменты времени приведены на рис. 8.5 (Ψ_m - максимальное значение функции тока, отмеченное точкой).

Рассмотрим механизм образования вторичных вихрей. Слои расплава, охлажденные у боковой стенки, приносятся потоком в осевую часть области (рис. 8.5, а). Вследствие этого температура там понижается и формируется градиент температуры, противоположно направленный первоначальному, и поэтому препятствующий движению расплава вверх (рис. 8.5, б). Скорость расплава в этой части уменьшается и в конечном итоге меняется направление, т.е. возникает дополнительное вихревое движение противоположного

знака (рис. 8.5, в). Последнее, по мере своего развития, приводит к выравниванию температуры в сечении жидкого ядра, что, в свою очередь, является уже причиной вырождения этого дополнительного возвратного течения (рис. 8.7, в). Исчезновение вихря сопровождается восстановлением первоначального градиента температуры, который стремится ускорить основное течение (рис. 8.5, д). Затем картина, описанная выше, повторяется.

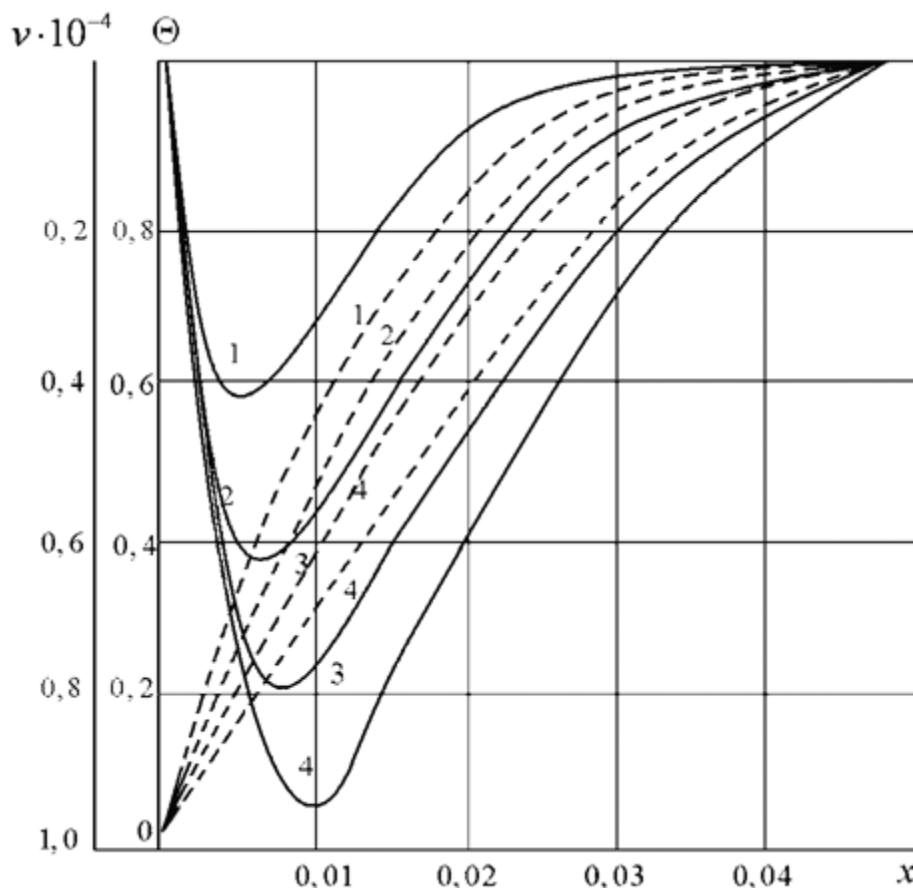


Рис. 8.7. Профили скорости и температуры в пограничном слое на этапе тепловой конвекции: 1 - $y = 0,4$; 2 - $y = 0,8$; 3 - $y = 1,2$; 4 - $y = 1,6$

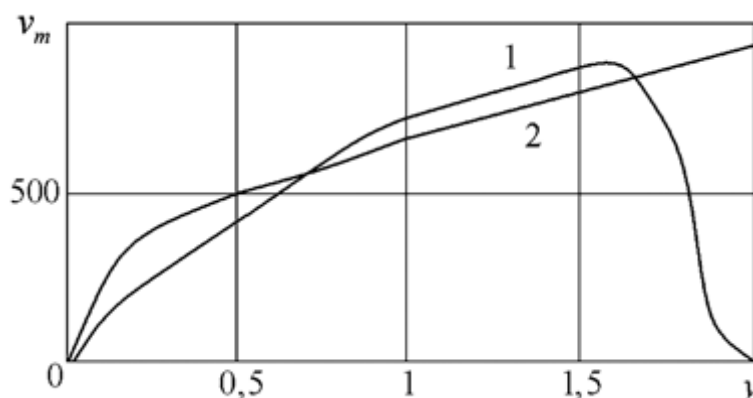


Рис. 8.8. Зависимость максимального значения вертикальной компоненты скорости в пограничном слое от вертикальной координаты: 1 - численный расчет; 2 - расчет по формуле (8.100)

Изменение кинетической энергии, скорости и температуры полностью соответствует фазам этого цикла. Таким образом, пульсирующий характер этих величин является естественным результатом конвективного теплопереноса.

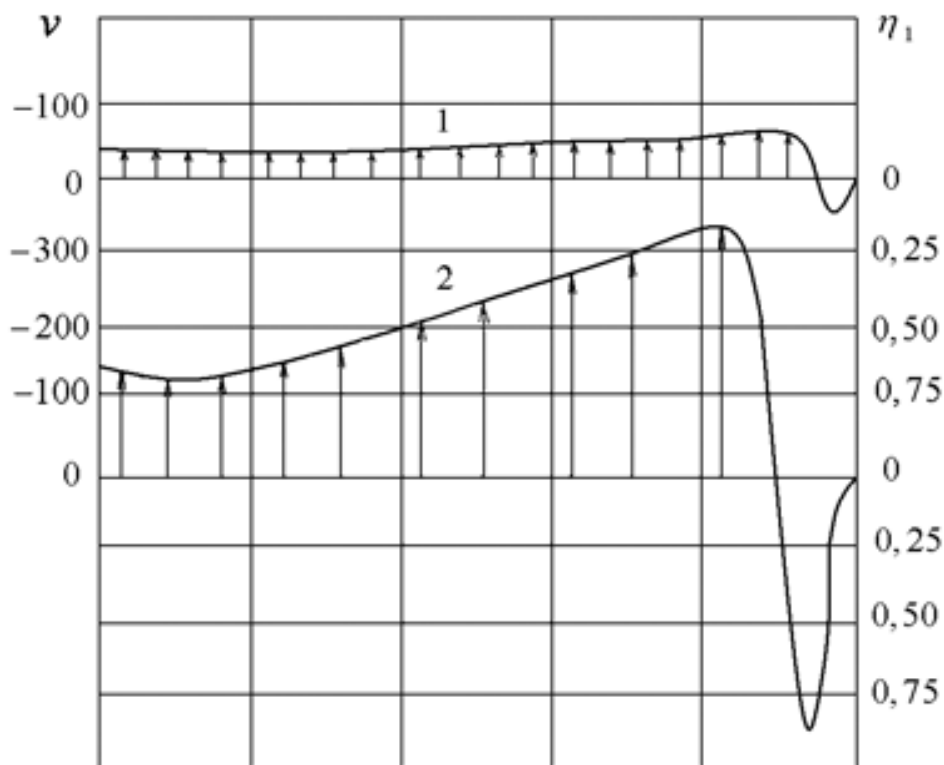


Рис. 8.9. Профили вертикальной компоненты скорости в момент времени $Fo = 0,0003$; 1 - $\eta_2 = 0,2$; 2 - $\eta_2 = 1,6$

В результате охлаждения расплава профили температур в горизонталях и вертикальных сечениях жидкого ядра изменяются со временем (рис. 8.11). Из анализа этих рисунков видно, что вторичные вихри возникают в области наибольших вертикальных градиентов температур. Поэтому вследствие перемещения этой области вверх в этом же направлении смещается центр вторичных вихрей.

На рис. 8.10 приведена зависимость безразмерной вертикальной компоненты скорости расплава от времени для разных значений параметра γ . Как видно, изменение скорости расплава носит колебательный характер с изменяющейся амплитудой колебаний. С течением времени период появления дополнительных вихрей увеличивается и, в конечном итоге, их возникновение прекращается. Наступает последняя стадия - стадия затухания тепловой конвекции, на которой скорость монотонно убывает вследствие вязкого трения. Эта стадия продолжается до полного затвердевания всей области.

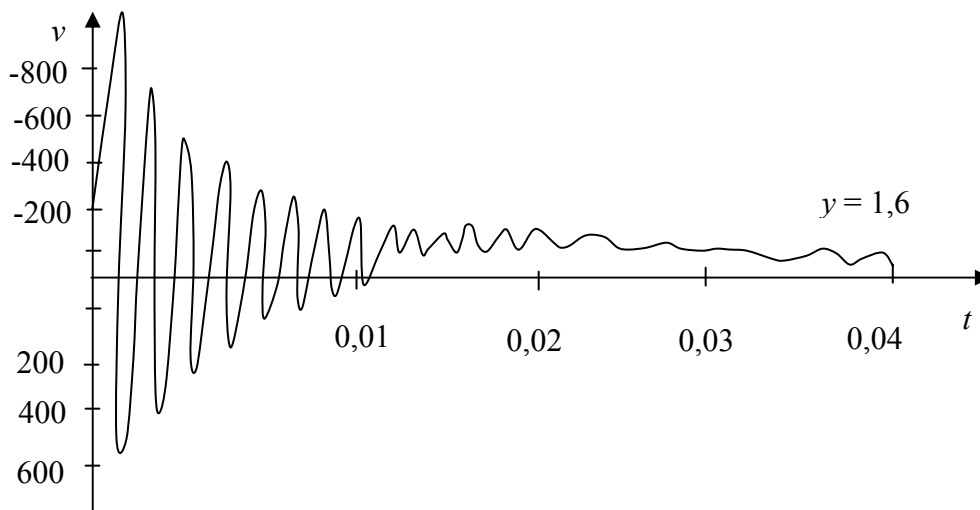
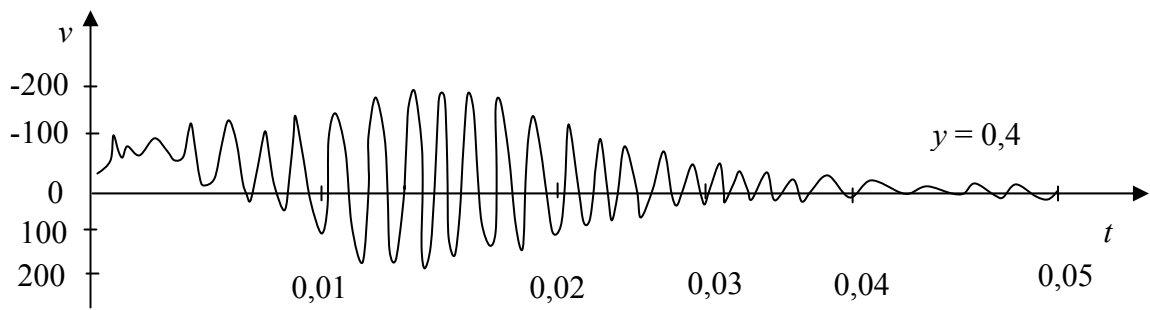


Рис. 8.10. Изменение во времени вертикальной компоненты скорости v на оси слитка при значениях $y = 0,4$ и $y = 1,6$

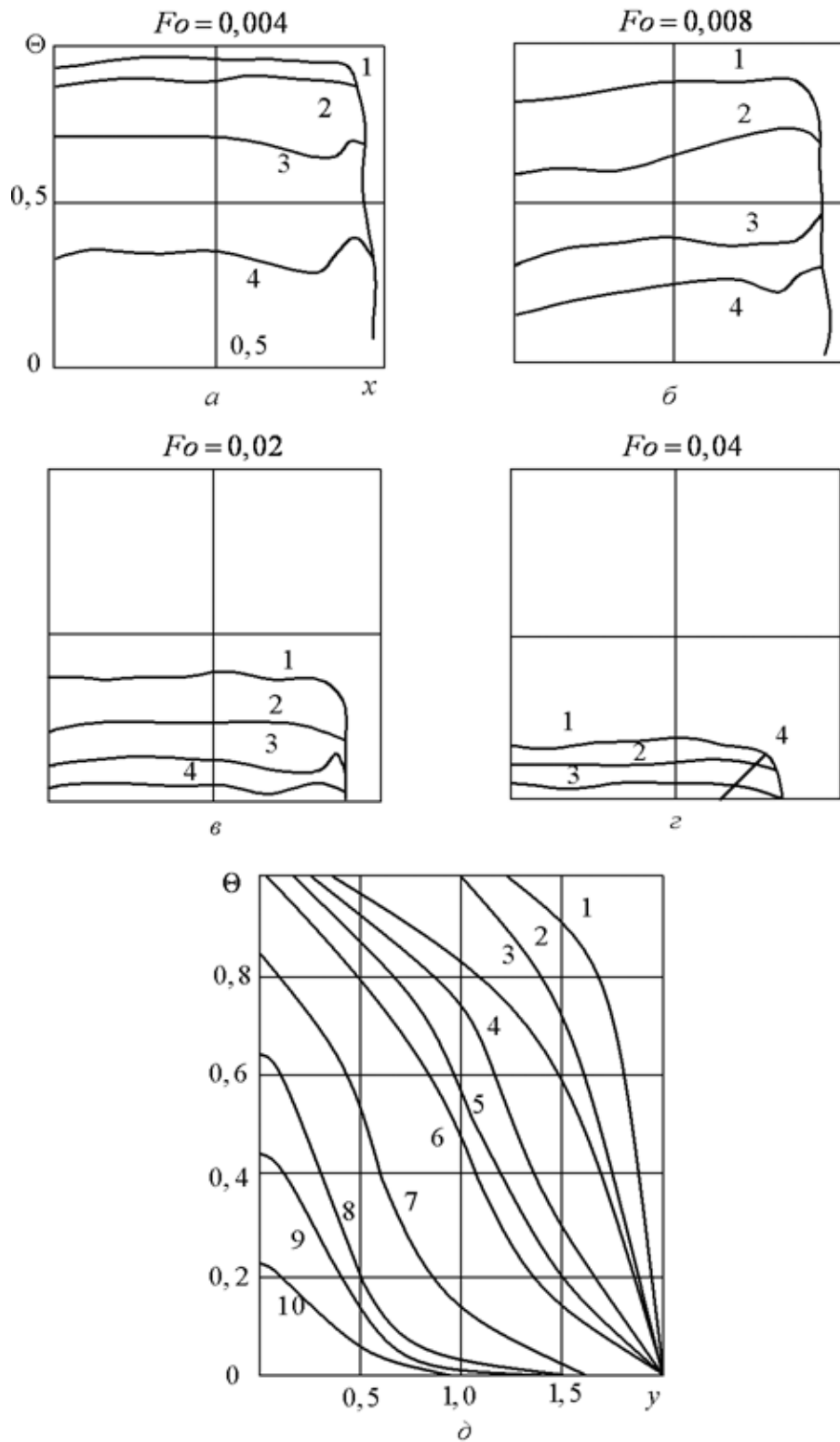


Рис. 8.11. Распределение температуры вдоль горизонтальной ($a - d$) и вертикальной (e) координат: $a - d - 1 - y = 0,4; 2 - y = 0,6; 3 - y = 1,2; 4 - y = 1,6;$
 $e - 1 - Fo = 0,001; 2 - 0,002; 3 - 0,004; 4 - 0,006; 5 - 0,008;$
 $6 - 0,01; 7 - 0,02; 8 - 0,03; 9 - 0,04; 10 - 0,5$

9 ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ РАСПЛАВА В ОБЛАСТЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

9.1 Обобщенная математическая модель процессов переноса при затвердевании бинарных расплавов

Затвердевание многокомпонентных расплавов при производстве слитков (отливок) в основном протекает так, что между образовавшейся твёрдой «корочкой» и жидким «ядром» существует промежуточная зона (рис. 9.1, а), называемая двухфазной. Она представляет собой гетерогенную смесь жидкой и твёрдой фаз, её образование является следствием развития концентрационного и кинетического переохлаждения.

Так как двухфазная зона (ДФЗ) вследствие обилия схем формирования кристаллической структуры слитков имеет весьма сложное и разнообразное строение, то наиболее приемлемым путём математического описания процессов переноса импульса, тепла и массы в ней является приближение усреднённых вложенных макроконтинуумов [16]. Этот подход обладает большей общностью и опирается на основные положения механики многофазных сред.

Учитывая сказанное, уравнение баланса для некоторой величины (плотности, внутренней энергии, концентрации, импульса и др.) после усреднения по макроточке W_0 (рис. 23.1, б) может быть представлено в размерном виде следующим образом:

$$\frac{\partial \langle z \rangle}{\partial t} + \frac{1}{W_0} \left[\int_{\Omega} \left[(z_2 \vec{U}_2 - z_1 \vec{U}_1) + (\bar{q}_2 - \bar{q}_1) + (z_1 - z_2) \vec{\varepsilon}' \right]_{\Omega} \times \right. \\ \left. \times \vec{n} d\Omega \right] + \nabla \langle z \vec{U} \rangle = -\nabla \langle \bar{q} \rangle + \langle Q \rangle \quad (9.1)$$

где $W_0 = W_1 + W_2$ - объём усреднения; W_1 и W_2 - объёмы твёрдой и жидкой фаз;

$\langle z \rangle = \frac{1}{W_0} \cdot \int_{W_0} z dW$ - среднеобъёмное значение функции z ; нижние индексы 1 и

2 соответствуют твёрдой и жидкой фазам; $\vec{\varepsilon}'$ - скорость продвижения границы раздела фаз; Ω - суммарная поверхность раздела фаз в объёме W_0 ; $z_i \vec{U}_i$, \bar{q}_i , z_i , ($i = 1, 2$) - значения конвективного потока, кондуктивного потока и искомой функции соответственно на поверхности раздела фаз Ω со стороны твёрдой и жидкой фаз; $\langle z \vec{U} \rangle$, $\langle \bar{q} \rangle$ и $\langle Q \rangle$ - среднеобъёмные значения конвективного потока, кондуктивного потока и мощности источников и стоков функции z (\bar{q} - в общем случае тензорная величина).

Уравнение (9.1) является модельным при выводе основных уравнений макроконтинуального состояния двухфазной зоны: неразрывности, теплопереноса, массопереноса и движения. В последующих выкладках при выводе

этих уравнений предполагается, что твёрдая фаза неподвижная и абсолютно жёсткая.

Полагая в (9.1) $\langle \rho \rangle_1 = \rho_1$, $\langle \rho \rangle_2 = \rho_2$, $\langle \bar{q} \rangle = \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$, $\langle Q \rangle = 0$, $z = \rho$, $\vec{U}_1 = 0$, а также учитывая уравнение баланса массы на поверхности раздела фаз Ω , получаем уравнение неразрывности для макроточки двухфазной зоны:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\zeta \rho_1 + (1 - \zeta) \rho_2] + \nabla \left[(1 - \zeta) \rho_2 \langle \vec{U} \rangle_2 \right] = 0, \quad (9.2)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \langle \vec{U} \rangle = 0, \quad (9.3)$$

где $\langle \rho \rangle_i = 1/W_i \cdot \int_{W_0} \rho dW$ - истинное среднеобъёмное значение плотности в i -й фазе; $\zeta = W_1/W_0$ - относительное содержание (доля) твёрдой фазы; $\rho = \zeta \rho_1 + (1 - \zeta) \rho_2$ - суммарная плотность; $\langle \vec{U} \rangle = (1 - \zeta) \rho_2 \langle \vec{U} \rangle_2 / \rho$ - среднемассовая скорость макроточки; $\langle \vec{U} \rangle_i = 1/W_i \cdot \int_{W_i} \vec{U} dW$ - истинное среднеобъёмное значение скорости в i -й фазе.

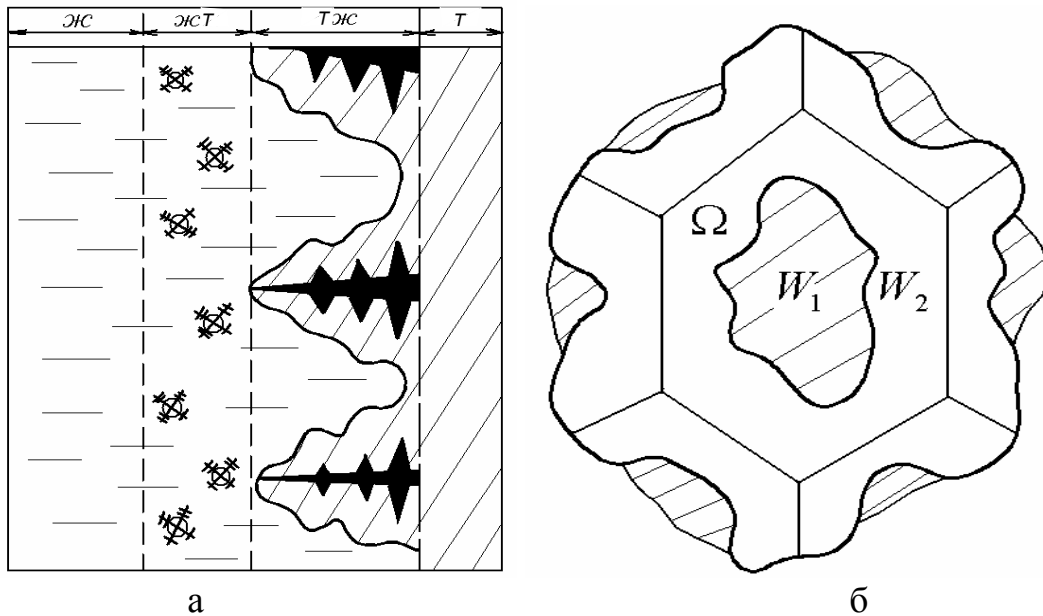


Рис. 9.1. Схема двухфазной зоны (а); объём усреднения (б);
 жс - жидкая фаза; жст - жидко-твёрдая зона;
 тжс - твёрдо-жидкая зона; т - твёрдая фаза

При выводе усредненного уравнения теплопереноса приняты следующие допущения.

Ввиду достаточно больших значений коэффициентов теплопереноса для металлов считаем, что в пределах каждой макроточки

$$T = \langle T \rangle_1 = \langle T \rangle_2,$$

и справедлив закон Фурье:

$$\langle \vec{q} \rangle = -\lambda_1 \zeta - \lambda_2 (1 - \zeta) \nabla T; \quad \vec{q}_i|_{\Omega} = -\lambda_i \nabla T_i|_{\Omega}.$$

Положив $z = \rho c T$, $\langle \vec{U}_1 \rangle = 0$, $Q \neq 0$, а также учитывая специальное граничное условие I-го рода, дополненное конвективным подводом тепла, модельное уравнение (9.1) трансформируем в уравнение теплопереноса для макроточки ДФЗ:

$$\left[(c_1 \rho_1 - c_2 \rho_2) \xi + c_2 \rho_2 \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla (c_2 \rho_2 T \langle \vec{U}_2 \rangle) = \nabla [(\lambda_1 - \lambda_2) \xi + \lambda_2] \nabla T + L \rho_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} \pm Q, \quad (9.4)$$

где $\langle \vec{U}_2 \rangle = 1/W_0 \cdot \int_{W_2} \vec{U} dW$ - среднеобъёмное значение скорости жидкой фазы;

$\pm Q$ - источники (джоулева тепла) и стоки тепла в детализованные окатыши и лигатуру при получении отливок электрошлакового переплава (ЭПШ).

Вывод усредненного уравнения массопереноса основывается на следующих допущениях:

- диффузия в твёрдой фазе пренебрежимо мала, а в жидкой в пределах макроточки протекает полностью:

$$D_1 = \partial C_1 / \partial t = 0, \quad \langle C \rangle_2 = C_2;$$

- в пределах макроточки на меж фазных границах концентрации примеси для твёрдой и жидкой фаз связаны равновесным коэффициентом распределения:

$$\rho_1 C_1|_{\Omega} = k_0 \rho_2 C_2|_{\Omega};$$

- в пределах макроточки справедлив закон Фика:

$$\langle \vec{q} \rangle = -D_1 \zeta \nabla \langle C \rangle_1 - D_2 (1 - \zeta) \nabla \langle C \rangle_2, \quad \vec{q}_i|_{\Omega} = -D_i \nabla C_i|_{\Omega}.$$

Далее, положив $z = C$, $Q = \vec{U}_1 = 0$, а также учитывая специальное граничное условие 2-го рода, дополненное конвективным переносом примеси, получаем из (9.1) уравнение массопереноса для макроточки ДФЗ:

$$(1 - \zeta) \frac{\partial C_2}{\partial t} + \nabla (C_2 \langle \vec{U}_2 \rangle) = \nabla [D_2 (1 - \zeta) \nabla C_2] + \left(1 - k_0 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) C_2 \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (9.5)$$

Вывод усредненного по макроточке уравнения движения выполняется на базе модельного уравнения (9.1) при следующих предположениях:

- твёрдая фаза неподвижна и недеформируема, т.е.

$$\langle z_1 \rangle = \langle (\rho \vec{U})_1 \rangle = 0, \quad \langle z \rangle = \langle z_2 \rangle = \langle (\rho \vec{U})_2 \rangle, \quad z_1|_{\Omega} = \vec{q}_1|_{\Omega} = 0;$$

для потока фиктивного расплава, введенного в соответствие с принятым приближением взаимопроникающих континуумов, справедлив обобщенный закон Ньютона, устанавливающий линейную связь между тензором скоростей деформаций $\left(Grad \vec{U}_2\right)^S$ и тензором напряжений $\overline{\overline{\Pi}}_b$:

$$\langle q \rangle = \langle q_2 \rangle = \left\langle (p\overline{\delta} + \overline{\overline{\Pi}}_b)_2 \right\rangle = \left\langle (p\overline{\delta} - 2\nu\rho(Grad \vec{U})^S)_2 \right\rangle,$$

где p - давление; $\overline{\delta}$ - единичный тензор Кронеккера;

- на межфазной границе выполняется условие непроницаемости

$$z_2|_{\Omega} = \vec{n}\rho_2\vec{U}_2|_{\Omega} = 0;$$

источниками (стоками) в данном случае являются гравитационная и электромагнитная силы

$$\langle Q \rangle = \vec{g}\langle\rho_2\rangle + \langle(\vec{j} \times \vec{B})_2\rangle.$$

Кроме того, следует добавить, что поверхностный интеграл

$$\frac{1}{W_0} \int_{\Omega} \overline{q}_2 \vec{n}|_{\Omega} \cdot \varepsilon' d\Omega = \frac{1}{W_0} \int_{\Omega} \left(p\overline{\delta} - 2\nu\rho_2 \left(Grad \vec{U}_2 \right)^S \right) \vec{n}|_{\Omega} \cdot \varepsilon' d\Omega,$$

выражает силу, с которой жидкость в пределах ДФЗ действует на дендритный каркас, и согласно А.В. Лыкову [13] приводит к появлению в усредненном уравнении движения члена, характеризующего фильтрационное течение расплава.

Учитывая сказанное, усредненное уравнение движения в форме Навье-Стокса запишем следующим образом:

$$\rho_2 \left[\frac{\partial \langle \vec{U}_2 \rangle}{\partial t} + \left(\langle \vec{U}_2 \rangle \nabla \right) \langle \vec{U}_2 \rangle \right] = -\nabla \langle p \rangle + \mu \Delta \langle \vec{U}_2 \rangle - \frac{\mu}{k(\xi)} \langle \vec{U}_2 \rangle + \vec{g} \langle \rho_2 \rangle + \langle (\vec{j} \times \vec{B})_2 \rangle, \quad (9.6)$$

где μ - коэффициент динамической вязкости (в общем случае функция дисперсности среды).

Для определения составляющей электромагнитной силы используем усредненные уравнения магнитной индукции

$$\frac{\partial \langle \vec{B}_2 \rangle}{\partial t} = rot \langle (\vec{U} \times \vec{B}_2) \rangle + \frac{1}{\mu_M^k} \Delta \langle \vec{B}_2 \rangle, \quad (9.7)$$

и баланса электрических зарядов

$$div(\vec{j}_2) = 0, \quad (9.8)$$

Система уравнений (9.3) - (9.8) замыкается уравнением линии ликвидус на равновесной диаграмме состояния $Fe - C$ в соответствии с теорией квази-

равновесной ДФЗ В.Т. Борисова, устанавливающей связь между концентрацией и температурой в жидкой части ДФЗ:

$$T_2 = -\alpha C_2 + T_k, \quad (9.9)$$

где α - тангенс угла наклона линии ликвидус на диаграмме состояния.

Последующее рассмотрение математической модели, в частности её гидродинамической части, целесообразно вести с позиции приложения её к конкретному объекту. В данной работе к таким объектам относятся: 1) слитки, отливаемые в изложницы (рис. 9.2), и отливки, отливаемые в песчаные формы (массой $m \geq 2$ т); 2) мелкие фасонные отливки (рис. 9.3, а-б) при литье по выплавляемым моделям (ЛВМ) ($m \leq 0,2$ кг); 3) отливки ЭПШ ($m = 30 \div 40$ кг и более) (рис. 9.3, в). Анализ показывает, что в каждой из групп литых изделий при их затвердевании причины, определяющие движение расплава, могут быть различными.

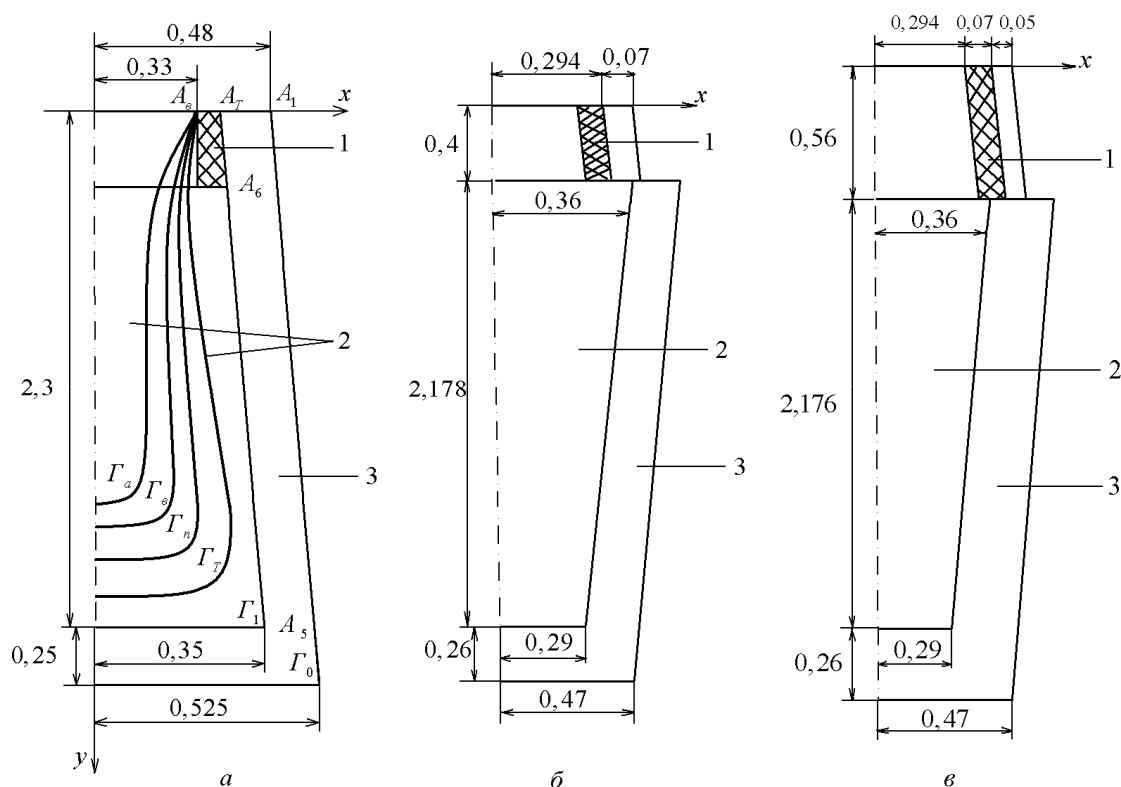


Рис. 9.2. Схема рассматриваемых слитков: а - уширенный снизу; б и в - уширенный сверху; футерован материал вкладышей и шамотным кирпичом соответственно; 1 - утепляющий вкладыш (футеровка); 2 - затвердевающий слиток; 3 - изложница

В первой группе литых изделий гидродинамическую обстановку при затвердевании определяют тепловая и концентрационная конвекции. Здесь $Ra = Gr Pr \geq 10^3$ и поэтому влияние конвекции на теплообмен может быть су-

ществленным. Вклад же фильтрационного движения за счет фазовой усадки в суммарную картину течения, вследствие малых величин скорости фильтрации, весьма незначителен.

Во второй группе изделий роль термоконцентрационной конвекции в жидком ядре сводится практически к нулю. Величина $Ra \approx 10^3 \div 10^4$ и поэтому влияние указанного вида конвекции на теплообмен в мелкой отливке пренебрежимо мало. Однако при этом повышается роль фильтрационного течения внутри ДФЗ, которое может быть определяющим при формировании пористости в отливке.

В третьей группе изделий (отливки ЭСП) основной причиной движения расплава является электромагнитная сила, роль тепловой конвекции и тем более, фазовой усадки менее значительна.

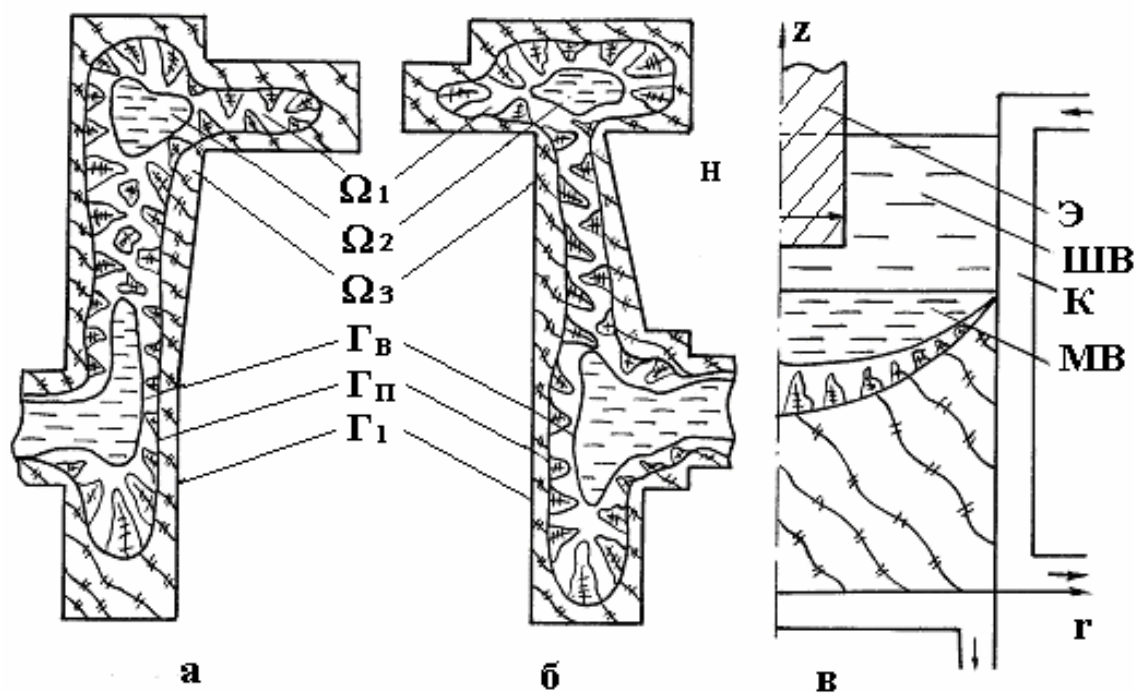


Рис. 9.3. Схема исследуемых областей:
 а и б - элементы затвердевающей фасонной отливки при ЛВМ;
 в - затвердевающая отливка ЭСП

9.2 Теплоперенос в расплаве при наполнении литейных форм

Гидродинамические и тепло физические процессы при наполнении расплавом изложниц и литейных форм описываются уравнениями движения в форме Навье-Стокса, теплопереноса и неразрывности:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Fo} + Pe(\vec{V} \overset{\circ}{\nabla}) \vec{V} = -EuPe \overset{\circ}{\nabla} \tilde{\pi} + Pr_3 \Delta \vec{V} + \vec{e}_y \frac{Gr_T Pr^2}{Pe} \theta, \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe(\vec{V} \overset{\circ}{\nabla}) \theta = \frac{a_3}{a_2} \overset{\circ}{\Delta} \theta; \quad (9.11)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \vec{V} = 0, \quad (9.12)$$

где \vec{e}_y - единичный вектор, совпадающий с направлением вектора ускорения свободного падения; $Pr_3 = Pr \nu_3 / \nu$; ν_3 - эффективное (кажущееся) значение кинематического коэффициента вязкости, учитывающее приближенно молекулярный и турбулентный перенос импульса; a_3 - эффективное значение коэффициента температуропроводности, учитывающий молекулярный и турбулентный перенос тепла.

Система уравнений (9.10) - (9.12) сформулирована в предположении отсутствия перераспределения примеси и образования твёрдой корочки ввиду кратковременности процесса разлива. Поэтому она может быть получена из обобщённой модели при $\langle C \rangle_1 = \langle C \rangle_2 = 0$, $\xi = 0$, $\vec{j} = 0$, $\vec{B} = 0$.

Процессы теплопроводности в стенках изложницы и литейной формы описываются уравнением теплопроводности, которое следует из (9.11):

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{a_3}{a_2} \overset{\circ}{\Delta} \theta. \quad (9.13)$$

Для гидродинамических задач в замкнутых объёмах из физических соображений не могут быть заранее заданы характерные скорость и разность давлений, поэтому они определяются искусственно из соображений возможного упрощения системы уравнений:

$$Eu = Pe = 1; \quad P_0 = \rho_2 u_0^2. \quad (9.14)$$

Следующий этап формулировки математической модели состоит в определении условий однозначности. При этом периоды фонтанирования расплава при разливе сифоном или гидродинамического удара о поддон при разливе сверху, как и явление газозахвата, из-за сложности математических расчетов не рассматриваются. Поэтому предполагается, что в начальный момент времени исследуемая область уже наполнена некоторым количеством расплава.

Начальные условия:

$$Fo = 0; \quad \vec{V} = 0; \quad \theta_2 = \theta_2^0; \quad \theta_3 = \theta_3^0, \quad (9.15)$$

где θ_3^0 и θ_2^0 - начальные температуры расплава и стенок изложницы.

Постановка граничных условий выполняется в зависимости от способа наполнения изложницы или формы. Наполнение изложницы осуществляется

сифоном или сверху (рис. 9.4, *a - б*). Для литейной формы возможны весьма разнообразные варианты литниковых систем: трёхструйное наполнение снизу, боковое наполнение, четырехструйное сверху (рис. 9.4, *в - д*), снизу и сверху (рис. 9.5). Однако независимо от способа наполнения граница поверхности уровня считается плоской, а контакт между изложницей и расплавом в тепловом отношении - идеальным. При разливке сверху струя предполагается идеально организованной.

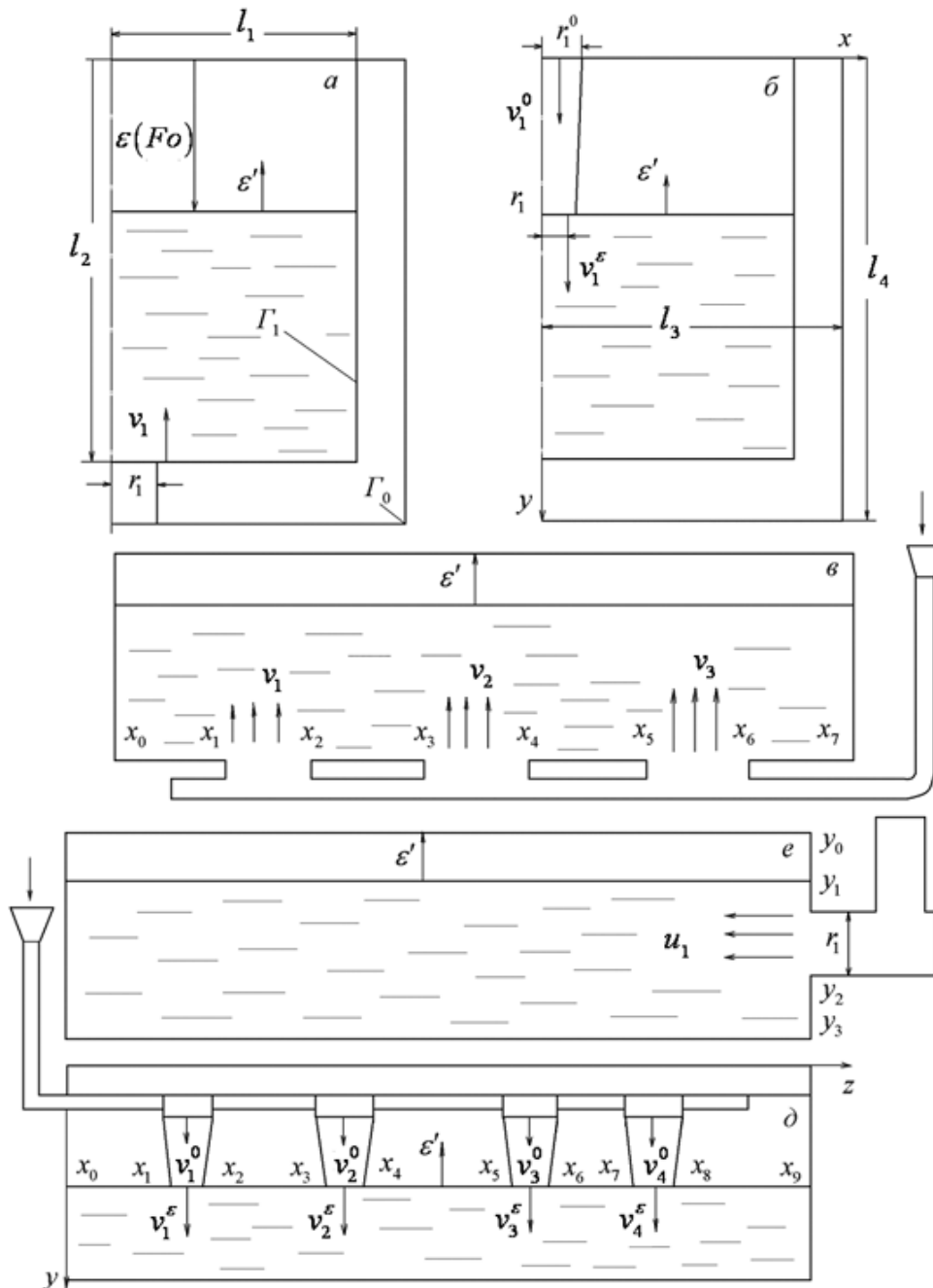


Рис. 9.4. Схема наполнения изложницы сифоном (*a*) и сверху (*б*), литейных форм (*в - д*): *в* - 3-струйное наполнение сифоном; *г* - заливка в цапфу (боковое наполнение); *д* - одноярусная литниковая система (4-струйное наполнение)

Ввиду симметрии процесса относительно вертикальной плоскости постановка граничных условий при наполнении расплавом изложницы выполняется для одной из половинок области. Для литейных форм исследуются асимметричные режимы наполнения, поэтому постановка задачи выполняется для всей области.

Граничные условия для скорости в обобщенном виде могут быть записаны следующим образом. На внутренней поверхности Γ_1 исследуемой области, контактирующей, за исключением отверстий, с расплавом

$$\vec{V}|_{r_1} = 0. \quad (9.16)$$

В области отверстий R_k

$$\vec{V}|_{R_k} = \begin{cases} \pm u_k - \text{заливка} & \text{сбоку} \\ -v_k - \text{заливка} & \text{снизу} \end{cases}, \quad (9.17)$$

где $k=1, 2, \dots, k$ - номер отверстий.

На поверхности уровня расплава, исключая области её встреч со свободно падающими струями:

$$u|_{y=\varepsilon} = 0, \quad (9.18)$$

$$\vec{V}|_{y=\varepsilon} = \begin{cases} -\sum_{k=1}^k v_k r_k & - \text{заливка} \text{ снизу} \\ -\sum_{k=1}^k v_k^0 r_k^0 & - \text{заливка} \text{ сверху}; \\ -\sum_{k=1}^k u_k r_k & - \text{заливка} \text{ сбоку} \end{cases}, \quad (9.19)$$

где v_k^0 - скорость истечения из сталеразливочного устройства (питателя) с шириной на выходе r_k^0 при разливке сверху.

В области встречи падающей струи с поверхностью уровня:

$$u|_{y=\varepsilon} = 0; \quad v|_{y=\varepsilon} = \sqrt{(v_k^0)^2 + 2\varepsilon / Fr^2}. \quad (9.20)$$

На оси симметрии для случаев, представленных на рис. 9.5:

$$u|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x}|_{x=0} = 0. \quad (9.21)$$

Для уравнения теплопереноса на внутренней поверхности задаются линейные граничные условия 4-го рода:

$$\lambda_2 \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \theta \right) \Big|_{r_1-0} = \lambda_3 \left(\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \theta \right) \Big|_{r_1+0}; \quad \theta|_{r_1-0} = \theta|_{r_1+0}. \quad (9.22)$$

В области отверстий и встреч свободно падающих струй с поверхностью уровня первого рода

$$\theta|_R = \theta|_{y=\varepsilon} = \theta_2^0. \quad (9.23)$$

Условия симметрии на вертикальной оси и равенства нулю потока тепла на поверхности уровня вследствие её идеальной теплоизоляции (случай разливки под слоем теплоизолирующего шлака) имеют вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\varepsilon} = 0. \quad (9.24)$$

Для внешней поверхности Γ_0 , контактирующей с окружающей средой, линейной граничное условие 3-го рода записывается так:

$$(\vec{n} \nabla \theta) \Big|_{\Gamma_0} = -Bi(\theta - \theta_{cp}) \Big|_{\Gamma_0}. \quad (9.25)$$

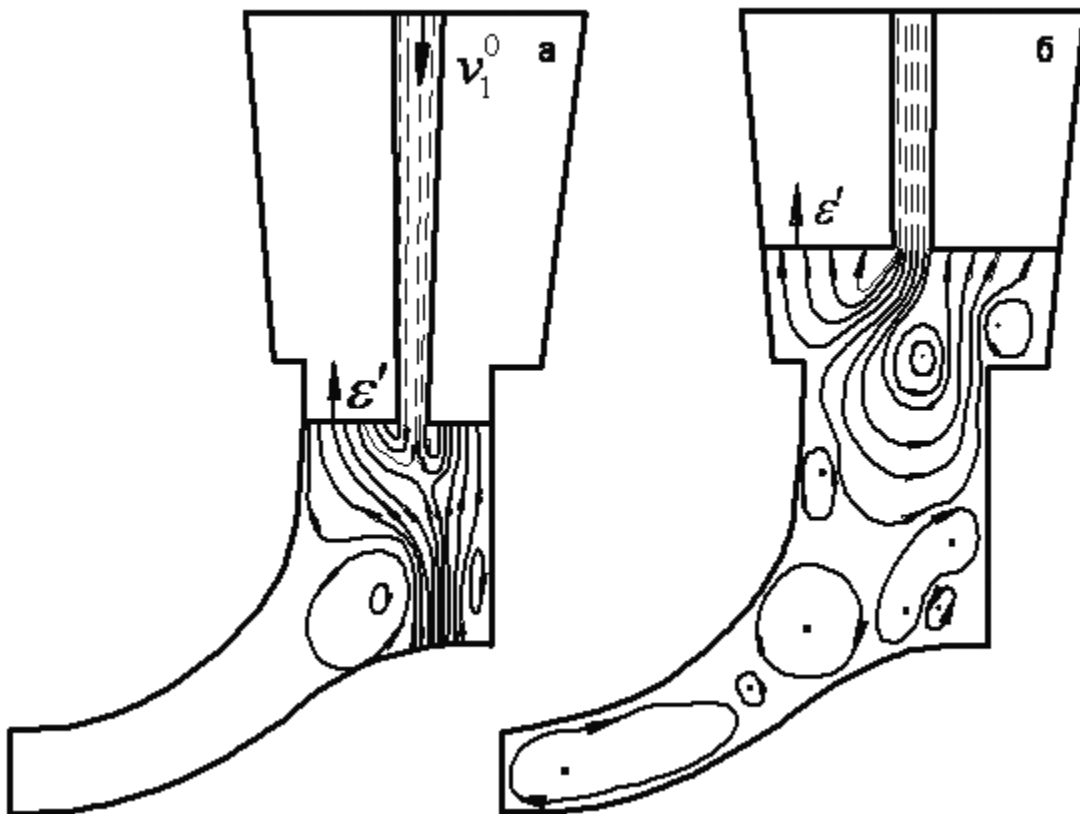


Рис. 9.5. Схема наполнения и изолинии функции тока в поперечном сечении литейной формы газовой турбины; а - работают питатели верхнего и нижнего ярусов; б - только верхнего яруса

Граничное условие (9.22) является вспомогательным и применяется с целью сопряжения искомой функции на границе расплав-стенка изложницы.

Применяя операцию «*rot*» к уравнению движения (9.10) и вводя функцию тока с помощью соотношений, удовлетворяющих уравнению (9.12)

$$5u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (9.26)$$

систему уравнений (9.10)- (9.12) с учетом принятых допущений запишем в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial Fo} + (\vec{V} \overset{\circ}{\nabla}) \omega = \text{Pr}_y \overset{\circ}{\Delta} \omega \cdot Gr \text{Pr}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (9.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + (\vec{V} \overset{\circ}{\nabla}) \theta = \overset{\circ}{\Delta} \theta; \quad (9.28)$$

$$\overset{\circ}{\Delta} \Psi = -\omega; \quad (9.29)$$

где $\omega = \text{rot}_z \vec{V}$ - проекция вихря скорости на ось OZ , перпендикулярную исследуемой плоскости сечения XOY .

Граничные условия для функции тока получаются путём интегрирования (9.20), (9.21) с использованием соотношений (9.26). В целях более четкого представления граничные условия для каждого способа дадим отдельно.

1. Наполнение изложницы снизу сифоном (рис. 9.4, а)

$$\begin{aligned} \Psi|_{x=0} &= 0; & \Psi|_{\Gamma_1} &= v_1 r_1; \\ \Psi|_{y=\varepsilon} &= v_1 r_1 x; & \Psi|_{\substack{[0, r_1[\\ y=l_2}} &= v_1 x; \end{aligned} \quad (9.30)$$

2. Трёхструйное наполнение литейной формы (рис. 9.4, в)

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{[x_0, x_1]} = 0; \quad \Psi|_{x=l_1} = \Psi|_{[x_6, x_7]} = \sum_{k=1}^3 v_k r_k; \quad \Psi|_{y=\varepsilon} = x \sum_{k=1}^3 v_k r_k; \quad (9.31)$$

на нижней границе при $y = l_2$

$$\begin{aligned} \Psi|_{]x_1, x_2[} &= v_1 (x - x_1); & \Psi|_{[x_2, x_3]} &= v_1 r_1; & \Psi|_{]x_3, x_4[} &= v_2 (x - x_3) + v_1 r_1; \\ \Psi|_{[x_4, x_5]} &= \sum_{k=1}^2 v_k r_k; & \Psi|_{]x_5, x_6[} &= \sum_{k=1}^2 v_k r_k + v_3 (x - x_5). \end{aligned} \quad (9.32)$$

3. Наполнение изложницы сверху (рис. 9.4, б)

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{\Gamma_1} = 0; \quad (9.33)$$

$$\Psi|_{y=\varepsilon} = \begin{cases} -x \sqrt{(v_1^0)^2 + 2\varepsilon / Fr^2}, & [0, x_1[\\ v_1^0 r_1^0 (x - 1), & [x_1, l] \end{cases}. \quad (9.34)$$

4. Одноструйное боковое наполнение литейной формы (рис. 9.4, з):

$$\Psi|_{x=0} = \begin{cases} 0, & [y_0, y_1] \\ u_1(y - y_1), &]y_1, y_2[\end{cases}; \quad (9.35)$$

$$\Psi|_{y=\varepsilon} = u_1 r_1 x; \quad (9.36)$$

$$\Psi|_{\substack{x=0 \\ [y_2, y_3]}} = \Psi|_{y=l_2} = \Psi|_{x=l_1} = u_1 r. \quad (9.37)$$

Что касается граничных условий для вихря скорости, то они из физических условий не могут быть получены и задаются на этапе построения вычислительного алгоритма для сформулированной математической модели.

Следующий этап преобразований связан с переходом к системе координат с неподвижной границей с помощью введения новой переменной, зависящей от времени:

$$y' = \frac{y - \varepsilon(Fo)}{l_2 - \varepsilon(Fo)} l_2. \quad (9.38)$$

Введение переменной y' удобно при решении задач с подвижной границей, так как в связи с этим отпадает необходимость её поиска при численной реализации задачи. Теперь исследуемая область вдоль вертикальной координаты в течение всего времени наполнения будет иметь постоянные пределы изменения $[0, l_2]$.

Для решения уравнения теплопроводности (9.13) в стенке изложницы на участке выше уровня наполнения целесообразно также ввести новую переменную:

$$y' = \frac{y l_2}{\varepsilon(Fo)}. \quad (9.39)$$

С учетом (9.38) и (9.39) систему уравнений (9.27)- (9.29) и (9.13) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \omega}{\partial Fo} + (L_1 + L_2)\omega = \text{Pr}_s \overset{\circ}{\Delta}_1 \omega - Gr_T \text{Pr}^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (9.40)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + (L_1 + L_2)\theta = \overset{\circ}{\Delta}_1 \theta; \quad (9.41)$$

$$\omega = -\overset{\circ}{\Delta}_1 \Psi; \quad (9.42)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + L_2' \theta = \frac{a_3}{a_2} \overset{\circ}{\Delta}_2 \theta; \quad (9.43)$$

где $L_1 = \sqrt{\chi} \frac{\partial \Psi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$; $L_2 = \sqrt{\chi} \left[\frac{\varepsilon'(y' - l_2)}{l_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \frac{\partial}{\partial y'}$;

$$\chi = \frac{l_2}{(l_2 - \varepsilon)^2}; \quad \overset{\circ}{\Delta}_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial^2}{\partial y'^2}; \quad L'_3 = -\frac{\varepsilon' y'}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y'};$$

$$\overset{\circ}{\Delta}_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{l_2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial y'^2};$$

$\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{dFo}$ - скорость подъёма уровня наполнения.

Построение конечно-разностного аналога математической модели.

Проиллюстрировать применение разностных методов построения конечно-разностного аналога удобно на примере некоторого модельного дифференциального уравнения общего вида:

$$k_1 \frac{\partial z}{\partial Fo} + k_2 \frac{\partial z}{\partial x} + k_3 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_4 \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_5 \frac{\partial z}{\partial y} \right) + k_6 z + k_7, \quad (9.44)$$

где $z = z(x, y, Fo)$ - некоторая обобщенная искомая функция;

k_i ($i = 1, \dots, 7$) - коэффициенты уравнения, в обобщённом случае функции координат и времени.

Уравнение (9.44) может быть представлено в операторной форме:

$$k_1 \frac{\partial z}{\partial Fo} = (L_1 + L_2)z + \varphi, \quad (9.45)$$

где $L_1 = -k_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_4 \frac{\partial}{\partial x} \right)$; $L_2 = -k_3 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_5 \frac{\partial}{\partial y} \right)$ - одномерные операторы;

$\varphi = k_6 z + k_7$.

Исходя из требований экономичности расчета, первый шаг в построении конечно-разностного аналога математической модели состоит в сведении нелинейных двумерных дифференциальных уравнений в частных производных (9.45) к последовательности одномерных. Это достигается в результате применения метода переменных направлений (МПН) или локально-одномерной схемы (ЛОС). При этом дифференциальные одномерные операторы заменяются разностными

$$L_1 + L_2 \rightarrow \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

и осуществляется переход с одного временного слоя n на другой $(n+1)$ в два этапа с полушагом $0,5\tau$, т.е. наряду с основными значениями сеточных функций z^n и z^{n+1} вводится промежуточное $z^{n+0,5}$. Так, при МПН получают следующие уравнения:

$$\frac{z^{n+0,5} - z^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 z^{n+0,5} + \Lambda_2 z^n + \varphi^n ; \quad (9.46)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^{n+0,5}}{0,5\tau} = \Lambda_1 z^{n+0,5} + \Lambda_2 z^{n+1} + \varphi^n . \quad (9.47)$$

Уравнение (9.46) неявно по X и содержит неизвестные $z_{ij}^{n+0,5}$, $z_{i,j\pm 1}^{n+0,5}$, уравнение (9.47) неявно по Y и содержит неизвестные z_{ij}^{n+1} , $z_{i,j\pm 1}^{n+1}$ (верхние индексы соответствуют номерам временных слоёв, нижние - номерам узлов пространственной сетки). На первом этапе прогонкой вдоль оси OX находим решение $z^{z+0,5}$ на полу целом временном слое, затем, используя это решение, осуществляем прогонку по направлению OY и получаем решение z^{n+1} на целом временном слое.

Применение ЛОС позволяет получить цепочку одномерных уравнений в более простой форме:

$$\frac{z^{n+0,5} - z^n}{\tau} = \Lambda_1 z^{n+0,5} + \varphi_1^n ; \quad (9.48)$$

$$\frac{z^{n+1} - z^{n+0,5}}{\tau} = \Lambda_2 z^{n+1} + \varphi_2^n ; \quad (9.49)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi .$$

ЛОС более экономична, чем МПН, однако, она менее точна и уступает МПН по порядку аппроксимации относительно времени: МПН имеет $O(\tau^2)$, а ЛОС - $O(\tau)$.

Полученные схемы (9.46) - (9.49) соответствуют модельному параметрическому уравнению общего вида. Например, схема (9.47) при фиксированном X соответствует дифференциальному уравнению канонического вида:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right]_{ij}^{n+1} + \left[r \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{ij}^{n+1} - [qz]_{ij}^{n+1} = -f_{ij}^{n+0,5} ; \quad (9.50)$$

$$k_{ij} = k_5 ; \quad r_{ij} = -k_3 ; \quad q_{ij} = \frac{k_1}{0,5\tau} ;$$

$$f_{ij}^{n+0,5} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_4 \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]_{ij}^{n+0,5} - \left(k_2 \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{ij}^{n+0,5} + \left(k_1 \frac{z}{0,5\tau} \right)_{ij}^{n+0,5} + \varphi_{ij}^n . \quad (9.51)$$

При ЛОС для (9.49) k и r совпадают, а q и f имеют отличия:

$$q_{ij} = \frac{k_1}{\tau}; \quad f_{ij} = (\varphi_2)_{ij}^n + \frac{k_1 z_{ij}^{n+0,5}}{\tau}. \quad (9.52)$$

В целях простоты записи в дальнейших выкладках верхние и нижние индексы в случаях, не требующих дополнительных пояснений, опускаются.

Для построения конечно-разностного аналога системы уравнений (9.40)- (9.43), описывающих тепло физические и гидродинамические процессы при наполнении изложницы, прежде всего, необходимо установить, соответствуют ли эти уравнения модельным (9.44).

После сведения исходных уравнений к цепочке одномерного типа (9.48) и (9.49) устанавливаем соответствие между расщеплёнными покомпонентно уравнениями и дифференциальным уравнением канонического вида (9.50) с учетом соотношений (9.52). Значения коэффициентов k , r , q и f для расщеплённых по координатам X и Y и времени исходных уравнений (принятые условные обозначения над символами « \cdot »; « $-$ »; « \wedge » соответствуют номерам временных слоёв n ; $n+0,5$; $n+1$ или итерационных S ; $S+0,5$; $S+1$). При этом необходимо помнить, что в уравнение Пуассона уже введена производная по итерационному «времени» F_0 .

Последующие процедуры связаны с применением методов «возмущенного» коэффициента и МПН, позволяющих получить монотонную разностную схему и свести и свести её к каноническому виду.

Второй этап разработки вычислительного алгоритма связан с конечно-разностной аппроксимацией граничных условий. Представление граничных условий для функции тока обычно затруднений не вызывает.

При наполнении изложницы сифоном граничные условия (9.30) примут вид:

$$\Psi_{i,1} = 0; \quad \Psi|_{\Gamma_1, \Gamma_T} = v_1 r_1; \quad \Psi_{1,j} = v_1 r_1 j h_j; \quad \Psi_{I,j} = v_1 j h_j, \quad x \in [0, r_1]. \quad (9.53)$$

При трёхструйном наполнении литейной формы условия (9.31) и (9.32) запишем в разностной форме:

$$\Psi_{1,i} = \Psi_{I,j}|_{[x_0, x_1]} = 0, \quad \Psi_{i,j} = \Psi_{I,j}|_{[x_6, x_7]} = \sum_{k=1}^3 v_k r_k, \quad \Psi_{1,j} = j h_j \sum_{k=1}^3 v_k r_k; \quad (9.54)$$

на нижней границе в области отверстий ($i = 1$)

$$\begin{aligned} \Psi_{I,j} &= v_1 (j h_j - x_1), & x \in]x_1, x_2[\\ \Psi_{I,j} &= v_1 (j h_j - x_3) + v_1 r_1, & x \in]x_3, x_4[\\ \Psi_{I,j} &= \sum_{k=1}^2 v_k r_k + v_3 (j h_j - x_5), & x \in]x_5, x_6[\end{aligned} \quad (9.55)$$

на границе между отверстиями:

$$\Psi_{I,j} = v_1 r_1, \quad x \in [x_2, x_3]; \quad \Psi_{I,j} = \sum_{k=1}^2 v_k r_k, \quad x \in [x_4, x_5]. \quad (9.56)$$

При наполнении изложницы сверху условия (9.33) и (9.34) запишутся следующим образом:

$$\Psi_{i,1} = \Psi|_{\Gamma_1, \Gamma_T} = 0; \quad \Psi_{1,j} = \begin{cases} -jh_j \sqrt{(v_1^0)^2 + 2\varepsilon / Fr^2}, & x \in [0, x_1], \\ v_1^0 r_1^0 (jh_j - 1), & x \in [x_1, l]. \end{cases} \quad (9.57)$$

Остановимся на определении граничных условий для вихря скорости:

$$\bar{\omega}_{i,1} = 0. \quad (9.58)$$

Граничное условие на поверхности уровня металла определяем на основании разложения функции тока в ряд Тейлора в окрестности этой границы $y' = 0$:

$$\Psi_{2,j} = \Psi_{1,j} + h_{2,i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{1,j} + \frac{h_{2,i}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)_{1,j} + O(h_{2,i}^3). \quad (9.59)$$

Принимая во внимание условия (9.18), (9.53), а также используя уравнение (9.42), получаем:

$$\bar{\omega}_{1,j} = \frac{2x}{h_{2,i}^2} \left(\check{\Psi} - v_1 r_1 j h_j \right) + O(h^2). \quad (9.60)$$

На боковой и нижней границах значение вихря скорости также определяем путём разложения Ψ в ряд Тейлора в окрестностях соответствующих границ:

$$\bar{\omega}_{I,J} = -\frac{2x}{h_{2,i}^2} \left(\check{\Psi}_{I,J-1} - v_1 r_1 \right) - \chi_1 \left(\frac{\partial^2 \check{\Psi}}{\partial y'^2} \right)_{I,J}; \quad (9.61)$$

$$\hat{\omega}_{I,J} = -\chi_1 \left(\check{\Psi}_{I-1,J} - v_1 r_1 \right) - \left(\frac{\partial^2 \check{\Psi}}{\partial x^2} \right)_{I,J}, \quad (9.62)$$

где I, J - координаты граничных узлов сетки, лежащих на границе Γ_1 или Γ_T ; $\chi_1 = 2\chi/h_1^2$.

В области отверстия

$$\hat{\omega}_{I,J} = -\chi_1 \left(\check{\Psi}_{I-1,J} - v_1 j h_j \right), \quad x \in [0, r_1]. \quad (9.63)$$

При трёхструйном наполнении литейной формы снизу

$$\bar{\omega}_{i,1} = -\frac{2}{h_{2,j}^2} \check{\Psi}_{i,2}; \quad (9.64)$$

$$\bar{\omega}_{I,j} = -\chi_1 \check{\Psi}_{I-1,j}, \quad x \in [x_0, x_1]; \quad (9.65)$$

$$\hat{\omega}_{I,j} = \chi_1 \left[v_1(jh_j - x_1) - \check{\Psi}_{I-1,j} \right], \quad x \in]x_1, x_2[; \quad (9.66)$$

$$\hat{\omega}_{I,j} = \chi_1 (v_1 r_1 - \check{\Psi}_{I-1,j}), \quad x \in [x_2, x_3]; \quad (9.67)$$

$$\hat{\omega}_{I,j} = \chi_1 \left[v_2(jh_j - x_3) + v_1 r_1 - \check{\Psi}_{I-1,j} \right], \quad x \in]x_3, x_4[; \quad (9.68)$$

$$\hat{\omega}_{I,j} = \chi_1 \left[\sum_{k=1}^2 v_k r_k - \check{\Psi}_{I-1,j} \right], \quad x \in [x_4, x_5]; \quad (9.69)$$

$$\hat{\omega}_{I,j} = \chi_1 \left[\sum_{k=1}^2 v_k r_k + v_3(jh_j - x_5) - \check{\Psi}_{I-1,j} \right], \quad x \in]x_5, x_6[; \quad (9.70)$$

$$\hat{\omega}_{I,j} = \chi_1 \left(\sum_{k=1}^3 v_k r_k - \check{\Psi}_{I-1,j} \right), \quad x \in [x_6, x_7]; \quad (9.71)$$

$$\bar{\omega}_{i,j} = \frac{2}{h_j^2} \left(\sum_{k=1}^3 v_k r_k - \check{\Psi}_{i,j-1} \right); \quad (9.72)$$

$$\hat{\omega}_{1,j} = \frac{2\chi}{h_{2,j}^2} \left(jh_j \sum_{k=1}^3 v_k r_k - \check{\Psi}_{2,j} \right); \quad (9.73)$$

где $h_{2,j}$ - первый шаг пространственной сетки вдоль горизонтальной координаты. При наполнении изложницы сверху:

$$\hat{\omega}_{1,j} = -\frac{2\chi}{h_{2,j}^2} \begin{cases} jh_j \sqrt{(v_0^1)^2 + 2\varepsilon / Fr^2 + \check{\Psi}_{2,j}}, & [0, x_1[\\ v_1^0 r_1^0 (1 - jh_j) + \check{\Psi}_{2,j}, & [x_1, l] \end{cases}. \quad (9.74)$$

Граничные условия на оси соответствуют (9.58), на границах Γ_1 и Γ_T (9.61) и (9.62), за исключением второго слагаемого правой части, которое в данном случае равно нулю.

Граничные условия для температуры в разностном виде на всех границах исследуемой области (кроме отверстий) также получаем путём разложения температуры в ряд Тейлора в окрестности соответствующих границ. При

этом ограничимся членами второго порядка малости. Первые производные в разложении находим из граничных условий (9.22), (9.24), (9.25); вторые - из исходных уравнений, расщепленных покомпонентно. С учетом сказанного, граничные условия для θ в разностном виде, удобном для прогонки, запишем следующим образом:

для прогонки по строкам:

$$\bar{\theta}_{i,1} = \frac{\bar{\theta}_{i,2} + h_{2,j}^2 / 2\tau \cdot \check{\theta}_{i,1}}{1 + h_{2,j}^2 / 2\tau}; \quad \bar{\theta}_{i,N} = \frac{\bar{\theta}_{i,N} + h_N^2 a_2 \check{\theta}_{i,N} / 2\tau a_3}{1 + h_N B_i + h_N^2 a_2 / 2\tau a_3}, \quad (9.75)$$

для прогонки по столбцам:

$$\bar{\theta}_{1,j} = \frac{\hat{\theta}_{2,j} + \chi h_{2,j}^2 \theta_{2,j} / 2\tau}{1 + \chi h_{2,j}^2 / 2\tau}; \quad \bar{\theta}_{M,j} = \frac{\hat{\theta}_{M-1,j} + \chi h_M^2 a_2 \bar{\theta}_{M,j} / 2\tau a_3}{1 + h_1 B_i + \chi}. \quad (9.76)$$

Для решения разностной задачи методом МПН необходимо знать первые прогоночные коэффициенты α_2 и β_2 , а также μ_2 и κ_2 . Для этого устанавливаем соответствие между обобщенным представлением граничных условий и конкретным для каждой искомой функции: для Ψ - (9.53)- (9.54); для ω - (9.58) - (9.74); для θ - (9.75) - (9.76).

Анализ результатов вычислительного эксперимента (ВЭ). На примере разливки 5-тонного слитка исследована тепломеханическая конвекция, обусловленная температурной неоднородностью расплава и механическим воздействием заливочной струи. Показано, что в завершающей фазе разливки различие интенсивности движения расплава при тепломеханической и чисто вынужденной конвекции составляет $\sim 3\%$, а тепловых энергий - $0,05\%$ вне зависимости от значений T_s^0 и ε' . Сделан вывод о пренебрежимо малом вкладе тепловой конвекции в процессы теплообмена между расплавом и изложницей (литейной формой) в период наполнения.

Исследованы процессы гидродинамики и теплообмена при наполнении изложниц сифоном и сверху (рис. 9.6, а - г). Установлено, что процесс заполнения изложниц подчиняется закономерностям развития затопленной неизолированной струи в ограниченном пространстве. Неоднородная вихревая структура течения играет основную роль в теплообмене между расплавом и изложницей. Она обуславливает немонотонное изменение теплового потока (Nu) вдоль поверхности изложницы и, как следствие а) формирование неравномерной по толщине твёрдой «корочки»; б) немонотонный характер изменения термических напряжений в стенке изложницы.

Установлено, что в заданном интервале технологических параметров тепловые потери расплавом при разливке составляют $3 \div 5\%$ от начального

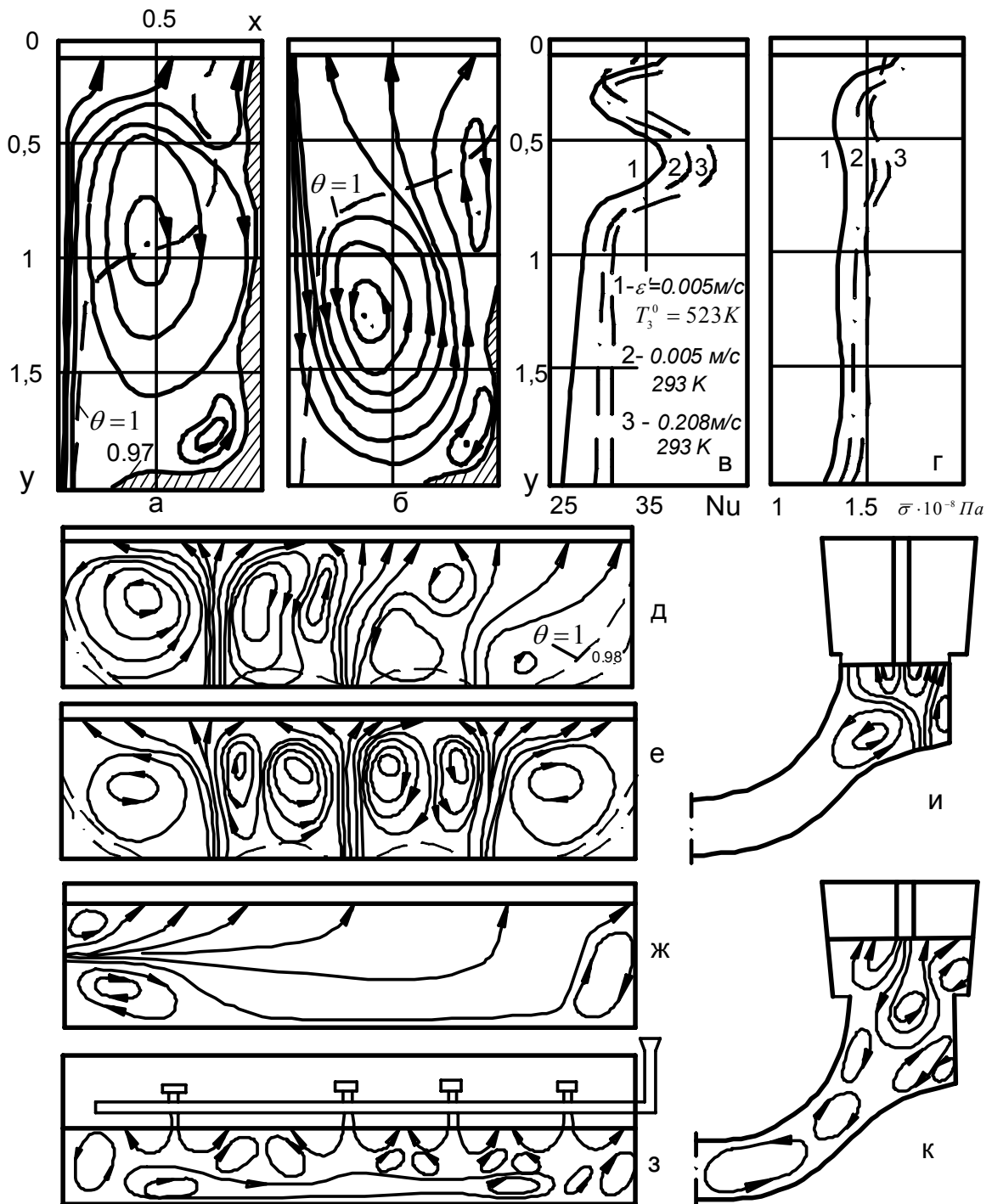


Рис. 9.6. Линии тока и изотермы при различных способах наполнения изложниц (а-б) и литейных форм (д-к), распределение теплового потока (в) и термических напряжений (г)

теплосодержания. Удовлетворительное согласование результатов ВЭ с данными натурных исследований других авторов (тепловых потоков, твёрдой «корочки» и теплопотерь при заливке) позволяет говорить об адекватности математической модели процессов переноса при наполнении.

Изучены особенности наполнения в зависимости от скорости разливки и значения T_3^0 . Установлено, что с увеличением в четыре раза скорости разливки уменьшается толщина твёрдой «корочки» и неравномерность её толщины, область наибольшего изменения напряжений в стенке изложницы, суммарные тепловые потери и увеличиваются число Nu (~ на 7%) на стенке изложницы и термические напряжения в ней. Повышение значения T_3^0 до 523 K способствует уменьшению числа Nu (на 6%), тепловых потерь, термических напряжений и «теплого» удара на внутренней поверхности изложницы.

Определены в предложенном в ДонНИИЧерметом интервале изменения технологических параметров разливки рациональные режимы наполнения: $\varepsilon' = 0,0052$ м/с, $T_3^0 = 523$ K, $T_2^0 = 1833$ K - разливка сифоном; скорость истечения расплава из стакана 7 м/с, $T_3^0 = 493$ K, $T_2^0 = 1833$ K и высоте слитка $L_2 = 0,6 \div 2,4$ м/с - разливка сверху.

Исследованы гидродинамические и теплофизические процессы при трёхструйном наполнении снизу и боковом через цапфу литейной формы лопатки гидротурбины (рис. 9.6 д). Получено удовлетворительное согласование результатов ВЭ и физического моделирования, выполненного в ИПЛ АН УССР и ИГМ АН УССР. Для трёхструйного наполнения установлено следующее: а) мелковихревая структура течения по мере наполнения преобразуется в крупновихревую; б) в момент прекращения разливки много вихревая структура вырождается; в) потери тепловой энергии расплава составляют ~ 0,1% от его начального теплосодержания; г) твёрдая «корочка» на поверхности формы не образуется.

Разработана методика прогнозирования участков наибольшего размыва литейной формы на базе карт локальной кинетической энергии расплава, являющихся аналогами технологических карт дефектов отливки. Методика позволяет приближенно определять наиболее вероятные места образования дефекта типа «засор».

ВЭ подтверждено, что рациональным режимом при трёхструйном наполнении с точки зрения уменьшения участков наибольшего размыва стенок литейной формы является режим с равными расходами по питателям. Наиболее благоприятная гидродинамическая обстановка в литейной форме лопатки достигается при ее боковом наполнении.

Исследованы гидродинамические и теплофизические процессы при заполнении формы корпуса паровой турбины для одноярусной рассредоточенной литниковопитающей системы (рис. 9.6, з-к). Варьирование ско-

рость наполнения и видами литниковых систем применительно к условиям ПО «Невский завод» показало, что рациональным режимом является режим четырехструйного наполнения с равными расходами по питателям при массовой скорости разливки 117 кг/с.

9.3 Тепломассоперенос в условиях термоконцентрационной и смешанной конвекции

Математическая модель. При затвердевании слитков (рис. 9.2) и крупных отливок гидродинамические процессы в жидком ядре и жидкотвёрдой части ДФЗ предполагается описывать уравнением (9.6) с учетом принятых выше положений, т.е. равенства нулю 5-го и 7-го членов. В переменных (ω, Ψ) гидродинамическая часть задачи (9.3) и (9.6) сводится к безразмерному уравнению переноса сред необъёмного вихря скорости $\langle \omega_2 \rangle$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \omega_2 \rangle}{\partial Fo} = \text{Pr} \nabla (v_* \overset{\circ}{\nabla} \langle \omega_2 \rangle) - (1 - \zeta) \langle \vec{V} \rangle_2 \overset{\circ}{\nabla} \langle \omega_2 \rangle - \\ - (1 - \zeta) \text{Pr}^2 \left(Gr_T \frac{\partial \theta}{\partial x} + Gr_\Delta \frac{\partial S}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9.77)$$

и безразмерному уравнению Пуассона для усредненной функции тока

$$\overset{\circ}{\Delta} \langle \Psi_2 \rangle = - \langle \omega_2 \rangle, \quad (9.78)$$

где $v_* = v_*/\nu = 1 + \gamma \xi$; γ - постоянная эксперимента, определяющая величину поправки к кинематическому коэффициенту вязкости ν расплава в зависимости от дисперсности среды в области ДФЗ.

Среднеобъёмные компоненты скорости и функции тока связаны соотношениями, удовлетворяющими уравнению неразрывности несжимаемой жидкости:

$$(1 - \zeta) \langle u \rangle_2 = \frac{\partial \langle \Psi_2 \rangle}{\partial y}; \quad (1 - \zeta) \langle V \rangle_2 = - \frac{\partial \langle \Psi_2 \rangle}{\partial x}. \quad (9.79)$$

Уравнения (9.77) и (9.78) сформулированы в соответствии с приближением Буссинекса, т.е. зависимость плотности фиктивного расплава от температуры и концентрации учитывается лишь в члене, описывающем гравитационную силу.

Уравнения теплопереноса (9.4) и массопереноса (9.5), при $\rho_1 \approx \rho_2$ и $Q = 0$ в безразмерной форме примут вид:

$$c_* \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + (1 - \zeta) \left(\langle \vec{V} \rangle_2 \overset{\circ}{\nabla} \right) \theta = \overset{\circ}{\nabla} \left[(1 + \lambda \zeta) \overset{\circ}{\nabla} \theta \right]; \quad (9.80)$$

$$(1 - \zeta) \frac{\partial S}{\partial Fo} + (1 - \zeta) \left(\langle \vec{V} \rangle_2 \overset{\circ}{\nabla} \right) S = Lu \overset{\circ}{\nabla} \left[(1 - \zeta) \overset{\circ}{\nabla} S \right] + (1 - k_0) S \frac{\partial \zeta}{\partial Fo}, \quad (9.81)$$

где $c_* = 1 + c\zeta - k \frac{\partial \zeta}{\partial \theta}$ - приведенный эффективный коэффициент, $c = c_1/c_2 - 1$; $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 - 1$; $K = L/(c_2 T_0)$.

Система уравнений (9.77) - (9.81) замыкается уравнением линии ликвидус (9.9), приведенным к безразмерному виду:

$$\theta = -\varphi_0 S + \theta_k, \quad (9.82)$$

где $\varphi_0 = \alpha C_0 / T_0$; $\theta_k = T_k / T_0$.

Соотношение (9.82) получено в предположении, что концентрационное переохлаждение составляет незначительную долю от температурного интервала ликвидус-солидус и им можно пренебречь. Таким образом, квазиравновесная теория предполагает равновесие межой фазой и поверхностью кристаллов, а внутри твёрдой фазы в связи с $D_1 \ll D_2$ распределение примеси не может быть однородным.

Уравнение теплопроводности для стенок изложницы и утепляющих элементов (вкладыш, футеровка надставок (рис. 9.2)) имеет вид:

$$\frac{c_i \rho_i}{c_2 \rho_2} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \overset{\circ}{\nabla} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2} \overset{\circ}{\nabla} \theta \right), \quad i = 3, 4. \quad (9.83)$$

Уравнение массопереноса (9.5) с использованием (9.82) сводится к уравнению переноса доли твёрдой фазы:

$$(1 - k_0) (\theta - \theta_k) \frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + Lu \overset{\circ}{\nabla} \theta \nabla \zeta = \left(Lu \Delta \theta - \langle \vec{V} \rangle_2 \nabla \theta - \frac{\partial \theta}{\partial Fo} \right) (1 - \zeta). \quad (9.84)$$

Таким образом, усредненные уравнения теплопереноса (9.80) и переноса доли твёрдой фазы (9.84), уравнения переноса усредненного вихря скорости (9.77) и Пуассона для тока (9.78) в переменных $(\theta, \xi, \omega, \Psi)$ описывают процессы теплообмена в системе затвердевающий слиток - изложница с учетом существования ДФЗ и термоконцентрационной конвекции в жидком «ядре» слитка и в жидко-твёрдой части двухфазной зоны вплоть до границы Γ_B .

Начальные условия задаются с учетом этапа наполнения изложницы. Поэтому вихрь скорости, функция тока и температура в общем случае явля-

ются функциями координат, полученным в результате решения задачи теплопереноса в условиях смешанной конвекции на этапе наполнения, когда в начальный момент доля твёрдой фазы отсутствует:

$$Fo = 0: \quad \langle \Psi_2 \rangle = \Psi^0(x, y), \quad \langle \omega_2 \rangle = \omega^0(x, y);$$

$$\theta_2 = \theta_2^0(x, y), \quad \theta_3 = \theta_4 = \theta_3(x, y), \quad \xi = 0, \quad (9.85)$$

где индексы 3 и 4 соответствуют изложнице и вкладышам.

Граничные условия для $\langle \Psi_2 \rangle$ и $\langle \omega_2 \rangle$ определяем через посредство $\langle \vec{V} \rangle$ из условий прилипания и непроницаемости твердой поверхности, а также симметрии на оси $OY = 0$:

$$\langle \Psi_2 \rangle|_{x=0} = \langle \Psi_2 \rangle|_{y=0} = \langle \Psi_2 \rangle|_{\Gamma_1, \Gamma_2} = 0; \quad (9.86)$$

$$\langle \omega_2 \rangle|_{x=0} = 0. \quad (9.87)$$

На остальных границах $\langle \omega_2 \rangle$ задаём на стадии конечно-разностной аппроксимации модели.

Верхняя граница области («зеркало» расплава) утепляется экзотермической засыпкой, тепловое воздействие которой может быть записано по следующему закону:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \begin{cases} 0, & 0 \leq Fo \leq Fo_1 \\ 0,12Fo / (Fo_2 - Fo_1), & Fo_1 \leq Fo \leq Fo_2 \\ 0,12, & Fo > Fo_2 \end{cases}. \quad (9.88)$$

На внешней границе изложницы задаётся условие теплообмена с окружающей средой (9.25). При этом учитывается зависимость критерия Bi от температуры:

$$Bi(\theta) = 2,75 \theta^2 + 0,069 \theta + 0,0904. \quad (9.89)$$

На оси OY задаётся условие симметрии (9.24). В случае образования газового зазора вторая часть условий сопряжения (9.22) изменяется в связи с появлением дополнительного термического сопротивления между слитком и внутренней поверхностью изложницы:

$$\lambda_2 (\vec{n} \nabla \theta)|_{\Gamma_1-0} = \lambda_3 (\vec{n} \nabla \theta)|_{\Gamma_1+0}; \quad (9.90)$$

$$(\vec{n} \nabla \theta)|_{\Gamma_1} = -Bi_1(\theta - \theta_2)|_{\Gamma_1+0}, \quad (9.91)$$

где Bi_1 - критерий Био в зазоре, определяемый через коэффициент теплоотдачи α_1 , зависящий от температуры по закону

$$\alpha_1 = 3 \times 10^{-7} \left(T /_{\Gamma_1-0} + T /_{\Gamma_1+0} \right)^3. \quad (9.92)$$

Для доли твердой фазы на границе ликвидус

$$\zeta|_{\Gamma_\lambda} = 0; \quad (9.93)$$

на стенках изложницы

$$\zeta|_{\Gamma_1} = 0. \quad (9.94)$$

Условие (9.94) является следствием условия отсутствия усредненного потока примеси через поверхность слитка

$$(1 - \zeta) \left(\vec{n} \nabla S \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0. \quad (9.95)$$

В момент пересечения границей $\Gamma_{\mathcal{L}}$ оси $X=0$ граничное условие на $\Gamma_{\mathcal{L}}$ (9.93) для доли твердой фазы заменяется условием симметрии:

$$\partial \zeta / \partial x|_{x=0} = 0. \quad (9.96)$$

Таким образом, сформулированная математическая модель, представленная уравнениями (9.77) - (9.84) и краевыми условиями (9.85) - (9.96), может позволить исследовать теплообмен в системе затвердевающий слиток-изложница в условиях тепловой и концентрационной конвекции с учетом существования ДФЗ, а также взаимообуславливающего влияния процессов тепломассопереноса, гидродинамики и затвердевания.

Вычислительный алгоритм для данной математической модели формируется в основном по методике, изложенной ранее. Уравнение переноса доли твердой фазы (9.84) сводится в соответствии с (9.44) при $z = \xi$ к модельному уравнению конвективного переноса:

$$k_1 \frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + k_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + k_3 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = k_6 \zeta + k_7. \quad (9.97)$$

Уравнение (9.97) отражает процесс двумерного конвективного переноса ξ при пренебрежении кондуктивным с учетом источников или стоков, интенсивность которых определяется коэффициентами k_6 и k_7 . Таким образом, структура уравнения отличается от классической отсутствием вторых пространственных производных, отвечающих за диффузионный перенос. Уравнения типа (9.97) имеют свои особенности и для их решения необходимо использовать другие численные методы.

Неявные схемы второго порядка для уравнения (9.97) не обладают основными свойствами дифференциального уравнения - позитивности и моно-

тонности. При расчете негладких решений может возникнуть неустойчивость. Подавление этого эффекта достигается путём введения в уравнение «искусственной вязкости»:

$$k_1 \frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + k_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + k_3 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_\epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_\epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + k_6 \zeta + k_7, \quad (9.98)$$

где ν_ϵ - коэффициент «искусственной вязкости».

Улучшение свойств уравнения введением ν_ϵ приводит к уменьшению отрицательных свойств ряда разностных схем, характерных для модельного уравнения (9.98). Значение ν_ϵ подбирается опытным путём на основе вычислительного эксперимента, в данном случае $\nu_\epsilon = 1,8 \times 10^{-3}$.

Первый шаг при построении конечно-разностного аналога двухфазной модели затвердевания состоит, как и ранее, в расщеплении исходных уравнений на цепочку одномерных. Однако при этом используется единый метод МПН, зарекомендовавший себя наиболее эффективно при решении подобного рода задач.

Последующее традиционное применение интегро-интерполяционного метода (ИИМ) и метода «возмущенных» коэффициентов позволяет свести исходные уравнения к каноническому виду (9.50).

Вычислительный алгоритм для задачи двухфазного затвердевания имеет следующую структуру:

- 1) тепло-кинетическая часть, представленная разностными уравнениями переноса тепла и доли твёрдой фазы;
- 2) гидродинамическая часть, представленная разностными уравнениями переноса вихря и Пуассона для функции тока.

Анализ результатов вычислительного эксперимента. Первая серия исследований выполнена на примере затвердевания модельного прямоугольного слитка низкоуглеродистой стали в диапазоне чисел Gr_D и Gr_T равных $2,7 \times 10^7 \div 7 \times 10^9$, относительной высоты $l_2 = 2 \div 6$, $\epsilon' = 0,0052 \div 0,0208$ м/с при $x_0 = 0,3$ м. Варьирование исходных параметров слитка осуществляется с учетом того, что ламинарный и переходный режимы течения при тепловой конвекции сохраняются в соответствии с исследованиями Р. Дж. Чизрайта до значений чисел $Gr_T \leq 10^{10}$.

Изучен характер и особенности термоконцентрационной конвекции, развивающейся в неподвижном в начальный момент времени расплаве. Показано, что в развитии термоконцентрационной конвекции можно выделить три этапа: тепловой конвекции, переходный и этап преобладания концентрационной конвекции (рис. 9.7). Особенности первого этапа являются наи-

большая интенсивность движения ($v_{\max} = 0,4 \div 0,5$ м/с) и колебательный (осциллирующий) характер течения расплава. Наличие осцилляций с частотой Брэнта-Вяйсяля связано с появлением и последующим исчезновением вторичных вихрей вследствие вертикальной температурной стратификации расплава. По мере снятия перегрева период осцилляций увеличивается и они вырождаются.

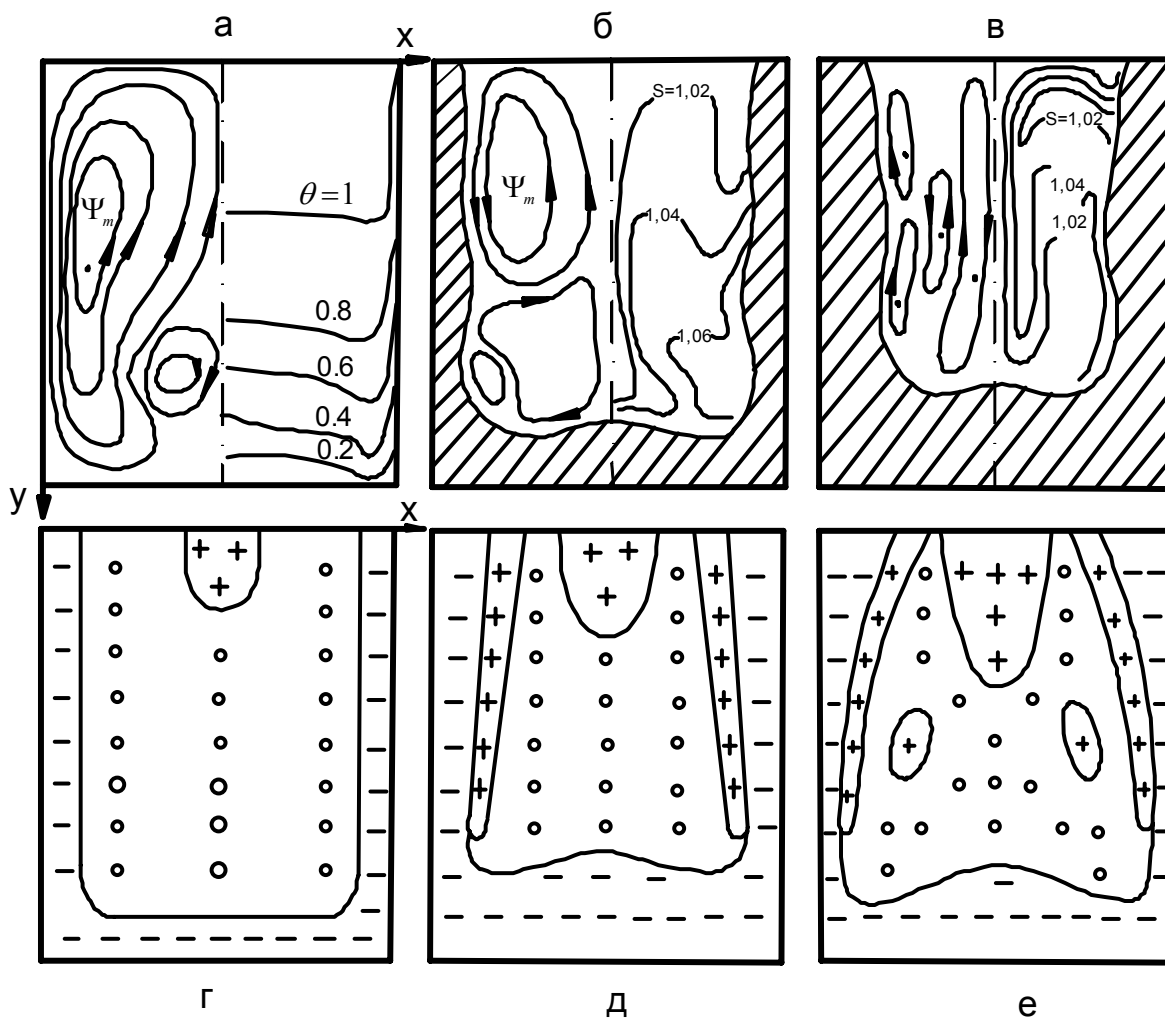


Рис. 9.7. Изолинии тока (слева), температуры и концентрации в расплаве для трёх этапов термоконцентрационной конвекции (а-в), зоны степени ликвации S_L в слитке: г - конвекция отсутствует; д - смешанная конвекция; е - физическое моделирование («o» - $S_L = 0$; «+» - > 0 ; «-» - < 0)

Одноячейстое движение на втором этапе сменяется двухячейстым на переходном. Вследствие развития концентрационной неоднородности в донной части слитка образуется «концентрационный» вихрь.

Третий этап характеризуется наиболее низкой интенсивностью движения ($v_{\max} = 0,005 \div 0,015$ м/с), много вихревой структурой и «восходящими» потоками у бокового фронта.

Показано, что термоконцентрационная конвекция приводит к формированию твёрдой «корочки», неравномерной по толщине, ускорению темпа затвердевания слитка и увеличению термических напряжений в стенке изложницы.

Выполненное физическое моделирование термоконцентрационной конвекции на прозрачной модели (нафталин) методом киносъёмки свидетельствует об адекватности и удовлетворительной работоспособности математической модели.

Изучены особенности смешанной конвекции в затвердевающем слитке, обусловленной остаточным воздействием заливочной струи и термоконцентрационной неоднородностью. Установлено, что смешанная конвекция также развивается в три этапа: затухания движения, индуцированного заливочной струей, и преобладания тепловой конвекции; второй и третий этапы те же, что при термоконцентрационной конвекции. Первый этап также характеризуется колебательным течением расплава (рис. 9.8). Однако амплитуда колебаний при этом больше, чем при термоконцентрационной конвекции.

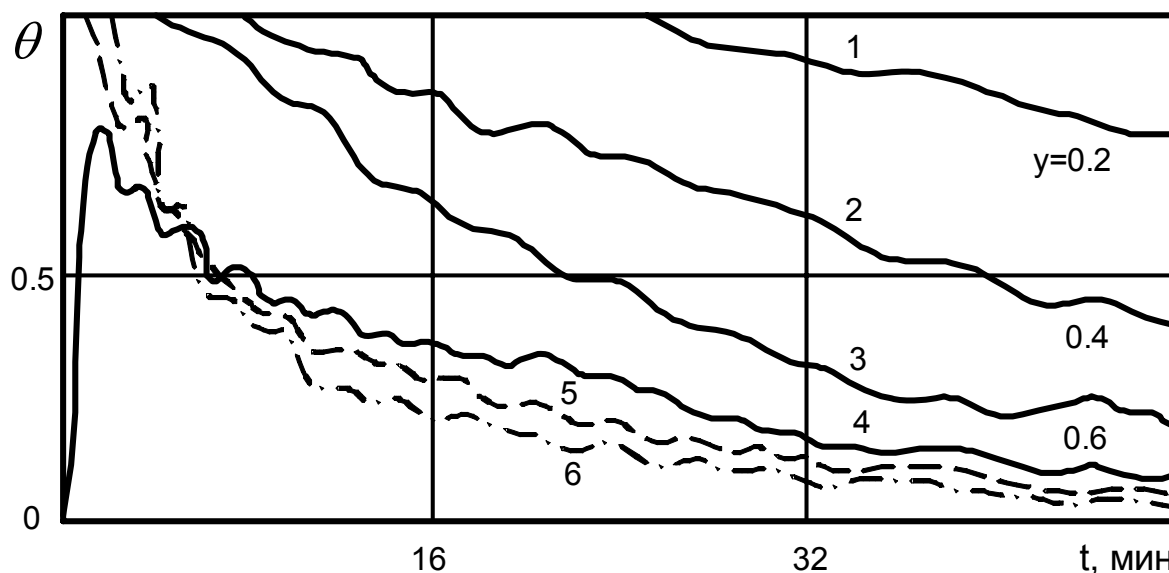


Рис. 9.8. Температура на оси слитка (1-3) и удельная кинетическая энергия расплава (4-6): 1-4 - термоконцентрационная конвекция; 5 и 6 - смешанная конвекция при $\varepsilon' = 0,0052$ и $0,0208$ м/с

При смешанной конвекции интенсивность движения максимальна в начальный момент времени. Влияние заливочной струи проявляется в уменьшении длительности всех этапов развития конвекции, её интенсивно-

сти на 2-м и 3-м этапах и времени затвердевания слитка, увеличении неравномерности формирования твёрдой «корочки» и термических напряжений в стенке изложницы. Увеличение скорости разливки приводит к усилению перечисленных особенностей.

Показано определяющее влияние термоконцентрационной и смешанной конвекции на формирование химической неоднородности слитка (рис. 9.7, г-е, рис. 9.9). Установлено, что конвекция является причиной обогащения примесью осевой и верхней частей слитка (рис. 9.9, а). Наиболее ответственным этапом в конвекции при формировании химической неоднородности слитка является переходной. Именно в этот период на границе раздела «концентрационного» и «теплого» вихрей происходит накопление примеси в жидкой фазе и, как следствие, образование «полосы» с повышенным содержанием примеси в твёрдой фазе.

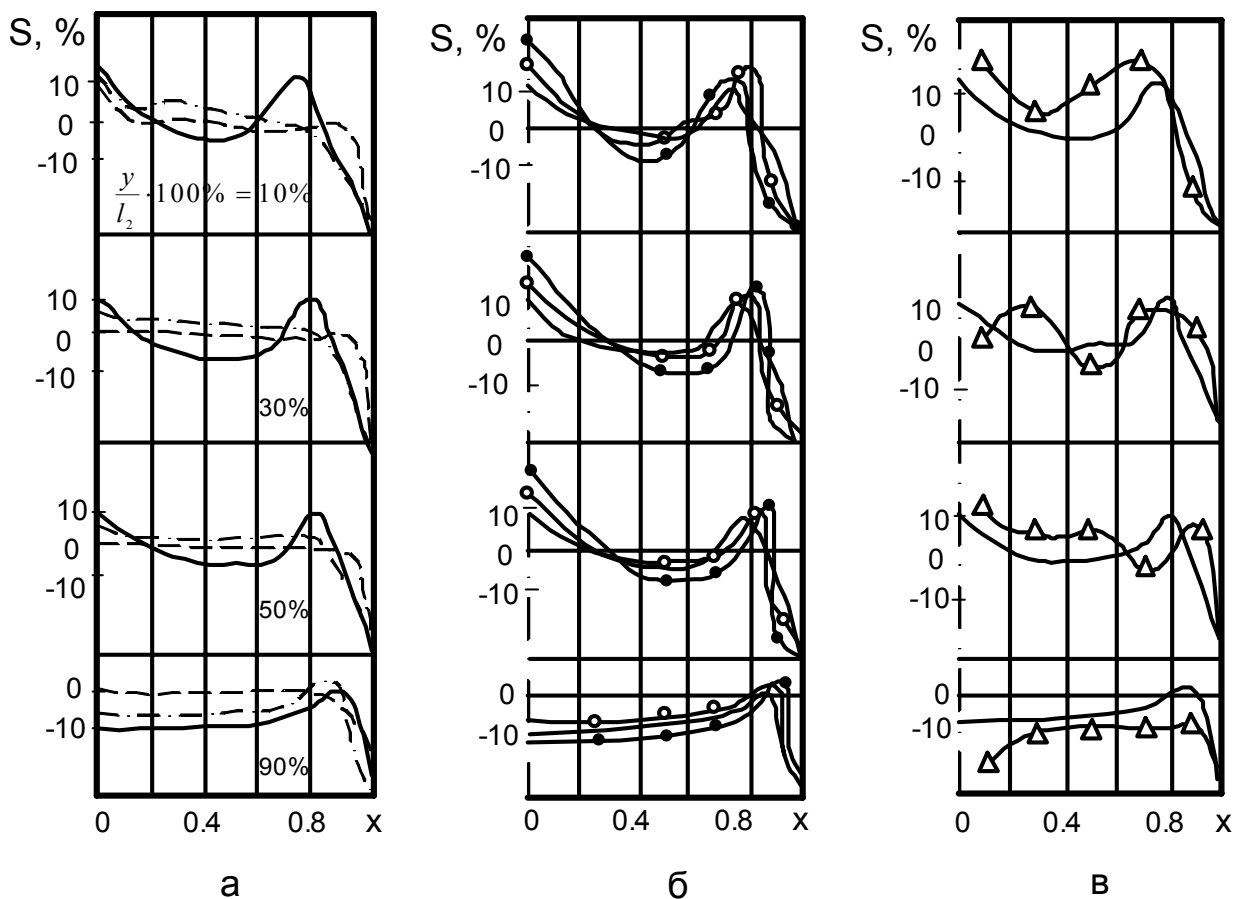


Рис. 9.9. Степень ликвации примеси в затвердевшем слитке:
 а - без учета заливочной струи: («- - -») $Gr_T = Gr_D = 0$; («- · -») $Gr_T = 7 \cdot 10^9$;
 $Gr_D = 0$; («----») $Gr_T = 7 \cdot 10^9$; $Gr_D = 2 \cdot 10^9$);
 б - с учетом заливки ($Gr_T = 7 \cdot 10^9$, $Gr_D = 2 \cdot 10^9$,
 «- ○ -» $0,0052 \text{ м/с}$; «- ● -» $0,0208 \text{ м/с}$); в - «- Δ -» - лабораторный эксперимент;
 «----» - расчет ($Gr_T = Gr_D = 2 \cdot 10^7$, $\varepsilon' = 0$)

Исследовано влияние заливочной струи на распределение примеси в слитке (рис. 9.9, б). Отмечено некоторое возрастание отрицательной ликвации в периферийной части слитка и положительной в «полосе» и смещение этой «полосы» в направлении к периферии области.

Вторая серия вычислительных экспериментов посвящена исследованию взаимообусловленных процессов гидродинамики, тепломассопереноса и затвердевания при формировании уширенных кверху и книзу 8-тонных стальных слитков Ст.3сп в зависимости от интенсивности утепления их верхней части теплоизоляционными вкладышами (рис. 9.10).

Установлен пренебрежимо малый вклад концентрационной конвекции в протекание гидродинамических и тепло физических процессов и более значительный - в формировании химической однородности слитка (образование полосы с повышенным содержанием примеси). Сделано заключение о возможности расчета тепло физических процессов в рассматриваемых слитках без учета концентрационной конвекции.

Выявлены отличительные особенности затвердевания рассматриваемых слитков: в уширенных кверху слитках интенсивность конвекции на 20-40% выше и более равномерно распределена доля твёрдой фазы; в уширенных книзу - уширение является причиной смыкания границ питания и образования закрытой усадочной раковины (УР). Получено удовлетворительное согласование результатов ВЭ с данными натуральных исследований параметров открытой УР, что свидетельствует от адекватности сформулированной математической модели (рис. 9.11).

Установлены общие закономерности затвердевания уширенных книзу и кверху слитков: а) тепловая конвекция имеет две временные фазы развития (активная и «ползущего» течения), структура течения много вихревая (рис. 9.10); б) конвекция приводит (рис. 9.12) к увеличению темпа охлаждения и скорости затвердевания слитка, она является причиной резкого роста ширины ДФЗ в донной части слитка, изменения знака теплового потока на границе прибыль-слиток в активной фазе конвекции, сокращения глубины открытой УР, смещения закрытой УР в направлении к донной части слитка (рис. 9.11), увеличения теплосодержания изложницы и прибыли слитка; в) на формирование УР существенно воздействует конвективный теплообмен между прибылью и теплом слитка, влияния параметров теплоизоляционных вкладышей в исследованном интервале менее значительно (рис. 9.11).

Изучено влияние теплоизоляционных свойств материала вкладыша и его высоты на процессы, протекающие в слитке. Установлено, что улучшение теплоизоляционных свойств и увеличение высоты вкладыша способствует снижению интенсивности конвекции, теплосодержания изложницы и тем-

па охлаждения слитка, увеличению теплосодержания прибыли, заметному сокращению глубины открытой УР и незначительному - объёма закрытой УР. При этом рациональное значение высоты вкладыша не должно быть меньше полу ширины слитка. Результаты ВЭ и пакет прикладных программ по исследованию теплофизики затвердевания уширенных кверху и книзу слитков внедрены в институте черной металлургии Минчермета СССР.

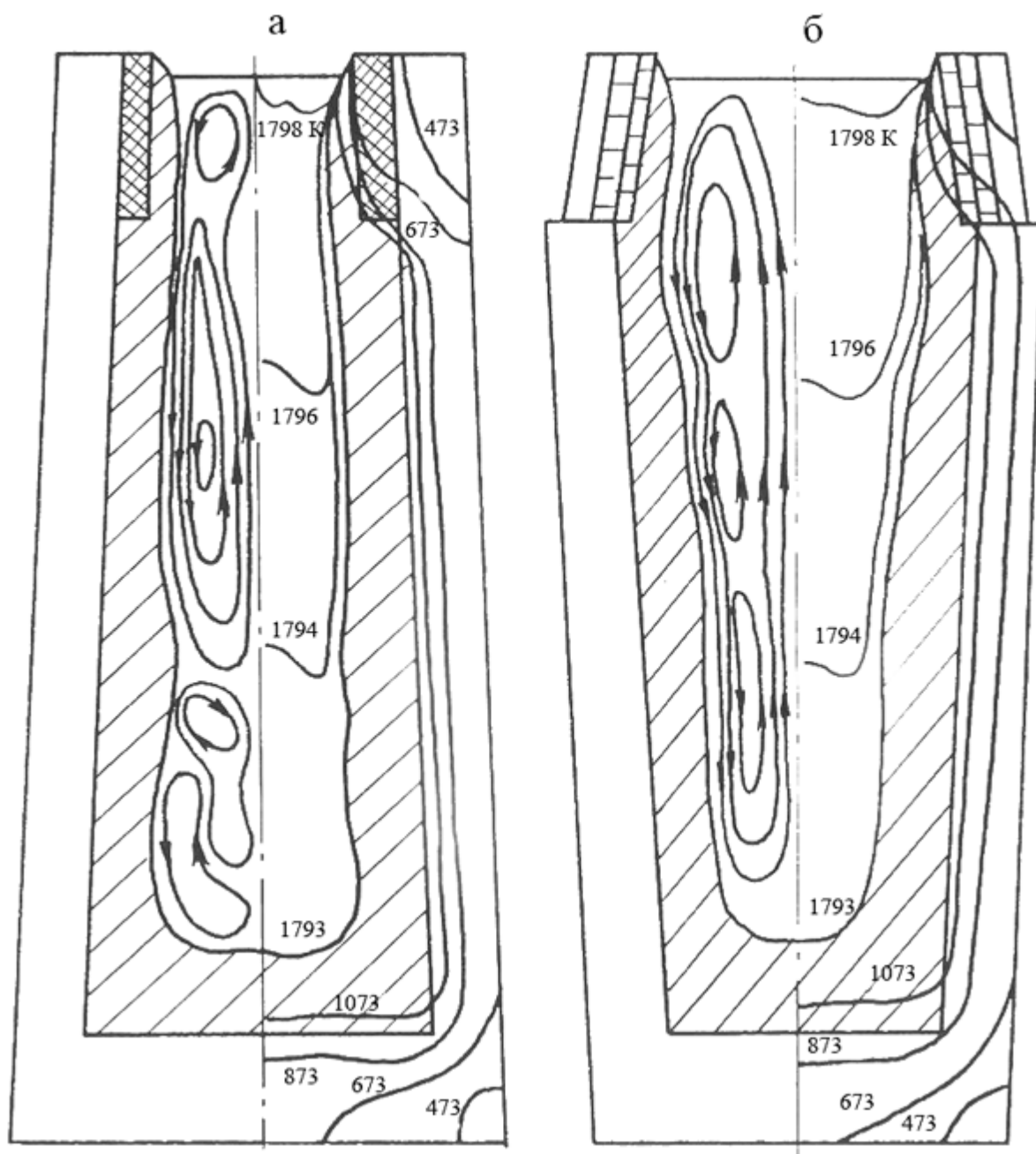


Рис. 9.10. Линии тока (слева) и изотермы в уширенных книзу (а) и кверху (б) стальных слитках ($t = 20$ мин.)

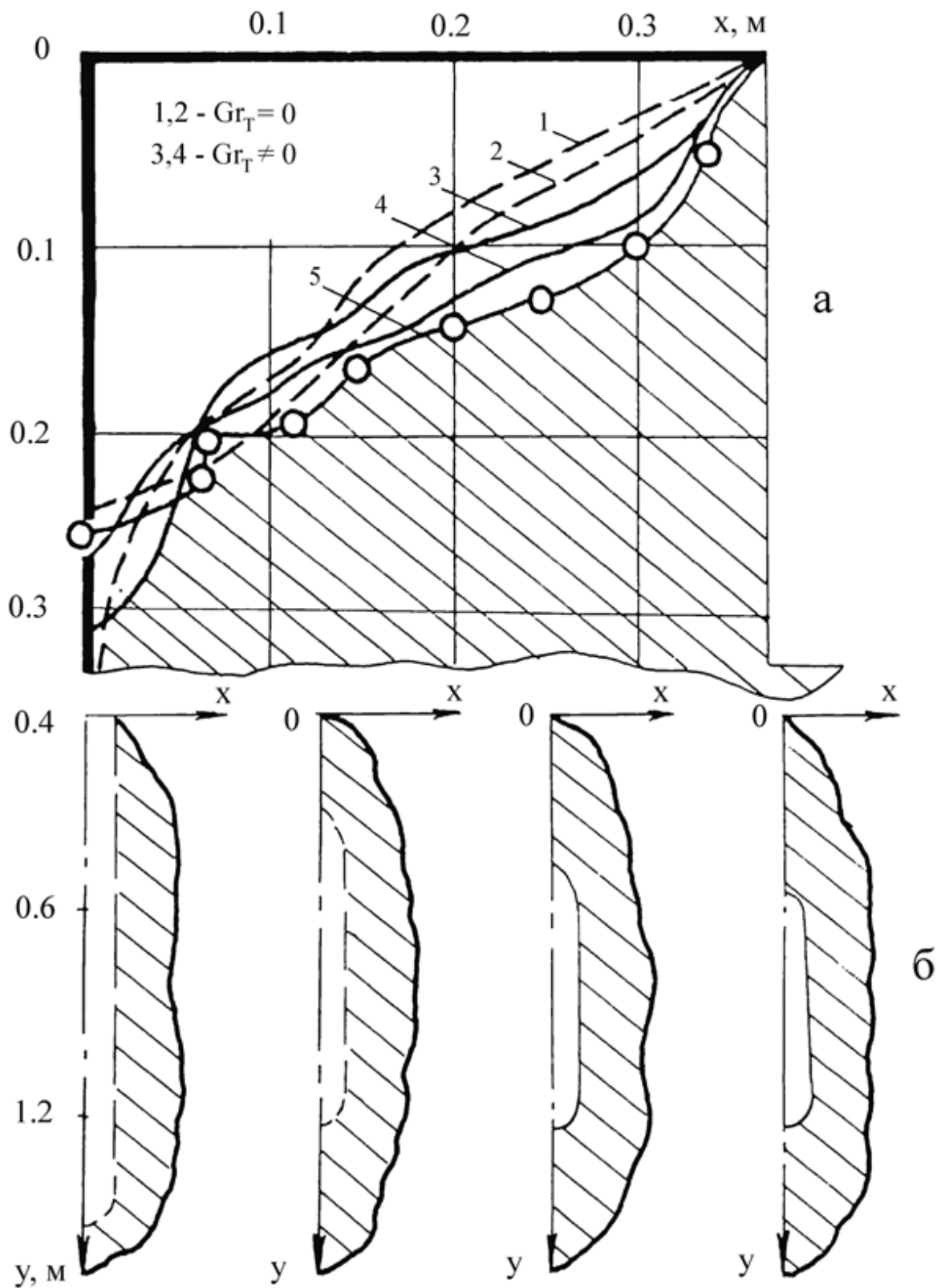


Рис. 9.11. Открытые (а) и закрытые (б) усадочные раковины:
 1, 3 - и 2, 4 - утепление шамотом и рекомендуемым материалом;
 5 - эксперимент

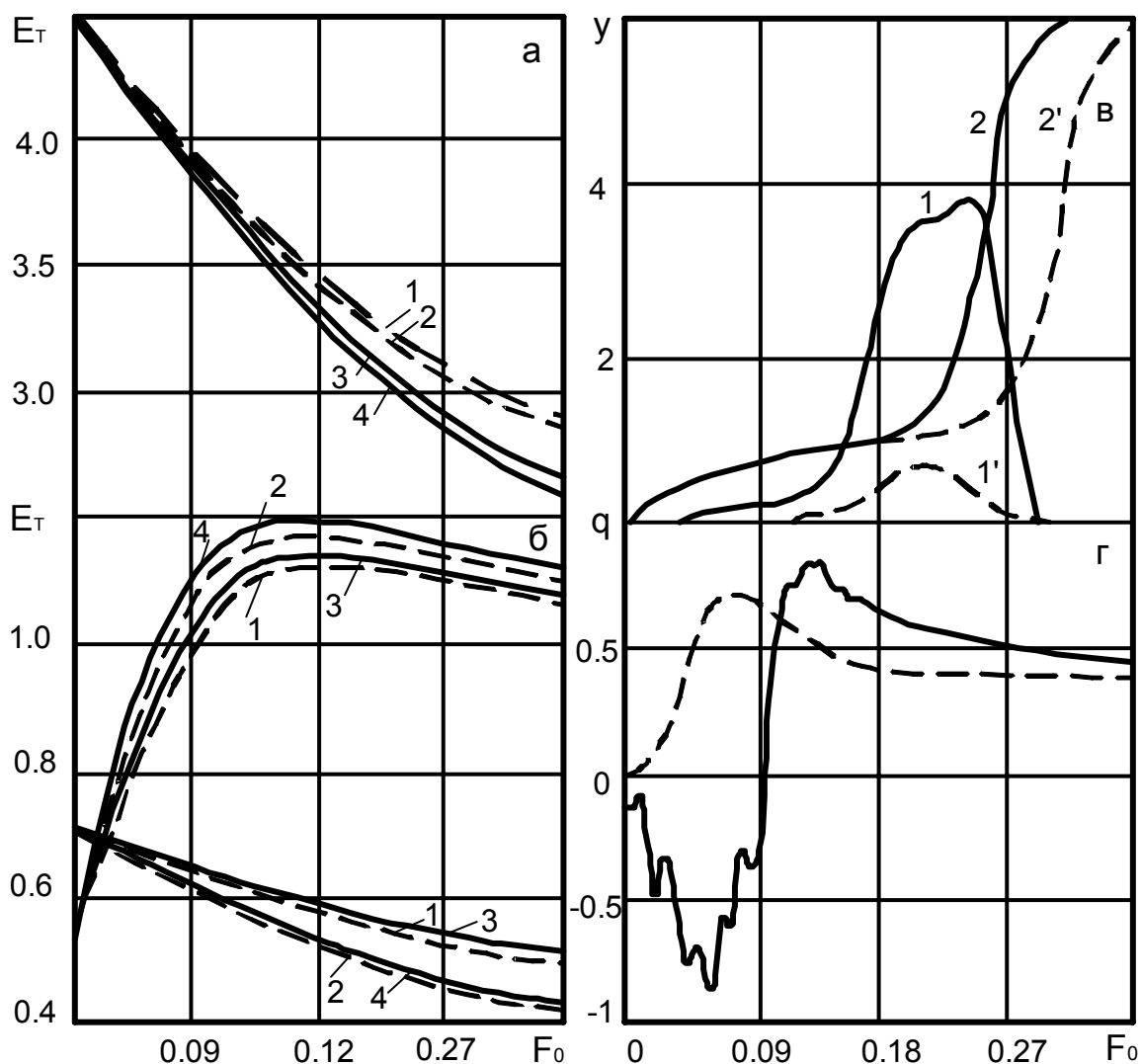


Рис. 9.12. Зависимость от времени: а - теплосодержания тела слитка, б - прибыли и изложницы (кривые 1 и 3 - утепление рекомендуемыми вкладышами, 2 и 4 - шамотными); в - ширины двухфазной зоны (кривые 1 и 1') и толщины твёрдой «корочки» (кривые 2 и 2'); г - теплового потока на границе тело слитка - прибыль; сплошные линии - с конвекцией, штриховые - без конвекции

9.4 Теплоперенос в условиях фильтрационной и электровихревой конвекции

Математические модели. Фасонные отливки ЛВМ. Как указывалось выше, в жидком ядре 2-го класса литых изделий (рис. 23.3, а-б) при их затвердевании движение практически отсутствует, а в ДФЗ оно в основном обусловлено температурной неоднородностью и фазовой усадкой расплава и представляет собой термофильтрационную конвекцию.

Уравнение, описывающее такое движение расплава, может быть получено на основании модельного уравнения (9.1), полученного в рамках макро-континуальной теории.

Сделав допущение о малости числа Рейнольдса $Re \approx 10^{-2}$ внутри ДФЗ и учитывая отсутствие электромагнитных сил в системе, что равносильно равенству нулю 1, 2, 4 и 7-го членов уравнения (9.6), приходим к модифицированному закону течения Дарси, который в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\frac{Pr}{Da}(1-\zeta)\langle \vec{V} \rangle_2 = -\overset{\circ}{\nabla} \tilde{\pi} - \vec{e}_y(1-\zeta)Pr^2 \left[(1-\theta)Gr_T - Ga\vec{r} \overset{\circ}{\nabla} \zeta \right]. \quad (9.99)$$

Уравнение неразрывности (9.2) с учетом того, что твёрдая фаза неподвижна ($\langle \vec{U} \rangle_1 = 0$), преобразуется следующим образом (в безразмерных переменных):

$$\overset{\circ}{\nabla}(1-\zeta)\langle \vec{V} \rangle_2 = -\rho_* \frac{\partial \zeta}{\partial Fo}, \quad (9.100)$$

где $\rho_* = \rho_1/\rho_2 - 1$ - коэффициент фазовой усадки.

Анализ уравнения неразрывности показывает, что гидродинамическую часть задачи можно решать лишь в простейших физических переменных. В связи с этим удобно перейти к уравнению Пуассона относительно давления, которое получается путём применения операции «дивергенция» (9.99) с учетом (9.101):

$$\overset{\circ}{\nabla} \left(\frac{Da}{Pr} \overset{\circ}{\nabla} \tilde{\pi} \right) = \rho_* \frac{\partial \zeta}{\partial Fo} - Pr \frac{\partial}{\partial y} \left[Da(1-\zeta) \left[(1-\theta)Gr_T - Ga \cdot y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \right]. \quad (9.101)$$

Решение задачи фильтрации в простейших физических переменных весьма удобно с практической точки зрения: открывается возможность прямого расчета по имеющемуся полю давления газоусадочной пористости в затвердевающей отливке.

Усредненные уравнения теплопереноса и переноса доли твёрдой фазы вытекают из обобщённых уравнений (9.4), (9.5), (9.9) и принимая во внимание, что для второй группы литых изделий $\rho_1 \neq \rho_2$, $Q = 0$, в критериальном виде запишем их так:

$$\begin{aligned} & \left(1 - k_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) (\theta_k - \theta) \frac{\partial \zeta}{\partial Fo} + \left[Lu \overset{\circ}{\nabla} \theta + (\theta - \theta_k) \langle \vec{V} \rangle_2 \right] \overset{\circ}{\nabla} \zeta = \\ & = \left[Lu \overset{\circ}{\Delta} \theta - \overset{\circ}{\nabla} \left[(\theta_k - \theta) \langle \vec{V} \rangle_2 \right] - \frac{\partial \theta}{\partial Fo} \right] (1-\zeta) \end{aligned}, \quad (9.102)$$

$$c_* \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + \overset{\circ}{\nabla} \left[(1 - \zeta) \langle \vec{V} \rangle_2 \theta \right] = \overset{\circ}{\nabla} \left[(1 + \lambda \zeta) \overset{\circ}{\nabla} \theta \right]; \quad (9.103)$$

где c_* - такая же как и в (9.80), однако со следующими особенностями: $c = c_1 \rho_1 / (c_2 \rho_2) - 1$, $k = L \rho_1 / (c_2 \rho_2 T_0)$.

Для расчета температуры в стенках керамической формы и опорном наполнителе применяем уравнение теплопроводности (9.83). В качестве начальных условий для \vec{V} , θ и ξ могут быть использованы соотношения (9.15) и (9.85), соответствующие заливке перегретого расплава в предварительно прогретую литейную форму.

Для определения температуры на границе отливка-форма, или на границе, выделенной в опорном наполнителе, или на внешней границе формы и пр. используются линейные граничные условия I, II и III рода. Для расчета доли твёрдой фазы остаются справедливыми условия (9.93) - (9.96).

Граничные условия для давления являются следствием условий прилипания и непроницаемости для скорости на границе Γ_c :

$$\left(\vec{n} \overset{\circ}{\nabla} \tilde{\pi} \right) \Big|_{\Gamma_c} = (\vec{\tau} \nabla \tilde{\pi}) \Big|_{\Gamma_c}, \quad (9.104)$$

где $\vec{\tau}$ - единичный вектор, касательный к границе.

Традиционное использование граничного условия типа $\tilde{\pi} = 0$ на изотермах Γ_B или Γ_L является не совсем оправданным применительно к случаям, когда объём ДФЗ соизмерим с объёмом жидкого ядра. Такой подход не позволяет учесть фазовую усадку при затвердевании. В связи с этим предлагается методика формулировки граничных условий, учитывающая наличие «стефановских» потоков. Она основана на разложении $\tilde{\pi}$ в ряд Тейлора по нормали в окрестности границы Γ_B , а также на интегрировании уравнения неразрывности (9.100) по элементарному слою ДФЗ с целью определения скорости «стефановских» потоков. В частном случае, когда нормаль к Γ_B совпадает с осью OX , граничное условие приводится к виду:

$$\tilde{\pi}(x_b + h) = \tilde{\pi}(x_b) - k \text{Pr} u(x_b) / Da, \quad (9.105)$$

где x_b - координаты границы Γ_B ; h - шаг вдоль оси OX ; x_c - координата границы; $\Gamma_c u(x_b) = \rho_* \int_{x_b}^{x_c} \partial \zeta / \partial Fo dx$ - скорость «стефановских» потоков;

Отливки (ЭШП). Проблема получения качественного металла в настоящее время решается на базе методов спецэлектрометаллургии - метод ЭШП. Однако возможности ЭШП используются недостаточно полно, так как ещё отсутствуют надёжные данные о взаимообусловленных процессах переноса импульса, тепла и массы, и заряда, протекающих в системе электрошлак-окатышы-отливка-кристаллизатор-поддон (рис. 9.3, в), а также об оп-

тимальных параметрах переплава. Поэтому весьма актуальной задачей является разработка математических моделей ЭШП, наиболее полно отражающих его особенности с целью внедрения их в АСУ ТП и САПР технологического процесса.

Предлагаемая математическая модель описывает формирование цилиндрической отливки, получаемой в кристаллизаторе (K) методом ЭШП металлизированных окатышей (ЭШПО), и формулируется с учетом следующих положений:

- плавление металлизированных окатышей и лигатуры, поступающих в шлаковую ванну (ШВ) (при схеме ЭШП с не расходуемым электродом (Э)), или плавление расходуемого электрода (при схеме ЭШП с расходуемым электродом) происходит вследствие выделения джоулева тепла q_{σ^*} в ШВ;
- предполагается осевая симметрия;
- вследствие прохождения неравномерного в пространстве тока в ШВ и металлической ванне (МВ) возникают электромагнитные силы, вызывающие вместе с силой тяжести конвективные потоки;
- теплоотдача со свободной поверхности ШВ осуществляется за счет конвекции воздуха и излучения;
- постоянство удельного электрического сопротивления κ_{III} ШВ обеспечивается стабилизацией её состава путём введения добавок фтористого кальция.

Математическая модель для затвердевающих отливок ЭШП (третьей группы изделий) формулируется на основе уравнений (9.3)- (9.9) обобщенной математической модели. Отличительными особенностями модели третьей группы изделий являются: 1) учет электрических и магнитных явлений, а также стока тепла в окатыши и лигатуру; 2) рассмотрение процессов переноса не только в затвердевающей отливке, но и в ШВ и Э; 3) запись уравнений и граничных условий в цилиндрической системе координат; 4) пренебрежение фильтрацией расплава в ДФЗ, т.е. в правой части уравнений (9.6) 5-й член полагается равным нулю.

Уравнения переноса вихря и Пуассона для ШВ и МВ в безразмерной форме в цилиндрической системе координат запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \omega}{\partial Fo} + v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} - v_r \frac{\omega}{r} = \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) + \text{Pr}^2 \left(Gr_T^* \frac{\partial \theta}{\partial r} + \tilde{S} / r \cdot b \frac{\partial b}{\partial z} \right) (1 - \zeta) ; \quad (9.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \omega , \quad (9.107)$$

где v_z и v_r - компоненты скорости, определяемые через Ψ с помощью соотношений

$$v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad (9.108)$$

$\tilde{S} = \mu_M J_0^2 / (4\pi^2 \nu \rho)$ - параметр электровихревого течения;
 $Gr_T^* = g \beta_T T_0 r_0^3 / \nu^2$ - приведенное тепловое число Грасгофа; μ_M - магнитная проницаемость; J_0 - ток, подаваемый на Э; b - тангенциальная компонента вектора магнитной индукции.

Процессы теплопереноса и переноса доли твёрдой фазы в затвердевающей слитке (теплокинетические переносы) описываются уравнениями (9.80) и (9.84); в ШВ - также уравнением теплопереноса, но с учетом источников и стоков тепла:

$$\frac{c_{III} \rho_{III}}{c_2 \rho_2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + V_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + V_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \nabla \left(\frac{\lambda_{III}}{\lambda_2} \nabla \theta \right) + \frac{r_0^2}{T_0 \lambda_2} (q_{g^*} - q), \quad (9.109)$$

и в Э - уравнением теплопроводности:

$$\frac{c_{\text{Э}} \rho_{\text{Э}}}{c_2 \rho_2} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla \left(\frac{\lambda_{\text{Э}}}{\lambda_2} \nabla \theta \right), \quad (9.110)$$

где индексы Э и Ш соответствуют электроду и шлаку;

$q = \sum_{m=1}^2 G_m (c_m (T - T_0^m) + L_m)$ - объёмная мощность стоков тепла в лигатуру ($m = 1$) и окатыши ($m = 2$); G_m - массовая скорость подачи лигатуры (окатышей); c_m - удельная теплоёмкость материала лигатуры (окатышей); L_m - скрытая теплота растворения лигатуры (металлизированных окатышей); T_0^m - начальная температура лигатуры (окатышей); r_0 - радиус К; $q_{g^*} = \kappa_{III} (E_z^2 + E_r^2)$; E_z и E_r - компоненты вектора напряжённости электрического поля, определяемые из уравнения

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (9.111)$$

На основе закона Ома из (9.8) получаем уравнение для нахождения электрического потенциала φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (9.112)$$

Уравнения магнитной индукции (9.7) в критериальном виде запишем следующим образом:

$$\frac{\partial b}{\partial Fo} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial r} \left(\frac{\partial b}{\partial z} + b \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \frac{b}{r^2} \right] \text{Pr}_*, \quad (9.113)$$

где $\text{Pr}_* = \text{Pr}/\text{Pr}_M$.

Формулировка математической модели завершается постановкой условий однозначности.

Предполагается, что в начальный момент времени расплавленный металл и шлак неподвижны, доля твёрдой фазы отсутствует, температура в ШВ и МВ распределена однородно. Граничные условия для Ψ , ω и ξ формулируются также, как и при рассмотрении литых изделий первой группы. Так, в частности, Ψ на всех границах, а ω на оси области принимают нулевые значения. Для температуры и потенциала граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = \varphi|_{\Gamma_6} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = i; \quad \varphi|_{\Gamma_3} = \varphi_1, \quad (9.114)$$

где Γ_3 - поверхность контакта ШВ с Э; i_1 - плотность тока, протекающего через К; φ_1 - падение электрического напряжения на ШВ.

На свободной поверхности, на границе с К и поддоном выполняются линейные граничные условия 3-го рода:

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=H} &= Bi^* (\theta - \theta_{cp})|_{z=H}; & -\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=1} &= Bi_k (\theta - \theta_B)|_{r=1}; \\ & & -\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} &= Bi_n (\theta - \theta_B)|_{z=0}, \end{aligned} \quad (9.115)$$

Где $Bi^* = \alpha^* r_0 / \lambda_{Ш}$, $Bi_k = k_T r_0 / \lambda_k$ ($i = 1, 2, 3$), Bi_n - критерий Био; θ_b - температура воды. Коэффициенты теплоотдачи α^* на свободной поверхности ШВ и теплопередачи k_T на границе с К определяются по формулам:

$$\alpha^* = \alpha_{cp} + \sigma \varepsilon \left[T (T^2 + T_{cp} T + T_{cp}^2) + T_{cp}^3 \right]; \quad (9.116)$$

$$k_T = \left[\frac{1}{\alpha_b d_b} + \frac{1}{2 \lambda_M} \ln \left(\frac{d_n}{d_b} \right) + \frac{1}{\alpha_n d_n} \right]^{-1}, \quad (9.117)$$

где α_{cp} , α_b , α_n - коэффициенты теплоотдачи на границах ШВ-окружающая среда, ШВ-К и К-вода; T_{cp} - температура окружающей среды; ε - излучательная способность ШВ; σ - постоянная Стефана-Больцмана; d_b и d_n - внутренний и внешний диаметр К; λ_M - коэффициент теплопроводности материала К.

Граничные условия для уравнения магнитной индукции (9.113) получаются интегрированием уравнения Максвелла, связывающего плотность тока и индукцию магнитного поля:

$$b|_{r=0} = \frac{\partial(br)}{\partial r} \Big|_{z=H} = 0; \quad (9.118)$$

$$-\frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{\Gamma_3} = i_3; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(br)}{\partial r} \Big|_{\Gamma_B} = i_B; \quad (9.119)$$

$$-\frac{\partial b}{\partial z} \Big|_{r=1} = i_1; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(br)}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{3,[0,r_3]}} = i_3, \quad (9.120)$$

где i_3 , i_b - соответственно ток переплава; ток, протекающий через границу выливаемости.

Вычислительный алгоритм. Решение фильтрационной части задачи при затвердевании отливок простейшей конфигурации осуществляется также с привлечением итерационного МПН. В результате установления соответствия между модельным уравнением и уравнением Пуассона для давления (9.101) получаем:

$$k_2 = k_3 = k_6 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_4 = k_5 = Da/Pr; \quad (9.121)$$

$$k_7 = -Pr \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Da(1-\zeta) \left[(1-\theta)Gr_T - Ga y \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \right\}. \quad (9.122)$$

После применения МПН и перехода к уравнению канонического вида (9.44), имеем:

для прогонки вдоль оси OX

$$k = \frac{Da}{Pr}; \quad r = 0; \quad f = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Da}{Pr} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial y} \right)^S + \frac{\tilde{\pi}^S}{0,5\tau_1} + k_7; \quad (9.123)$$

для прогонки вдоль оси OY

$$k = \frac{Da}{Pr}; \quad r = 0; \quad f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Da}{Pr} \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial x} \right)^{S+0,5} + \frac{\tilde{\pi}^{S+0,5}}{0,5\tau_2} + k_7. \quad (9.124)$$

Дискретизация граничных условий для $\tilde{\pi}$ (9.104), (9.105), выполненная с применением метода разложения в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка малости, позволяет получить следующие значения коэффициентов для прогонки вдоль оси OX:

$$k_1 = 1; \quad \mu = -h_{2,j} Pr u(x_b)/Da; \quad k_2 = 0; \quad \mu_2 = 1. \quad (9.125)$$

Аналогичные соотношения получаются и для прогонки вдоль оси OY.

Итерационный процесс расчета $\tilde{\pi}$ с использованием (9.123)- (9.125) прекращается в момент выполнения условий (9.98). Последующий анализ поля $\tilde{\pi}$ позволяет определить точки, где давление достигает критического значения $\tilde{\pi}_k$. Это приводит к разрыву жидкости и, как следствие к образованию пор. В этих точках затвердевание протекает без движения расплав, поэтому u и v полагаются равными нулю. Поле скоростей рассчитывается по найденному полю давления на основании уравнения Дарси (9.99) с введением дельта-функции:

$$\delta(|\tilde{\pi}|) \frac{\text{Pr}}{Da} (1 - \zeta) \langle \vec{V} \rangle_2 = -\nabla \tilde{\pi} - \vec{e}_y (1 - \zeta) \text{Pr}^2 [(1 - \theta) Gr_T - Ga \cdot \vec{r} \nabla \zeta]; \quad (9.126)$$

рассеянная пористость - по формуле

$$\Pi = \rho_* (1 - \zeta_k), \quad (9.127)$$

где $\delta(|\tilde{\pi}|) = 1$, если $|\tilde{\pi}| < \tilde{\pi}_k$; ζ_k - значение доли ζ , при котором $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_k$.

Метод фиктивных областей. Особо следует остановиться на выборе методики решения уравнений фильтрации (9.99), (9.100) в затвердевающих областях сложной конфигурации, характерных для фасонных отливок ЛВМ.

В таких изделиях с одним или несколькими термическими узлами область исследования фильтрационных потоков Ω_1 (рис. 9.3, а, б), представляющая собой твердожидкую часть ДФЗ и ограниченная линиями питания и выливаемости, на некотором этапе формирования отливки становится много связной. В связи с этим, а также со сложной, изменяющейся во времени конфигурацией области исследования, возникают значительные трудности, как при разработке вычислительного алгоритма, так и при составлении программы.

Одним из приемлемых путей решения указанной проблемы является привлечение метода фиктивных областей, при котором осуществляется замена рассматриваемой краевой задачи на задачу, близкую к ней, но сформулированную в уже более простой односвязной области Ω_0 . В данном случае такой областью будет вся внутренняя область литейной формы, заполненная затвердевающим расплавом, с внешней границей Γ_1 и соответствующими граничными условиями.

В последующем принимается во внимание известный из эксперимента факт, что в среде с относительно большим коэффициентом k изменение $\tilde{\pi}$ в фильтрующейся жидкости мало и, наоборот, если значение k меньше, чем в области Ω_1 , отмечается значительное изменение $\tilde{\pi}$.

Принимая во внимание сказанное, начальная область Ω_1 дополняется двумя фиктивными - Ω_2 и Ω_3 (рис. 9.3, а, б). Область Ω_2 , ограниченная линией Γ_B , включающая в себя жидкое ядро и часть ДФЗ ($\xi < \xi_b$), дополняется

коэффициентом k , превышающим на два порядка его значения при $\xi = \xi_b$. Область Ω_3 , включающая в себя твёрдую корочку и часть ДфЗ ($\xi < \xi_b$) и ограниченная линиями Γ_1 и Γ_{II} , до определяется коэффициентом k , значение которого на два-три порядка ниже, чем при $\xi = \xi_{II}$.

С учетом до определения краевая задача фильтрации в области имеет вид:

$$\rho_{\mathfrak{z}} \frac{\partial \zeta}{\partial Fo} = -\nabla(k_{\mathfrak{z}} \nabla \tilde{\pi}); \quad (9.128)$$

$$\pi|_{\Gamma_1} = 0; \quad (9.129)$$

$$\rho_{\mathfrak{z}} = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega_2, \\ \rho_*, & (x, y) \in \Omega_1, \\ 0, & (x, y) \in \Omega_3; \end{cases} \quad (9.130)$$

$$k_{\mathfrak{z}} = \begin{cases} 1/\varepsilon_1, & (x, y) \in \Omega_2, \\ Da / Pr, & (x, y) \in \Omega_1, \\ \varepsilon_2, & (x, y) \in \Omega_3, \end{cases} \quad (9.131)$$

где $\varepsilon_1 = 10^{-1} \div 10^{-2}$; $\varepsilon_2 = 10^{-9} \div 10^{-10}$ - положительные константы.

Особенности аппроксимации математической модели отливок ЭШП.

Особенности аппроксимации математической модели для затвердевающих отливок ЭШП связаны, во-первых, с тем, что её формулировка выполнена в цилиндрической системе координат, во-вторых, с тем, что электромагнитные процессы рассматривались в шлаковой и металлической ванне.

Придерживаясь принятой выше схемы, прежде всего, можно установить соответствие между уравнениями переноса вихря (9.106), теплопереноса (9.109), Пуассона для Ψ (9.107), Лапласа для электрического потенциала (9.112) и магнитной индукции (9.113) с модельным уравнением (9.44). Решение тепловой задачи выполняется путём сведения уравнений теплопереноса в ШВ, затвердевшем слитке и электроде к некоторому обобщённому виду:

$$c \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + v_r \frac{\partial \theta}{\partial z} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \nabla(\Lambda \nabla \theta), \quad (9.132)$$

где c и Λ - приведенные коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности, принимающие свои значения в ШВ, затвердевающем слитке и Э. Так, в ШВ теплоёмкость определяется по формуле

$$c = \frac{c_{ш} \rho_{ш}}{c_2 \rho_2} - Q / \frac{\partial \theta}{\partial Fo}; \quad Q = \frac{r_0^2}{T_0 \lambda_2} (q_{g^*} - q). \quad (9.133)$$

Учитывая, что теплоёмкость является функцией времени и координаты, в дальнейшем будем её вычислять как полу сумму значений в двух последовательных $(n-1)$ и (n) моментах времени.

После сведения исходных уравнений к цепочке одномерных уравнений (9.46) и (9.47) устанавливаем соответствие между расщеплёнными уравнениями и уравнением (9.50). Для решения уравнений переноса вихря, доли твёрдой фазы и теплопереноса в затвердевающей слитке, а также теплопроводности в электроде (9.110) могут быть использованы данные, приведенные в табл. 9.4 - 9.5.

Далее установим соответствие между обобщённым представлением граничных условий типа (9.82) и конкретными условиями для каждой из исходных функций по методике, изложенной ранее: ω , θ , Ψ , ξ , φ , b . Это даёт возможность получить коэффициенты κ_1 , κ_2 , μ_1 , μ_2 и, как следствие, первые прогоночные коэффициенты, необходимые для последующей реализации задачи методом продольно-поперечной прогонки.

Анализ результатов ВЭ. Теплофизические параметры отливок специальных видов литья соответствуют условиям затвердевания расплава низколегированной стали 35 ХЛ в керамических литейных формах и инструментальных сталей в водоохлаждаемых кристаллизаторах ЭШП.

Исследованы общие закономерности фильтрационной конвекции в ДФЗ при затвердевании мелких отливок ЛВМ. Показано, что течение в основном направлено к границе питания, величина скорости не превышает $10^{-4} \div 10^{-5}$ м/с. Давление в расплаве не достигает значений, соответствующих образованию газоусадочной пористости при тепловых условиях (предварительный прогрев литейной формы) формирования отливок ЛВМ. При расчетах затвердевания мелких отливок фильтрацией расплава, вызванной температурной неоднородностью (в отличие от случая движения расплава за счет фазовой усадки), можно пренебречь.

Установлено, что теплоперенос вследствие фильтрации приводит к некоторому повышению температуры (до 2% интервала затвердевания бинарного расплава), снижению доли твёрдой фазы в ДФЗ (рис. 9.13) и замедлению продвижения характерных границ ДФЗ по сравнению с затвердеванием неподвижного расплава.

Для фасонных отливок ЛВМ установлены следующие закономерности. Увеличение начального перегрева расплава способствует росту закрытой УР, вероятности трещинообразования и относительного размера кристаллического зерна. Минимизация объёма закрытой УР и её более глубокое залегание достигаются при ускоренном затвердевании верхней части отливки. Стояк способствует разогреву верхней части отливки и смещению УР. Сокращение расстояния между отливками соседних ярусов и блоков и уменьшение диаметра питателя приводит к увеличению объёма УР и уменьшению глубины её залегания.

Исследованы гидродинамические и теплофизические процессы (рис. 9.14) при затвердевании цилиндрических отливок ЭШП с расходуемым электродом и ЭШПО. Установлено, что гидродинамическая обстановка в шлаковой и металлической ваннах определяется наложением электровихревой и тепловой конвекции, структура течения много вихревая. Выявлена положительная роль тепловой конвекции, выражающаяся в уменьшении ширины ДФЗ, и отрицательная роль электровихревой конвекции, состоящая в увеличении глубины жидкой лунки. Последнее является причиной развития пористости и ликвации в литой заготовке.

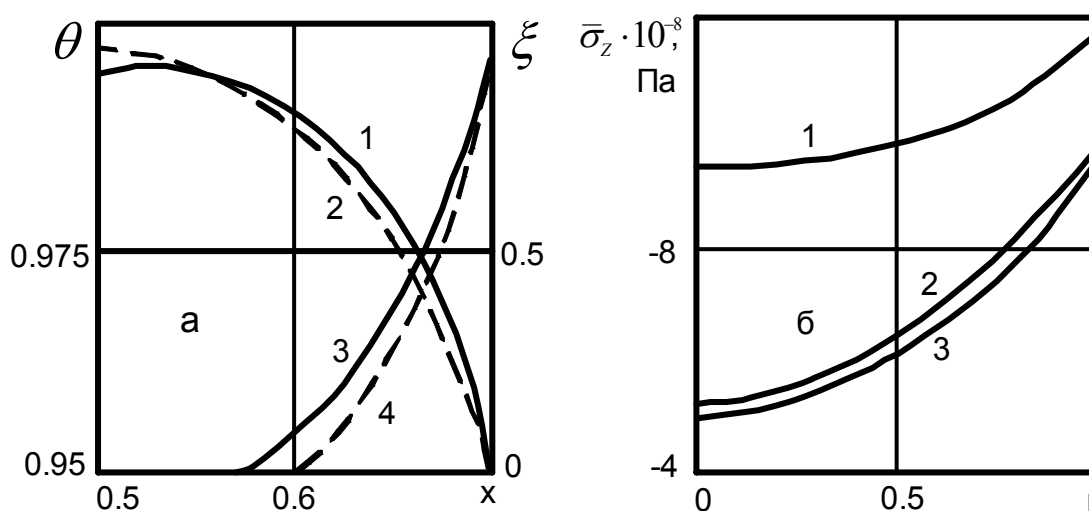


Рис. 9.13. Профили θ (1, 2) и ξ (3, 4),
 а - 2 и 4 - фильтрация отсутствует;
 термические напряжения в отливке ЭШП;
 б - 2,3 - тепловод через поддон отсутствует,
 2 - $G_m = 49,7$ кг/ч, 3 - $G_m = 24,7$ кг/ч

Показано, что теплоотвод через поддон при значительной высоте отливки почти не оказывает влияния на распределение температуры в ней; величина составляющей градиента температуры в осевом направлении выше, чем в радиальном, что является причиной аналогичного соотношения между осевыми и радиальными термическими напряжениями. Наибольшая плотность распределения эквипотенциальных линий и повышенное выделение джоулева тепла наблюдаются у поверхности электрода и у границ шлак-металл.

Установлено, что режим охлаждения, при котором поддон является изотермической поверхностью, приводит к возрастанию средних термических напряжений в отливке по сравнению со случаем отсутствия теплоотвода через поддон (рис. 9.13, б). При увеличении скорости наплавления Gm наблюдается возрастание термических напряжений. Усилие теплоотвода через

кристаллизатор приводит к росту термических напряжений, уменьшению объёма жидкой лунки и, как правило, к снижению пористости и ликвации в отливке.

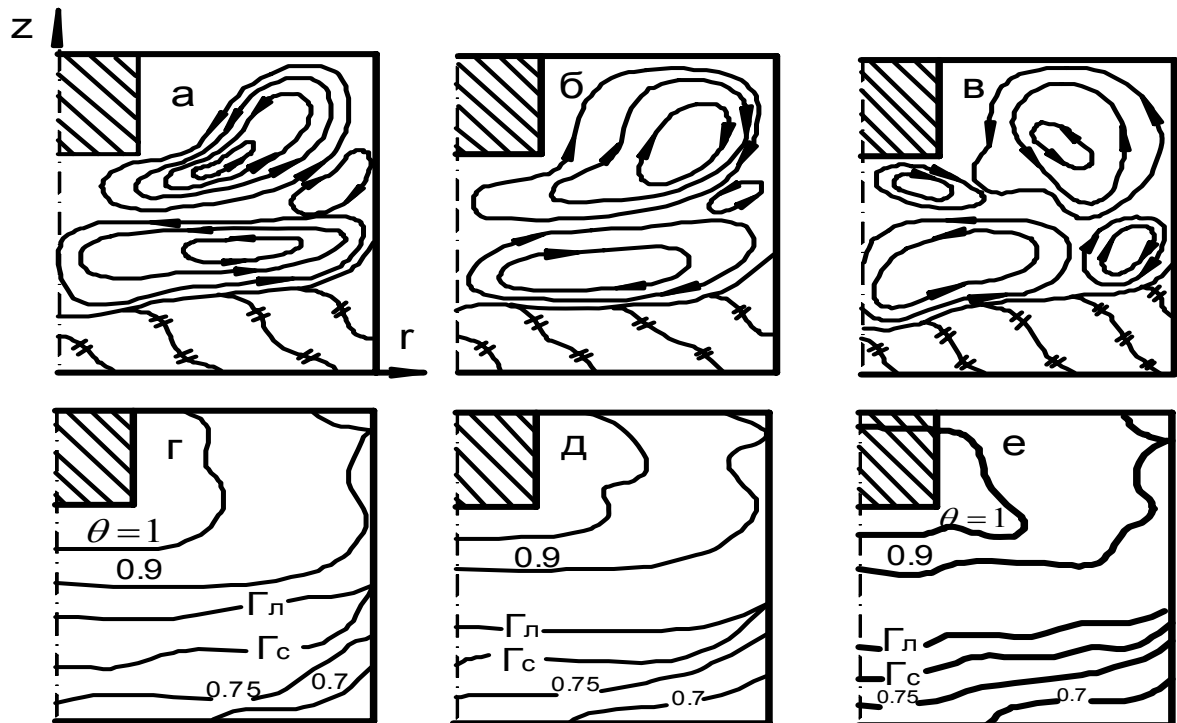


Рис. 9.14. Изолинии функции тока (а - в) и изотермы (г - е) в отливке ЭШПО:
а - электровихревая конвекция; б, д - тепловая конвекция;
в, е - смешанная конвекция; г - конвекция отсутствует

10 ТЕПЛОПЕРЕНОС В РАСПЛАВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ (ПЛАВЛЕНИЯ ИЛИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ)

10.1 Общая формулировка задачи.

Учет усадки расплава при его затвердевании

Общая формулировка задачи. До сих пор мы рассматривали теплоперенос в однофазных системах. При этом граничные условия во всех задачах оставались линейными, а сами границы - постоянными.

Теперь перейдем к рассмотрению класса явлений теплопереноса в областях с подвижными границами, на которых происходит превращение расплава в твердое тело (или наоборот, твердого тела в расплав).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением относительно простых и потому наиболее полно исследованных явлений теплопереноса при плавлении и затвердевании, хотя в принципе сходные явления наблюдаются и при переходе жидкость - пар (испарение, конденсация).

Итак, пусть имеется некоторая область 1, занятая затвердевшим расплавом, и сосуществующая с ней область 2, занятая жидкостью.

В области 1, занятой затвердевшим расплавом, поле скоростей, естественно, отсутствует, и потому уравнение теплопереноса вырождается в этом случае в уравнение теплопроводности в твердом теле.

Обозначим все физические величины, относящиеся к затвердевшей части расплава индексом "1". Воспользуемся, далее, уравнением теплопереноса. Учитывая, что в данном случае $\bar{U} = 0$, получим:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \tilde{\lambda}_1 \operatorname{div}(l_1 \operatorname{grad} T_1).$$

Здесь $\tilde{\lambda}_1 = \text{const}$ - некоторый характерный коэффициент теплопроводности затвердевшего расплава, $l_1 = \lambda_1 / \tilde{\lambda}_1$ - безразмерная теплопроводность затвердевшего расплава.

Вводя, кроме того, характерный коэффициент температуропроводности затвердевшего расплава a_1 :

$$a_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1}{\rho_1 c_1},$$

уравнение теплопроводности можно переписать в виде:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \operatorname{div}(l_1 \operatorname{grad} T_1). \quad (10.1)$$

В области 2, занятой жидким расплавом, может происходить его перемещение. В общем случае здесь может иметь место как напорное движение под действием градиента давления, так и температурная конвекция.

Все теплофизические величины и параметры, относящиеся к области 2, будем обозначать индексом "2".

Кроме того, по-прежнему положим:

$\tilde{\lambda}_2 = const$ - характерный коэффициент теплопроводности жидкого расплава,

$l_2 = \frac{\lambda_2}{\tilde{\lambda}_2}$ - безразмерная теплопроводность жидкого расплава,

$a_2 = \frac{\tilde{\lambda}_2}{\rho_{02}c_2}$ - характерный коэффициент температуропроводности жидкого расплава.

Тогда уравнения теплопереноса и движения примут вид:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} + (\bar{U}\nabla)T_2 = a_2 \operatorname{div}(l_2 \operatorname{grad}T_2); \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + (\bar{U}\nabla)\bar{U} = -\frac{1}{\rho_{02}}\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \bar{U} + \beta \bar{g}(T^* - T). \quad (10.3)$$

Вместе с уравнением неразрывности

$$\nabla \bar{U} = 0, \quad (10.4)$$

эти уравнения составляют полную систему уравнений, описывающих поле температур и скоростей в жидкой части расплава при отсутствии электрических и магнитных полей.

Непрерывной и специфической принадлежностью системы (10.1)-(10.4) для всех фаз - твердой и жидкой - являются условия на подвижной границе Γ , разделяющей эти фазы.

Эти условия должны быть в общем случае двух видов: тепловые и гидродинамические.

Тепловые условия на подвижной границе раздела фаз Γ представляют собой рассмотренные ранее специальные граничные условия 1-го типа.

Согласно этим условиям, на подвижной границе раздела фаз температура жидкости и температура твердого тела должны быть равны друг другу и равняться температуре фазового превращения (температуре кристаллизации и затвердевания).

$$T_1|_{\Gamma} = T_2|_{\Gamma} = T_{\kappa} = const. \quad (10.5)$$

Кроме того, на этой границе имеет место условие, следующее из баланса тепла на подвижной границе, перемещение которой сопровождается выделением или поглощением тепла. Это условие имеет вид:

$$-\lambda_1 \nabla T_1|_{\Gamma} + \lambda_2 \nabla T_2|_{\Gamma} = r_1 \rho_1 \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau}. \quad (10.6)$$

Здесь r_1 - скрытая теплота фазового превращения, рассчитанная на единицу массы твердого тела, ρ_1 - плотность затвердевшего расплава, $\bar{\varepsilon}(r)$ - вектор, направленный по нормали к фронту фазового превращения и по модулю равный толщине затвердевшего слоя (рис. 10.1).

Усадка расплава при его затвердевании. Обычно исследование теплопереноса при наличии фазового перехода выполняется с дополнительным упрощающим предположением о приближенном равенстве плотностей твердого и жидкого расплава:

$$\rho_1 \approx \rho_2.$$

Мы рассмотрим физически более строгую постановку задачи с учетом неравенства этих плотностей.

Пусть для определенности, как это часто имеет место, плотность твердой фазы ρ_1 больше плотности жидкой фазы ρ_2 при характерной температуре T^* (в качестве которой для такого рода задач удобно выбирать температуру фазового перехода T_K):

$$\rho_1 > \rho_2.$$

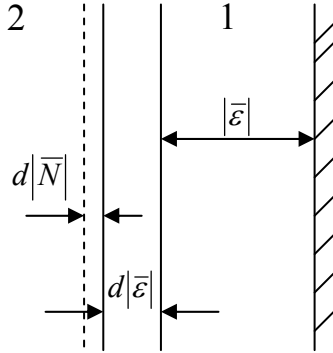


Рис. 10.1. Схема затвердевающей области.

При бесконечно малом перемещении поверхности раздела Γ вектор нормали к фронту фазового превращения в фиксированной точке $\bar{N}|_{\Gamma} = \bar{\epsilon}(r)$ изменится на величину $d|\bar{\epsilon}|$ и количество образующейся твердой фазы на единицу поверхности фронта Γ составит:

$$\rho_1 d|\bar{\epsilon}|.$$

Жидкая фаза той же массы занимала, естественно, больший объем (рис. 10.1):

$$\rho [d|\bar{\epsilon}| + d|\bar{N}|].$$

Соответственно ее масса будет:

$$\rho_2 [d|\bar{\epsilon}| + d|\bar{N}|].$$

Из условия равенства обеих масс (т.е. из закона сохранения массы) имеем:

$$\rho_1 d|\bar{\epsilon}| = \rho_2 d|\bar{\epsilon}| + \rho_2 d|\bar{N}|,$$

и отсюда:

$$d|\bar{N}| = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) d|\bar{\epsilon}|.$$

При затвердевании и перемещении фронта фазового превращения Γ на величину $d|\bar{\epsilon}|$ изменяется объем, занимаемый жидкой фазой, и это изменение объема составляет величину

$$1 \cdot d|\bar{N}|.$$

Из-за этого возникает нормальная к фронту фазового превращения Γ компонента скорости:

$$U_N|_{\Gamma} = -\frac{d|\bar{N}|}{d\tau} = -\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) \frac{d|\bar{\varepsilon}|}{d\tau}.$$

Поскольку фронт фазового превращения является твердой поверхностью, касательная к фронту компонента скорости равна нулю, и поэтому вектор скорости

$$\bar{U}|_{\Gamma} = \bar{e}_N U_N|_{\Gamma},$$

где \bar{e}_N - единичный вектор нормали к фронту фазового превращения Γ .

Учитывая, что $\bar{e}_N|\bar{\varepsilon}| = \bar{\varepsilon}$, и умножая обе части последнего выражения на единичный вектор нормали \bar{e}_N , получим:

$$\bar{U}|_{\Gamma} = -\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) \frac{d\bar{\varepsilon}}{dr}. \quad (10.7)$$

Кроме условий на подвижной границе фазового перехода Γ , система уравнений теплопереноса и движения для обеих фаз должна быть дополнена обычными краевыми условиями, которые могут быть весьма разнообразны. Эти условия ничем не отличаются от рассматривавшихся нами ранее, и потому нет нужды специально их выписывать, составляя эту операцию до того момента, когда придется решать конкретные задачи.

Займемся теперь приведением записанной системы уравнений к безразмерному виду с тем, чтобы до минимума сократить число параметров, от которых зависит решение поставленной задачи.

Как и ранее, обозначим \tilde{x}_0 характерный размер тела (общий для обеих, твердой и жидкой фаз) и определим безразмерные операторы:

$$\overset{\circ}{\nabla} = \tilde{x}_0 \nabla; \quad \overset{\circ}{div} = \tilde{x}_0 div; \quad \overset{\circ}{grad} = \tilde{x}_0 grad; \quad \overset{\circ}{\Delta} = \tilde{x}_0^2 \Delta.$$

Введем также безразмерный вектор $\bar{\xi}$, определив его выражением:

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\tilde{x}_0}. \quad (10.8)$$

Введем далее безразмерную скорость, давление и температуру в обеих областях 1 и 2 соотношениями:

$$\bar{v} = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_0}; \quad \bar{\Pi} = \frac{\tilde{p} - \tilde{p}_{\min}}{\tilde{p}^* - \tilde{p}_{\min}}; \quad \theta_1 = \frac{T_k - T_1}{T_k - T_{\min}}; \quad \theta_2 = \frac{T_k - T_2}{T_k - T_{\min}}.$$

Здесь \bar{U}_0 ; $\tilde{p}^* - \tilde{p}_{\min}$; $T_k - T_{\min}$ - соответственно характерная скорость, характерная разность давлений, характерная разность температур. Легко за-

метить, что в качестве характерной температуры в данном случае выбрана температура фазового перехода T_K :

$$T^* = T_K.$$

Обозначим далее безразмерное время:

$$Fo = \frac{a_2 \tau}{\tilde{x}_0^2}$$

и введем уже использовавшиеся ранее критерии Пекле, Рейнольдса, Прандтля, Эйлера и Грасгофа, определив их следующим образом:

$$Pe = \frac{\tilde{U}_0 \tilde{x}_0}{a_2}; \quad Re = \frac{\tilde{U}_0 \tilde{x}_0}{\nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{a_2}$$

$$Eu = \frac{(\tilde{p}^* - \tilde{p}_{\min})}{\rho_{02} \tilde{U}_0^2}; \quad Gr = \frac{|\bar{g}| \beta (T_k - T_{\min})}{\nu} \tilde{x}_0^3.$$

В этих обозначениях в качестве характерной теплопроводности используется теплопроводность жидкой части расплава, а в качестве характерной температуры - температура кристаллизации T_K .

Наконец, введем дополнительно следующий критерий:

$$K = \frac{r_1}{c_2 (T_k - T_{\min})}, \quad (10.9)$$

называемый критерием фазового превращения или критерием кристаллизации.

С использованием введенных таким образом обозначений безразмерных и критериальных величин, система уравнений (10.1) – (10.4) и условия на подвижной границе Γ (10.5) – (10.7) приводится к виду:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = \frac{a_1}{a_2} \mathring{\text{div}} \left(l_1 \mathring{\text{grad}} \theta_1 \right); \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} + Pe \left(\bar{v} \mathring{\nabla} \right) \theta_2 = \mathring{\text{div}} \left(l_2 \mathring{\text{grad}} \theta_2 \right); \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial Fo} + Pe \left(\bar{v} \mathring{\nabla} \right) \bar{v} = -Eu Pe \mathring{\nabla} \tilde{\Pi} + Pr \mathring{\Delta} \bar{v} + \bar{e}_g \frac{Gr Pr}{Re} \cdot \theta_2; \quad (10.12)$$

$$\mathring{\nabla} \bar{v} = 0; \quad (10.13)$$

$$\theta_1|_{\Gamma} = 0; \quad (10.14)$$

$$\theta_2|_{\Gamma} = 0; \quad (10.15)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \mathring{\nabla} \theta_1|_{\Gamma} - \mathring{\nabla} \theta_2|_{\Gamma} = K \frac{d\bar{\xi}}{dFo}; \quad (10.16)$$

$$\bar{v}|_r = -\left(\frac{\rho_k}{\rho_{02}} - 1\right) \frac{1}{Pe} \cdot \frac{d\bar{\xi}}{dFo}; \quad (10.17)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае теплопереноса при наличии фазовых превращений наряду с обычными величинами критериев Пекле, Рейнольдса, Прандтля, Эйлера, Грасгофа и отношениями параметров твердого и жидкого состояний:

$$\frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}|_r, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

появляется еще один специфический критерий кристаллизации K , характеризующий интенсивность источника (стока) тепла на фронте фазового превращения. Этот критерий играет в задачах теплопереноса при наличии фазовых превращений важную роль. В отличие от всех остальных критериев фазового превращения K появляется не в самих уравнениях теплопереноса и движения, а лишь в условиях на фронте фазового превращения, составляющих неотъемлемую часть системы уравнений теплопереноса и движения в рассматриваемом случае.

Как видно из записанных уравнений и условий на подвижной границе, задача теплопереноса при наличии фазовых превращений в общем случае весьма сложна, в связи, с чем известно относительно небольшое количество точных решений этой задачи для разных условий.

В качестве примера использования полученных уравнений рассмотрим две простейшие задачи: затвердевание полупространства, заполненного перегретым расплавом при постоянной температуре границы (так называемая обобщенная задача Стефана) и теплоперенос при обтекании полубесконечной пластины металлическим расплавом.

10.2 Затвердевание полупространства, заполненного перегретым расплавом. Задача Стефана

Пусть в начальный момент $Fo = 0$ в полупространстве $\eta_1 \geq 0$ имеется жидкий расплав при температуре $T = T_0 > T_K$ (рис. 10.2).

На нижней границе полупространства $\eta_1 = 0$ задана постоянная температура $T = T_{\min} < T_K$. Вектор силы тяжести \bar{e}_g направлен вдоль оси η_1 противоположно орту соответствующей оси.

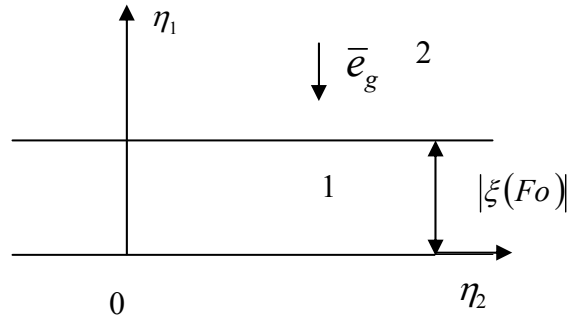


Рис. 10.2. Схема затвердевания расплава, заполняющего полупространство.

При заданном условии на нижней границе нижние слои жидкости будут более холодными, и, следовательно, более плотными, чем верхние, более горячие слои. Такая система является абсолютно устойчивой, и в ней не может самопроизвольно, под действием случайных возмущений, возникнуть конвективный поток.

Будем считать, что в начальный момент жидкость покоится. Поэтому движение ее в момент времени $Fo > 0$ будет определяться лишь условием на подвижной границе (10.17).

В рассматриваемом случае плоской границы Γ это условие примет вид:

$$\bar{v}|_{\eta=0} = \bar{e}_1 v_1 = -\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) \frac{1}{Pe} \frac{d\bar{\xi}}{dFo}; \quad (10.18)$$

$$v_2|_{\eta=0} = 0. \quad (10.19)$$

В соответствии с уравнением неразрывности (10.13) в рассматриваемом случае имеем:

$$\frac{dv_1}{d\eta_1} = 0; \quad v_1 = \text{const}(Fo),$$

т.е. единственная отличная от нуля компонента скорости v_1 может зависеть лишь от времени Fo .

Поэтому эта скорость определяется выражением, следующим из условия (10.18)

$$v_1 = -\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) \frac{1}{Pe} \frac{d|\bar{\xi}|}{dFo}. \quad (10.20)$$

Тем самым гидродинамическая часть задачи решается без труда.

Запишем теперь уравнения теплопереноса (10.10) - (10.11) для твердой и жидкой фаз, а также условия на подвижной границе (10.14)- (10.16); при этом учтем, что в тепловом отношении процесс вполне может рассмат-

риваться как одномерный и все искомые величины, поэтому могут зависеть лишь от координаты η_1 и времени Fo :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(l_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right); \quad (10.21)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \frac{d|\bar{\xi}|}{dFo} \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(l_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} \right); \quad (10.22)$$

$$\theta_1|_{\eta_1=|\bar{\xi}|} = 0; \quad (10.23)$$

$$\theta_2|_{\eta_1=|\bar{\xi}|} = 0; \quad (10.24)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=|\bar{\xi}|} - \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta_1=|\bar{\xi}|} = K \frac{d|\bar{\xi}|}{dFo}. \quad (10.25)$$

Здесь уравнение плоского фронта фазового превращения Γ :

$$\eta_1 = |\bar{\xi}(Fo)|.$$

К этим условиям, как уже говорилось, следует добавить условия на поверхности $\eta_1 = 0$:

$$\theta_1|_{\eta_1=0} = 1. \quad (10.26)$$

Кроме того, на бесконечном удалении от поверхности $\eta_1 = 0$, т.е. при $\eta_1 \rightarrow \infty$, температура жидкости сохраняется неизменной:

$$\theta_2|_{\eta_1 \rightarrow \infty} = \theta_0 \equiv \frac{T_k - T_0}{T_k - T_{\min}}. \quad (10.27)$$

Наконец, начальные условия в рассматриваемом случае нестационарного процесса следует записать в виде:

$$\theta_2|_{Fo=0} = \theta_0 \quad \text{и} \quad \left| \bar{\xi} \right| \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (10.28)$$

Последнее условие соответствует тому обстоятельству, что в начальный момент твердая фаза отсутствует.

Будем считать, для простоты, что коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз слабо меняются с температурой, так что приближенно можно положить:

$$l_1 \cong 1; \quad l_2 \cong 1. \quad (10.29)$$

Начнем с решения задачи для твердой фазы, т.е. решим уравнение (10.21) при граничных условиях (10.23) и (10.26).

Решение будем искать в виде:

$$\theta_1 = f(p), \quad (10.30)$$

где

$$p = \frac{\eta_1}{2\sqrt{(a_1/a_2)Fo}}. \quad (10.31)$$

При этом получим:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = f' \frac{\partial p}{\partial Fo} = -\frac{\eta_1}{4\sqrt{a_1/a_2}Fo^{3/2}} f' = -\frac{1}{2Fo} pf'(p); \quad (10.32)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} = f \frac{\partial p}{\partial \eta_1} = \frac{1}{2\sqrt{(a_1/a_2)Fo}} f'(p). \quad (10.33)$$

С учетом соотношений (10.29) имеем далее:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(l_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{(a_1/a_2)Fo}} f' \right) = \frac{1}{4(a_1/a_2)Fo} f''(p), \quad (10.34)$$

и таким образом вместо уравнения (10.21) получаем:

$$-\frac{1}{2Fo} pf'(p) = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{1}{4(a_1/a_2)Fo} f''(p),$$

или

$$f''(p) + 2pf'(p) = 0. \quad (10.35)$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$\begin{aligned} \ln f' &= -2 \int p dp + \ln A, \\ f'(p) &= A \cdot e^{-p^2}, \end{aligned} \quad (10.36)$$

и:

$$\theta_1 = f(p) = A \int_0^p e^{-p^2} dp + B. \quad (10.37)$$

Используя условие (10.25), которое в новых переменных принимает вид:

$$f|_{p=0} = 1,$$

имеем:

$$B = 1. \quad (10.38)$$

Условие (10.23) примет вид:

$$f|_{p=p^*} \equiv \theta_1|_{p=p^*} = 0, \quad (10.39)$$

где

$$p^* = \frac{|\bar{\xi}|}{2\sqrt{(a_1/a_2)Fo}} fg \quad (10.40)$$

Отсюда:

$$f(p)|_{p=p^*} = A \int_0^{p^*} e^{-p^2} dp + 1 = 0$$

и:

$$A = -\frac{1}{\int_0^{p^*} e^{-p^2} dp} = const. \quad (10.41)$$

Чтобы A было константой, необходимо, очевидно, потребовать:

$$p^* = \frac{|\bar{\xi}|}{2\sqrt{(a_1/a_2)Fo}} = const$$

откуда:

$$|\bar{\xi}(Fo)| = \alpha\sqrt{Fo}. \quad (10.42)$$

Итак, толщина затвердевшего слоя $|\bar{\xi}|$ возрастает пропорционально квадратному корню из времени Fo .

С учетом этих условий, используя табулированные функции Гаусса

$$erf(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-p^2} dp,$$

выражение (10.37) можем записать в виде:

$$\theta_1 = 1 - \frac{erf\left(\frac{\eta_1}{2\sqrt{(a_1/a_2)Fo}}\right)}{erf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{a_1/a_2}}\right)}. \quad (10.43)$$

Входящая в это выражение постоянная α пока еще не определена.

Перейдем теперь к решению задачи для области 2. Решение будем искать в виде:

$$\theta_2 = \varphi(p_1 + c) = \varphi(S),$$

где:

$$p_1 = \frac{\eta_1}{2\sqrt{Fo}}; \quad S = p_1 + C, \quad (10.44)$$

и C - некоторая константа.

Тогда имеем:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} = \varphi' \frac{\partial S}{\partial Fo} = -\frac{1}{4} \frac{\eta_1}{Fo^{3/2}} \varphi' = -\frac{1}{2Fo} p_1 \varphi'; \quad (10.45)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} = \varphi' \frac{\partial S}{\partial \eta_1} = \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \varphi', \quad (10.46)$$

и с учетом условий (10.29):

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(l_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} \right) = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta_1^2} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{Fo}} \varphi' \right) = \frac{1}{4Fo} \varphi''. \quad (10.47)$$

Таким образом, подставляя выражения в уравнение (10.22) и учитывая при этом, что согласно выражению (10.42)

$$\frac{d|\bar{\xi}|}{dFo} = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{Fo}}, \quad (10.48)$$

имеем

$$-\frac{1}{2Fo} p_1 \varphi' - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{Fo}} \frac{1}{2\sqrt{Fo}} \varphi' = \frac{1}{4\sqrt{Fo}} \varphi'',$$

откуда:

$$\varphi'' + 2 \left[p_1 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \right] \varphi' = 0. \quad (10.49)$$

Это уравнение сводится к рассмотренному ранее уравнению (10.35), если в выражении (10.44) определить константу C условием:

$$C = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right).$$

Тогда:

$$\varphi'' + 2S\varphi' = 0. \quad (10.50)$$

Интеграл этого уравнения, как было показано ранее, имеет вид:

$$\theta_2 \equiv \varphi = A_1 \operatorname{erf} S + B_1. \quad (10.51)$$

Для выражения $\theta_2 \equiv \varphi(S)$ условие на бесконечности (10.27) и начальное условие (10.28) составляют, поскольку в обоих случаях аргумент $S \rightarrow \infty$.

Учитывая даже, что

$$\operatorname{erf} S \Big|_{S \rightarrow \infty} = 1,$$

любое из упомянутых условий дает:

$$\theta_0 = A_1 + B_1. \quad (10.52)$$

Из условия (10.24) получаем:

$$A_1 \operatorname{erf} S^* + B_1 = 0, \quad (10.53)$$

где

$$S^* = p_1^* + C = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \alpha \frac{\rho_1}{\rho_2}. \quad (10.54)$$

Итак, решая полученную систему алгебраических уравнений, получаем:

$$A_1 = \frac{\theta_0}{1 - \operatorname{erf}(0,5\alpha \cdot \rho_1/\rho_2)}; \quad B_1 = \frac{\theta_0 \operatorname{erf}(0,5\alpha \cdot \rho_1/\rho_2)}{1 - \operatorname{erf}(0,5\alpha \cdot \rho_1/\rho_2)}.$$

Поэтому:

$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{\eta_1}{2\sqrt{Fo}} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\right] - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \right\}. \quad (10.55)$$

Для определения постоянной α , носящей специальное название константы затвердевания, используем последнее условие (10.25).

Из выражений (10.43) и (10.55) имеем:

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=|\bar{\xi}|=\alpha\sqrt{Fo}} = -\frac{1}{\operatorname{erf}\frac{\alpha}{2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \cdot \sqrt{Fo}} \cdot \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{4\frac{a_1}{a_2}Fo}\right) \Bigg|_{\eta_1=\alpha\sqrt{Fo}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \cdot \sqrt{Fo}} \cdot \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{a_1/a_2}}\right)} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\frac{a_1}{a_2}}\right) \quad ;(10.56)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_1=|\bar{\xi}|=\alpha\sqrt{Fo}} = \frac{\theta_0}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right). \quad (10.57)$$

Подставляя эти выражения в условие (10.25) и учитывая при этом, что

$$\frac{d|\bar{\xi}|}{dFo} = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{Fo}},$$

получим:

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{Fo}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1/a_2}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\frac{a_1}{a_2}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{a_1/a_2}}\right)} - \frac{\theta_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{Fo} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\right]} = K \frac{\alpha}{2\sqrt{Fo}},$$

или

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a_1/a_2}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} + \frac{\theta_0 \exp\left(\frac{\alpha}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{2} \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha K = 0. \quad (10.58)$$

Из этого трансцендентного уравнения при заданных значениях безразмерных параметров $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Big|_r; \frac{a_1}{a_2}; \frac{\rho_1}{\rho_2}$ и K определяется величина α . Тем самым полностью решается поставленная задача. Для получения окончательных результатов по полю скоростей следует еще тем или иным разумным путем выбрать величину характерной скорости. Определяя эту величину условием: $Pe = 1$, получаем:

$$\tilde{U}_0 = \frac{\alpha_2}{\tilde{x}_0},$$

и тогда выражение (10.18) примет вид:

$$v_1 = -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{Fo}}. \quad (10.59)$$

Характерный размер \tilde{x}_0 , входящий во все выражения, никак не задается физическими условиями задачи и при переходе к размерным величинам вообще исключается из полученных формул. Поэтому его просто можно положить равным единице длины, например, 1 м.

Анализ трансцендентного уравнения (10.58) показывает, что с уменьшением величины критерия K коэффициент затвердевания α возрастает (рис. 10.3). Тем самым уменьшение критерия кристаллизации приводит к увеличению скорости роста твердой фазы, и увеличению скорости движения v_1 жидкости к фронту затвердевания.

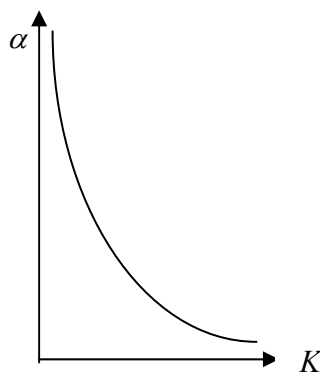


Рис. 10.3. Зависимость коэффициента затвердевания от величины критерия кристаллизации

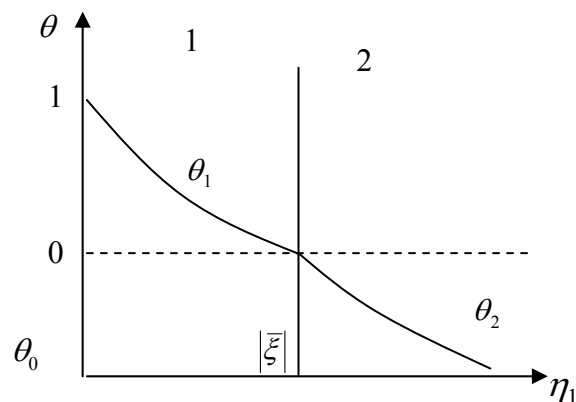


Рис. 10.4. Распределение температуры в жидкой и твердой фазах в фиксированный момент времени

Схематически характер поля температур в жидкой и твердой фазе в некоторый фиксированный момент времени Fo представлен на рис. 10.4.

10.3 Теплоперенос при обтекании полубесконечной пластины кристаллизующимся металлическим расплавом

Рассмотрим снова полубесконечную пластину (рис. 10.5) с постоянной температурой $T = T_{\min} < T_k$, помещенную в равномерный поток горячей жидкости, движущейся с постоянной скоростью \tilde{U}_0 и имеющей температуру $T = T_0 > T_k$ на большом удалении установившимся в гидродинамическом и тепловом отношении, т.е.:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial Fo} = 0; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = 0; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} = 0.$$

Задача может рассматриваться как двумерная: все искомые величины зависят только от двух координат η_1 и η_2 .

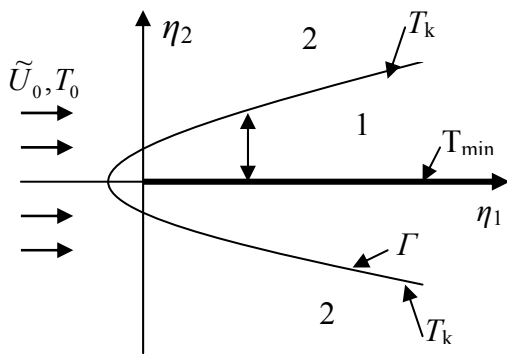


Рис. 10.5. Схема обтекания полубесконечной пластины

Принимая во внимание эффект намерзания расплава на пластину, температура которой поддерживается ниже температуры фазового перехода T_k , требуется определить наряду с полем температур в жидком расплаве 2 и в затвердевшей части расплава 1, также и контур Γ границы раздела фаз.

Пренебрегая изменением теплопроводности с температурой в обеих областях 1 и 2, т.е. считая: $l_1 \approx l_2 \approx 1$,

уравнения теплопереноса (10.10) - (10.11) можно записать с учетом вышесказанного следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta_2^2} = 0; \quad (10.60)$$

$$Pe \left[v_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_1} + v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \right] = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta_2^2}. \quad (10.61)$$

Будем считать, что обтекание пластины происходит лишь под действием градиента давления в жидкости, так что температурной конвекцией в расплаве можно пренебречь. Тогда уравнение движения (10.12) примет вид:

$$Pe \left(\bar{v} \overset{\circ}{\nabla} \right) \bar{v} = -EuPe \overset{\circ}{\nabla} \tilde{\Pi} + Pr \overset{\circ}{\Delta} \bar{v}.$$

Учтем теперь, что нами рассматривается металлический расплав, и, следовательно, число Прандтля такого расплава значительно меньше единицы $Pr \ll 1$.

При этом совместно с уравнением теплопереноса может рассматриваться уравнение движения идеальной жидкости, т.е. уравнение Лапласа для потенциала скорости φ . В случае двумерного потока это уравнение запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_2^2} = 0. \quad (10.62)$$

Причем, как обычно:

$$\bar{v} = \overset{\circ}{\nabla} \varphi. \quad (10.63)$$

Условия (10.14) - (10.17) на фронте фазового превращения Γ в рассматриваемом случае должны быть записаны в виде:

$$\theta_1 \Big|_{\eta_2=S(\eta_1)} = 0; \quad (10.64)$$

$$\theta_2 \Big|_{\eta_2=S(\eta_1)} = 0; \quad (10.65)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \overset{\circ}{\nabla} \theta_1 \Big|_{\eta_2=S(\eta_1)} - \overset{\circ}{\nabla} \theta_2 \Big|_{\eta_2=S(\eta_1)} = 0. \quad (10.66)$$

Здесь $\eta_2 = S(\eta_1)$ - уравнение контура фронта фазового превращения Γ .

Наряду с условиями на границе фазового перехода, в соответствии с физическими условиями задачи необходимо задать еще следующие граничные условия.

Условие постоянства температуры поверхности полубесконечной пластины:

$$\theta_1 \Big|_{\eta_2=0, \eta_1 \geq 0} = \frac{(T_k - T_{\min})}{(T_k - T_{\min})} \equiv 1. \quad (10.67)$$

Условие симметрии температурного поля в затвердевшей части расплава относительно оси η_1 :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta_2} \Big|_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1 < 0}} = 0. \quad (10.68)$$

Условие постоянства температуры жидкого расплава на большом удалении от пластины:

$$\theta_2|_{\eta_2 \rightarrow \infty} = \frac{(T_k - T_0)}{(T_k - T_{\min})} \equiv \theta_0. \quad (10.69)$$

Условие симметрии температурного поля в жидкой части расплава относительно оси η_1 :

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta_2} \right|_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1 < 0}} = 0. \quad (10.70)$$

Кроме тепловых, имеем следующие гидродинамические условия:

$$v_1 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right|_{\eta_2 \rightarrow \infty} = 1; \quad (10.71)$$

$$v_N = \nabla \varphi|_{\eta_2=S(\eta_1)} = 0; \quad (10.72)$$

$$v_2 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_2} \right|_{\substack{\eta_2=0 \\ \eta_1 < 0}} = 0. \quad (10.73)$$

Для решения сформулированной задачи используем конформное преобразование плоскости $z = \eta_1 + i\eta_2$, в плоскость $\xi = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, по формуле: $\xi = \sqrt{z}$.

Это преобразование уже применялось ранее при решении сходной задачи обтекания полубесконечной пластины горячей жидкостью без фазового превращения [21]. Тогда, в соответствии с формулами, полученными в курсе лекций “Теория тепломассопереноса” [21], имеем:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2; & \varepsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \eta_1}, \\ \eta_2 &= 2\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2; & \varepsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\eta_2}{\sqrt{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \eta_1}}. \end{aligned} \quad (10.74)$$

В новых координатах ε_1 , ε_2 пользуясь инвариантностью уравнения Лапласа и двухмерного уравнения установившегося теплопереноса относительно любого конформного преобразования плоскости, систему уравнений (10.60) - (10.62) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta_1^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_1^*}{\partial \varepsilon_2^2} = 0; \quad (10.75)$$

$$Pe \left[v_1^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial \varepsilon_1} + v_2^* \frac{\partial \theta_2^*}{\partial \varepsilon_2} \right] = \frac{\partial^2 \theta_2^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \theta_2^*}{\partial \varepsilon_2^2}; \quad (10.76)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \varepsilon_2^2} = 0; \quad (10.77)$$

получим:

$$v_1^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_1}; \quad v_2^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_2}. \quad (10.78)$$

Уравнения контура фазового превращения $\eta_2 = S(\eta_1)$, в новых координатах в соответствии с выражениями (10.74) примет вид:

$$2\varepsilon_1\varepsilon_2 = S(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2). \quad (10.79)$$

Разрешая это уравнение относительно координаты ε_1 , можно записать:

$$\varepsilon_2 = \gamma(\varepsilon_1), \quad (10.80)$$

где $\gamma(\varepsilon_1)$ - пока неизвестная функция аргумента ε_1 .

Как было показано в [21], в плоскости $\xi = \sqrt{z}$ имеем: а) при $\eta_2 = 0$, $\eta_1 \geq 0$; $\varepsilon_2 = 0$; б) при $\eta_2 = 0$, $\eta_1 < 0$; $\varepsilon_1 = 0$; в) при $\eta_2 \rightarrow \infty$; $\varepsilon_2 \rightarrow |\sqrt{\eta_2}| \rightarrow \infty$; $\varepsilon_1 \rightarrow |\sqrt{\eta_2}| \rightarrow \infty$.

Пользуясь полученными выражениями, граничные условия (10.64) - (10.73) в новой системе координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ запишем так:

$$\theta_1^* \Big|_{\varepsilon_2 = \gamma(\varepsilon_1)} = 0; \quad (10.81)$$

$$\theta_2^* \Big|_{\varepsilon_2 = \gamma(\varepsilon_1)} = 0. \quad (10.82)$$

Поскольку при конформном преобразовании не меняется угол между отображениями линий, в частности, не меняется ортогональность первоначально ортогональных линий, имеем далее:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \overset{\circ}{\nabla}^* \theta_1 \Big|_{\varepsilon_2 = \gamma(\varepsilon_1)} - \overset{\circ}{\nabla}^* \theta_2 \Big|_{\varepsilon_2 = \gamma(\varepsilon_1)} = 0; \quad (10.83)$$

$$\theta_1^* \Big|_{\varepsilon_2 = 0} = 1; \quad (10.84)$$

$$\frac{\partial \theta_1^*}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1 = 0} = 0; \quad (10.85)$$

$$\theta_2^* \Big|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = \theta_0; \quad (10.86)$$

$$\frac{\partial \theta_2^*}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1 = 0} = 0; \quad (10.87)$$

$$\left. \overset{\circ}{\nabla}^* \varphi^* \right|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = \frac{1}{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} - \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \right) \varphi^* \Big|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = -\frac{1}{2\varepsilon_2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = 1; \quad (10.88)$$

$$\left. \overset{\circ}{\nabla}^* \varphi^* \right|_{\varepsilon_2 = \gamma(\varepsilon_1)} = 0; \quad (10.89)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 = 0} = 0. \quad (10.90)$$

Будем искать решение сформулированной задачи для безразмерных температур θ_1^* и θ_2^* , полагая, что каждая из них зависит только от одного аргумента ε_2 :

$$\theta_1^* = \theta_1^*(\varepsilon_2); \quad \theta_2^* = \theta_2^*(\varepsilon_2). \quad (10.91)$$

Чтобы граничные условия допускали такое решение, достаточно потребовать: $\gamma = \gamma_0 = const$ и записать уравнение фронта фазового превращения в плоскости в виде:

$$\varepsilon_2 = \gamma_0. \quad (10.92)$$

Действительно, в этом случае для области 1 из уравнения (10.75) имеем:

$$\left(\theta_1^* \right)'' = 0; \quad \theta_1^* = A + B\varepsilon_2. \quad (10.93)$$

Используя граничные условия (10.83) и (10.86) для функции θ_1^* , имеем соответственно: $A + B\gamma_0 = 0$; $A = 1$ и таким образом: $B = -1/\gamma_0$.

Поэтому:

$$\theta_1^* = 1 - \varepsilon_2/\gamma_0. \quad (10.94)$$

Для расчета поля температур θ_2^* в области 2 необходимо сначала определить поле скоростей в этой области. С учетом условия (10.92) граничные условия для потенциала скорости φ^* в плоскости примут вид:

$$\left. \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = -2; \quad (10.95)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_2 = \gamma_0} = 0; \quad (10.96)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 = 0} = 0. \quad (10.97)$$

Решение уравнения Лапласа (10.77), удовлетворяющее записанным граничным условиям, можно представить в виде:

$$\varphi^* = \varepsilon_1^2 - (\varepsilon_2 - \gamma_0)^2, \quad (10.98)$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Тогда, в соответствии с выражениями (10.78) для составляющих скорости v_1^* и v_2^* имеем:

$$v_1^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_1} = 2\varepsilon_1; \quad v_2^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon_2} = -2(\varepsilon_2 - \gamma_0). \quad (10.99)$$

Уравнение (10.76) для функции $\theta_2^* = \theta_2^*(\varepsilon_2)$ можно теперь записать в виде:

$$-Pe(\varepsilon_2 - \gamma_0)(\theta_2^*)' = (\theta_2^*)''.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \ln(\theta_2^*)' &= -Pe(\varepsilon_2 - \gamma_0)^2 + \ln A; \\ (\theta_2^*)' &= A \cdot e^{-Pe(\varepsilon_2 - \gamma_0)^2}, \end{aligned}$$

и общий интеграл получаем в виде:

$$\theta_2^* = A \int_0^{\sqrt{Pe} \cdot (\varepsilon_2 - \gamma_0)} e^{-\alpha^2} d\alpha + B = A_1 \operatorname{erf}[\sqrt{Pe}(\varepsilon_2 - \gamma_0)] + B. \quad (10.100)$$

Постоянные интегрирования A_1 и B определяем из условий (10.82) и (10.86), учитывая, что:

$$\operatorname{erf}(0) = 0; \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1.$$

Получаем:

$$B = 0; \quad A_1 = \theta_0,$$

и поэтому окончательно:

$$\theta_2^* = \theta_0 \operatorname{erf}[\sqrt{Pe}(\varepsilon_2 - \gamma_0)]. \quad (10.101)$$

Остается определить константу из оставшегося неиспользованным граничного условия (10.83), которое может быть теперь переписано в виде:

$$\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2} \frac{d\theta_1^*}{d\varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=\gamma_0} = \frac{d\theta_2^*}{d\varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=\gamma_0}. \quad (10.102)$$

Из выражений (10.94) и (10.101) для функций θ_1^* и θ_2^* имеем:

$$\frac{d\theta_1^*}{d\varepsilon_2} = -\frac{1}{\gamma_0};$$

$$\frac{d\theta_2^*}{d\varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_2=\gamma_0} = \theta_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pe} \exp[-Pe(\varepsilon_2 - \gamma_0)^2] \Big|_{\varepsilon_2=\gamma_0} = \frac{2\theta_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Pe},$$

и таким образом из условия (10.102) получим:

$$\gamma_0 = \frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{Pe}}{2(-\theta_0)}. \quad (10.103)$$

Так как

$$\theta_0 = \frac{T_k - T_0}{T_k - T_{\min}} < 0,$$

то величина $\gamma_0 > 0$, что соответствует физическому смыслу.

Из формулы (10.103) следует, что чем больше величина $-\theta_0$, т.е. чем больше перегрев расплава над температурой фазового перехода, тем меньше γ_0 и тем меньше толщина намерзшего на пластину слоя.

Итак, в координатах $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ задача полностью решена. Для получения решения в физических координатах η_1, η_2 плоскости z необходимо воспользоваться формулами перехода (10.74). Уравнение фронта Γ в координатах $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $\varepsilon_2 = \gamma_0$. В координатах η_1, η_2 уравнение фронта фазового перехода имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\eta_2}{\sqrt{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \eta_1}} = \gamma_0. \quad (10.104)$$

Или в явном виде:

$$\eta_2 = \pm 2 \gamma_0 \sqrt{\gamma_0^2 + \eta_1}. \quad (10.105)$$

Выражения (10.94) и (10.101) в плоскости z примут вид:

$$\theta_1 = 1 - \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{2}} \cdot \frac{\eta_2}{\sqrt{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \eta_1}}; \quad (10.106)$$

$$\theta_2 = \theta_0 \operatorname{erf} \left\{ \sqrt{Pe} \left[\frac{\eta_2}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \eta_1}} - \gamma_0 \right] \right\}. \quad (10.107)$$

Ввиду того, что в рассматриваемой задаче не может быть сделан выбор характерного размера \tilde{x}_0 из физических соображений, целесообразно определить его условием: $Pe = 1$.

Тогда:

$$\tilde{x}_0 = \frac{a_2}{\tilde{U}_0}. \quad (10.108)$$

При этом выражение (10.108) для температуры θ_2 можно записать в виде:

$$\theta_2 = \theta_0 \operatorname{erf} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\eta_2}{\sqrt{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \eta_1}} \right) - \gamma_0 \right]. \quad (10.109)$$

Часть 3. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ (ЭВТ)

11 ЭВТ И ИХ ОСНОВНЫ СВОЙСТВА

11.1 Физические основы возникновения ЭВТ

В последнее время все больший интерес вызывают ЭВТ жидких проводников под действием собственного магнитного поля, создаваемого током проводимости вследствие неоднородного распределения плотности тока по объему проводника [33-38]. Основной причиной возникновения ЭВТ является электромагнитная сила Лоренца $\vec{f}_e = [\vec{j}, \vec{B}]$, возникающая при взаимодействии электрического тока в жидком проводнике с магнитным полем. Основной особенностью ЭВТ, выделяющей их в особый вид магнитогидродинамических течений, является способ возбуждения электромагнитной силы, основанный на взаимодействии электрического тока, подводимого к жидкому проводнику от стороннего источника ЭДС, с собственным магнитным полем.

На рис. 11.1 приведена схема простого, но в тоже время наглядного примера возникновения ЭВТ [33], необходимого для понимания физических основ возникновения и характерных черт ЭВТ, в случаях, когда электрический ток пространственно неоднороден. Здесь ток подводится к точечному электроду O , расположенному на непроводящей поверхности S , а затем растекается в верхнем полупространстве, заполненном проводящей жидкостью, где за второй электрод можно принять полусферу произвольного радиуса R . Принимая в силу симметрии плотность тока одинаковой во всех точках полусферы радиуса R , получаем связь между силой тока I , плотностью тока j_R и площадью полусферы: $I = 2\pi j_R R^2$. Отсюда следует, что плотность тока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от точечного электрода.

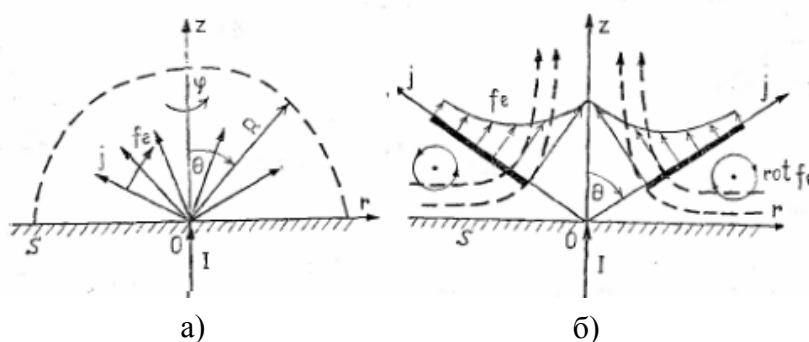


Рис. 3.1. Схема возникновения ЭВТ а) схема пространственного растекания тока; б) распределение электромагнитной силы вдоль жидкого элемента, а также схематичная траектория движения частиц проводящей жидкости

Из уравнения Максвелла для магнитной индукции, записанного в дифференциальной форме в проекциях на оси сферической системы координат с учетом осевой симметрии

$$j_R = \frac{1}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B})_R = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial R \sin \theta B_\varphi}{\partial \theta}$$

следует, что радиальный ток порождает круговое (азимутальное) магнитное поле с магнитной индукцией

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I (1 - \cos \theta)}{2\pi R \sin \theta},$$

которая направлена против часовой стрелки.

Электромагнитная сила $\vec{f}_e = [\vec{j}, \vec{B}]$, ортогональная векторам \vec{j} и \vec{B} , направлена в сторону уменьшения угла θ и по величине равна

$$f_e = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{R^3} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}.$$

Ротор электромагнитной силы Лоренца отличен от нуля и его величина составляет

$$|\text{rot} \vec{f}_e| = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2} \frac{1}{R^4} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \neq 0.$$

Это означает, что электромагнитная сила Лоренца является вихревой и возбуждает вихревое движение жидкости.

Сила Лоренца убывает вдоль луча $\theta = \text{const}$ на рис. 1.1 обратно пропорционально кубу расстояния от источника тока R^{-3} . Жидкость имеет возможность свободно перемещаться в пространстве под действием электромагнитной силы Лоренца и будет двигаться в направлении равнодействующей сил, одновременно поворачиваясь таким образом, что элементы жидкой линии, расположенные ближе к точке О, будут двигаться вдоль оси симметрии, а более удаленные – к поверхности S , а затем – вдоль нее к оси симметрии, чем будет создаваться вихревое движение, направленное по часовой стрелке для правой четверти плоскости и против часовой стрелки для левой четверти плоскости.

Из рассмотренного примера следует происхождение термина «электро-вихревые течения» (ЭВТ), которые порождаются электрическим током в отсутствии внешних магнитных полей и носят вихревой характер. Как показано в [33] при малых скоростях движения завихренность движения можно считать пропорциональной завихренности порождающей электромагнитной силы: $\text{rot}(\vec{V}) \sim \text{rot}(\vec{f}_e)$.

11.2 Инженерные устройства и природные процессы с ЭВТ

Впервые явления, связанные с ЭВТ, были экспериментально исследованы Карлом Герингом и Эдвином Нортрупом и описаны в статье «Некоторые новейшие наблюдения проявления сил внутри электрического проводника» в 1907 г. [33, 39]. В этих опытах при пропускании переменного тока через жидкий проводник, находящийся в лотке, жидкость сжималась в поперечном сечении и вспучивалась по длине лотка, поднималась на электроды. При увеличении силы тока было обнаружено, что сжатие в поперечном сечении становилось настолько большим, что в определенном сечении образовывался глубокий провал в жидкости с резко наклонными стенками. То же наблюдалось и на постоянном токе, но жидкость на наклонных поверхностях проявляла большое волнение. При дальнейшем увеличении силы тока провал достигал дна лотка, вследствие чего цепь разрывалась. После этого жидкость смыкалась, цепь замыкалась и вновь разрывалась. К. Геринг выдвинул гипотезу, что это сжатие происходит из-за эластичного поведения магнитной силы, окружающей проводник и назвал его «пинч-эффектом». С опубликованием этой работы связывают начало теории ЭВТ и гидродинамики токонесящей жидкости в целом.

Э. Нортруп выполнил первые эксперименты по изучению влияния электромагнитных сил на жидкий проводник. Наиболее известные из них связаны с растеканием электрического тока в емкости переменного сечения, заполненной расплавом натрия и калия. В этом опыте наблюдалось уменьшение высоты столба металла в узком сечении жидкого проводника. Поверхность металла в этом эксперименте была покрыта слоем масла, поэтому движение металла замечено не было. В другом эксперименте ток протекал по круглой трубе заполненной ртутью. Э. Нортруп рассчитал перепад давления вдоль оси проводника и объяснил причину внезапного сужения в эксперименте тем, что в узком сечении проводника сжатие выше.

Последующее развитие представлений об ЭВТ связывают с появлением и применением электродуговой сварки [33]. Первые измерения давления электрической дуги на электроды были проведены Танбергом и Кобэлом в 1930 году. Дальнейшее развитие теории ЭВТ, связанное с газодинамическими потоками в электрических дугах, относится к 1950 годам и описано в [40]. По результатам этих исследований признано, что основным фактором возникновения течения плазмы в дуге является взаимодействие тока с собственным магнитным полем [33, 40, 41]. В работах Меккера [42] предпринята попытка теоретического обоснования механизма возникновения течения плазмы и получено соотношение для давления и скорости потока плазмы на оси симметрии $p_{\max} = \mu_0 I / \pi = \rho v^2 / 2$.

Большой интерес к магнитостатическим эффектам связан с удержанием плазмы при термоядерном синтезе. С этим связаны работы В.Н. Жигулева [11], посвященные возникновению электромагнитной силы при пространст-

венном растекании электрического разряда и эжекции газа, а также работы Г.Л. Гроздовского с соавторами [44], получивших приближенное решение для движения конического разряда плазмы в невязкой жидкости.

Стоит отметить работы С.-У. Chow по обтеканию тел электрическим током [46-48], получившие продолжение в исследованиях Г.М. Орпера по массообмену тел в токонесящей жидкости [49-51], а также работы Ю.Н. Смыслова и Б.И. Резникова [52] связанные с решением задачи о нахождении критических значений такого рода течений и Н.Р. Пао [53] изучавшим вращение диска в токонесящих жидкостях.

В работе M.S. Uberoi установлена связь между движением жидкости и электромагнитной силой, возникающей в результате взаимодействия электрического тока с собственным магнитным полем на примере системы тороидальных вихрей при периодическом возмущении продольного электрического тока в прямой трубе [54].

Интенсивные научные исследования по изучению роли магнитогидродинамических течений, созданных посредством силового взаимодействия электрического тока, растекающегося в жидком металле, с собственным магнитным полем в различных природных и технологических процессах начали активно развиваться, главным образом в 70-х годах прошлого века. Определяющий вклад в развитие теории ЭВТ, внесли сотрудники научной группы под руководством Э.В. Щербинина в Институте физики Латвийской Академии Наук [55-77]. По результатам этих работ была создана общая теория ЭВТ. Немаловажное значение эти работы имели и для практического использования ЭВТ. Одним из таких практических исследований является часть работ посвященная изучению ЭВТ вблизи малого, в сравнении с областью течения, токоподводящего электрода.

К началу 90-х годов был накоплен обширный исследовательский материал посвященный исследованию ЭВТ и свидетельствующий о существенном влиянии ЭВТ на процессы тепломассопереноса, подтверждающий возможность успешного управления этими течениями с помощью методов магнитной гидродинамики [78-87]. Промежуточные итоги исследования ЭВТ приведены в трех известных монографиях [33, 88, 89].

Однако в 90-е годы количество публикаций по фундаментальным основам электрометаллургических процессов существенно сократилось, поскольку сами исследования стали носить, в основном, прикладной характер. Повышенный интерес к изучению фундаментальных проблем ЭВТ повторно возник в конце девяностых годов и был обусловлен появлением нового типа электродуговых металлургических печей постоянного тока, где ЭВТ используются для эффективного перемешивания расплава, что способствует повышению эффективности плавильных установок и качества получаемого металла. Среди современных публикаций по тематике ЭВТ можно выделить две диссертации на соискание ученой степени доктора наук: С.Ю. Хрипченко «Электровихревые и магнитовихревые течения в плоских каналах техноло-

гических устройств» Пермь 2007 [90] и И.М. Ячикова «Математическое моделирование электровихревых течений и тепломассопереноса в токонесущих расплавах металлургических агрегатов» Челябинск 2009 [91].

Ряд современных работ посвящен установлению границ применимости существующей теории ЭВТ и аналитических решений. Так в работах [37, 92-94] определены границы устойчивости некоторых случаев ЭВТ и критические параметры этих течений, в частности течения в полусферическом объеме с малым токоподводящим электродом.

Следует отметить, что, несмотря на значительные успехи последних лет в изучении тепловых и гидродинамических процессов в электрометаллургии, достигнутых благодаря численным экспериментам, задача корректного описания поведения электровихревых течений даже в упрощенных лабораторных условиях далека от своего решения. Это вызвано главным образом отсутствием необходимого количества надежных опытных данных по турбулентной структуре ЭВТ, что обусловлено существенными, а в ряде случаев непреодолимыми трудностями, с которыми сталкиваются экспериментаторы при использовании в этих условиях традиционных (термометрический, кондукционный, ультразвуковой и др.) методов исследования турбулентности. Разработанная в ОИВТ РАН (Объединенный институт высоких температур Российской академии наук) оригинальная волоконно-оптическая методика измерения двух компонент мгновенной скорости, как показала практика, может успешно применяться для изучения ЭВТ. Этот метод измерения, разработанный совместно с латвийскими учеными, позволил впервые получить достоверные количественные данные по вихревой структуре ЭВТ в системах с двумя или несколькими токоподводящими электродами [35, 38, 81, 92, 96-99]. Подобная методика хорошо зарекомендовала себя и используется другими авторами [100].

ЭВТ широко распространены в технологических и природных процессах. Наряду с возрастающим теоретическим интересом к ЭВТ большинство работ посвящено их практическому использованию. Несмотря на это, существует ограниченное количество работ, в которых систематизированы и достаточно полно освещены все аспекты прикладного значения электровихревых процессов. Несмотря на то, что большинство работ, связанных с ЭВТ, имеют примеры практического использования, единственной достаточно известной работой, в которой приведена систематическая оценка всех возможностей практического использования ЭВТ, является монография, написанная под руководством Э.В. Щербинина [33].

Рассмотрим более подробно прикладное значение ЭВТ. Наиболее общим разделением практических примеров возникновения ЭВТ будет разделение на группы технологических и природных процессов.

Технологические процессы:

– *Электрометаллургическая технология.* Большой интерес ЭВТ вызывают во всех электросталеплавильных установках [69, 82-86]. Большинст-

во первоначальных работ по ЭВТ с учетом тепловой конвекции относится к технологии электрошлакового переплава [89, 91, 92]. Задачи по изучению структуры ЭВТ возникают при исследовании процессов в электролизерах, которые усложняются химическими реакциями [101, 102].

– *Электродуговая технология.* Значительное влияние на качество сварных швов при электродуговой сварке оказывает движение расплавленного металла в раковине [78-80, 87]. Здесь задача усложняется образованием газообразной среды, что требует рассмотрения ее в двухфазной постановке и создания принципиально новых программных продуктов [103].

– *МГД технология.* При выращивании монокристаллов полупроводников, где необходимо учитывать наложение собственного электромагнитного поля тока проводимости и внешнего электромагнитного поля, что существенно усложняет задачу моделирования подобных процессов [104, 105].

– *Биологические технологии.* Сильные электромагнитные поля применяются в биологии, например для разделения живых и мертвых клеток тканей [33].

– *Космические технологии.* Ускорители и электрические двигатели считаются наиболее перспективными двигателями малой тяги [106]. Главным достоинством этого типа двигателей являются большие скорости истечения, недостижимые для обычных термохимических двигателей. Немаловажным фактором выступает и возможность использования возобновляемого источника электрической энергии, получаемой из солнечных батарей в космическом пространстве. Общим для всех типов таких двигателей является наличие электрической дуги. Различают два основных типа двигателей: основанные на нагреве и на ионизации рабочего вещества электрической дугой.

Природные процессы:

– *Геофизические процессы.* Электрические токи больших величин, а соответственно и электромагнитные поля, порождаемые током проводимости, имеют место не только в технологических процессах, создаваемых человеком и находящимися под его контролем и управлением, но и в природных явлениях. Примером такого явления могут служить атмосферные разряды, молнии, пиковое значение силы тока в которых достигает 10^5 А, а напряжение 10^6 В [107]. Роль электровихревых процессов в возникновении, протекании и устойчивости электродуговых разрядов, подобных молнии, до конца еще не изучена, однако очевидно, что существенные электровихревые течения должны возникать в зонах наивысшей плотности тока (узких каналах разряда).

Упорядоченное электровихревое течение, по всей видимости, вносит определяющий вклад в возникновение и продолжительное существование плазменных структур, подобных шаровой молнии. Так согласно [108] длительное существование шаровой молнии связано с формированием устойчивой вихревой структуры, энергия которой возникает и удерживается с мо-

мента разряда. Примером такой структуры может служить шар зеленого цвета, возникающий при резком разрыве электрической цепи питания.

Интенсивные электровихревые потоки наблюдаются в атмосферных вихрях, порой принимающих огромные масштабы и называемых торнадо. Лабораторные эксперименты и теоретическая модель подтверждают возможность поддержания вихрей с помощью разряда между двумя электродами, при этом канал разряда стабилизируется в присутствии вращения и образуется устойчивая вихревая структура. Более подробная модель вихря торнадо, основанная на ЭВТ, приводится в [72, 73].

– *Астрофизические процессы.* Большое значение ЭВТ имеют на космическом уровне. Примером ЭВТ являются процессы в солнечной атмосфере, как в хорошем проводнике, что обуславливает такие явления как вспышки и протуберанцы [109]. Сам процесс возникновения и движения пятен носит весьма сложный характер. Не вызывает сомнения связь между электрическими токами в атмосфере с процессами в структуре самого Солнца. Происхождение токов во внутренней части связывают с динамомеханизмом в жидком ядре. Для установления закономерностей и создания общей теории динамомеханизма в ряде лабораторий магнитной гидродинамики проводятся эксперименты по созданию магнитного динамо [110]. В наиболее простой интерпретации динамомеханизм можно представить следующим образом: в существующем магнитном поле конвективное движение жидкого вещества индуцирует электрические токи, магнитное поле которых близко к исходному.

11.3 Физические основы ЭВТ в дуговых сталеплавильных печах

Особый интерес ЭВТ вызывают в электросталеплавильных печах различной конструкции, которые получили большое распространение в металлургии [111-116]. Впервые использовать электрическую дугу для плавления металла предложил русский физик-экспериментатор В.В. Петров в 1803 году. Им же была показана возможность восстановления металлов из окислов в присутствии углеродистых восстановителей. Первые эксперименты по горению дуги были проведены Гемфри Дэви в 1810 году. Однако первая попытка построить электрометаллургическую печь, основанную на этом эффекте, была проведена в 1853 году Пишоном. Первый патент на электрическую печь дугового типа был получен Вильгельмом Сименсом в 1878-79 г. Рабочим прототипом электросталеплавильных дуговых печей была установка Геру, сконструированная в 1899 г. [111-115].

Установка Геру представляла собой печь прямого действия с двумя электродами, подводимыми к металлической ванне. Ток между электродами замыкался через ванну, а дуга горела между каждым из электродов и металлом или частично покрывающим его шлаком. Эти установки были маломощ-

ными и работали при напряжении 45 В и силе тока 2-3 кА на жидкой шихте, так как использование их на твердой завалке вызывало значительные трудности. В такой конструкции печи основной трудностью являлось использование постоянного тока, поэтому следующим шагом в развитии электрометаллургии стало использование трехфазных дуговых печей.

Первые трехфазные дуговые печи были сконструированы в 1907 г. в США. В России такого типа печи появились в 1910 году, а вскоре и в Германии, Франции и других странах [114]. Российские инженеры и ученые совершенствовали конструкцию трехфазных печей: инженеры С.С. Штейнберг и А.Ф. Грамолин создали оригинальную печь с угольными нагревателями, которая использовалась на уральских заводах для выплавки высококачественной стали, в свою очередь С.И. Тельный и В.Г. Евреинов предложили в 1916 г. дуговую печь с добавочным магнитным полем и вращающейся электрической дугой [115]. В дальнейшем внешнее электромагнитное поле эффективно использовалось для перемешивания расплавленного металла в печи.

Дуговые сталеплавильные печи (ДСП) имеют ряд преимуществ, однако широкое распространение ДСП получили только после окончания второй мировой войны [116]. В настоящее время в развитии металлургического производства появилась устойчивая мировая тенденция ликвидации мартеновского производства стали [117-119]. Электрометаллургия рассматривается как наиболее эффективная и гибкая технология получения металлов широкого назначения [117]. Все это обуславливается целым рядом преимуществ использования электросталеплавильных печей: малые капиталовложения, технологическая и организационная гибкость, возможность полного исключения вредных экологических воздействий и многое другое.

В современном сталеплавильном производстве различают следующие основные типы конструкций электросталеплавильных печей [113, 115]:

- ДСП – дуговые сталеплавильные печи трехфазного тока;
- ПДППТ – плазменно-дуговые сталеплавильные печи постоянного тока;
- ПДПТТ – плазменно-дуговые сталеплавильные печи трехфазного тока;
- ДППТ – дуговые сталеплавильные печи постоянного тока;
- ДППТПЭГ – дуговые сталеплавильные печи постоянного тока с полым электродом и вдуваемым через него газом.

По способу нагрева дуговые печи подразделяют на печи:

- прямого действия,
- косвенного действия,
- печи с закрытой дугой.

В печах прямого действия дуга горит между электродом и переплавляемым сырьем. В печах косвенного действия дуга горит между электродами и тепло передается переплавляемому металлу посредством излучения. В пе-

чах с закрытой дугой дуга горит под слоем твердой шихты, окружающей электроды [115].

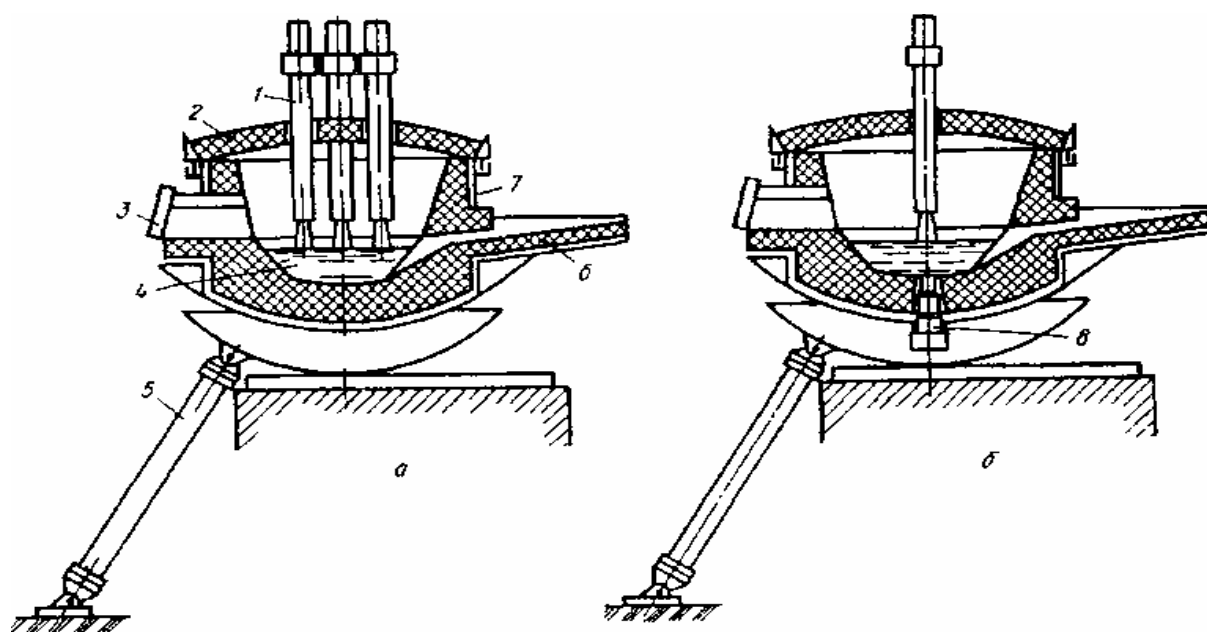


Рис. 11.2. Схемы дуговых печей переменного а) и постоянного б) тока (1 – электроды; 2 – свод; 3 – рабочее окно; 4 – ванна; 5 – механизм наклона; 6 – сливной желоб; 7 – корпус; 8 – подовый электрод (анод) и система быстрой замены анода на ДСП постоянного тока)

На рис. 11.2 приведены общие схемы наиболее распространенных электросталеплавильных печей переменного и постоянного тока с подовым электродом [120].

Несмотря на большое количество различных конструкций электросталеплавильных печей их объединяют следующие признаки [115]:

- у всех печей электрическая энергия преобразуется в тепловую в электрической дуге;
- конструкции рабочего пространства всех печей подобны, базовой моделью служит дуговая сталеплавильная печь;
- универсальность процесса выплавки стали в печах.

Учитывая, что рабочее пространство всех электросталеплавильных печей подобно, рассмотрим более подробно обобщенную конструкцию рабочего пространства ДСП [121]. Основными частями печи являются: рабочее пространство, огнеупорная кладка, механическое и электрическое оборудование. Рабочее пространство печи, ограниченное внутри огнеупорной кладкой, предназначено для проведения всех процессов, связанных с получением стали. Рабочее пространство печи на рис. 1.3 состоит из трех частей: ванны – а, свободного пространства – б и подсводкового пространства – в. Часть рабочего пространства, ограниченная снизу подом и откосами, а сверху уровнем

откосов образует ванну, которая является вместилищем для жидкого металла и шлака. Свободное пространство печи, ограниченное снизу уровнем откосов, сверху уровнем пят свода, а с боков – стенами, образует дополнительный к ванне объем, необходимый для вмещения твердой шихты. Подсводное пространство, ограниченное снизу уровнем пят свода, а сверху сводом, представляет объем, необходимый для обеспечения строительной прочности свода и отбора технологических газов.

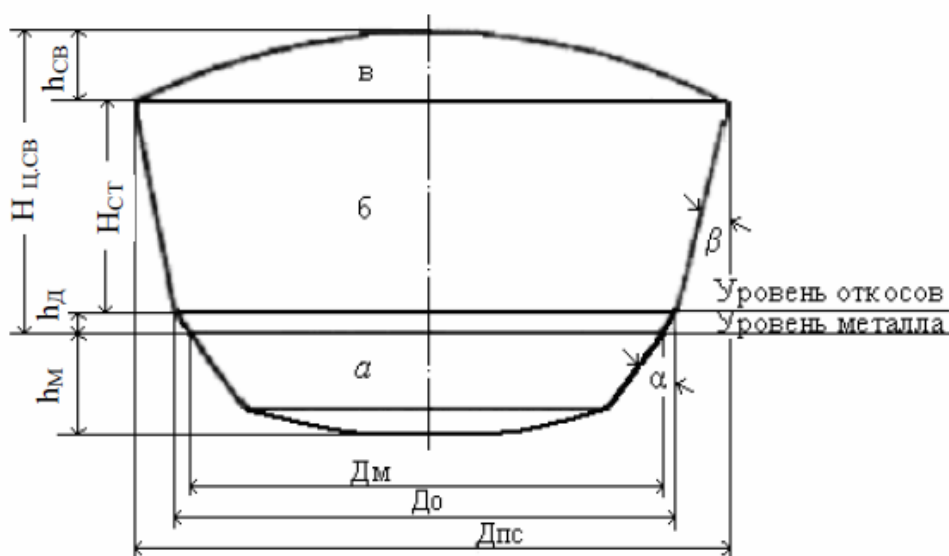


Рис. 11.3. Продольный разрез рабочего пространства ДСП: $D_{М}$ – диаметр ванны по уровню металла, $D_{О}$ – диаметр ванны на уровне откосов, $D_{ПС}$ – диаметр сферической части ванны, $h_{СФ}$ – глубина сферической части ванны, $h_{К}$ – глубина конической части ванны, $h_{Д}$ – глубина дополнительной части ванны, $H_{СТ}$ – высота стен, $D_{ПС}$ – диаметр печи на уровне пят свода, $h_{СВ}$ – высота подъема свода над уровнем пят свода, β – угол наклона стен, α – угол наклона откосов.

Как правило [122-128] ванну дуговой сталеплавильной печи делают сферической формы с углом откосов 45° и превышением уровня откосов над уровнем металла на 100-250 мм, как это показано на рис. 1.4.

Эксплуатационная емкость печей на 15-25% больше запроектированной, поэтому уровень шлака и металла поднимается выше уровня откосов. Постепенное размывание откосов и их поплавоочная заправка приводят к изменению конической формы и фактически ванна становится сферической с углом откосов от 25° до 45° к вертикали.

Внутреннюю часть ванны выкладывают футеровкой, к материалу которой предъявляются особые требования, такие как высокая устойчивость к температурным и механическим воздействиям, отсутствие химических реакций с расплавом и др. в зависимости от конкретного назначения печи. Футеровка электропечи работает в условиях постоянного изменения температуры.

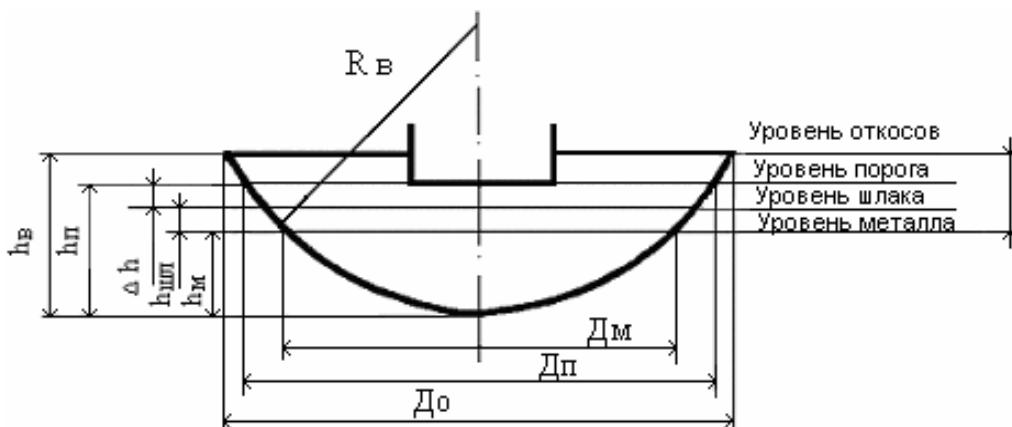


Рис. 11.4. Продольный разрез сферической ванны: $h_{в}$ – глубина ванны; $Д_{м}$ – диаметр ванны на уровне металла; $Д_{п}$ – диаметр ванны на уровне порога; $Д_{о}$ – диаметр ванны на уровне откосов; $h_{д}$ – высота дополнительной части ванны, образующая дополнительный объем ванны, необходимый для вмещения шлака; $R_{в}$ – радиус ванны

Во время загрузки шихты стены и подина печи охлаждаются, а при расплавлении шихты и в периоды окисления примесей и доведения металла до нужного состава футеровка нагревается. Во избежание растрескивания и скалывания футеровки, огнеупорный материал ее должен обладать достаточной термостойкостью. Также при выполнении огнеупорной кладки печи учитывают объемное расширение и сжатие материала. Расширение материала может привести к раздавливанию кладки, а уменьшение в объеме материала – к потере прочности кладки, поэтому при выполнении кладки создают технологические соединения между кладками огнеупорных кирпичей. При работе электрической печи футеровка подвергается химическому воздействию жидких шлаков, пылегазовой смеси и других негативных факторов. Кладку печей, работающих кислым процессом, изготавливают из динаса и кварцевого песка, а кладку печей, выплавляющих сталь основным процессом, из магнетитового кирпича [129-133].

Отличительными особенностями приготовления металла в ДСП являются следующие основные моменты [120]:

1) возможность сравнительно быстро и без больших потерь нагреть и расплавить необходимое количество металла, легирующих добавок и раскислителей;

2) возможность провести восстановительный период плавки, добиться получения металла с очень малым содержанием кислорода, успешно провести операцию десульфурации под высокоосновным малоокисленным шлаком, тем самым получить металл высокого качества;

3) возможность получения стали и сплавов сложного состава (включая операции, связанные с отбором проб, их анализом, вводом корректирующих добавок и т.п.) и нужной температуры непосредственно в самой печи.

Всю работу печи в самом общем случае можно разделить на следующие этапы:

- заправка печи, загрузка (завалка) шихты;
- плавление шихты;
- окислительный период;
- восстановительный период;
- слив готовой стали.

Рассмотрим более подробно процессы, протекающие в период времени, когда металл находится в жидком состоянии [115].

Окислительный период включает в себя

- обезуглероживание металла до содержания углерода выше, чем в готовой стали;
- дефосфорация металла до содержания фосфора на 0,01-0,015 % ниже требуемого в готовой стали;
- нагрев металла до температуры, превышающей температуру плавления на 50-75 °С;
- удаление из металла серы и газов (водорода и азота) в той мере, в какой это возможно.

В окислительный период плавки поддерживается особый тепловой режим металла: температура поднимается в соответствие со снижением содержания углерода и к концу этого периода составляет 1630-1640 °С – для конструкционных сталей и 1580-1600 °С – для углеродистых инструментальных сталей.

Восстановительный период позволяет решить ряд задач, основными из которых являются:

- диффузионное раскисление металла;
- завершение десульфурации металла, т.е. достижение остаточного содержания серы согласно требованиям к химическому составу стали;
- регулирование температуры расплава;
- доведение химического состава расплава до заданного;
- подготовка жидкоподвижного высокоосновного хорошо раскисленного шлака для обработки металла во время выпуска из печи в ковш.

Для выплавки различных марок стали применяются следующие специализированные технологии [115]:

- классическая с полным набором периодов (продолжительность 3-4 часа);
- современная без восстановительного периода (1,0-1,5 часа);

- интенсивная с применением кислорода и горелочных устройств (40-45 мин);
- переплавка металлизированного сырья;
- плавка на основе жидкого чугуна.

Помимо отмеченных выше, существует ряд особенностей технологии ведения плавки в ДСП, например [120]:

1) используют продувку ванны смесью 65 % извести, 25 % железной руды и 10 % плавикового шпата (несущим газом выступает кислород). Такой подход обеспечивает снижение содержания фосфора в металле до следов (расход смеси 2,5-3,0 % от массы);

2) на крупных печах, где затруднено проведение восстановительного периода, принимают меры для ускорения шлакообразования (загрузка в печь железной руды или агломерата и извести, продувка кислородом, обновление шлака и присадки извести и др.), добиваясь получения низких содержаний фосфора и требуемых содержаний углерода, а окончательное раскисление и легирование проводят в ковш-печи. Такую технологию называют одношлаковой.

3) оставляют часть (10-15 %) жидкой стали в печи. Эта мера позволяет эффективно использовать конечный высокоосновной шлак, сократить расход шлакообразующих, ускорить процесс плавления, снизить расход энергии. Несмотря на снижение массы порции выпускаемого металла, производительность печи не снижается. Такой метод работы металлурги называют работа на болоте или жидкий старт.

В последнее время в металлургии все большее распространение получают дуговые печи постоянного тока с подовыми электродами [134]. Несмотря на явные преимущества современных печей постоянного тока, их распространение до начала 80-х годов прошлого века было несущественным. Толчком к развитию печей постоянного тока явилась разработка фирмой «MANNESMANN-DEMAG» (Германия) в 1982 г. первой ДППТ емкостью 12 т, в которой в качестве нагревателя использовали сплошной графитовый электрод.

Следующим значительным шагом в развитии ДППТ явилась разработка в 1989 г. Японией печи емкостью 130 т. После введения в эксплуатацию этой печи строительство ДППТ по всему миру резко возросло [134]. Так, уже к 1993 году работало 46 печей емкостью от 30 до 150 т. Крупнейшими производителями печей такого типа были Германия, Швеция, Италия, Франция. Стоит отметить разработку плазменных печей в 1978 (г. Челябинск, Россия), где был установлен плазмотрон, состоящий из водоохлаждаемого металлического полого штока с закрепленным на его рабочем торце графитовым электродом (катодом). Через полость подавался плазмообразующий газ [115].

На данный момент в мировом производстве печи постоянного тока занимают около 70 % от общего количества новых электросталеплавильных печей [135]. Дуговые электросталеплавильные печи постоянного тока разра-

батывают и производят на целом ряде промышленных предприятий, среди которых можно выделить следующие: «DANIELI» (Италия), «VAI Fuchs GmbH» (Германия), «ЭКТА» (Москва, Россия), «МТФ» (Набережные Челны, Россия), «УкрНИИИЭлектротерм» и «Струмтех ЛТД» (Запорожье, Украина) [136].

Из современных разработок в области сталеплавильных печей постоянного тока стоит выделить 100-тонную дуговую печь постоянного тока типа Danarc фирмы «DANIELI» [137], печь в 420 тонн той же фирмы, являющуюся крупнейшей на данный момент [138], печи с воздушным и водяным охлаждением подовых электродов [139] и только с воздушным струйным охлаждением [140]. Часть дуговых печей постоянного тока построены путем реконструкции печей переменного тока [141, 142]. Большой вклад в совершенствование конструкции ДППТ с подовыми электродами внесли ряд российских научно-исследовательских организаций, в том числе фирмы «ЭКТА» и «МТФ» [143-146].

По сравнению с дуговыми печами переменного тока, печи, работающие на постоянном токе, обладают следующими преимуществами [147-151]:

- потребляют меньше электроэнергии на 10-15 %,
- огнеупорных материалов на 20-30 %,
- электродов в 2-5 раз,
- исходного сырья на 1,5-2,0 %,
- легирующих добавок на 20-60 %

на производство единицы готовой продукции. Немаловажным достоинством таких печей является экологическая безопасность, т.к. при их эксплуатации образование пыли сокращается в 8-10 раз (от 52,5 до 6,3 кг/ч), уровень шума понижается с 105 до 85 Дб.

Практика показала, что дуговые печи постоянного тока обладают более высоким КПД, низким процентом угара металла, меньшим износом деталей печи, и что наиболее важно, более высоким качеством приготавливаемой стали. В таких печах возможно использование электрохимических реакций для очистки от примесей и контроль качества стали путем отбора проб и корректировки состава легирующими добавками в процессе выплавки металла.

К основным недостаткам таких печей относят [115]:

- трудности зажигания дуги в печах с кислой футеровкой;
- снижение стойкости свода печи из хромомагнезиевого кирпича на 40-50 плавок;
- наличие воды под подиной для охлаждения подовых электродов, что повышает опасность взрыва в случае прорыва металла через подину;
- сравнительно высокие затраты на капитальные ремонты, связанные с износом подовых электродов и футеровки в их окрестности [136].

Конструктивной особенностью дуговых печей постоянного тока является наличие подового электрода, который вмонтирован в днище подины и

является анодом [120]. Подовый электрод должен обеспечивать бесперебойный токоподвод к переплавляемому металлу и шихте при минимальных тепловых потерях, эффективном охлаждении электрода, простоте и технологичности его изготовления. Но в то же время материал электрода должен выдерживать существенные нагрузки: высокие температуры и токовые, механические и тепловые нагрузки. Немаловажным является отсутствие химической реакции с переплавляемым материалом [136].

Эксплуатация металлургических печей с подовым электродом показала повышенный износ футеровки в окрестности подового электрода. В среднем подовый электрод служит в 10 раз меньше, чем все основные элементы печи, и работает до 2000 часов. Выход из строя подового электрода приводит к длительным простоям, технически сложной и дорогостоящей замене кладки подины и самого подового электрода [136].

Основными причинами повышенного износа подового электрода и футеровки вблизи электрода, по мнению специалистов, являются [136]:

- джоулево тепло, выделяющееся от протекающего по электроду тока и, как следствие, перегрев расплава;
- физико-химическое взаимодействие расплава с материалом электрода;
- микродуги между электродом и переплавляемым металлом;
- интенсивные потоки расплавленного металла, вызываемые действием электромагнитных сил.

Для выявления определяющего фактора повышенного износа подового электрода и футеровки в его окрестности рассмотрим более подробно различные конструкции и эксплуатационные особенности каждого типа подовых электродов. В промышленных дуговых электропечах постоянного тока применяют подовые электроды трех основных конструкций [120]:

- многоштыревой;
- пластинчатый (токоподводящая подина печи);
- стержневой.

Электроды многоштыревого (рис. 11.5) и пластинчатого (рис. 11.6) типов являются крайне ненадежными и согласно данных работ [154, 155] работают от 300 до 700 плавок. Поэтому они получили незначительное распространение. Исключение представляет подовый электрод многоштыревого типа фирмы VAI-Fuchs. Этот электрод представляет собой тонкие стальные пластины, утрамбованные внутри магнетитовой массой. Они вертикально приварены к горизонтальной плите кольцеобразной формы, установленной на поду печи. Особое соотношение размеров пластин и расстояний между ними позволяет работать без охлаждения, в свою очередь это повышает работоспособность и безопасность. Сама конструкция электрода способствует плавной и равномерной передаче электрического тока через расплав к пластинам и далее к стальным листам, а также

элементам короткой цепи. Безремонтный срок службы таких электродов – до 2000 часов [136].

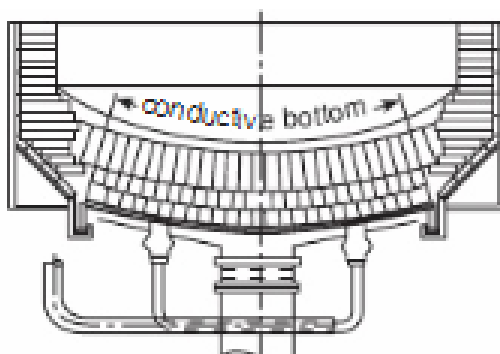


Рис. 11.5. Токоподводящая подина

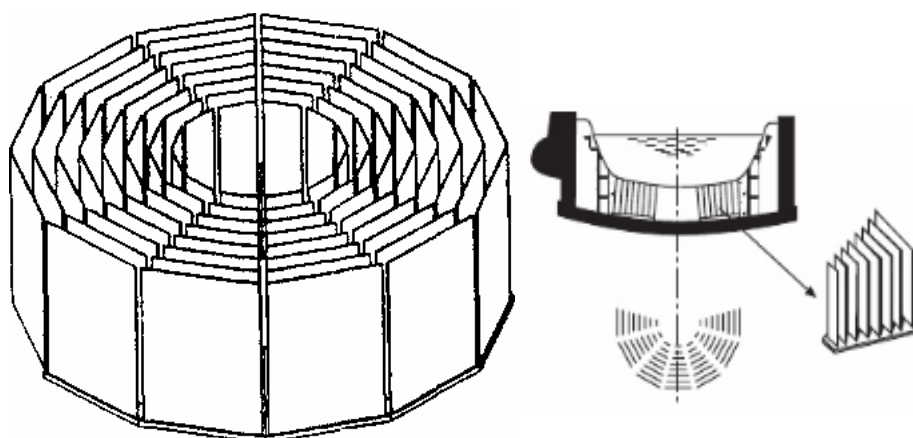


Рис. 11.6. Многопластинчатый подовый электрод

Наибольшее распространение получили подовые электроды стержневого типа. На рис. 11.7 приведена общая схема такого электрода [156]. Большая часть подовых электродов стержневого типа имеет составную конструкцию, которая выполнена из медного водоохлаждаемого стержня [157], к которому со стороны переплавляемого металла прикреплена сваркой или другим способом стальная часть, контактирующая с расплавленным металлом [158].

Такой тип электрода впервые был разработан и внедрен в ДППТ с подовым электродом итальянской фирмой «DANIELI» в 1996 году (рис. 11.8). Подовый электрод состоит из следующих частей: стальной 1 и медной 2 соединенной между собой, а также нижней трубчатой медной 3 и футерованной огнеупорным материалом 4. Трубчатая медная часть расположена в нижней части головки медного электрода и имеет спиралевидные каналы для воды. Внешняя поверхность покрыта

керамической для предупреждения прорыва металла в электрод. Стальная и медная части соединены способом алюмотермической сварки. В процессе работы стальная часть электрода частично расплавляется под действием теплоты жидкого металла и джоулева тепла, выделяемых при прохождении тока.

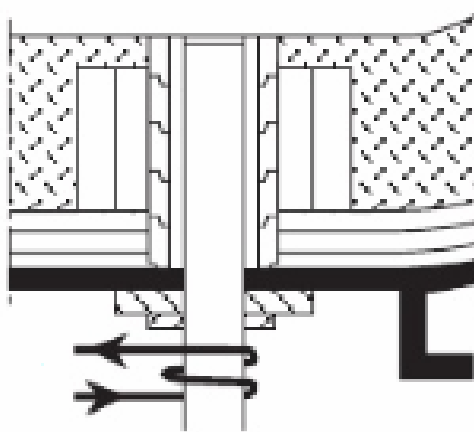


Рис. 11.7. Конструкция штыревого подового электрода

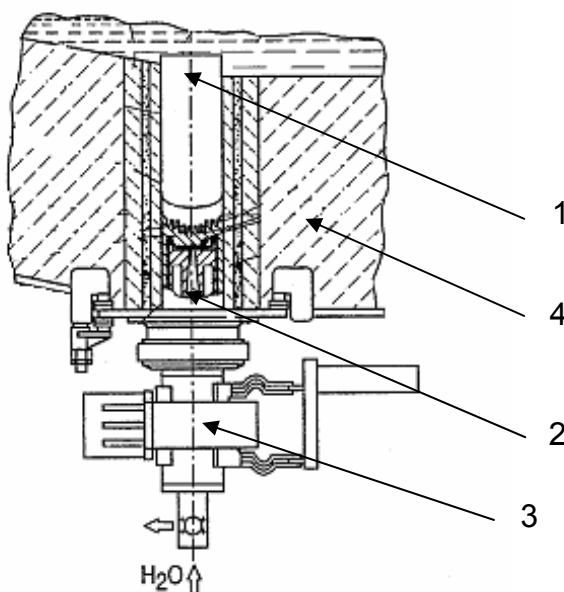


Рис. 11.8. Штыревой подовый электрод фирмы DANIELI: 1 – стальная часть, 2 – медная часть, 3 – трубчатая медная часть, 4 – футеровка

Электроды фирмы «DANIELI» успешно эксплуатируются в ДППТ с одним и двумя подовыми электродами, работающими на ломе, металлизированном сырье и их смесях. Они также установлены в печах таких фирм: «Valbao» (Испания) на 70 тонн, «Hylsa Planos» (Мексика) на 135 тонн, «ABC Danarc Plus» (Италия) на 90 тонн. Расстояние от воды до жидкого

металла составляет от 100 до 180 мм, а температура воды не превышает 80 °С. Для контроля температуры в медной части электрода используют два термоэлектрических преобразователя, так как превышение рабочей температуры приводит к выпадению на рабочей поверхности водоохлаждаемого канала солей жесткости, что снижает теплопередачу от медной части к воде и приводит к выходу печи из строя. Этот тип печей выдерживает от 2000 до 5300 плавов безремонтного режима работы [159].

В Украине и странах СНГ в агрегатах ДППТ используют биметаллические подовые электроды, состоящие из медной и стальной частей стержневого типа, разработки фирмы «РОУД». Внешний вид такого электрода приведен на рис. 11.9. Отличием электродов фирмы «РОУД» от электродов, получаемых из прокатных стальных и медных заготовок путем соединения между собой способом ручной сварки и прошедших механическую обработку до чистого размера, является особая технология электрошлакового переплава [160]. Авторами этой технологии была использована эффективная электрошлаковая технология [161] в производстве биметаллов со сменой электродов по ходу плавки для получения сталемедных заготовок подовых электродов. Немаловажным при таком подходе в изготовлении электродов является уменьшение протяженности переходной зоны между стальной и медной частями.



Рис. 11.9. Внешний вид штыревого подового электрода фирмы «РОУД»

Несмотря на успехи последних лет в разработке ДППТ с подовым электродом и подовых электродов в частности [136, 162], проблема снижения затрат на капитальные ремонты, связанные с повышенным износом подового электрода и футеровки в его окрестности, остается нерешенной. На рис. 11.10 приведена схема износа подового электрода фирмы «DANIELI» и футеровки в его окрестности, на которой виден существенный износ футеровки в виде конусообразного углубления или так называемой анодной ямы.

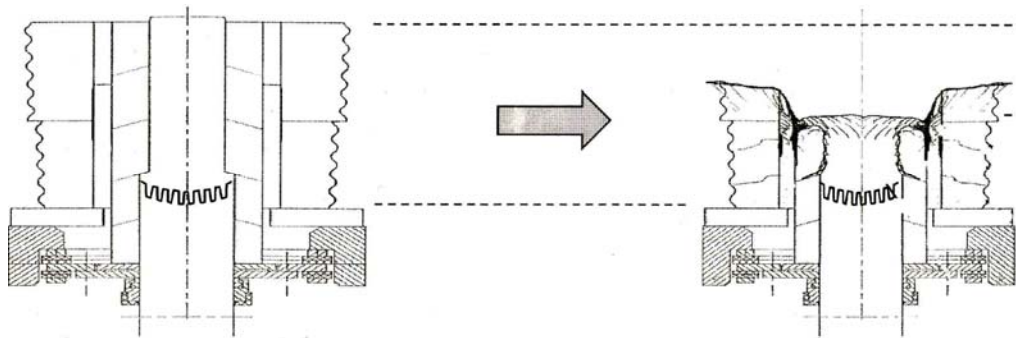


Рис. 11.10. Схема износа подового электрода фирмы «DANIELI» и футеровки в его окрестности

Подобный износ наблюдается на всех печах с подовым электродом. На рис. 11.11 приведена фотография изношенного подового электрода фирмы «РОУД».



Рис. 11.11. Изношенный подовый электрод фирмы «РОУД»

11.4 Особенности износа подового электрода в дуговых печах постоянного тока

Рассмотрим более подробно процесс повышенного износа подового электрода и футеровки в его окрестности. Современная биметаллическая конструкция подового электрода, состоящая из медной части со стороны подвода тока и переплавляемого в печи металла, подразумевает отсутствие химического взаимодействия расплава с материалом электрода. Влияние микродуг между подовым электродом и переплавляемой шихтой при режиме работы на жидком старте (болоте) также минимально. Охлаждение медной части электрода хоть и не снимает незначительного растворения материала

электрода, соприкасающегося с расплавом, однако сводит к минимуму влияние джоулева тепла на разрушение футеровки. По мнению экспертов [163, 164], основной причиной повышенного износа футеровки является вихревое движение расплава под действием сил Лоренца в непосредственной близости подового электрода. На рис. 11.12 приведена схема износа подового электрода и футеровки в его окрестности [164].

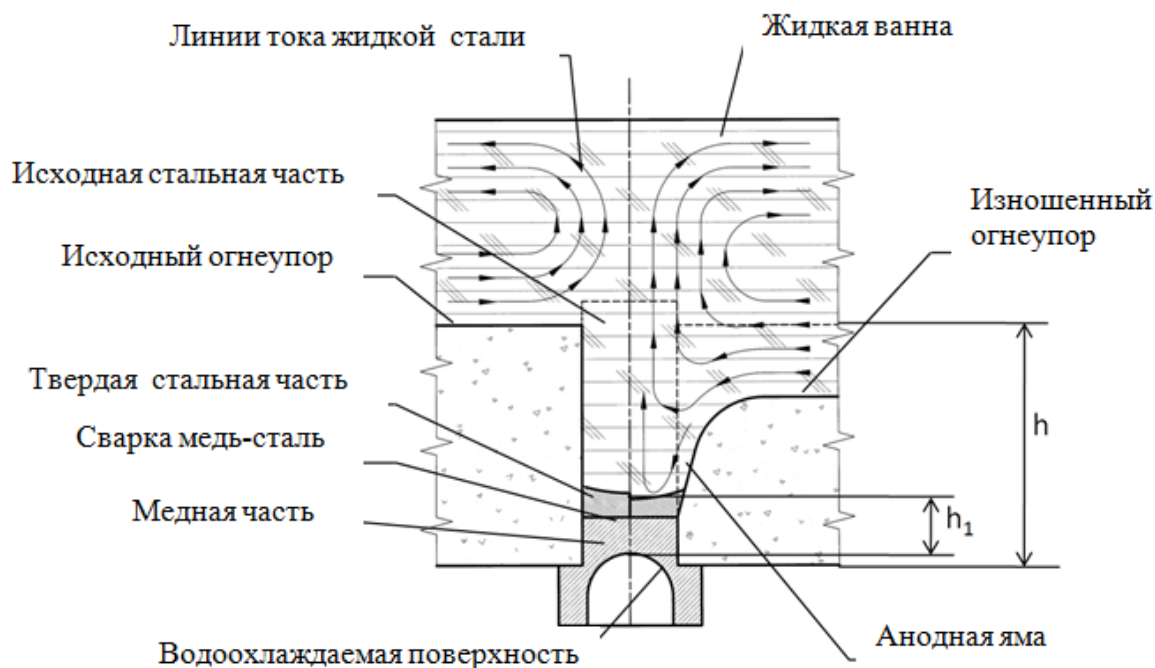


Рис. 11.12. Схема и механизм износа узла подового электрода в ДППТ

Стоит отметить, что движение жидкого металла под действием электромагнитных сил носит и положительный характер, т.к. способствует перемешиванию расплава и однородному распределению легирующих добавок по всему объему, что является неотъемлемой частью процесса приготовления металла.

Существует много работ по изучению физических процессов в дуговых печах постоянного тока. В первых работах, посвященных изучению электросталеплавильных печей постоянного тока, рассмотрены основные физические процессы, протекающие в расплаве, описана математическая модель ЭВТ [165, 166].

Большой вклад в разработку комплекса математических моделей, алгоритмов и программ для изучения электровихревых течений в токонесущих расплавах металлургических агрегатов, а также установление основных закономерностей ЭВТ внес И.М. Ячиков [167-184]. В его работах предложен способ управления ЭВТ путем изменения сдвига фаз между пульсирующими токами, проходящими через подовые электроды. Проведен ряд эксперимен-

тов на жидком олове и промышленных сталеплавильных печах, где получены косвенные подтверждения этих результатов. Однако работы не содержат расчетов в объемной постановке, а также отсутствует систематический анализ возможности управления ЭВТ в сталеплавильных печах путем изменения конструктивных особенностей пода печи и самого подового электрода.

Существуют и другие работы по управлению ЭВТ при вдувании инертного газа. Так в работе [185] развита математическая модель теплопереноса и перемешивания за счет электромагнитного воздействия в ванне дуговой печи постоянного тока, и изучено влияние на эти процессы наличия шлака, вдувания газов через подину и сверху, размеров и конфигурации печи, расположения анодов. Установлено, что без вдувания газов на перемешивание доминирующее влияние оказывают электромагнитные силы. Вдувание газов усиливает перемешивание, тогда как шлак тормозит этот процесс. При коротких дугах и больших силах тока перемешивание усиливается. Однако дальнейшее изучение такого способа управления ЭВТ тремя различными численными подходами к анализу жидкостных потоков показал, что вдувание инертного газа приводит к существенному износу подового электрода [135].

В некоторых работах приводится анализ результатов численного моделирования электромагнитного перемешивания расплава металла в дуговой печи постоянного тока различными методами. Так в работе [186] изучены структура течения и перенос пассивной примеси в ваннах с одним и двумя электродами. Математическая модель описывает трехмерное турбулентное течение электропроводной жидкости в поле гравитационных и электромагнитных сил. Расчеты параметров турбулентности проведены в двух приближениях: нестационарном в рамках модели крупных вихрей (LES), и квазистационарном – в рамках $k - \varepsilon$ модели турбулентности. Сравнение показало хорошее согласование результатов, полученных для разных моделей турбулентности.

В ряде работ изучается область электрической дуги, а также ее влияние на движение расплава и тепломассоперенос по всему объему расплава из области дуги [187, 188]. В работе [135] проведен расчет движения расплава с учетом влияния области дуги. Однако предложенные в работе физическая и геометрическая модели далеки от условий в реальных электросталеплавильных печах.

В работе [189] проведен анализ выделения неметаллических включений из жидкой стали в дуговой печи постоянного тока во время ЭВТ. Для расчета выбрана система двух включений. Проанализированы электромагнитные потоки вокруг частиц и электромагнитные силы, действующие на них. Показана закономерность движения частиц в зависимости от баланса электромагнитных сил.

В последнее время в исследовании процессов в расплаве используются пакеты программ, как специализированные, так и широкого назначения, с определенными настройками и выбором метода решения [135, 190].

На основании проведенного обзора можно сделать вывод о недостаточной изученности проблемы моделирования движения расплава в электроплавильных печах, отсутствии универсальных методов и подходов к расчету всех параметров течения, а также отсутствие работ, в которых приведен систематический анализ возможности управления ЭВТ путем изменения конструктивных особенностей пода печи и подового электрода.

12 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭВТ

12.1 Физическая и математическая модель ЭВТ

12.1.1 Формулировка физической и математической модели ЭВТ

Рассмотрим наиболее общую схему электросталеплавильной печи постоянного тока цилиндрической формы с подовым электродом, приведенную на рис. 12.1.

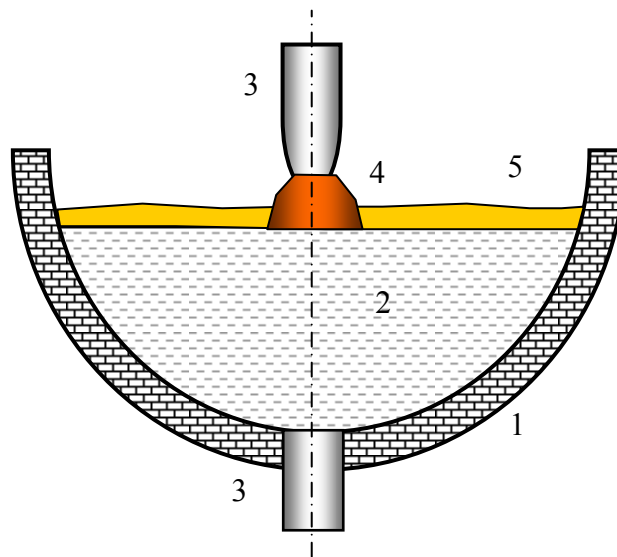


Рис. 12.1. Схема электросталеплавильной печи

Здесь 1 – огнеупорная футеровка, 2 – жидкий металл, 3 – электроды, 4 – электрическая дуга между верхним электродом и поверхностью металла, 5 – шлак на поверхности металла.

На рис. 12.2 приведена упрощенная схема рабочего пространства цилиндрической электросталеплавильной печи постоянного тока с двумя электродами, где 1 – огнеупорная футеровка, 2 – жидкий металл, 3 – электроды. Будем считать, что печь имеет осесимметричную форму и круглые электроды расположены осесимметрично. Так как вся конструкция имеет осевую симметрию, то и протекающие в ней физические процессы будут обладать осевой симметрией.

Рассмотрим более подробно электромагнитные и гидродинамические процессы, протекающие в такой печи. Предположим, что металл в печи расплавлен и на электроды подано некоторое постоянное напряжение, положительное на нижний и отрицательное на верхний электроды (анод и катод, соответственно). Под действием приложенного к электродам напряжения в жидком металле потечет ток. В силу симметрии линии плотности тока \vec{j} бу-

дуг лежат в меридиональных сечениях. Из закона полного тока для любого поперечного сечения печи $I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = const$, где S – площадь поперечного сечения печи, и хода линий тока, можно сделать вывод, что плотность тока должна убывать при удалении от оси симметрии. Этот ток создает осесимметричное магнитное поле, вектор магнитной индукции \vec{B} которого лежит в азимутальной плоскости, а линии магнитной индукции – concentricкие окружности в этой плоскости. Циркуляция вектора \vec{B} направлена против часовой стрелки, если смотреть со стороны катода.

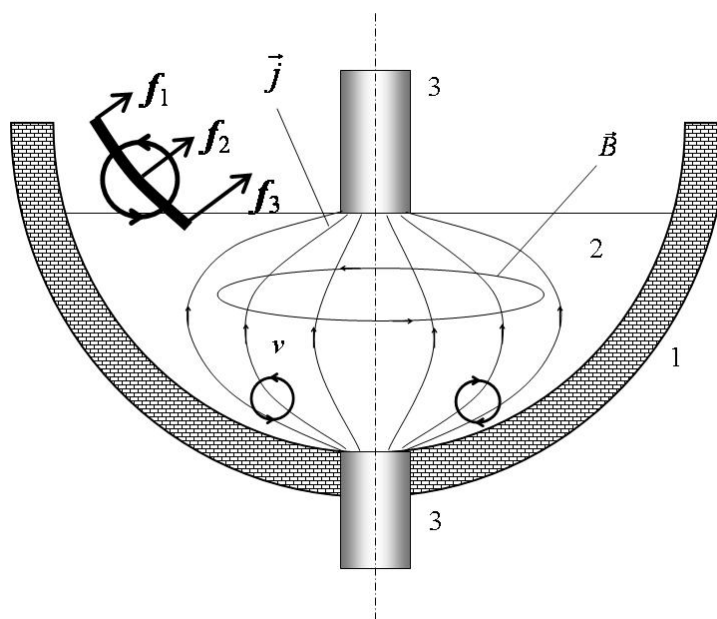


Рис. 12.2. Модель дуговой печи постоянного тока

На проводник с током в магнитном поле действует сила Лоренца с объемной плотностью $\vec{f}_e = [\vec{j}, \vec{B}]$, которая перпендикулярна вектору плотности тока \vec{j} и вектору магнитной индукции \vec{B} . Для рассматриваемой схемы сила \vec{f}_e направлена к оси симметрии, лежит в меридиональной плоскости и имеет две составляющие: радиальную и осевую. Радиальная составляющая направлена к оси симметрии, а меридиональная к противоположному электроду. Радиальная составляющая силы Лоренца вызывает поперечное сжатие проводника (пинч-эффект).

Выделим небольшой кусочек жидкого проводника вдоль линии тока слева от электрода в области подового электрода (рис. 12.2). На разные части этого кусочка будет действовать разная удельная сила, уменьшающаяся при удалении от оси симметрии ($f_1 < f_2 < f_3$). Эта сила сообщает выделенному элементу поступательное и вращательное движение, так как создает вращающий момент. Под действием этой силы элемент будет перемещаться как целое к оси симметрии и поворачиваться против часовой стрелки. Но так как

проводник жидкий, то в нем возникнет вихревое течение, направленное против часовой стрелки для левой полуплоскости, как показано на рис. 2.2. Необходимым условием возникновения вихревого течения ($\text{rot } \vec{v} \neq 0$) является вихревой характер электромагнитной силы \vec{f}_e ($\text{rot } \vec{f}_e \neq 0$). Такой характер течения как раз и наблюдается при пространственной неоднородности электрического тока.

В ряде экспериментов [34, 35] и при численном моделировании процессов в электросталеплавильных печах [191] установлено, что все гидродинамические параметры выходят на установившийся режим, а период установления мал и им можно пренебречь по сравнению с общим временем работы печи. Все это делает возможным рассмотрение процессов ЭВТ в печи в стационарной постановке.

Индукция магнитного поля не искажается движением проводящей жидкости в большинстве случаев ЭВТ. В этом случае движением зарядов, которое связано с движением расплава под действием электрического и магнитного полей, пренебрегают. Считается, что магнитное поле создается токами, протекающими по неподвижной (заторможенной) жидкости. Это приближение оправдано при небольших скоростях движения жидкости, когда токи, вызванные непосредственно самим движением расплава, малы по сравнению с током проводимости. В рассматриваемых задачах расплав приходит в движение под действием приложенного электрического и магнитного полей, а не внешнего перепада давлений. Для таких течений скорости движения жидкости малы и индуцированные эффекты имеют второй порядок малости. Естественная конвекция, вызванная гравитацией и перепадом температур, так же имеет небольшие скорости. Поэтому безындукционное приближение для таких задач оправдано. Однако индукционный ток в этом приближении учитывается в выражении для электромагнитной силы [33].

В электросталеплавильных печах справедливо использование условия прилипания на поверхности расплава металла, так как необходимым технологическим требованием работы печи является наличие на поверхности металла слоя шлака, вязкость которого на несколько порядков выше вязкости расплава [192]. Следовательно, с большой точностью можно считать этот слой покоящимся относительно движущегося расплава и использовать условие прилипания.

При численном моделировании процессов, протекающих в электросталеплавильных печах постоянного тока и большинстве лабораторных установок для изучения ЭВТ, за основу выберем модель магнитной гидродинамики со следующими допущениями:

1. процесс считается установившимся;
2. среда считается немагнитной (магнитная проницаемость мало отличается от единицы и магнитные свойства среды не учитываются) [33, 192];
3. среда является хорошим проводником [33, 192];

4. конвективным током, вызванным движением среды, по сравнению с током проводимости, можно пренебречь;
5. физические характеристики расплава предполагаются изотропными, и зависят от температуры [193];
6. свободная поверхность расплава металла считается плоской;
7. химические реакции не учитываются (с большой точностью кинетикой химических процессов можно пренебречь [91]).

Система уравнений магнитной гидродинамики [33, 91, 192-204] в рамках принятых допущений имеет вид:

уравнение неразрывности

$$\nabla(\rho\vec{v}) = 0; \quad (12.1)$$

уравнение Навье-Стокса

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{g} + \frac{1}{\rho}[\vec{j}, \vec{B}]; \quad (12.2)$$

уравнение теплопроводности

$$\rho c(\vec{v}\nabla)T = \chi\Delta T + \frac{j^2}{\sigma}; \quad (12.3)$$

уравнения Максвелла

$$\nabla\vec{B} = 0; \quad (12.4)$$

$$[\nabla, \vec{H}] = \vec{j}; \quad (12.5)$$

$$[\nabla, \vec{E}] = 0; \quad (12.6)$$

$$\nabla\vec{D} = \rho_e; \quad (12.7)$$

уравнения связи (материальные уравнения среды)

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}; \quad (12.8)$$

закон Ома для движущейся среды

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]); \quad (12.9)$$

закон сохранения заряда

$$\nabla \vec{j} = 0. \quad (12.10)$$

Здесь \vec{v} – скорость жидкости, ρ – плотность, p – давление, \vec{g} – ускорение свободного падения, ν – коэффициент кинематической вязкости, \vec{j} – плотность тока, \vec{B} – индукция магнитного поля, T – абсолютная температура, c – удельная теплоемкость среды, χ – коэффициент теплопроводности, σ – удельная проводимость, ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{D} – индукция электрического поля, ρ_e – объемная плотность электрических зарядов. В уравнении (2.1) учтены следующие силы: $-\rho^{-1}\nabla p$ – сила давления, $\nu\Delta\vec{v}$ – сила вязкого трения, \vec{g} – сила тяжести, $\rho^{-1}[\vec{j}, \vec{B}]$ – электромагнитная сила Лоренца.

12.2.2 Критерии подобия для электросталеплавильных печей

Основываясь на теоретических расчетах критериев подобия можно оценить факторы имеющие определяющее влияние на движение расплава в дуговых печах постоянного тока с подовым электродом, а также обобщить результаты полученные для одного конкретного устройства на целый класс подобных устройств. Для определения критериев подобия уравнение движения (2.2) записывается в безразмерной форме. При переходе к безразмерным переменным за масштабы выбраны характерные величины: длина l_0 , скорость v_0 , давление p_0 , индукция магнитного поля $B_0 = \mu_0 H_0$, напряженность электрического поля E_0 . Безразмерные величины обозначены соответствующими символами со штрихами, т.е. $V = V_0 V'$, $p = p_0 p'$, $B = B_0 B'$ и т.д. [194, 205].

В безразмерном виде уравнение (2.2) примет вид

$$(\vec{v}'\nabla)\vec{v}' = \frac{l_0}{v_0^2} \vec{g} - \frac{p_0}{\rho v_0^2} \nabla p' + \frac{\nu}{v_0 l_0} \Delta \vec{v}' + \frac{\sigma E_0 \mu_0 H_0 l_0}{\rho v_0^2} [\vec{E}', \vec{B}'] + \frac{\sigma (\mu_0 H_0)^2 l_0}{\rho v_0} [[\vec{v}', \vec{B}'] \vec{B}']$$

Введя критерии подобия, уравнение (2.2) можно преобразовать к виду

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{Fr} \vec{g} - Eu \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + Eu_m Re_e [\vec{E}, \vec{B}] + Eu_m Re_m [[\vec{v}, \vec{B}] \vec{B}].$$

Здесь для простоты опущены штрихи у безразмерных величин. Рассмотрим смысл критериев подобия [194, 205]:

$Re = \frac{v_0 l_0}{\nu}$ – число Рейнольдса гидродинамическое; выражает отношение сил инерции к силам вязкости. В металлургических процессах максимальные значения числа Рейнольдса достигают $Re = 10^5 \div 10^6$.

$Eu = \frac{P_0}{\rho v_0^2}$ – число Эйлера гидродинамическое, характеризует отношение сил давления к силам инерции, в стандартных металлургических агрегатах составляет порядка $Eu = 5$.

$Fr = \frac{v_0^2}{l_0 g_0}$ – число Фруда, выражает отношение сил инерции к силам тяжести, для большинства металлургических процессов $Fr = 0,2$.

$Eu_m = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho v_0^2}$ – число Эйлера магнитное, равно отношению магнитного давления к динамическому, или отношению плотностей магнитной и кинетической энергий. Для большинства металлургических процессов это число мало и составляет $Eu_m = 10^{-5}$, что соответствует малому влиянию внешнего магнитного поля на движение расплава металла.

$Re_m = \sigma \mu_0 l_0 v_0 = \frac{l_0 v_0}{\nu_m}$ – число Рейнольдса магнитное, характеризует отношение сил инерции к электромагнитной силе в проводящей жидкости при заданном внешнем магнитном поле. Здесь $\nu_m = 1/\mu_0 \sigma$ – магнитная вязкость. Численные значения критерия подобия для металлургических процессов составляют величины порядка единицы $Re_m = 0,5 \div 1,0$.

Число Прандтля магнитное, равно отношению чисел Рейнольдса магнитного к гидродинамическому:

$$\frac{Re_m}{Re} = \sigma \mu_0 \nu = \frac{\nu}{\nu_m} = Pr_m.$$

Динамическое и магнитное числа Прандтля определяются только физическими свойствами расплава. Магнитное число Прандтля характеризует собой отношение диссипации механической энергии (за счет вязкости) к диссипации электромагнитной энергии (за счет наличия магнитной вязкости).

$Re_e = \frac{\sigma E_0 l_0}{H_0}$ – число Рейнольдса электрическое, характеризует величину электрической объемной силы поля \vec{E} . Для металлургических процессов $Re_e = 0,1 \div 14,0$, что соответствует несущественному влиянию электрического поля на движение расплава.

$Ha = B_0 l_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ – число Гартмана, определяет отношение магнитных сил

к силам вязкости. Для электрометаллургических печей это число составляет $Ha = 10^2 \div 10^3$, что соответствует существенному влиянию магнитного поля на движение.

$Re_e = \frac{\rho_e l}{\varepsilon E}$, $Me = \frac{V_0}{kE} = \frac{V_0}{V_e}$ и $Re_i = \frac{k_0 E_0 l_0}{D} = \frac{V_i l_0}{D}$, $Eu_e = \frac{\rho_e E_0 l_0}{\rho V^2}$ – анало-

гичные числа подобия в электродинамике. В большинстве электромагнитных процессов, связанных с электросталеплавильными печами, эти числа невелики, а воздействие электрического поля на движение расплава в сравнении с магнитным полем пренебрежимо мало.

Равенство чисел подобия в двух различных магнитогидродинамических явлениях означает, что эти явления полностью подобны. На практике полного подобия течений добиться не удастся. Поэтому широко применяется частичное подобие, которое выполняется при равенстве лишь некоторых из указанных чисел подобия.

При оценке величины критериев подобия использовались следующие значения физических величин: плотность металла $\rho = (6,8 \div 7) \cdot 10^3$ кг/м³, динамическая вязкость $\eta = 1,5 \div 10$ мН·с/м², удельная проводимость расплава $\sigma = (0,7 \div 1,0) \cdot 10^6$ (Ом·м)⁻¹, удельная теплоемкость расплава $c_p = 830$ Дж/(кг·К), коэффициент теплопроводности расплава $\lambda = 17$ Вт/(м·К), коэффициент температуропроводности $\kappa = 3 \cdot 10^{-6}$ м²/с, скорость течения металла $v = 1$ м/с, характерный размер $l_0 = 0,5$ м, магнитная индукция $B = 0,1$ Т, напряженность электрического поля $E = 1 \div 10$ В/м [192, 194].

Теплоперенос в движущемся расплаве определяется уравнением теплопроводности (2.3). Введем безразмерные величины: $v = v_0 v'$, $j = j_0 j'$, $T - T_1 = \Delta T T'$, $l = Ll'$ где $\Delta T = T - T_1$, T_1 – значение температуры жидкости, T – поверхности тела. В безразмерных величинах (штрихи опускаем) уравнение (2.3) примет вид

$$\vec{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pe_T} \nabla^2 T + Q |j|^2.$$

В уравнение входят следующие тепловые числа подобия для процессов теплопереноса в расплаве металла [33]:

$Pe_T = \frac{v_0 L}{\chi}$ – тепловое число Пекле, характеризующее относительную

роль конвективного переноса тепла и его переноса за счет молекулярного

механизма теплопроводности, здесь $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности.

$Q = \frac{j_0^2 L}{\sigma \rho c \nu_0 \Delta T}$ – параметр, определяющий мощность джоулева тепловыделения.

$Pr_T = \frac{Pe_T}{Re} = \frac{\nu}{\chi}$ – тепловое число Прандтля, характеризующее отношение

переноса импульса молекулярной вязкостью к переносу тепла молекулярной теплопроводностью.

При моделировании процессов в электросталеплавильных агрегатах часто возникает задача теплообмена сквозь стенку устройства. Количество тепла в таком случае с одной стороны можно выразить через градиент температуры на стенке и коэффициент теплопроводности λ , а с другой – посредством коэффициента теплоотдачи α при известной разности температур на стенке (S_0 – площадь поверхности, t – время):

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{S_0} S_0 t = \alpha (T - T_1) S_0 t.$$

$Nu_T = \frac{\alpha L}{\lambda} = - \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{S_0}$ – тепловое число Нуссельта, полученное приведе-

нием к безразмерному виду предыдущего уравнения и является числом локальным. Задачей теплового расчета является определение зависимости числа Нуссельта от соответствующего параметра (Pr , Re и т.д.).

При расчете движения с температурными градиентами необходимо учитывать тепловую конвекцию, вызванную неоднородным полем температур. В большинстве случаев используется приближение Буссинеска, которое предполагает уравнение состояния среды в виде $\rho = \rho(T)$ которое, учитывая невысокие давления в большинстве устройств с жидким металлом, можно представить, разложив в ряд Тейлора с точностью до линейного члена по T как: $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$, где $\beta = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ – коэффициент объемного теплового

расширения. Учитывая изменение плотности в компоненте Архимедовой силы уравнение (2.2) получит вид [33]:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \beta T \vec{g} + \frac{1}{\rho_0} [\vec{j}, \vec{B}].$$

$Gr = \frac{\beta \Delta T g L}{\nu_0^2}$ – число Грасгофа для ЭВТ [33], которое отличается от классического $Gr = \frac{gL^3 \beta \Delta T}{\nu^2}$ [193], которое определяется как отношение силы Архимеда к силам вязкого трения. В случае ЭВТ это отношение силы Архимеда к инерционному члену уравнения Навье-Стокса.

Предполагая, что силы инерции и Лоренца имеют один порядок, можно рассчитать характерную скорость ЭВТ [33]:

$$\begin{aligned} (\bar{v} \nabla) \bar{v} &\cong \frac{1}{\rho} [\bar{j}, \bar{B}]; \\ \frac{v^2}{L} &= \frac{\mu_0}{\rho} j^2 L = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{I^2}{L^3}; \\ v_m &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \frac{I}{L}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Скорость v_m можно рассматривать как характерную, зависящую только от масштаба длины и силы тока. По скорости v_m можно определить число Рейнольдса для ЭВТ

$$Re = \frac{v_m L}{\nu} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \frac{I}{\nu}.$$

12.1.3 Граничные условия

Моделирование движения расплава металла в ванне электросталеплавильной печи требует задания граничных условий для электромагнитных, тепловых и гидродинамических параметров, которые должны соответствовать принятой модели.

Учитывая рассуждения для моделирования ЭВТ в электрометаллургических печах, изложенные в разделе 2.1.1, рассмотрим граничные условия для электромагнитных параметров в объеме расплава [206]:

– плотность тока на электродах задана как отношение силы тока к площади поперечного сечения электрода

$$j_0 = \frac{I}{S}; \quad (12.12)$$

– нормальная составляющая плотности тока j_n на свободной поверхности проводника, по которому течет ток, равна нулю

$$j_n = 0; \quad (12.13)$$

– нормальная составляющая плотности тока j_n на поверхности изолятора (диэлектрика) равна нулю

$$j_n = 0; \quad (12.14)$$

– условия для индукции магнитного поля и напряженности электрического поля в этом случае имеют вид

$$B_{1n} = B_{2n}, B_{1\tau} = B_{2\tau}; E_{1n} = E_{2n}, E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (12.15)$$

Для задачи гидродинамики на границе расплава используются граничные условия для скорости [38]:

– на границе с электродами и футеровкой использовалось условие прилипания:

$$\vec{v} = 0. \quad (12.16)$$

Для каждого отдельно случая необходимо уточнение рассмотренных граничных условий, с учетом выбранной модели.

12.2 Численные методы решения задач магнитной гидродинамики

При очевидной практической значимости ЭВТ существует большой теоретический интерес к их изучению. Изучение ЭВТ представляет собой сложную задачу мультифизики (сопряженную задачу), затрагивающую электромагнетизм, гидродинамику и процессы тепломассопереноса. Результатом этого является ограниченное количество как теоретических, так и экспериментальных работ, посвященных изучению ЭВТ. Большинство теоретических исследований, проводимых в последнее время в этом направлении, носят прикладной характер и непосредственно связаны с дуговыми печами постоянного тока [183, 207, 190]. Экспериментальное исследование ЭВТ проводится на сплавах с низкой температурой плавления. Первые опыты на ртути [33] и сплавах свинца сводились к визуальному наблюдению движения свободной поверхности металла при помощи графитовых опилок, насыпанных на поверхность [183]. С появлением эвтектических сплавов с низкой температурой плавления (около 10 °С) и волоконно-оптических датчиков малого

размера, которые позволяют измерять среднюю скорость движения расплава и пульсации скорости, экспериментальные исследования ЭВТ вышли на новый качественный и количественный уровень, который позволяет проследить не только за общими закономерностями возникновения и развития ЭВТ, но и получить количественные характеристики, как скорости движения, так и характера движения [34, 35].

Как правило, натурные эксперименты по изучению ЭВТ в металлургических печах затруднительны или чрезвычайно дороги [34, 35]. Например, осуществить непосредственное наблюдение физических процессов и измерение гидродинамических параметров в электрометаллургической печи очень затруднительно, а в большинстве случаев невозможно. Моделирование на лабораторных установках связано с проблемой обобщения полученных результатов на промышленные установки. Здесь возникает проблема подобия всех физических процессов, которое практически никогда не выполняется точно. В большинстве случаев ограничиваются соблюдением некоторых критериев подобия, которые приняты по определенным соображениям за основные. Так же следует учитывать, что на мелкомасштабных моделях не всегда удается воспроизвести все свойства реальных объектов. Немаловажными во многих случаях являются затруднения в проведении экспериментов и учете погрешностей измерительного оборудования [35].

Альтернативой дорогостоящим экспериментальным исследованиям является компьютерное моделирование на соответствующих моделях. К основным преимуществам компьютерного моделирования согласно [208-213] относят:

- низкая стоимость;
- высокая скорость проведения расчетов;
- полнота полученной информации;
- моделирование как реальных, так и идеальных установок.

В большинстве случаев стоимость затраченного машинного времени на намного ниже стоимости соответствующего экспериментального исследования. Значение этого фактора является определяющим при увеличении масштабов и усложнении изучаемого физического процесса.

Время затраченное на проведение численных расчетов, как правило, значительно меньше времени проведения эксперимента. Также привлекательна возможность оперативного расчета серии вариантов и выбора оптимальной конструкции, которые могут проводить инженеры, используя соответствующие программные продукты.

Полнота информации получаемой в результате компьютерного моделирования заключается в определении всех переменных, входящих в дифференциальные уравнения, таких как скорость, давление, температура, концентрация, интенсивность турбулентности и т. д. во всей расчетной области. Очевидно, что в эксперименте невозможно одновременное определение распределения всех параметров по всей изучаемой области, поэтому в ряде слу-

чаев для получения более полной информации о протекающих процессах получают определенное количество экспериментальных данных для построения адекватной математической модели, а дальнейшее изучение проводится в рамках построенной модели при помощи численных методов.

Возможность компьютерного моделирования как реальных установок, а также установок с идеальными условиями связана с необходимостью получить численное решение для любого, сколь угодно сложного реального процесса, что выдвигает особые требования в случае экспериментального исследования или для установления закономерностей и особенностей физического процесса и установления фундаментальных закономерностей. Примером идеализированного исследования может служить двухмерность протекающих процессов.

К недостаткам численного моделирования, прежде всего, относится количественное выражение закономерностей. Также следует отметить проблемы для задач, включающих сложную геометрию, сильные нелинейности, значительное изменение свойств расплава. Не стоит также забывать о проблеме, связанной с определением достоверности и адекватности полученных результатов реально протекающим процессам. В этом случае требуется экспериментальное обоснование результатов численного исследования [208].

Для верного выбора метода исследования должна быть проведена предварительная оценка численных методов решения применительно к задачам моделирования ЭВТ. Проведем анализ некоторых наиболее широко распространенных численных методов с оценкой возможности их применимости к моделированию ЭВТ, таких как: метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод конечных объемов.

Основной идеей метода конечных разностей является дискретизация непрерывной области совокупностью изолированных точек регулярной сетки, причем решение ищется лишь в этих точках (узлах сетки) [210, 211]. Стационарные задачи сводятся к решению системы алгебраических уравнений, которые определяются типом исходного уравнения в частных производных (или системы уравнений в частных производных). Решаются такие уравнения одновременно во всей области, с учетом заданных граничных условий. Наиболее важными качествами настоящего метода является консервативность, причинность, обратимость, положительность и точность. Свойство консервативности подразумевает выполнение закона сохранения полученного в виде интегралов от непрерывных гидродинамических функций. Эти интегралы должны оставаться неизменными независимо от происходящих флуктуаций и особенностей течения. Свойство причинности имеет физический смысл конечности скорости, с которой вещество и энергия могут передаваться в физической системе. При этом вещество или энергия, переходя из одной области в другую, должны проходить через все промежуточные области. Свойство обратимости означает, что уравнения являются инвариантами относительно преобразования времени. Однако это условие в большинстве случаев из-за

нелинейности членов в уравнениях, подвижности сетки и других осложняющих решение факторов не выполняется. Свойство положительности означает, что некоторые величины, такие, как массовая плотность, положительны во всей расчетной области. Это свойство относится ко всем величинам, входящим в уравнения переноса или диффузии. Свойство точности обуславливается точностью вычислений, численной сходимостью к решению и устойчивостью алгоритма. Считается, что алгоритм сходится, если при последовательном уменьшении шагов размеров сетки и интервалов времени получается все более точный ответ. Алгоритм считается устойчивым, если небольшая ошибка на любой стадии расчета приводит к небольшой дополнительной ошибки в решении. Метод получил дальнейшее развитие в ряде распространенных разностных схем газовой и гидродинамики, примером таких схем являются схемы Лакса, Мак-Кормака, Лакса-Вендрофа, Бернштейна, Моретти, Годунова, «частиц в ячейке» и «крупных частиц», сеточно-характеристический метод, схемы третьего порядка точности, неявная схема Мак-Кормака. Следует отметить, что большинство первоначальных программных продуктов для моделирования гидродинамических задач были основаны на методе конечных разностей, однако в настоящее время преобладающими становятся метод конечных элементов и метод конечных объемов.

На современном этапе развития численных методов метод конечных элементов является наиболее распространенным [213, 217-220]. Подтверждением тому является его широкое использование в ряде коммерческих пакетов прикладных программ, таких как ANSYS Multiphysics, COMSOL, COSMOSM, ELCUT и другими. Первоначально метод разрабатывался для расчета напряженно-деформированных состояний, однако в дальнейшем был распространен для расчета электромагнитных, тепловых, гидродинамических и других задач. Эта тенденция хорошо просматривается и на примере развития ряда коммерческих программ, таких как ANSYS Multiphysics и COMSOL (FEMLAB), которые в начале своего развития имели возможность расчета напряженно деформированного состояния различных конструкций и в ходе своего развития получали дополнительные функции расчета электромагнитных полей, гидродинамики, тепломассопереноса и других. В методе конечных элементов расчетная область разбивается на нерегулярные элементы, в отличие от метода конечных разностей. Такими элементами могут быть треугольники и четырехугольники. Дискретные аналоги получают, используя вариационный принцип, если он применим в конкретной задаче или используя метод Галеркина и его разновидности, который является частным случаем метода взвешенных невязок.

Преимущества метода конечных элементов заключается в следующем:

- возможность решать задачи при любой геометрии расчетной области и различных граничных условиях;
- возможность использовать неструктурированную сетку не влияет на структуру полученных данных;

- возможность структурного и гибкого программирования алгоритма метода;
- точная математическая формулировка.

Основные недостатки:

- большие трудности с аппроксимацией конвективных членов – прямое использование конечно-элементного метода в ряде случаев приводит к физически неправдоподобным результатам;
- в случае использования сеток с узловыми точками, расположенными в шахматном порядке и треугольной сетке линии были направлены параллельно осям координат и можно соответствующим образом сместить в этих направлениях соответствующие скорости;
- в большинстве работ, посвященных расчету задач гидродинамики с использованием метода конечных элементов, для получения полей компонент скорости и давления используется прямое одновременное решение уравнений неразрывности и всех уравнений количества движения. Для выполнения этого требования требуется сформулировать метод решения (типа процедуры SIMPLE) этих уравнений;
- рассматриваемый метод сложен для физической интерпретации независимо от использования вариационного метода или даже метода Галеркина.

В основе метода конечных объемов лежит интегральная формулировка законов сохранения массы, импульса и энергии. Дискретизация расчетной области проводится на конечное число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится только в одном конечном объеме [208]. Уравнения в частных производных записываются для выделенного контрольного объема, а дискретный аналог получается суммированием по всем узловым точкам выделенного объема потоков массы, импульса и т.д. и вычислением в квадратурах. Существенным преимуществом такого подхода является отсутствие каких-либо ограничений на форму контрольного объема, а сам метод пригоден для дискретизации уравнений гидродинамики как на структурированных, так и на неструктурированных сетках с различной формой ячеек, что полностью решает проблему сложной геометрии расчетной области. Однако с другой стороны использование неструктурированных сеток представляет собой сложную для алгоритмической реализации проблему и предъявляет особые требования к вычислительной технике. Другим наиболее важным преимуществом метода является точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергии на любой группе контрольных объемов и, как следствие, во всей расчетной области. Метод контрольного объема получил широкое распространение в решении задач гидродинамики [208, 209, 213]. Лидирующее положение метода конечных объемов в сравнении с другими способами дискретизации уравнений гидродинамики подтверждается многолетней тенденцией развития пакетов прикладных программ для моделирования задач тече-

ния жидкости и газа. Следует отметить, что метод конечных объемов используется в основе программной реализации современных лидеров рынка коммерческих пакетов прикладных программ для моделирования задач гидродинамики, таких как CFX, FLUENT, STAR-CD, FLOW-3D и других. Все эти пакеты в начале своего развития имели возможность построения блочно-структурированной расчетной сетки и только по мере накопления опыта в создании алгоритмов разбиения расчетной области на неструктурированные сетки, а затем и с возможностью изменения сеток в процессе расчета гидродинамических параметров в зависимости от их изменения или так называемых адаптивных сеток. Многие из этих программ возникли как естественное продолжение развития известных пакетов основанных на методе конечных элементов: ANSYS Flotran, SolidWorks (основанный компанией STAR-CD), COSMOS FlowWorks. Эта тенденция подтверждает такие преимущества метода конечных объемов как гибкость и технологичность способа дискретизации задач гидродинамики.

Проанализировав наиболее известные численные методы являющиеся основой программной реализации целого ряда пакетов прикладных программ для моделирования сложных сопряженных задач гидродинамики, можно сделать вывод, что для адекватного моделирования ЭВТ необходимо использование метода конечных элементов для задач электромагнетизма и метода конечных объемов для задач гидродинамики и тепломассопереноса.

12.3 Анализ возможностей существующих пакетов прикладных программ для моделирования задач магнитной гидродинамики

Согласно последним тенденциям моделирование широкого спектра технических задач целесообразно проводить с использованием стандартных пакетов прикладных программ. Несмотря на современную тенденцию развития пакетов прикладных программ, ориентированную на повышение уровня автоматизации решения задач, эксплуатационных качеств программного обеспечения, расширение возможностей программных средств [239] для моделирования конкретной задачи в рамках принятой модели необходимо провести предварительный анализ существующих стандартных пакетов прикладных программ, основываясь на данных разработчика о функциональных возможностях каждого из пакетов. Оценить возможности каждого пакета для моделирования тех или иных процессов и учета влияния этих процессов на решение задачи. Характерной особенностью всех пакетов является разделение видов анализа (электромагнитный, тепловой, гидродинамический и т.д.), поэтому параллельно необходимо оценить возможность решения задач, включающих несколько дисциплин, или так называемых задач мультифизики.

ANSYS Multiphysics – многоцелевой конечно-элементный пакет для проведения анализа в широком круге дисциплин (прочность, теплофизика, динамика жидкостей и газов, электромагнетизм) [240]. Пре- и постпроцессор ANSYS является законченным инструментом для создания, импорта, редактирования геометрических и сеточных моделей, постановки задачи, решения и визуализации, обработки и внешнего вывода результатов.

Геометрический препроцессор позволяет внутренними средствами ANSYS создавать проволочные, оболочечные и твердотельные геометрические модели, а также обрабатывать импортированные (поддерживаются форматы: CATIA, ProE, UG, Parasolid, ACIS SAT, IGES). Экспорт геометрии осуществляется посредством IGES. Сеточный генератор позволяет создавать любые сетки, как на основе геометрической модели, так и напрямую, а также импортировать и экспортировать готовые.

Внутренний язык программирования APDL (матричные и пр. операции в формате FORTRAN) позволяет программировать процедуры, параметризовать построение модели, расчет и вывод результатов. ANSYS позволяет подключать пользовательские модели, написанные на FORTRAN и C++.

Вывод результатов осуществляется посредством анимации, цветовой контурной заливки, изолиний, векторов, эпюров, графики, сечений и разрезов, текстового листинга и др.

Probabilistic Design System (PDS) позволяет предсказывать вероятный разброс характеристик конструкций и исследовать их чувствительность в ответ на разброс исходных данных (характеристики материала, точность геометрических размеров, нагрузок и др.) в прочностном, тепловом, электромагнитном, гидро- и газодинамическом совместном расчете. Вывод результатов: гистограммы, графики рассеяния, распределения кумулятивных вероятностей и др.

ANSYS позволяет проводить два типа оптимизационных исследований на основе прочностного, теплового, электромагнитного, гидро- и газодинамического совместного анализа: параметрическая оптимизация и топологическая оптимизация.

При параметрической оптимизации находится экстремум целевой функции (по умолчанию весовая) варьированием переменных величин (геометрические свойства материала и т.д.) с учетом ограничений (максимальные напряжения, перемещения и др.). Топологическая оптимизация позволяет на ранних стадиях проектирования принять конструкторское решение об оптимальной форме и весовом совершенстве изделия, исходя из частотного и прочностного критериев.

Модуль ANSYS/Emag может быть использован для решения самого широкого круга задач, как в плоской (и осесимметричной), так и в объемной постановках электромагнитных задач. Несколько десятков типов конечных элементов, доступных для моделирования электромагнитных процессов, позволяют решать задачи из следующих областей:

– электростатика: нагрузки – распределение электрического потенциала или электрического заряда. Наряду с классическими граничными условиями могут быть использованы условия границы на бесконечности. Есть возможность расчета емкостей, как собственных, так и взаимных. Для задач электростатики могут быть использованы p -элементы с переменной степенью полинома функции формы (до 8-ой степени).

– магнитостатика: источники – распределение магнитного потенциала (векторного или скалярного), плотность тока в объемном проводнике, ток в катушке индуктивности и постоянные магниты. В результате может быть получено распределение магнитного потенциала по объему модели, напряженности и индукции поля, магнитных сил и пр. Возможен расчет индуктивностей и взаимоиндуктивностей произвольного количества катушек.

– постоянные токи: расчет распределения постоянного тока по объемному проводнику без расчета магнитного поля. Нагрузки – распределение электрического потенциала или произвольно приложенные постоянные токи. Этот режим удобен для «сквозного» решения тепловых задач с учетом теплового действия постоянного электрического тока.

Гидрогазодинамический модуль ANSYS FLOTRAN предоставляет пользователю следующие возможности моделирования внешних и внутренних 2D, 3D течений: стационарные и нестационарные, сжимаемые и несжимаемые, ньютоновские и неньютоновские, ламинарные и турбулентные.

Пакет ANSYS содержит следующие модели турбулентности: standard k -epsilon, Zero Equation (ZeroEq), Re-Normalized Group (RNG), k -epsilon due to Shih (NKE), Non-linear of Girimaji (GIR), Shih, Zhu, Lumley (SZL).

Также возможно моделирование многокомпонентных течений, фильтрации и распределенных источников, жидкости со свободной поверхностью (2D VOF) с учетом поверхностного натяжения. ALE – процедура позволяет моделировать течения в подвижных границах. Присутствуют вращающиеся системы координат и циклическая симметрия. Полученные поля результатов (давление, температура и т.д.) могут быть использованы в качестве нагрузок для прочностного и др. расчетов.

Программный комплекс ANSYS CFX, сочетает возможности анализа гидрогазодинамических процессов, многофазных потоков, химической кинетики, горения, радиационного теплообмена и многих других [240, 241]. Возможность работы под единой средой Workbench позволяет обмениваться данными и результатами напрямую с другими модулями ANSYS, позволяя проводить сопряженный жидкостно-структурный анализ. Широкий спектр физических моделей позволяет найти наиболее точное решение любой промышленной задачи.

CFX представляет открытую архитектуру и специальные средства для изменения всех возможностей. Входные данные и результаты могут сохраняться в различных форматах, что обеспечивает легкую интеграцию с существующими программными средствами. Основными отличительными осо-

бенностями пакета является алгебраический многосеточный метод решения линеаризованных уравнений, совместное решение уравнений сохранения момента и массы, практически линейная зависимость времени счета от размеров модели и высокие характеристики масштабируемости параллельных расчетов

Программа CFX имеет широкий спектр приложений, по основным отраслям: аэрокосмическая, автомобилестроение, судостроение и морская техника, нефтегазовая и химическая, турбомашиностроение, теплотехника, вентиляция и кондиционирование, биомедицинские приложения.

CFX используется во многих областях – от моделирования отдельных аппаратов, как перемешивающие реакторы, каплеуловители, циклоны и нагреватели до процессов в окружающей среде, таких как моделирование выбросов при пожарах или выбросов тепловых электростанций.

Широкое применение пакет CFX нашел для моделирования процессов сжигания углеводородных топлив. Изготовители энергетического оборудования используют CFX чтобы лучше понимать особенности процессов сгорания в разрабатываемых ими горелках и котлах. Моделируя трехмерный реагирующий поток в котле при помощи пакета CFX возможно установить области, где имеется образование загрязняющего вещества или неполное сгорание, и, что более важно, установить их причины. Эти знания позволяют усовершенствовать изделие еще до изготовления опытного образца. Таким образом, Вы можете оптимизировать изделие, минимизируя расход горючего, эмиссии загрязняющего вещества.

Пакет CFX нашел применение для моделирования и анализа процессов, протекающих в турбомашинах. Наиболее мощным средством является CFX-TASCflow, который используется инженерами в области турбиностроения начиная с 1985 года. Фактически, одно из первых приложений CFX-TASCflow – это участие в проекте НАСА по моделированию топливного турбонасоса и компрессора ракетного двигателя космического корабля Спейс-Шаттл.

Основными структурными элементами CFX являются:

1. препроцессор – в нем задается геометрия изделия и строится расчетная сетка;
2. ядро – в нем рассчитываются поля скоростей жидкости (газа), температуры, энтальпии, концентрации и т.д.;
3. программы расчета радиационного переноса;
4. постпроцессор – в нем все рассчитанные поля можно в наглядной форме отобразить на экране компьютера.

Структурные элементы пакета CFX представлены следующими основными и дополнительными модулями:

1. CFX-Build – препроцессор, имеющий геометрический редактор на ядре Parasolid;
2. CFX-Post – постпроцессор;

3. CFX-CAD2Mesh – препостпроцессор, комбинирующий геометрический редактор ANSYS Workbench Design Modeler и сеточный генератор ANSYS ICEM 4 CFX;

4. CFX-BladeGen – интерактивная автоматизированная среда для проектирования и оптимизации формы лопаток для всех видов осевых и центробежных машин;

5. CFX-TurboGrid – специализированный сеточный генератор качественных гексагональных сеток для турбомашиностроения;

6. CFX-Multiple Frames of Reference – множественные системы отсчета;

7. CFX-Radiation – учет радиационного теплообмена газ-стенка, стенка-стенка;

8. CFX-Combustion – моделирование горения и др. химических реакций;

9. CFX-RIF – генератор библиотек моделей горения;

10. CFX-Multiphase – многофазные течения;

11. CFX-Parallel – параллельные вычисления.

Препроцессор основан на системе PATRAN. В нем в удобной форме, с помощью мыши и клавиатуры задается геометрия изделия. Процедура задания геометрии идентична созданию трехмерной геометрии в системах автоматизированного проектирования. Геометрическая информация может быть импортирована из систем САПР Pro/ENGINEER, CATIA, Unigraphics, Euclid3, CADD5, либо через форматы IGES.

Геометрия конструируется из поверхностей, натянутых на криволинейные ребра. Криволинейные ребра задаются с помощью точек, размещенных в физическом пространстве и соединенных сплайнами. Одинаково возможно задание сферы и сложнопрофилированных лопаток турбины.

Численное решение основывается на конечно-объемном (CFX 4.x/5.x и выше) или на конечно-элементном (CFX/TASCflow) подходах. Для решения уравнений Навье-Стокса используется метод SIMPLE и его модификации и совместное решение системы уравнений разностного оператора для скоростей и давления.

Во всех программных комплексах используется криволинейная сетка, совпадающая с границами расчетной области. CFX использует сетку с шестигранными ячейками, CFX и CFX/TASCflow – смешанная шестигранная/тетраэдрическая сетка. В качестве расчетной сетки для CFX используется так называемая блочная сетка. Область разбивается на криволинейные шестигранные блоки, имеющие относительно простую геометрию. Внутри каждого блока генерируется структурированная криволинейная сетка. Сетки блоков совпадают по граням соседних блоков, образуя в совокупности полуструктурированную сетку, «притертую» к границам расчетной области. Преимущество такой технологии перед конечно-элементными неструктурированными сетками, которые используются в CFX и CFX/TASCflow, заключа-

ется в более высокой точности и скорости нахождения численного решения, недостаток – при задании геометрии необходимо одновременно задавать блоки сетки. Вместе с тем этот недостаток восполняется хорошим интерфейсом CAD-системы задания геометрии.

В CFX используется также технология перекрывающихся сеток для моделирования движущихся внутри области тел. С помощью этой технологии можно рассчитать перемешивание раствора в химическом реакторе, либо обтекание газом лопаток, движущихся внутри турбины.

Аналитические возможности пакета включают в себя полные трехмерные нестационарные уравнения; конечно-объемную дискретизацию уравнений; разностные схемы 1-2 порядка; совместное решение уравнений сохранения момента и массы (Coupled Solver); многосеточный метод решения линейаризованных уравнений; смешанные типы расчетных сеток – гексаэдры, призмы, пирамиды, тетраэдры; интерфейсы сопряжения расчетных сеток – скользящие сетки, произвольное сопряжение (с висящими узлами), адаптивное сгущение сеток; широкий набор граничных условий; параллельные вычисления.

CFX позволяет рассчитывать движение сжимаемой и несжимаемой жидкости (газа) в совокупности с большим количеством различных физических процессов. В CFX используются физические модели: сжимаемые и несжимаемые течения (от ползущих до гиперзвуковых); стационарные и нестационарные течения; ламинарные течения – модель Ньютона и неньютоновские жидкости; множественные системы координат.

Турбулентные течения моделируются в рамках следующих моделей турбулентности: простейшая алгебраическая модель; однопараметрическая дифференциальная модель Ментера; двухпараметрические дифференциальные модели: k - ϵ , RNG k - ϵ ; двухпараметрические дифференциальные модели: k - ω , BSL k - ω , SST k - ω ; модели напряжений Рейнольдса: LRR-IP, LRR-OI, SSG; метод крупных вихрей (LES).

Возможности моделирования теплопереноса: сопряженный теплообмен; радиационный теплоперенос; естественная конвекция; учет влияния вязкого трения; многокомпонентные течения.

Пакет позволяет смоделировать процессы горения: модели PDF-типа; модель флэймлетов для диффузного горения; модель Зимонта; модель распада вихрей (EDM-типа); модель конечной скорости химической реакции; образование NOX; образование сажи.

Многофазные течения рассчитываются в рамках двух моделей: модель Эйлера: межфазный теплоперенос, межфазный массоперенос, межфазная передача импульса, влияние на турбулентность, свободные поверхности; модели Лагранжа: распределённое сопротивление, объёмные источники массы импульса, энергии и др.

Ядро CFX написано на языке Фортран и многие подпрограммы ядра могут быть модифицированы. Возможно пользовательское программирова-

ние (FORTRAN) и добавление новых физических моделей, например модели горения или образования химических компонент, либо модификация численного метода. В пакет встроен язык программирования для задания свойств материалов, граничных условий и др. Развита средства представления и интерпретации результатов. Существуют внешние интерфейсы к CAD/CAE программам. Таким образом, возможно дополнение системы и ее полная адаптация соответствующим запросам прикладной задачи.

Пакет FLUENT предназначен для моделирования сложных течений жидкостей и газов с широким диапазоном свойств [240, 242]. Посредством обеспечения различных параметров моделирования и использования много-сеточных методов с улучшенной сходимостью, он обеспечивает оптимальную эффективность и точность решения для широкого диапазона моделируемых скоростных режимов. Изобилие физических моделей в пакете FLUENT позволяет точно предсказывать ламинарные и турбулентные течения, различные режимы теплопереноса, химические реакции, многофазные потоки и другие явления на основе гибкости сеток и их адаптации в процессе получения решения.

ANSYS FLUENT полностью интегрирован в рабочую среду ANSYS Workbench – платформу, объединяющую весь набор средств инженерного моделирования компании ANSYS. Адаптивная архитектура позволяет пользователю выполнять любые действия от стандартного анализа течения жидкости или газа до обработки сложных взаимодействующих систем, используя простые операции drag-and-drop («перетаски и оставь»). Пользователи могут легко оценить производительность в различных расчетных точках или сравнить несколько альтернативных конструкций. В рамках платформы ANSYS Workbench для решения задач из различных расчетных дисциплин можно получить доступ к общим для всех расчетов инструментам, таким как инструменты для работы с геометрией и с сеткой. Модуль ANSYS CFD-Post может быть использован для сравнения результатов и выполнения заключительного анализа данных. Передача данных из программы ANSYS FLUENT в программу ANSYS Mechanical дает возможность выполнения расчетов жидкостно-конструкционного взаимодействия.

Основные физические модели программного комплекса:

- сжимаемые и несжимаемые течения;
- стационарная и нестационарная постановка;
- ньютоновские и неньютоновские жидкости;
- множественные системы координат;
- модель Mixing-plane для моделирования взаимодействия ротор-статор;
- распределённое сопротивление (линейные, квадратичные зависимости) для моделирования пористостей;
- пользовательские объемные источники массы, импульса, энергии и др.;

- модель фазового перехода для задач плавления и затвердевания (VOF + Phase change);
- модели в сосредоточенных параметрах для вентиляторов, радиаторов, теплообменников;
- обширная база физических свойств материалов;
- дополнительные специализированные модули для моделирования: топливных ячеек, магнитогидродинамики, непрерывного волокна.

Модели турбулентности пакета: однопараметрическая модель Spalart-Allmaras; двухпараметрические модели k - ϵ , RNG k - ϵ , Realizable k - ϵ ; двухпараметрические k - ω , SST k - ω ; модели Рейнольдсовых напряжений: RSM, k - ω RSM; модель V2F; модели крупных вихрей LES; модели неприсоединенного вихря DES.

Теплопередача моделируется как: ламинарная/турбулентная вынужденная конвекция, включая расчет вязкого трения; свободная и смешанная конвекция; радиационный теплообмен (DO, DTRM, P1, Rosseland, Surface-to-surface) с учетом полупрозрачности; сопряженный теплообмен; модель солнечной радиации.

Процесс горения представлен следующими моделями: модель распада вихрей (EDM); модели PDF-типа; модель Flamelet; модель горения Subgrid scale для (LES); модель типа Partially premixed; модели конечной скорости химической реакции; модель поджога и затухания; модель горения угля; модель горения жидкости; модели загрязнения: NO_x, SO_x, модель образования сажи; импорт реакций в формате Chemkin; многостадийные поверхностные реакции.

Модель Эйлера включает в себя модель свободных поверхностей (Volume-of-fluid); межфазный теплоперенос; межфазный массоперенос; межфазная передача импульса; модель смеси веществ; отсутствие ограничений по числу веществ; модель гранулирования, неограниченное количество типов гранул; модель кавитации; модель влажного пара.

Модель Лагранжа: межфазный теплоперенос; межфазный массоперенос; межфазная передача импульса; модель жидкой струи; модель пленочной конденсации; модели эрозии; модели разрушения частиц; испарение и кипение капель жидкости; сушка влажных частиц.

Модели акустики: акустическая аналогия Фокса-Вильямса; множественные источники; поддержка вращающихся поверхностей; модель источника широкополосного шума для стационарного моделирования; оценка источника шума основанная на полученном поле турбулентности по уравнению Lilly и линеаризованному уравнению Эйлера; специализированный пост-процессор, содержит дискретные преобразования Фурье (FFT); экспорт акустических данных в LMS-SYSNOISE.

Численные методы и типы расчетных сеток: решение полных трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса. Поддержка неструктурированных расчетных сеток различных типов: 2D осесимметричные – треуголь-

ные и четырехугольные. 3D – тетраэдры, гексаэдры, призмы, пирамиды, полидральные ячейки. Адаптивное сгущение расчетных сеток по заданному критерию либо по результатам расчета. Интерфейсы для сопряжения сеток различного типа. Динамические, подвижные, деформируемые сетки с возможностью перестройки сетки в процессе расчета. Три типа решателя: *segregate implicit* (неявный); *coupled implicit* (неявный); *coupled explicit* (явный). Схемы аппроксимации уравнений 1, 2 и 3 порядка. Алгебраический многосеточный метод решения линеаризованных уравнений. Встроенные возможности задания функций для свойств материалов, граничных условий и др. Пользовательское программирование на языке C++. Широкие возможности распараллеливания. Динамическая балансировка загрузки процессоров. Интерфейсы с многими CAD/CAE программами.

STAR-CD является многоцелевым CFD-пакетом разработки CD-adapco group (предыдущее название Computational Dynamics Ltd), включающей процедуру «скользящих сеток» [243]. Эффективная параллелизация алгоритма решения, основанного на применении метода конечных объемов, в сочетании с уникальными методиками автоматизированного разбиения области течения позволяют моделировать задачи любой степени геометрической сложности. Одной из первых областей широкого применения программы была автомобильная промышленность, после чего STAR-CD получила распространение во всех отраслях. Гарантией качества программы является широкое сотрудничество с промышленными корпорациями, инжиниринговыми фирмами и научно-исследовательскими центрами (Daimler-Chrysler, Imperial College, Aerospatiale-Missiles и т.д.).

Области применения STAR-CD распространяются на большое количество прикладных задач, среди которых стоит выделить транспорт, аэрокосмическую отрасль, автомобильную и железнодорожную, судостроительную; задачи аэродинамики; климат-контроля и безопасности пассажиров; система охлаждения двигателя; системы впрыска; катализаторы; процессы горения в двигателях внутреннего сгорания; газотурбинных, ракетных двигателях; турбины; гидродинамика судов – обтекание корпуса, гребные винты, водометные движители. Пакет нашел применение для моделирования задач энергетики ядерной, гидро, солнечной, топливной (уголь, жидкое топливо, газ), испарителей и конденсаторов, паровых и водяных турбин; камеры сгорания и топки (газовые, жидко- и твердотопливные); охлаждение ядерных реакторов; очистные сооружения. В химической и для проектирования смесителей, ректификаторов, реакторов, сепараторов, циклонов, дистилляционных колонн, холодильников, систем, топки, котлы, системы безопасности и очистные сооружения. В общем машиностроении при расчете параметров центробежных насосов; теплообменников; рекуператоров; расходомеров; трубопроводов и клапанов, заслонок и др. Строительные системы вентиляции и охлаждения, климат-контроль (температурно-влажностный режим) моделирование ветровых и тепловых (солнечных) нагрузок; паводки; пожары (распространение

огня и дыма); очистные сооружения и др. Электротехническая и электронная системы охлаждения двигателей и генераторов, трансформаторов; оледенение и ветровые нагрузки на линии передач; производство сверхпроводников; производство микросхем; и др. Газо и нефтедобыча шахтная вентиляция, транспортировка и сепарация; ветровые и волновые нагрузки на буровые платформы. Биомедицинские приложения, спорт индустрия.

В структуру программного комплекса STAR-CD входят решатель STAR, пре- и постпроцессор собственной разработки ProSTAR либо ProAM, компилятор языка FORTRAN (для Windows, LINUX). UNIX-версии STAR-CD в обязательном порядке требуют наличия компилятора, поставляемого с конкретной версией UNIX (HP-UX, IRIX, AIX, ...) самим производителем аппаратной платформы (sgi, HP, IBM, SUN, Compaq ...). Windows и LINUX – версия поставляется с компилятором Absoft Pro FORTRAN. ProAM является расширенной версией ProSTAR, позволяющей автоматизированное построение сеток в произвольных трехмерных областях, в то время как в ProSTAR реализованы только блочный метод построения и экструдирование сеток. Дополнительно к ProAM предлагается широкий набор специализированных проблемно-ориентированных модулей:

1. ESTurbo – лопаточные машины;
2. ESAero – аэродинамика транспортных средств;
3. ESUhood – теплообмен в подкапотном пространстве;
4. Mixpert – смесители, реакторы с мешалками.

Другие продукты CD adapco Group:

Пре- и постпроцессор pro-fe является измененным препроцессором ProAM, только в данном случае приспособленным для работы с конечно-элементными сетками (например, включая средства создания и обработки изопараметрических квадратичных элементов - со срединными узлами) и позволяющим переносить результаты гидрогазодинамического расчета как граничные условия на конечно элементную сетку с последующей выдачей для ANSYS, а также содержащим всевозможные средства визуализации и обработки результатов.

Пакет prosurf является автономным программным продуктом. Этот пакет входит в класс инструментов препроцессинга. В задачи prosurf входит построение качественной поверхностной сетки на базе CAD модели, полученной из CAD пакета через IGES файл или другие форматы CAD пакетов.

В качестве препроцессора также может быть использован пакет ICEM, поставляемый дополнительно по желанию клиента.

STAR-CD предоставляет пользователю следующие возможности по решению задач механики жидкостей и газов на всех типах сеток:

- стационарные и нестационарные течения;
- ламинарные течения – модель Ньютона и неньютоновские жидкости;

- турбулентные течения (применяется несколько наиболее известных моделей турбулентности);
- сжимаемые и несжимаемые (включая около- и сверхзвуковые);
- теплоперенос (конвективный, радиационный, теплопроводность с учетом твердых тел);
- массоперенос;
- химические реакции;
- горение газообразного, жидкого и твердого топлива;
- распределенное сопротивление (например, в пористых средах, теплообменниках);
- многокомпонентные течения;
- многофазные потоки- модель Лагранжа (дисперсные газ-твердое тело, газ-жидкость, жидкость-твердое тело, жидкость-жидкость)
- многофазные потоки в рамках модели Эйлера;
- свободные поверхности (fuel_tank_anim.gif).

STAR-CD по праву входит в число лидирующих CFD-пакетов, обеспечивая моделирование реальных промышленных задач высочайшей степени геометрической сложности за счет использования специальных процедур работы со смешанными регулярными и т.н. свободными тетраэдрическими сетками.

Комбинация STAR + ProAM предоставляет следующие возможности:

- использование смешанных сеток как из четырех традиционных (например, гексагональных и тетраэдрических) так и уникальных срезанных призматических элементов;
- процедура автоматической «сшивки» полей параметров в смежных областях с несовпадающей разбивкой – произвольный интерфейс (arbitrary interfacing);
- автоматизированное адаптивное сгущение, основанное на оценке ошибки расчета;
- динамическое искажение (подстройка) сетки – произвольные Лагранж-Эйлеровы сетки (Arbitrary Eulerian/Lagrangian mesh), для решения задач с переменными граничными условиями (например, поршневые двигатели);
- временно-зависимые так называемые «скользящие» сетки с использованием алгоритма «произвольный интерфейс» для лопаточных машин и др.;
- дополнительные адаптивные процедуры перестройки (такие, как динамического внедрения и удаления элементов и др.);
- множественные вращающиеся системы координат (rotational reference frames) для моделирования процессов, происходящих в многоступенчатых турбинных насосах, вентиляторах и т.д.;

– средства учета циклической симметрии или других видов периодичности для лопаточных и многоступенчатых машин с целью уменьшения размерности задачи;

– помимо этого, STAR-CD теснейшим образом интегрирована со всеми продуктами линии ICEM (Tetra, AutoHexa, MOM3D, Visual3 и др.).

Графический и командный ввод: специализированные режимы работы «новичок»-«эксперт», сопровождаемые интерактивными предупреждениями и средствами помощи; широкий набор средств построения сеток, включая автоматизированное сгущение; разнообразные средства визуализации и обработки результатов (векторные, цветовые контурные заливки, изоповерхности, сечения, трассировки частиц, анимация и др.); экстраполяция результатов на произвольного вида сетки и поверхности (может быть использована для выдачи результатов в конечно-элементные пакеты); построение графиков; вывод результатов в формате файлов: GIF, XWD, PS, EPS, RGB(SGI), VRML, ENSIGHT.

STAR-CD имеет интерфейсы к CAD/CAE программам, к коммерческим сеточным генераторам, а также и специализированным CFD-постпроцессорам, включая импорт геометрических моделей в форматах STL, IGES и VDAFS, трансляцию конечно-элементных моделей, графическое представление результатов и др. для: ANSYS, HEXAR, ICEM, IDEAS, NASTRAN, PATRAN, HYPERMESH и SAMM.

Эффективная прямая связь с CAD-пакетами Unigraphics, CATIA, Pro/Engineer, I-DEAS осуществляется посредством продуктов ICEM. Существует целый ряд специализированных проблемно-ориентированных сеточных генераторов разработки как CD, Ltd., так и фирм-партнеров.

ESaero, ESUhood – внешняя аэродинамика автомобиля и подкапотное пространство. RAMM-ICE – построение моделей двигателей внутреннего сгорания. Mixpert – построение моделей смесительных устройств. Chemkin – кинетика химических реакций и др.

Специально для STAR-CD (параллельная версия HPC) в рамках европейского проекта CIPAR, суть которого состоит в разработке технологий взаимодействия деформируемых структур с жидкостями и газами (coupled fluid-structure interaction) путем состыковки с разнородными общеизвестными конечно-элементными программными комплексами, созданы интерфейсы к ANSYS, NASTRAN, PERMAS, PAM-CRASH и пр.

Созданные библиотеки интерфейсов Generic Coupling Communication Interface позволяют обмениваться топологией сетки и результатами анализа, а также интерполировать результаты для несовместных сеток, осуществляя с заданной частотой пересылку данных и запуск счета очередной итерации в STAR-HPC и конечно элементном пакете.

Созданная методика позволяет проводить полный совместный анализ, объединяющий: нестационарные гидрогазодинамические; динамические и кинематические; нелинейные термпрочностные расчеты. Возможные при-

ложения данной технологии (выборочные задачи): температурные деформации теплообменников, двигателей, электронных устройств, деформации и движение конструкций под воздействием потоков жидкостей и газов для лопаточных машин, запорной арматуры, моделирование работы человеческих органов и их протезов и пр., включая моделирование циклических нагрузок и разрушение. Пример: резонансные вибрации решетки труб, индуцированные отрывным течением газа. Совместный анализ STAR-HPC - ANSYS.

Эффективность STAR-CD заключается в использовании высокоэффективных численных алгоритмов. STAR-HPC – версия STAR-CD для суперкомпьютеров обеспечивает практически линейное приращение скорости счета (так, например, на 60 процессорной платформе было достигнуто 57 кратное ускорение). Поддерживается параллелизация для систем с распределенной памятью – кластеров, собранных из нескольких машин, объединенных в сеть. Гибкость и широкие возможности настройки пакета обеспечиваются особой архитектурой, позволяющей включать любые пользовательские процедуры и перекомпилировать программу при каждом запуске.

Устойчивые численные процедуры обеспечивает возможность решения сверхбольших задач. Например, для моделирования обтекания машины E-класса специалистами Mercedes Benz использована модель в 10^6 элементов. Решение проводилось на 128 процессорном компьютере IBM SP2. Запрос памяти под задачу составил 6000 Мб. Задача обтекания носовой части и охлаждения двигателя решалась на 64 процессорах. Размерность составила около 7 000 000 ячеек. Суммарное время решения последней – 24 часа.

Завершающим примером исключительной мощности решателя и эффективности параллелизации является представленная в 1998 году на конференции пользователей STAR фирмой adapco самая большая из всех когда-либо решенных в мире задач – расчет ядерного реактора. Размерность задачи составила около 250,000,000 элементов и нескольких сотен миллионов степеней свободы. Решение проводилось на кластере из 64 рабочих станций IBM SP, объединенных в сеть, и заняло 55 часов.

Программный комплекс FlowVision решает трехмерные уравнения динамики жидкости и газа, которые включают в себя законы сохранения массы, импульса (уравнения Навье-Стокса), уравнения состояния [244]. Для расчета сложных движений жидкости и газа, сопровождаемых дополнительными физическими явлениями, такими, как, турбулентность, горение, контактные границы раздела и так далее, в FlowVision включаются дополнительные уравнения, описывающие эти явления.

FlowVision использует конечно-объемный подход для аппроксимации уравнений математической модели. Уравнения Навье-Стокса решаются методом расщепления по физическим процессам (проекторный метод MAC).

Области применения FlowVision включают внешнюю аэрогидродинамику: обтекание автомобиля, судна, самолета, ракеты, зданий и сооружений (определение коэффициентов сопротивления и подъемной силы,

распределенная нагрузка, тепло- и массоперенос); внутреннюю аэрогидродинамику: течение в салоне автомобиля и в подкапотном пространстве, вентиляция внутренних отсеков, движение газов и жидкостей по магистралям и трубопроводам; моделирование турбомашин: течение в турбинах, компрессорах, насосах, учет влияния гребных винтов на обтекание судна; моделирование процессов горения: сжигание метана в котлах ТЭЦ, образование оксидов азота; моделирование технологических процессов: моделирование теплопереноса в микросхемных схемах, расчет расходных и напорных характеристик, эжекторного насоса, водозапорных устройств, расчет смесителей и газовых миксеров, совместный теплоперенос между жидкостью и твердыми телами; моделирование процессов изготовления деталей: литье металлов, расчет процессов затвердевания и кристаллизации; экология, управление микроклиматом: распространения загрязнений и примесей в атмосфере и водной среде, отопление, вентиляция и кондиционирование.

Возможности FlowVision постоянно расширяются, при этом список приложений пополняется. Основными движителями этого процесса являются пользователи FlowVision.

FlowVision основан на технологиях вычислительной гидродинамики и компьютерной графики:

- прямоугольная сетка с локальным измельчением расчетных ячеек;
- аппроксимация криволинейных границ расчетной области методом подсеточного разрешения геометрии;
- импорт геометрии из систем САПР и конечно-элементных систем через поверхностную сетку;
- ядро программы написано на языке C++;
- архитектура программы имеет объектно-ориентированную структуру;
- пользовательский интерфейс написан для операционных систем семейства Windows.

Интерфейс пакета построен на базовый принципе – что видишь, то и получишь и интегрирован в MS-Windows. Препроцессор включает следующие возможности: импорт геометрии через форматы VRML или STL; интерактивное задание граничных условий на поверхностях; автоматическая генерация сетки.

Возможности пакета включают в себя 3D стационарные и нестационарные слабо сжимаемые и несжимаемые потоки жидкости; ламинарные или турбулентные потоки, рассчитываемые моделями турбулентности: k-ε, ASM, RSM; перенос скалярных величин и их флуктуаций; свободные поверхности; горение; сопряженный теплообмен; сопряженное моделирование движения жидкости с различными математическими моделями в различных областях; граничные условия, зависящие от времени; обмен информацией с программами конечно-элементного анализа.

Сетка: прямоугольная сетка с подсеточным разрешением геометрии; локальное измельчение сетки; адаптация сетки по различным критериям. Методы решения: конечно-объемный метод; явный и неявный методы; неявный алгоритм расщепления для решения уравнения Навье-Стокса; схема расчета уравнений переноса повышенной точности; решение систем линейных алгебраических уравнений методами сопряженного градиента или верхней релаксации.

Граничные условия на стенке: проскальзывания или прилипания; степенного закона для турбулентных течений; адиабатические или изотермические, тепловой поток, теплообмен или сопряженный теплообмен.

Постпроцессор: векторы на плоскости или поверхности; изолинии или тоновая заливка на плоскости или поверхности; отрезающие или полупрозрачные поверхности; анимация движения маркеров. Графика основана на OpenGL.

Плюсы программного комплекса FLOWVISION заключаются в возможности импортировать геометрию из той САПР, с которой работаете, и не обучаться новым генераторам геометрии; автоматическая генерация адаптивной сетки. FlowVision работает на персональном компьютере, а не на дорогих рабочих станциях, как его аналоги. Работать с FlowVision гораздо проще, чем с его аналогами; поддержка на русском языке и в непосредственном контакте с разработчиками программы; возможность адаптации программы для вашей конкретной задачи. Гораздо более низкие финансовые вложения в организацию рабочего места (стоимость программы, компьютера, обучения, консалтинга, поддержки).

FLOW-3D – это CFD пакет общего назначения способный моделировать большое разнообразие задач течения жидкости или газа [245]. Хотя специализацией пакета является моделирование течений со свободной поверхностью, FLOW-3D является превосходной программой для моделирования ограниченных и внутренних течений.

FLOW-3D обеспечивает высокоточное моделирование течений со свободной поверхностью, используя метод конечных объемов. Используемый в FLOW-3D метод FAVOR является методом, отсутствующим в других CFD пакетах. FAVOR достаточно прост в использовании и обеспечивает высокую точность моделирования.

FLOW-3D широко используется во всем мире, как в коммерческих, так и в научных проектах для решения наиболее сложных задач в самых разных областях.

FLOW-3D представляет собой пакет «все включено», т.е. не требует никаких дополнительных программ. Графический интерфейс пользователя связывает воедино постановку задачи (включая создание/импорт геометрии и генерацию сетки), препроцессор, решение и обработку результатов, предлагая также несколько полезных утилит, таких как: просмотр STL файлов, мастер решения и средства контроля за ходом расчета.

Важные отличительные особенности FLOW-3D:

Во-первых, FLOW-3D для создания сетки использует подход, объединяющий преимущества простой прямоугольной сетки и гибкость деформируемых сеток. Такой подход называется «свободное формирование сетки» так как сетка и геометрия могут быть произвольно изменены независимо друг от друга. Данный механизм исключает трудоемкую задачу генерации адаптивной или конечно-элементной сетки. FLOW-3D использует фиксированную сетку из ортогональных элементов, что упрощает генерацию и обеспечивает многие желательные свойства (например, регулярность улучшает точность, уменьшает требования к памяти, облегчает численную аппроксимацию).

Во-вторых, FLOW-3D включает в себя специальный подход, известный как FAVOR (Fractional Area Volume Obstacle Representation) метод, используемый для описания на прямоугольной сетке геометрии произвольной формы. Философия FAVOR заключается в том, что численные алгоритмы в методе конечных объемов базируются на информации, включающей только одно значение давления, скорости и температуры для каждого элемента, поэтому было бы нелогично использовать более подробную информацию для описания геометрии. Таким образом, FAVOR метод сохраняет простоту прямоугольных элементов при представлении сложных геометрических форм на уровне, совместимом с использованием усредненных характеристик по каждому объемному элементу.

Третья важная особенность FLOW-3D, отличающая его от других CFD программ заключается в его методе обработки поверхности текущей жидкости. Данная программа использует специальные численные методы для отслеживания положения поверхности и корректного применения на них граничных условий. В FLOW-3D, свободные поверхности моделируются с помощью метода Volume of Fluid (VOF), впервые предложенного группой ученых из Los Alamos National Laboratory, включавшей основателя Flow Science доктора С.В. Нирт. Некоторые из конкурирующих CFD программ заявляют о внедрении VOF метода, хотя реально они используют только один или два из трех фундаментальных ингредиентов, составляющих VOF метод. Потенциальным пользователям CFD программ следует знать, что подобные псевдо-VOF схемы будут часто давать некорректные результаты. FLOW-3D включает все эти ингредиенты, рекомендуемые для успешной обработки свободных поверхностей. Более того, FLOW-3D включает в себя важные улучшения исходного VOF метода для повышения точности граничных условий и отслеживания поверхностей раздела. Данная реализация метода получила название TruVOF.

FLOW-3D предлагает мультиблочные сетки – инструментарий, разработанный для повышения гибкости и эффективности технологии конечно-разностных сеток. В стандартной конечно-разностной сетке, локальное измельчение может привести к существенному увеличению общего количества

элементов, т.к. линии сетки простираются во всех трех направлениях до границы области. Использование множественных блоков позволяет сделать такие измельчения более локальными, и уменьшает требования к компьютерным ресурсам.

Многоблочные сетки особенно полезны в так называемых протяженных задачах, где существуют детали, мелкие по сравнению с размерами всей области, такие как небольшие препятствия, тонкие каналы и т.д. Используя многоблочные сетки, пользователь может связать отдельные блоки для создания сетки на всей расчетной области и в зонах особого интереса и сократить общее количество ячеек. Используя «вложенный» блок, пользователь может улучшить разрешение сетки в интересующих местах.

FlowVu – мощная визуализация результатов в FLOW-3D. Простой генерации точных результатов недостаточно. Требуется возможность просмотра их для понимания и интерпретации, ясное графическое представление результатов моделирования. В FLOW-3D есть FlowVu, основанная на OpenGL программа визуализации, предоставляющая простые в использовании средства отображения результатов моделирования, создания анимации и картинок для презентации и отчетов. Кроме того, результаты, полученные в FLOW-3D, могут быть прочитаны и обработаны в специализированных программах визуализации Fieldview от Intelligent и Ensidht от CEI, Inc.

Кратко рассмотрим ключевые возможности пакета:

1. Произвольное движение объектов. Новая модель произвольного движения объектов позволяет пользователям моделировать динамику твердого тела с шестью степенями свободы, полностью связанную с течением жидкости. В новой модели объект или группа объектов может двигаться свободно, или пользователь может описать движение объекта.

2. Температурные напряжения. Добавлена модель температурных напряжений вместе с неявной схемой обработки напряжений и расширением на две жидкости. Модель описывает, например, упругие напряжения и деформации, вызванные охлаждением и затвердеванием металлических деталей.

3. Неявный GMRES решатель для давления и скорости. Решатель для скорости и давления на основе обобщенного метода минимальной невязки. В дополнение к GMRES решателю по давлению и для неявного решения вязких компонент при совместном с ним использовании реализован новый алгоритм – обобщенный метод сопряженных градиентов.

4. Электротермические (Джоулево тепло) и электромеханические эффекты. В модель электрического поля существует возможность моделирования этих эффектов.

5. Неявный алгоритм для поверхностного натяжения. Возможность неявного моделирования эффектов, связанных с поверхностным натяжением.

6. Замешивание воздуха. Модель созданная для расчета захвата воздуха вследствие турбулентного перемешивания на свободной поверхности,

учитывает турбулентный характер потока, гравитацию и поверхностное натяжение.

7. Модель микропористости. Модель прогнозирует распределение микропористости в затвердевающем металле.

8. Дополнения в модель дрейфа. Нелинейная (зависящая от числа Рейнольдса) модель была разработана для вычисления скорости дрейфа, соотношение Ричардсона-Заки для плотно упакованного диспергированного материала, точка инверсии (когда сплошная и дисперсная фазы меняют структуру на обратную).

9. Многоблочная сетка.

10. Адвекция. Выполнение VOF-алгоритма адвекции FLOW-3D.

11. Молекулярная диффузия для взаимодействия двух жидкостей.

12. Термоциклы пресс-форм. Контроль сходимости неявной схемы теплопереноса оптимизирован для повышения скорости расчета. Он включает установку для максимального разрешенного шага по времени, основанного на продолжительности циклов и схождение релаксаций температурных циклов. Это повысило скорость расчета по крайней мере в два раза и более в зависимости от количества циклов.

Графический интерфейс пользователя в FLOW-3D выполнен с использованием нового многоплатформенного инструментария. Реализован однооконный режим для работы со всеми модулями программы. Пользователь может пройти шаг за шагом все моделирование, пользуясь закладками интерфейса, выполненного в стиле блокнота. Через графический интерфейс пользователя доступны все модели и практически все входные параметры. При этом, для пользователей сохранена возможность ручного создания и редактирования входного файла.

Для проверки конфликтов и требований разработано дерево модели. Интерфейс максимально ориентирован на устранение несовместимости выборов и назначает требуемые predetermined установки.

Научный центр "GDT Software Group", основанный в 1988 году, занимается:

– разработкой программных продуктов для численного моделирования газодинамических процессов;

– разработкой программных продуктов для трехмерной визуализации физических процессов и явлений, а также томограм;

– выполнением расчетов и прочих работ по моделированию и визуализации [246].

Компания предлагает два коммерческих программных продукта: GasDynamicsTool (GDT) и ScientificVR (SVR).

GasDynamicsTool (GDT) – программный пакет для численного моделирования трехмерных газодинамических процессов, позволяющий выполнять расчеты на многопроцессорных вычислительных системах и способный работать под различными операционными системами. Высокая скорость счета

и высокая точность результатов делают GDT превосходным инструментом для решения задач газовой динамики. В пакете реализованы несколько математических моделей, что дает возможность использовать его для исследования сложных физико-химических процессов. Возможна разработка и внедрение в GDT новых моделей по заказу клиента.

Пакет имеет простой и удобный интерфейс, что делает процесс обучения быстрым и легким. Пакет GDT рекомендован Главным Советом Министерства образования РФ для преподавания механики жидкости и газа в вузах РФ.

ScientificVR (SVR) – программный пакет для визуализации трехмерных массивов данных. Является постпроцессором GDT, но также может работать с данными из других источников: прочих пакетов для численного моделирования, медицинских томографов, САД-систем и т.д.

Трехмерная визуализация в реальном времени, стереоскопическая визуализация, запись анимационных роликов и использование других новейших технологий для анализа данных делают SVR отличным инструментом для изучения быстротекущих сложных процессов, таких как турбулентные течения, горение, взрывы, распространение ударных волн, динамическое деформирование твердых тел, взаимодействие газового потока с твердыми телами и множество других. Существуют варианты SVR для Windows и Unix.

Высокое качество программных продуктов GDT Software Group сделало их популярными в ведущих научных и академических центрах, конструкторских бюро и университетах многих стран.

COMSOL Multiphysics – пакет для моделирования и расчетов научных и инженерных задач, основанных на дифференциальных уравнениях в частных производных, методом конечных элементов [247]. С этим программным пакетом можно расширить стандартную модель, используя одно дифференциальное уравнение (прикладной режим) и мультифизические модели для расчета связанных между собой физических явлений. Взаимодействие с программой возможно стандартным способом – через графический интерфейс пользователя, либо программированием с помощью скриптов на языке COMSOL Script или языке MATLAB.

Существует три математических способа задания систем дифференциальных уравнений в частных производных:

- коэффициентная форма, предназначенная для линейных и близких к линейным моделей;
- генеральная форма, для нелинейных моделей;
- слабая форма (Weak form), для моделей с PDE на границах, ребрах или для моделей, использующих условия со смешанными производными и производными по времени.

Используя эти способы, можно изменять типы анализа, включая:

- стационарный и переходный анализ;
- линейный и нелинейный анализ;

– модальный анализ и анализ собственных частот.

Для решения дифференциальных уравнений COMSOL Multiphysics использует метод конечных элементов. Программное обеспечение запускает конечноэлементный анализ вместе с сеткой, учитывающей геометрическую конфигурацию тел и контролем ошибок, с использованием разнообразных численных решателей. Так как многие физические законы выражаются в форме уравнений в частных производных, становится возможным моделировать широкий спектр научных и инженерных явлений из многих областей физики таких как: акустика, химические реакции, диффузия, электромагнетизм, гидродинамика, фильтрование, тепломассоперенос, оптика, квантовая механика, полупроводниковые устройства, сопломат и многие другие.

Кроме вышеперечисленного программа позволяет с помощью переменных связи (coupling variables) соединять модели в разных геометриях и связывать между собой модели разных размерностей.

Часть 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВТ

13 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВТ В ЛАБОРАТОРНЫХ И ПРОМЫШЛЕННЫХ УСТРОЙСТВАХ

13.1 Моделирование ЭВТ в лабораторной установке

13.1.1 Построение расчетной модели

Для изучения ЭВТ в ограниченном объеме жидкого металла при растекании электрического тока от электрода конечных размеров рассмотрим экспериментальную установку [35]. Установка представляет собой полусферический контейнер 2, выполненный из меди и расположенный горизонтально, который можно заполнять различными расплавами металла 3 (рис. 3.1). Медный контейнер служит катодом. Сверху в расплав погружают цилиндрический электрод 1 небольшого размера с полусферическим торцом, который служит анодом. Electrodes расположены осесимметрично, ось симметрии направлена вертикально. На электроды подается напряжение и по расплаву от анода к катоду растекается электрический ток, который вызывает интенсивное ЭВТ.

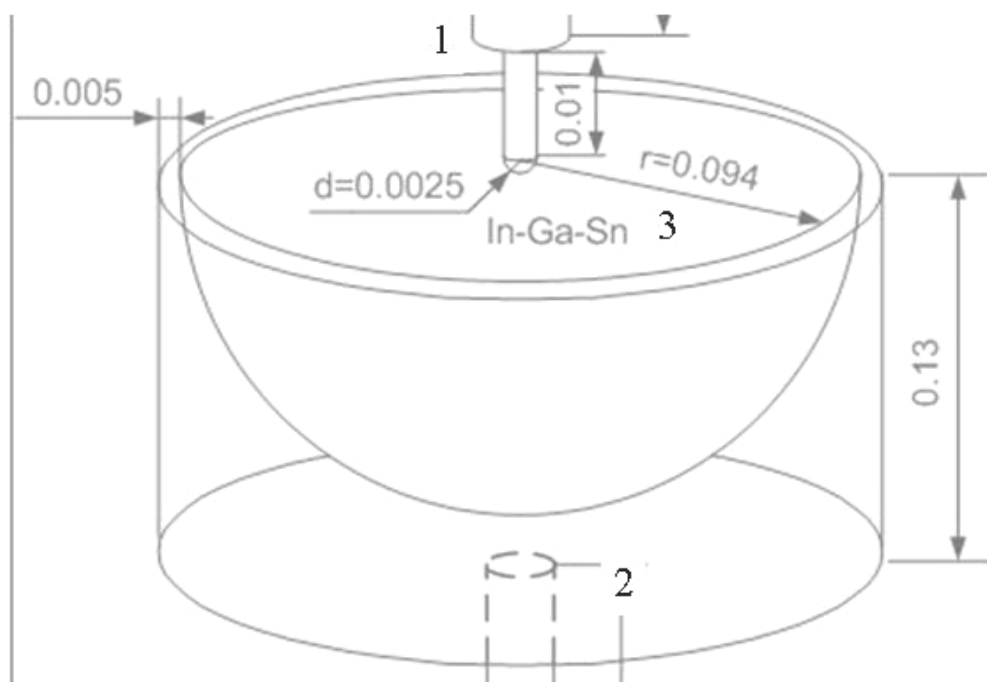


Рис. 13.1. Общий вид лабораторной установки

Основные параметры медного контейнера, геометрические размеры которого приведены на рис. 3.1, при температуре $T = 283$ К равны:

- плотность $\rho = 8960$ кг/м³;
- удельное сопротивление $\rho_e = 0,017 \cdot 10^{-6}$ Ом·м;
- относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$ [192].

В качестве проводящей жидкости используются легкоплавкие металлы и их сплавы с эвтектическими свойствами. В настоящей работе использовались два расплава: ртуть и эвтектический сплав индий-галлий-олово.

Параметры ртути при температуре $T = 293$ К:

- плотность $\rho = 13550$ кг/м³;
- удельное сопротивление $\rho_e = 95,8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м;
- динамическая вязкость $\eta = 1,5 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с);
- относительная магнитная восприимчивость $\chi = -2,27 \cdot 10^{-6}$ (ртуть – диамагнетик) [192]. Магнитными свойствами ртути в этом случае можно пренебречь.

Параметры эвтектического сплава индий-галлий-олово с содержанием по весу In – 20.55 %, Ga – 67 %, Sn – 12.5 % (METSPEC 51) при температуре выше температуры плавления ($T = 283$ К) равны:

- плотность $\rho = 6492$ кг/м³;
- удельное сопротивление $\rho_e = 3 \cdot 10^{-7}$ Ом·м;
- динамическая вязкость $\eta = 1,3 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с);
- относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$ [35].

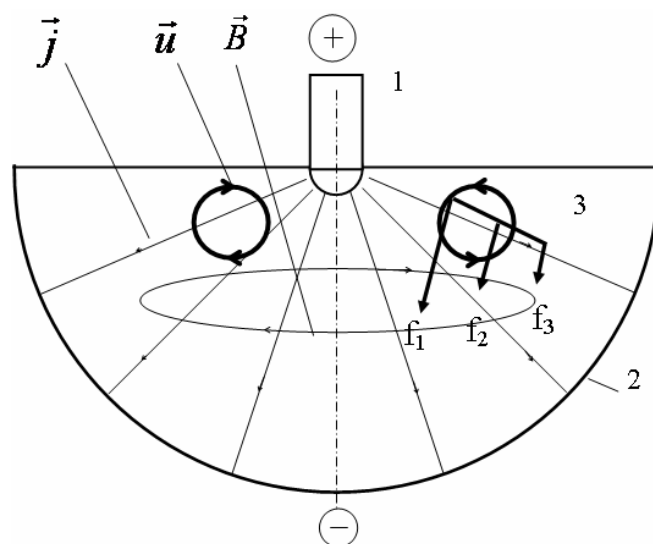


Рис. 13.2. ЭВТ в лабораторной установке

На рис. 13.2 приведена схема растекания электрического тока в сферическом контейнере. Здесь 1 – верхний электрод с полусферической поверхностью, 2 – полусферический нижний электрод, 3 – жидкий металл. Вся конструкция имеет осевую симметрию, поэтому протекающие в ней физические процессы будут обладать осевой симметрией.

Рассмотрим гидродинамические и электромагнитные процессы, протекающие в такой установке. Пусть на электроды подано некоторое постоянное напряжение, положительное на верхний и отрицательное на нижний электроды. Под действием приложенного к электродам напряжения в расплаве потечет ток. В силу симметрии линии плотности тока \vec{j} будут лежать в меридиональных сечениях. Из закона полного тока $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = const$, где S – полусферическая поверхность, в центре которой находится верхний электрод, можно сделать вывод, что плотность тока должна убывать при удалении от оси симметрии обратно пропорционально квадрату расстояния. Этот ток создает осесимметричное магнитное поле, вектор магнитной индукции \vec{B} которого лежит в азимутальной плоскости, а линии магнитной индукции – концентрические окружности в этой плоскости.

На выделенный кусочек жидкого проводника с током в магнитном поле действует объемная сила Лоренца $\vec{f}_e = [\vec{j}, \vec{B}]$, перпендикулярная векторам \vec{j} и \vec{B} . Для рассматриваемой схемы сила \vec{f}_e лежит в меридиональной плоскости, имеет радиальную и осевую составляющие, направлена к оси симметрии и уменьшается при удалении от оси симметрии ($f_1 > f_2 > f_3$). Эта сила сообщает выделенному элементу поступательное и вращательное движение, так как создает вращающий момент, т.е. имеет вихревой характер ($\text{rot } \vec{f}_e \neq 0$). Под действием силы Лоренца элемент перемещается как целое от оси симметрии, и поворачивается против часовой стрелки для правой части полушферы. Но так как проводник жидкий, то в нем возникнет вихревое течение, направленное против часовой стрелки (см. рис. 3.2). Необходимым условием возникновения вихревого течения ($\text{rot } \vec{v} \neq 0$) является вихревой характер электромагнитной силы \vec{f}_e ($\text{rot } \vec{f}_e \neq 0$). Такой характер течения как раз и наблюдается при пространственной неоднородности электрического тока.

В данном случае вихревое движение расплава возникает при подводе электрического тока в отсутствии внешних магнитных полей из-за пространственной неоднородности электрического тока. Электрический ток в жидком проводнике создает собственное магнитное поле, которое при определенных условиях вызывает ЭВТ.

Рассматриваемые процессы достаточно быстро после включения тока выходят на установившийся режим. Поэтому с приемлемой точностью могут быть смоделированы в стационарной постановке [35].

Для построения физической модели, основанной на общей теории ЭВТ из раздела 12.1, сделаем следующие допущения:

- процесс считается установившимся;
- джоулевым теплом и другими тепловыми явлениями можно пренебречь;
- среда считается немагнитной (магнитная проницаемость мало отличается от единицы и магнитные свойства среды не учитываются);
- среда является хорошим проводником;
- конвективным током, вызванным движением среды, по сравнению с током проводимости, можно пренебречь;
- физические характеристики среды предполагаются однородными и изотропными по объему расплава;
- расплав считается несжимаемой жидкостью с одинаковой по объему температурой, тепловая конвекция не учитывается;
- деформация свободной поверхности не учитывается;
- процессы в установке предполагаются осесимметричными;
- химические реакции не учитываются.

В принятой постановке система уравнений магнитной гидродинамики (2.1)-(2.10), описывающих установившееся движение изотермического расплава металла имеет вид [228-232]:

уравнение Навье-Стокса:

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla \cdot \left[-p\vec{I} + (\eta + \eta_T)(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T) \right] + \vec{j} \times \vec{B}; \quad (13.1)$$

уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0; \quad (13.2)$$

уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} = 0; \quad (13.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e; \quad (13.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (13.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}; \quad (13.6)$$

закон Ома для движущейся среды

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (13.7)$$

закон сохранения заряда

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0; \quad (13.8)$$

где \vec{v} , ρ и p – скорость, плотность и давление жидкости; \vec{j} – плотность тока; \vec{B} – индукция магнитного поля; η – коэффициент динамической вязкости; η_T – турбулентная вязкость; σ – удельная проводимость среды; \vec{E} – напряженность электрического поля. В уравнении (3.1) учтены силы: давления $\nabla \cdot [-p\vec{I}]$, вязкого трения $\nabla \cdot [(\eta + \eta_T)(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T)]$, электромагнитная сила Лоренца $\vec{j} \times \vec{B}$. Обозначения соответствуют стандартам пакетов прикладных программ.

Граничные условия (12.12)-(12.17) для задачи взяты в виде [228-232]: для электрического и магнитного поля условия непрерывности нормальной составляющей на границах расчетной области:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n} = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}, \quad \vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}, \quad (13.9)$$

на электродах плотность тока, соответствующая отношению силы тока к площади поперечного сечения электрода:

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = j_0 = I/S. \quad (13.10)$$

где I – сила тока, S – площадь поперечного сечения токоподводящего электрода;

для гидродинамики:

– условия не проникновения на свободной поверхности и оси симметрии:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad (13.11)$$

– на границе с электродами использовалось условие прилипания:

$$\vec{v} = 0. \quad (13.12)$$

Рассматриваемая задача не имеет аналитического решения и решается численно. По результатам предварительного анализа существующих численных методов и программных пакетов, проведенного в разделе 2, был выбран метод конечных элементов и метод конечных объемов и их программная реализация в пакетах ANSYS и COMSOL [209, 213, 221].

Поставленная задача относится к классу задач мультифизики, решение которых проводится методом итераций и состоит из двух основных этапов:

1-й этап – моделирование электромагнитных полей;

2-й этап – моделирование электровихревых течений.

Затем проводится следующая итерация и результаты уточняются. Такая последовательность расчета обусловлена особенностями решения задач мультифизики при помощи пакетов ANSYS и COMSOL.

Результатом моделирования электромагнитных полей на первом этапе являются значения электромагнитной силы и других электромагнитных параметров, полученные для каждой узловой точки в объеме расплава. На 2-м этапе рассчитывается движение расплава при заданных электромагнитных силах в качестве нагрузки, полученных на 1-м этапе. Как показали расчеты, скорости движения расплава малы и конвективный ток, согласно уравнению (3.7) значительно меньше тока проводимости. Поэтому последующие итерации не проводились, т.к. практически не приводили к повышению точности расчетов.

13.1.2 Моделирование ламинарного электровихревого течения

Первоначально была рассмотрена задача для ламинарного ЭВТ расплава, имеющая известное решение [33]. За основу была взята лабораторная установка [35], в которой диаметр верхнего электрода составляет 18,8 мм в соответствии с условиями известного решения (соотношение между диаметрами электродов составляло 1/10). Проводящей жидкостью являлась ртуть при комнатной температуре. Задача решалась в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат.

Согласно стратегии решения задачи на 1-м этапе было выполнено моделирование электромагнитных параметров по всему объему полусферического контейнера. Вместо индукции магнитного поля и напряженности электрического поля введены векторный магнитный потенциал \vec{A} и скалярный электрический потенциал V по формулам

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla V.$$

Уравнения (13.3)-(13.8) для электромагнитной задачи с введением потенциалов преобразуются к виду

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (-\sigma \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \nabla V) &= 0, \\ \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \vec{A}) - \sigma \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + \sigma \nabla V &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения гидродинамики (13.1)-(13.2) для ламинарного течения принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \nabla \cdot [-p + \eta(\nabla \vec{v})] + \vec{j} \times \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Расчетная область состояла из контейнера с расплавом, верхнего электрода, а также внешней среды (воздуха) в виде квадрата со стороной порядка пяти радиусов контейнера. Предварительный анализ, проведенный на целом ряде модельных задач и непосредственно на рассматриваемой лабораторной установке, показал несущественное влияние размеров расчетной области модели на результаты распределения электромагнитных параметров при уменьшении размеров расчетной области сначала в два раза, а затем уменьшение расчетной области до размеров двух электродов и расплава [228-232]. В результате предварительных расчетов установлено, что различие полученных распределений всех электромагнитных параметров составило менее 1 % от значений рассчитываемых величин. Учитывая результаты расчетов, а также быстрое убывание значений всех электромагнитных параметров при удалении от верхнего электрода следует вывод о незначительном влиянии размеров расчетной области на распределение электромагнитных параметров. Поэтому за расчетную область были приняты верхний и нижний электроды и сам расплав металла.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов для ламинарного движения расплава при небольших значениях силы тока $I = 0,7$ А, которые соответствуют режимам, описанным в [33]. На рис. 13.3 представлены векторный и контурный график, а также линии тока в меридиональном сечении для правой половины контейнера, а на рис. 13.4 – распределение скорости на оси симметрии в направлении от верхнего электрода к нижнему.

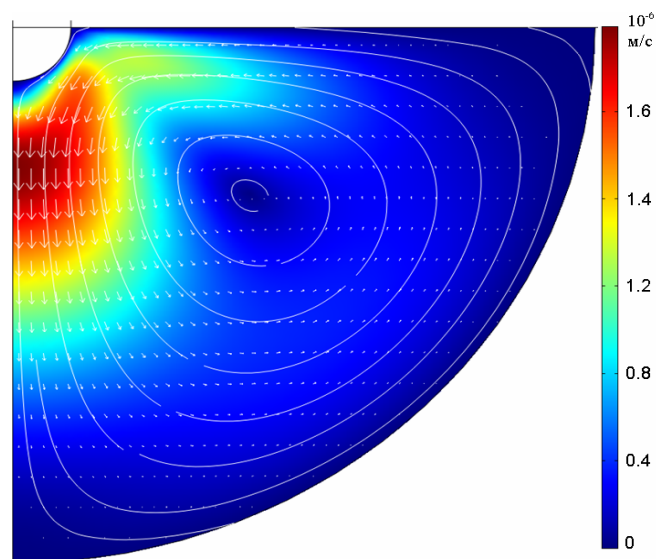


Рис. 13.3. Векторный и контурный графики поля скоростей, линии тока

Как видно, в жидкости возникает вихревое движение, направленное в правой половине контейнера против часовой стрелки. Поток жидкого металла движется вдоль оси симметрии установки в сторону нижнего электрода. Приближаясь к середине установки скорость потока быстро возрастает из-за того, что поток стекается к оси, как при движении затопленной струи. Затем поток опускается вниз вдоль оси симметрии, разворачивается и поднимается вверх к свободной поверхности вдоль полусферического электрода.

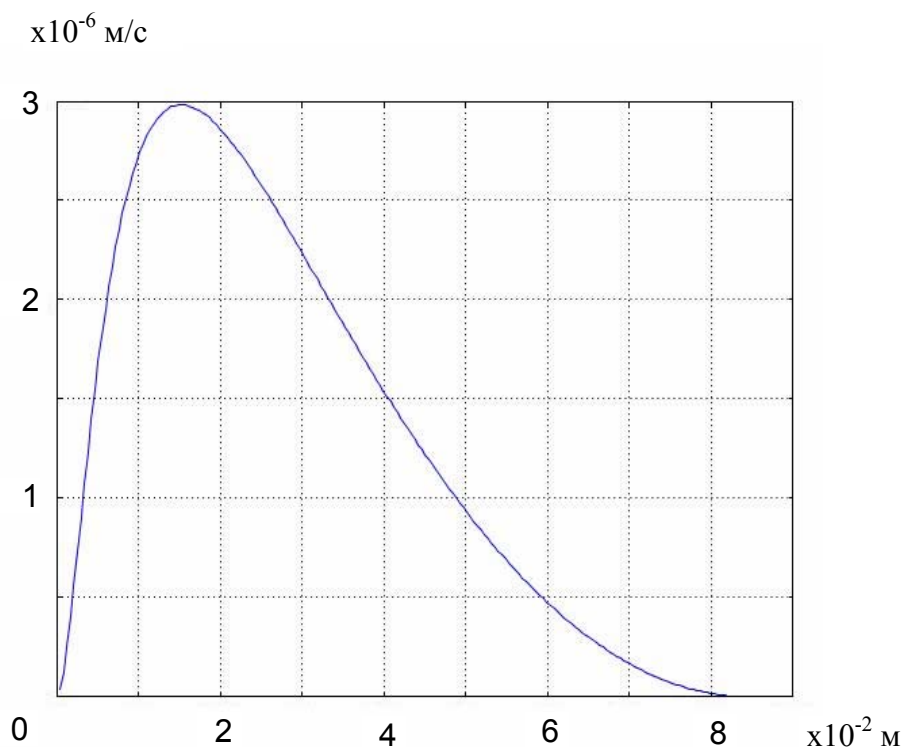


Рис. 13.4. Распределение скорости движения расплава вдоль оси симметрии для ламинарного течения

Такое движение при определенной скорости может привести к неустойчивости и возникновению азимутального вращения жидкости, вызванного флуктуациями скорости в этом направлении. При приближении потока к оси симметрии из-за сохранения момента импульса при вращательном движении скорость азимутального течения возрастает, как при сливе жидкости через отверстие в дне сосуда. Согласно экспериментальным исследованиям азимутальное движение расплава в установке возникает при токах больше 300 А [35]. По мнению исследователей, причиной такого движения может быть влияние токоподводящих проводников и магнитного поля Земли.

В ЭВТ определяющей силой является сила Лоренца. Для таких течений нет характерной скорости, такой как расходная скорость при течении в трубе или скорость набегающего потока при обтекании тела. Оценить скорость движения расплава можно, приравняв по порядку силы Лоренца и силы

инерции по формуле $v_0 = j_0 L \sqrt{\mu_0 / \rho} \approx 10^{-5} \text{ м/с}$, где L – характерный размер, равный радиусу сферического контейнера. Эта величина служит верхним пределом для значения скорости движения расплава и является характерной скоростью. Число Рейнольдса, рассчитанное по этой скорости, составляет $Re \approx 1,5$, что соответствует ламинарному течению. Максимальная скорость движения расплава наблюдается на оси симметрии вблизи верхнего электрода на расстоянии порядка его диаметра. Профиль скорости в этой области соответствует осесимметричной струе жидкости, которая течет от верхнего электрода вниз вдоль оси симметрии, как отмечается в [33]. Максимальное значение скорости составило $1,75 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$, что хорошо согласуется с теоретической оценкой скорости движения. Расчетные значения скорости отличаются от известного решения [33] менее чем на 2 %, что подтверждает достоверность принятой физической и математической модели, а также верный выбор стратегии решения.

13.1.3 Моделирование турбулентного электровихревого течения

Рассмотренное выше ламинарное ЭВТ при малых числах Рейнольдса порядка $Re \approx 1$ имеет аналитическое и численное решение, которое носит оценочный характер и очень затруднительно для экспериментальной проверки из-за малых скоростей движения расплава. Для достижения скоростей движения расплава, которые можно измерить экспериментально, необходимо значительное увеличение силы тока. Согласно данным [35] в лабораторной установке при силе тока $I = 70 \text{ А}$ скорость движения расплава увеличивается до $0,15 \text{ м/с}$. В этом случае число Рейнольдса достигает 10^6 , что соответствует развитому турбулентному движению.

Турбулентное движение расплава в полусферическом объеме сильно отличается от классических турбулентных течений (например, движение жидкости по трубам, обтекание тел и т.д.), для которых разработаны приемлемые модели турбулентности. Поэтому выбор модели турбулентности, адекватно отображающей движение расплава на этих режимах, является актуальной проблемой. С этой целью при расчетах были опробованы несколько наиболее распространенных моделей турбулентности. Результаты расчетов по разным моделям анализировались, сравнивались между собой и с экспериментальными исследованиями [35]. Таким образом, оценивалось качество моделей и достоверность результатов расчетов.

Для моделирования процессов за основу были выбраны геометрические параметры лабораторной установки, приведенные на рис. 13.1 (диаметр верхнего электрода 3 мм) и физические параметры эвтектического сплава: индий-галлий-олово с содержанием по весу In – 20,5 %, Ga – 67 %, Sn – 12,5 % (METSPEC 51).

На первом этапе моделирование турбулентного течения в полусферическом контейнере было проведено при помощи полуэмпирической модели турбулентности Прандтля, в которой вязкое сопротивление определяется из одного алгебраического уравнения, а значения констант находятся эмпирически [203, 204, 211]. Согласно этой модели коэффициент турбулентной вязкости вычисляется по формуле

$$\eta_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|, \quad (13.13)$$

где l – длина пути смешения. В рассматриваемой задаче нет явно выраженного поперечного направления, поэтому формула Прандтля (13.13) была модифицирована в соответствии с преобразованиями С. Патанкара в виде пограничного слоя и струи как это описано в [209, 211].

На рис. 13.5 приведен векторный и контурный график скорости и линии тока для турбулентного движения расплава при силе тока $I = 70$ А. Характерная скорость движения расплава может быть оценена по равенству порядков сил Лоренца и сил инерции по формуле $v_0 = j_0 L \sqrt{\mu_0 / \rho} \approx 0.2$ м/с. Максимальная скорость расплава наблюдается вблизи верхнего электрода. Поле скоростей в этой области еще нагляднее, чем для ламинарного течения, похоже на затопленную струю. Максимальное значение скорости составило 0,07 м/с, что согласуется с теоретической оценкой характерной скорости движения лишь качественно.

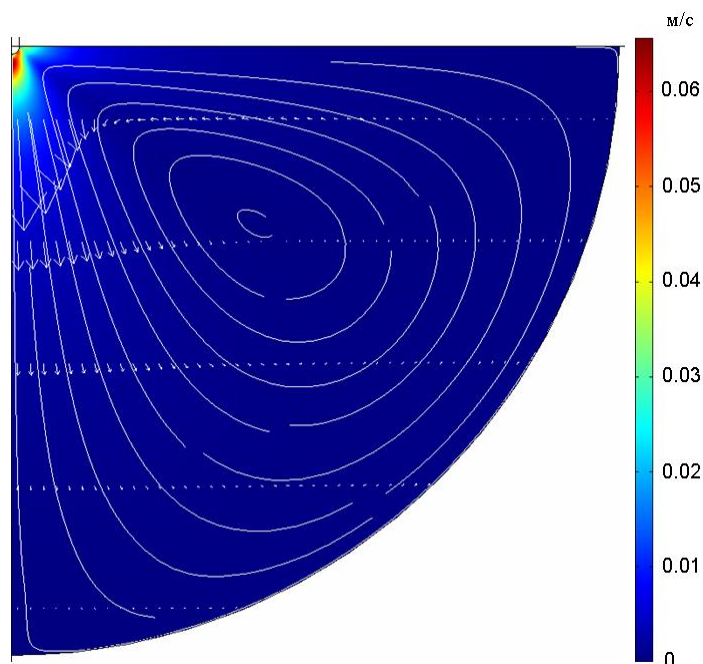


Рис. 13.5. Векторный и контурный графики скорости, изолинии движения расплава

На рис. 3.6 приведен график распределения скорости на оси симметрии в направлении от верхнего к нижнему электроду. Сравнение расчетных и экспериментальных данных [35] показало существенное различие результатов – около 50 %. Это дает основания рассматривать полуэмпирическую модель турбулентности Прандтля со стандартными константами ненадежной для моделирования подобных задач и требующей более точного подбора эмпирических констант, учитывающих характер турбулентного течения по всему объему расплава, что потребует большого количества экспериментальных данных в каждой точке объема на различных режимах.

$\times 10^{-2}$ м/с

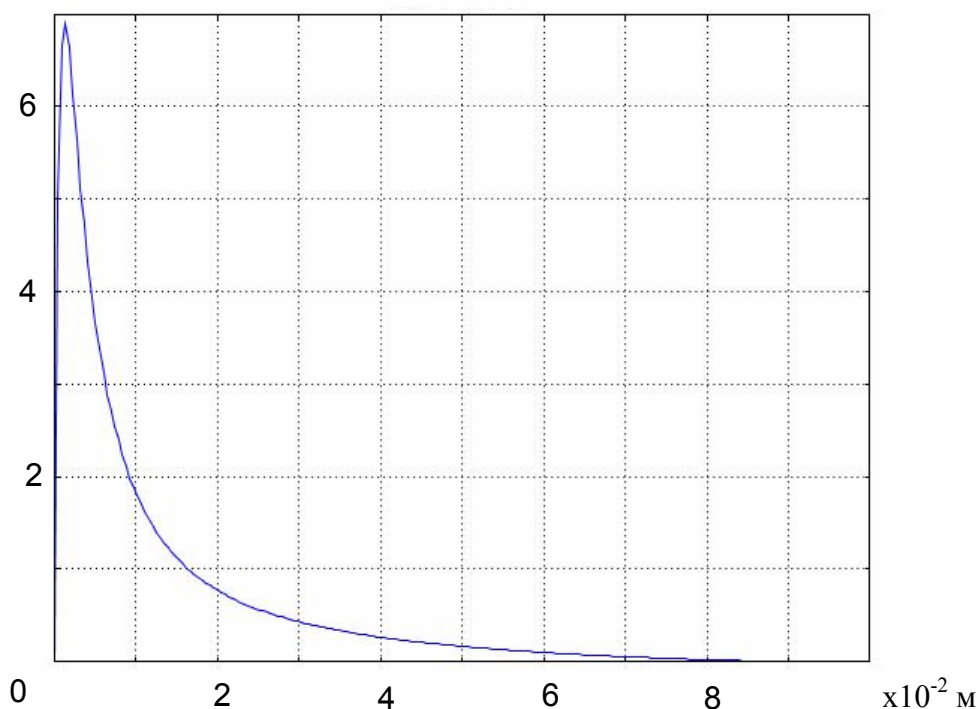


Рис. 13.6. Распределение скорости вдоль оси симметрии для феноменологической модели турбулентности

На следующем этапе моделирования турбулентного движения были выбраны двухпараметрические модели турбулентности, которые состоят из двух уравнений, одно из которых определяет кинетическую энергию турбулентности, а второе длину пути смешения [211].

Наиболее распространенной двухпараметрической моделью для расчета широкого класса турбулентных течений является $k - \varepsilon$ модель турбулентности [233, 234]. В этой модели для замыкания уравнений гидродинамики используются следующие уравнения для интенсивности k и диссипации ε турбулентной энергии:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \eta_T P(\vec{v}) - \rho \varepsilon,$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon \eta_T P(\vec{v})}{k} - \frac{C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon^2}{k},$$

где

$$P(\vec{v}) = \frac{\nabla \vec{v}}{\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T}.$$

Турбулентная вязкость определяется по формуле

$$\eta_T = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon}.$$

Преимуществом этой модели является широкий диапазон применимости эмпирических констант. Для моделирования были использованы стандартные константы $k-\varepsilon$ модели турбулентности: $C_\mu = 0,09$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{k 2} = 1,92$, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

В прилегающей к стенке области для турбулентного течения в рамках $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей турбулентности использовался логарифмический закон для скорости:

$$V' = \frac{V}{v_\tau} = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{\delta_w}{l'} \right) + C',$$

где

$$\begin{aligned} \delta_w' &= \frac{\delta_w}{l'} = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2} \delta_w}{\eta}; \\ l' &= \frac{\eta}{\rho v_\tau}; \quad v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; \\ \nabla k \cdot \vec{n} &= 0, \quad \varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{k \delta_w}, \quad \omega = \frac{k^{1/2}}{C_\mu^{1/4} k \delta_w}. \end{aligned}$$

Здесь $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, C_μ – константы модели турбулентности; k , ε , ω – параметры моделей турбулентности.

На рис. 13.7 приведен векторный и контурный графики скорости, а также изолинии движения расплава в описанной выше лабораторной установке для $k-\varepsilon$ модели турбулентности. Характер движения расплава для этой модели несущественно отличается от течения, рассчитанного по полуэмпирической модели турбулентности. Однако численные значения скорости

для $k-\varepsilon$ модели турбулентности почти в два раза больше, что лучше согласуется с теоретической оценкой скорости и результатами экспериментальных исследований [35].

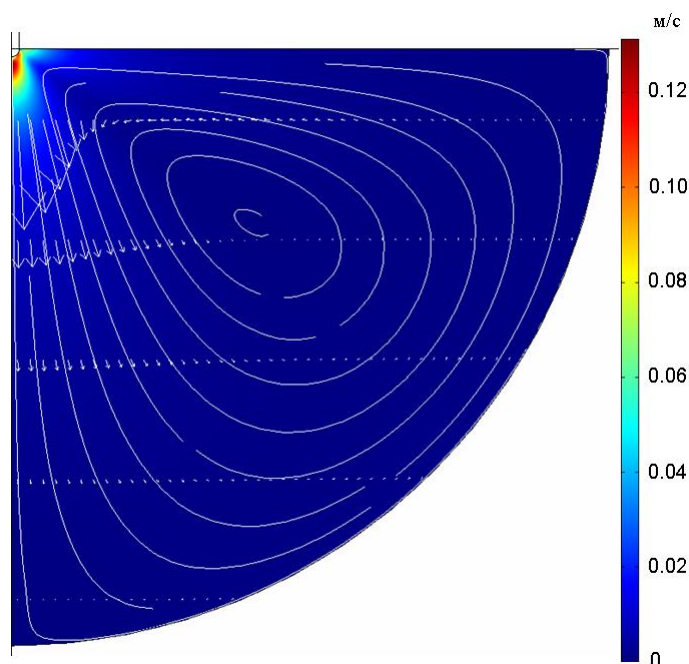


Рис. 13.7. Векторный и контурный графики скорости, изолинии движения расплава

На рис. 13.8 приведен график распределения модуля осредненной скорости расплава на оси симметрии в направлении от верхнего электрода к нижнему, а на рис. 13.9 – распределения скорости в поперечном сечении на расстоянии радиуса от верхнего электрода. Как видно, в расплаве возникает вихревое течение в меридиональной плоскости, нисходящее вблизи оси симметрии и восходящее вдоль поверхности полусферического контейнера. Максимальная интенсивность течения наблюдается вблизи верхнего электрода на расстоянии порядка его радиуса. В расплаве вблизи верхнего электрода формируется поток, похожий на затопленную струю, вытекающую из электрода, как из цилиндрического насадка.

Профиль скорости ЭВТ соответствует поперечному распределению скорости в затопленной струе жидкости. В расплаве формируется поток жидкости, направленный вдоль оси установки сверху вниз. Максимальная скорость движения расплава достигает 0,13 м/с. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [35].

Сравнение расчетных и экспериментальных данных дает основания считать $k-\varepsilon$ модель турбулентности достаточно адекватной для описания ЭВТ.

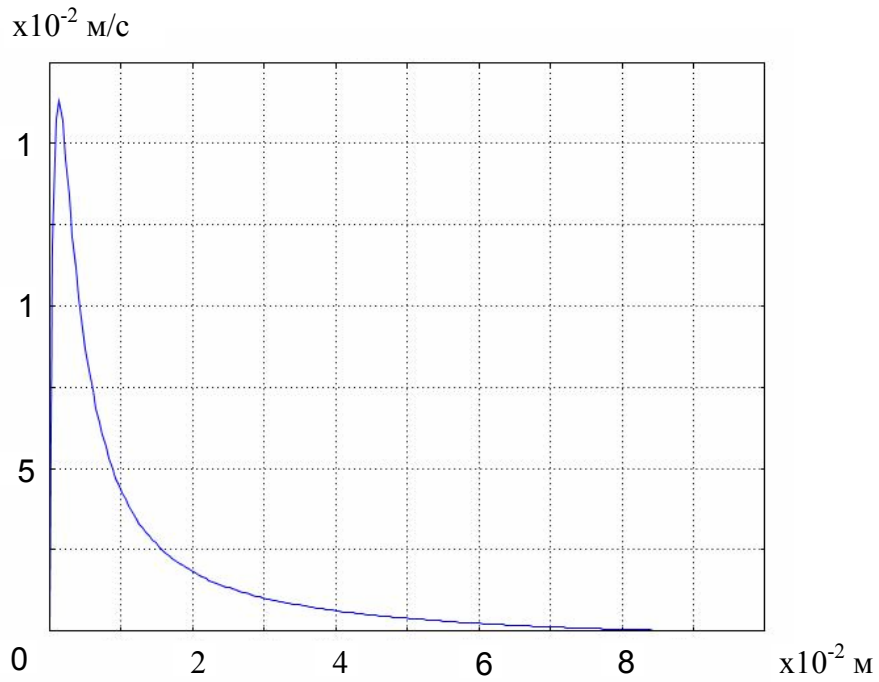


Рис. 13.8. Распределение скорости вдоль оси симметрии для $k - \varepsilon$ модели турбулентности

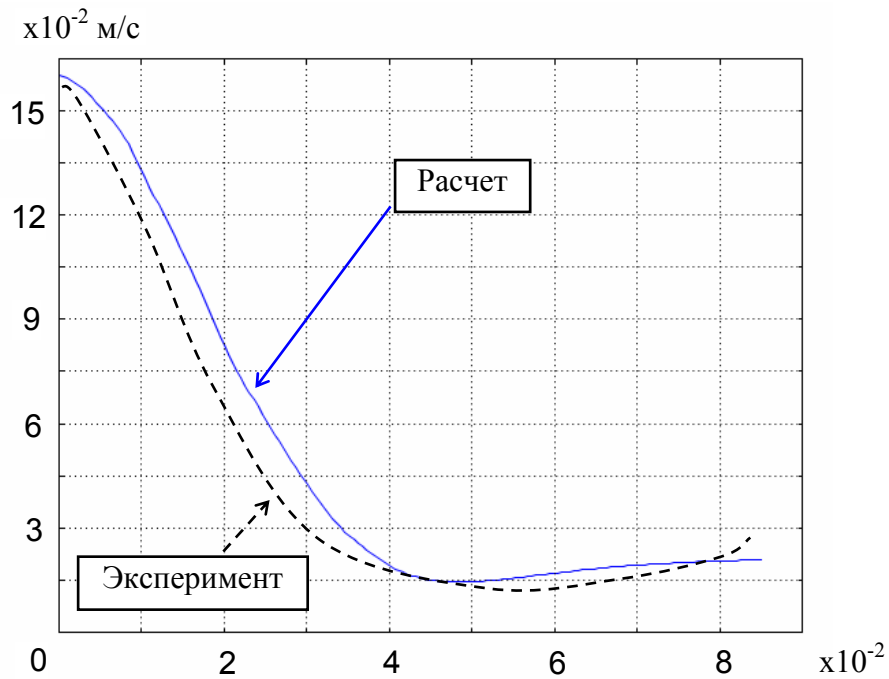


Рис. 13.9. Сравнение расчетов с экспериментом для $k - \varepsilon$ модели турбулентности

Другой распространенной двухпараметрической моделью турбулентности является $k - \omega$ модель, которая так же отличается универсальностью эмпирических констант для широкого класса турбулентных течений [211, 233]. Для замыкания уравнений гидродинамики (13.1-13.2) в этой моде-

ли используются следующие уравнения для интенсивности k и скорости диссипации ω турбулентности и эмпирические константы:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla k = \nabla \cdot [(\eta + \sigma_k \eta_T) \nabla k] + \frac{1}{2} \eta_T (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)^2 - \rho \beta_k k \omega,$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \omega = \nabla \cdot [(\eta + \sigma_k \eta_T) \nabla \omega] + \frac{\alpha}{2} \eta_T \frac{\omega}{k} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T)^2 - \beta \rho \omega^2,$$

где
$$\alpha = \frac{13}{25}, \beta = \beta_0 f_\beta, \beta_k = \beta_{k,0} f_{\beta,k}, \sigma_\omega = \sigma_k = \frac{1}{2},$$

$$\beta_0 = \frac{9}{125} f_\beta = \frac{1 + 70 \chi_\omega}{1 + 80 \chi_\omega} \chi_\omega \equiv \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_{k,0} \omega)^3} \right|,$$

$$\beta_{0,k} = \frac{9}{100}, f_\beta = \begin{cases} 1, \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2}, \chi_k > 0 \end{cases}, \chi_k \equiv \frac{1}{\omega^S} \nabla k \cdot \nabla \omega,$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Турбулентная вязкость определяется по формуле

$$\eta_T = \rho \frac{k}{\omega}.$$

Результаты расчетов для $k - \omega$ модели турбулентности хорошо согласуются с расчетами для $k - \varepsilon$ модели. Различие результатов по разным параметрам составляет около 3 %. Поэтому графики расчетов для $k - \omega$ модели не приводятся. Хорошее совпадение результатов расчетов для этих моделей турбулентности свидетельствует о возможности их использования для численного моделирования ЭВТ.

Описанные выше расчеты для разных моделей турбулентности проводились параллельно при помощи пакетов ANSYS и COMSOL. При расчетах учитывались индивидуальные особенности пакетов, связанные с построением расчетной сетки, выбора конечных элементов, подбора решателей и т.д. Сравнение результатов расчетов, полученных разными пакетами, показало хорошее согласование. Результаты расчетов для различных случаев отличались на нескольких процентах. Этот факт свидетельствует о надежности используемых моделей, методов и подходов при моделировании ЭВТ в различных случаях и достоверности полученных результатов.

По результатам моделирования ЭВТ в лабораторных установках можно сделать следующие выводы. Построена физическая и математическая модель

процессов, протекающих в ограниченных объемах расплавленного металла при пропускании по нему постоянного электрического тока. Численно смоделированы магнитогидродинамические процессы в расплаве для различных режимов течения и различных установок. Показано что неоднородное распределение плотности тока порождает неоднородное распределение магнитной индукции и, как следствие, вихревой характер силы Лоренца. Установлен характер и особенности движения расплава на различных режимах.

Численное моделирование проводилось как для ламинарного, так и для турбулентного движения расплава с использованием различных моделей турбулентности. Показано, что $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ модели турбулентности адекватно описывают электровихревые течения, а результаты расчетов по этим моделям хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Достоверность полученных результатов подтверждается использованием широко известных и апробированных законов магнитной гидродинамики и численных методов, совпадением результатов расчетов разными методами и пакетами, а также хорошим согласованием с экспериментальными данными.

13.2 Моделирование ЭВТ на модельной задаче электросталеплавильной печи

13.2.1 Расчетная модель электросталеплавильной печи

Рассмотрим модельную задачу для осесимметричного объемного проводника по форме и размерам близкого к реальной сталеплавильной печи (рис. 13.10). Рассматриваемая модель не имеет точного аналога промышленной электросталеплавильной печи, однако, имеет большое теоретическое значение для понимания процессов, протекающих в расплаве металла. Поэтому она широко используется в целом ряде работ как первое приближение к моделированию промышленных печей [165, 166, 183, 207, 208].

В данной модели расплав металла 3 для простоты имеет форму прямого токопроводящего цилиндра. Геометрические размеры расчетной области соответствуют размерам реальной печи и приведены в миллиметрах на рис. 13.10. В силу осевой симметрии моделирование ЭВТ в этой печи проводится в цилиндрических координатах для правой половины меридионального сечения. Здесь 1 и 2 – цилиндрические электроды, 3 – расплав металла в виде цилиндрического объема, 4 – окружающая среда (воздух). Исходные данные для моделирования печи:

- сила тока через электроды $I = 80$ кА;
- удельная проводимость жидкого железа $\sigma_1 = 0,9 \cdot 10^6$ (Ом·м)⁻¹;
- удельная проводимость электродов $\sigma_2 = 0,2 \cdot 10^6$ (Ом·м)⁻¹;
- относительная магнитная проницаемость железа и электродов $\mu = 1$;

- относительная магнитная проницаемость окружающей среды $\mu = 1$;
- относительная диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\varepsilon = 1$.

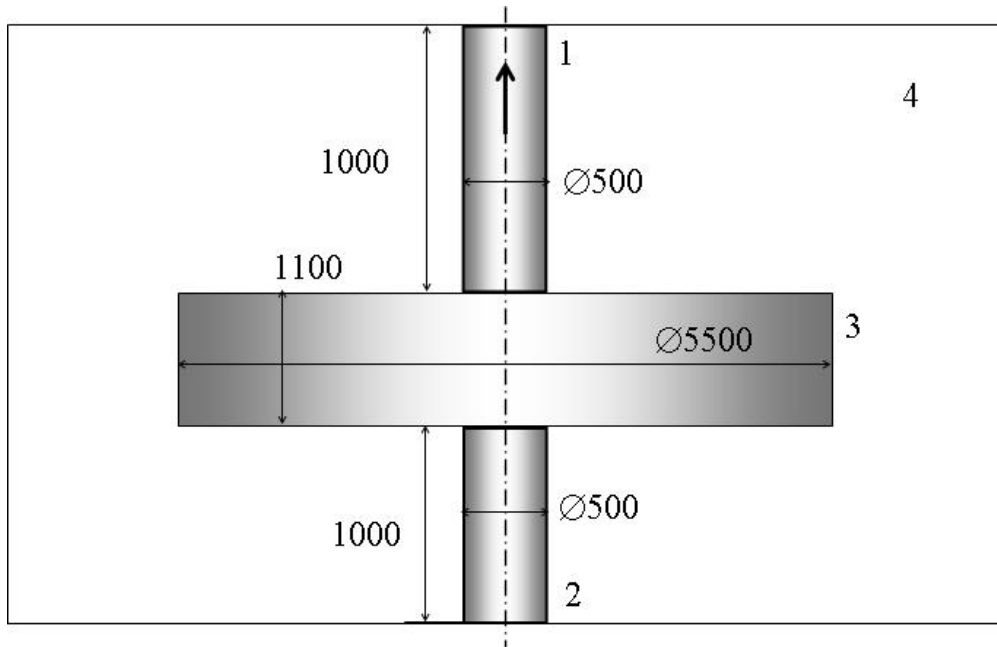


Рис. 13.10. Модель электросталеплавильной печи, представленная цилиндрическими проводниками

По оценкам число Рейнольдса при движении расплава в модели печи составляет величину порядка $Re = v_0 L / \nu \approx 10^6$, что соответствует развитому турбулентному движению. Критерии подобия в этой задаче близки к аналогичным критериям задачи из раздела 13.1. Поэтому для моделирования процессов в рассматриваемой печи были выбраны методы и подходы, отработанные в разделе 13.1. Моделирование проводилось в рамках $k - \varepsilon$ модели турбулентности.

Расчеты проводились при следующих граничных условиях:

- на торцах электродов задается плотность тока, или значение потенциала, соответствующее исходной плотности тока ($j_n = 0, j_0 = I/S$);
- на боковых поверхностях электродов и на цилиндрической поверхности расплава металла задаются условия непрерывности нормальной компоненты электрического и магнитного полей ($\vec{E}_{n1} = \vec{E}_{n2}, \vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2}$);

- на границах расчетной области задаются условия продолжения электромагнитных полей или условия на бесконечности ($\vec{E}_{n1} = \vec{E}_{n2}, \vec{B}_{n1} = \vec{B}_{n2}$);
- условие прилипания на поверхностях электродов и футеровки, с которыми находится в контакте расплав металла ($\vec{v} = 0$);
- на оси симметрии ставились условия осевой симметрии.

13.2.2 Результаты моделирования процессов в печи

Расчеты проводились с использованием различных видов анализа на различных сетках. Выяснено существенное влияние на результаты расчетов размеров расчетной сетки и формы конечных элементов. По предварительному анализу было определено оптимальное разбиение на элементы, а также их форма в виде четырехугольников с 4 узлами. Расчетная область разбивалась на элементы неравномерно: в области подового электрода, где большие градиенты электромагнитных параметров, элементы расположены густо и имеют небольшие размеры. На остальных участках расчетной области, где градиенты параметров не столь существенны, элементы расположены реже и имеют большие размеры.

Численное моделирование процессов в электросталеплавильной печи проводится в некоторой расчетной области конечных размеров, на границах которой должны ставиться некоторые граничные условия. Эти граничные условия являются искусственными, т.к. они ставятся на границах расчетной области, которая не является реальной физической границей. Очевидно, что размеры расчетной области должны быть больше размеров печи и на границах этой области должны ставиться такие граничные условия, которые не будут влиять на электромагнитные, гидродинамические и тепловые параметры печи. Поэтому предварительно на модельных задачах было исследовано влияние размеров расчетной области и различных видов искусственных граничных условий (магнитная изоляция, неотражающие условия и т.д.) на расчетные параметры в ближней зоне. В результате предварительных расчетов установлены оптимальные размеры расчетной области и выяснено несущественное влияние искусственных граничных условий на параметры в центральной зоне. Различие результатов расчетов для разных граничных условий на границах расчетной области не превышало 1 % [232, 234, 235].

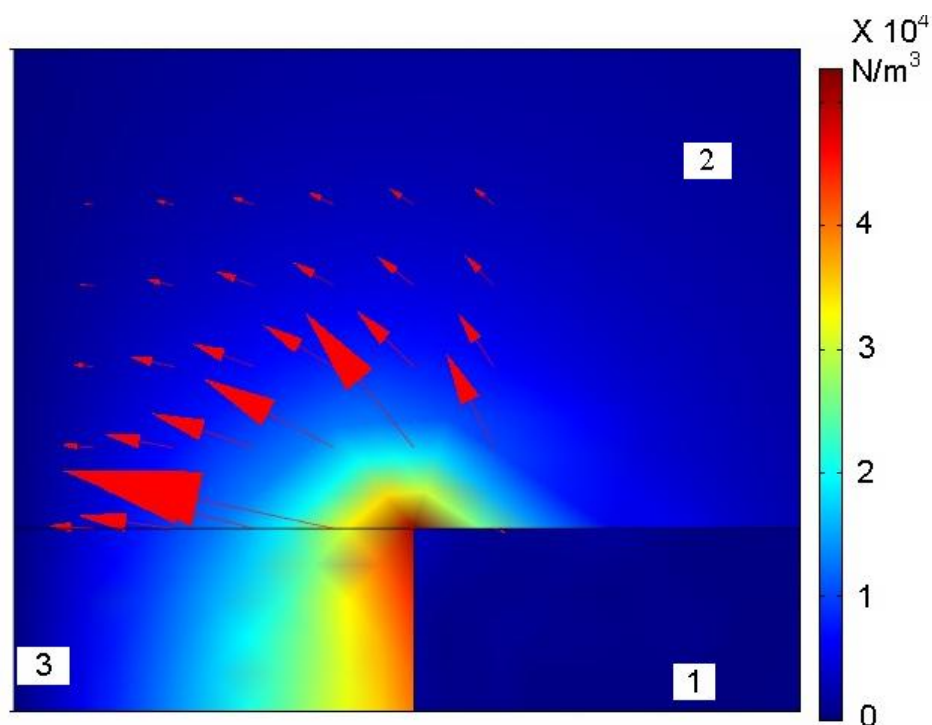


Рис. 13.11. Векторное и контурное поле силы Лоренца в области подового электрода

На рис. 13.11 приведено векторное и контурное поле силы Лоренца вблизи подового электрода (анода), где 1 – защитный слой футеровки, 2 – расплав металла, 3 – подовый электрод (анод). Результаты расчетов подтверждают тот факт, что сила Лоренца в таких печах является определяющей при возникновении электровихревого течения, а ее значение составляет в среднем 30 % от объемной силы тяжести [229, 230]. Данные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными по повышенному износу футеровки.

На следующем этапе, согласно стратегии решения задачи, были смоделированы гидродинамические процессы в расплаве металла в осесимметричной постановке. На рис. 13.12 приведены гидродинамические поля модуля скорости, вектора скорости и линии тока для всего объема расплава, а на рис. 13.13 – в окрестности подового электрода. Здесь 1 – защитный слой футеровки, 2 – расплав металла, 3 – подовый электрод, 4 – слой шлака на поверхности расплава.

Как видно из графиков, в расплаве возникает интенсивное вихревое движение. Вблизи электродов образуются два вихря, симметричных относительно поперечного сечения, проходящего через середину модели, которые циркулируют в противоположных направлениях.

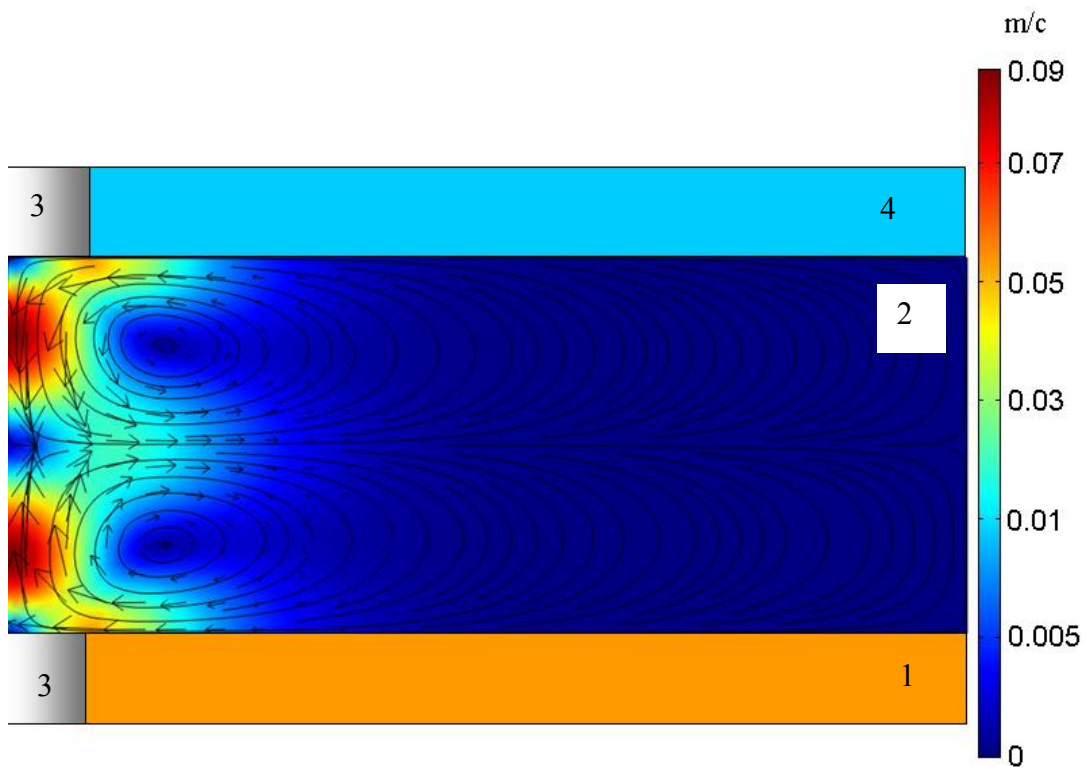


Рис. 13.12. Векторный и контурный графики скорости, изолинии движения расплава во всей расчетной области

Максимальная скорость движения расплава наблюдается на оси симметрии на расстоянии порядка радиуса электрода и достигает величины около 0,1 м/с (рис. 13.13). Вблизи нижнего электрода расплав циркулирует по

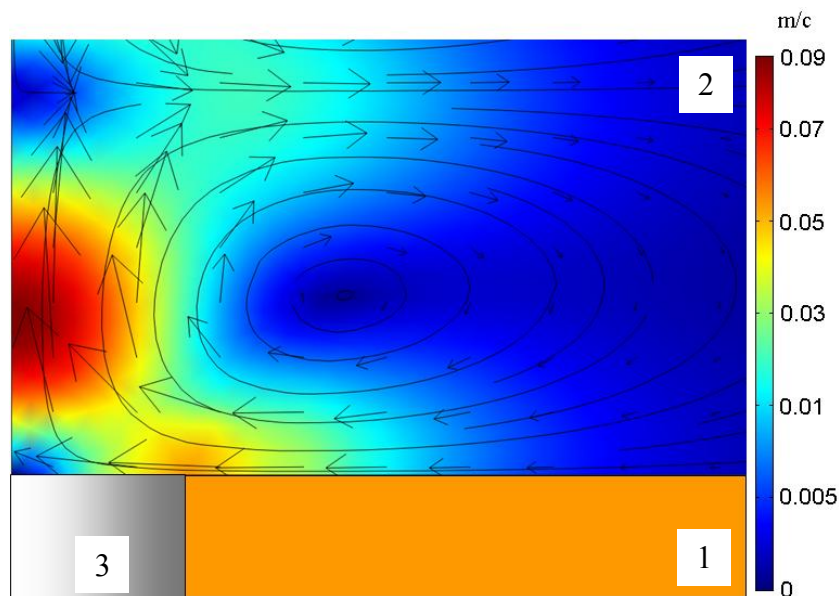


Рис. 13.13. Векторный и контурный графики скорости, изолинии движения расплава в области подового электрода

часовой стрелке и на оси симметрии поток восходящий. Вблизи верхнего электрода движение расплава происходит в противоположном направлении. Скорость расплава у торца электродов и, в частности, анода возле футеровки около 0,05 м/с.

При удалении от оси симметрии установки интенсивность движения расплава быстро убывает. На расстоянии около двух диаметров электрода скорость движения расплава примерно в 20 раз меньше максимальной.

Аналогичные расчеты были проведены при помощи пакета COMSOL. Результаты расчетов в ANSYS сравнивались с расчетами в COMSOL. Отмечено хорошее совпадение расчетов, проведенных разными методами и пакетами, что говорит о надежности методов и достоверности результатов [229, 230, 232, 235, 236].

По результатам этих модельных исследований можно сделать определенные выводы об адекватности принятых моделей, эффективности и надежности методов расчета и достоверности результатов расчетов.

Для описания процессов в электросталеплавильной печи адаптирована модель магнитной гидродинамики, которая учитывает пространственное распределение тока, электрического и магнитного полей, силу Лоренца. Разработана стратегия решения поставленной сопряженной задачи при помощи пакетов мультифизики. В осесимметричной постановке поставлена и решена модельная задача, на которой отработаны методы расчета электромагнитных полей в ANSYS, оценено влияние условий на границах расчетной области на параметры в центральной зоне. По результатам расчетов определен оптимальный тип конечных элементов, размеры сетки и вид анализа. Результаты расчетов в ANSYS сравнивались с аналитическими предположениями, экспериментальными данными и расчетами в COMSOL. Хорошее совпадение расчетов разными методами и пакетами говорит о надежности методов и достоверности результатов.

Показано, что предложенные модели и методы позволяют рассчитать электромагнитные и гидродинамические поля для модели электросталеплавильной печи. Установлено, что максимальные значения индукции магнитного поля, плотности тока и силы Лоренца локализованы в непосредственной близости от электродов на расстояниях порядка радиуса электрода. Показано, что пространственное распределение тока в расплаве металла в печи приводит к электровихревому движению, которое выражается в возникновении двух симметричных вихрей в верхней и нижней половине расплава металла. При удалении от электродов интенсивность движения расплава быстро убывает. По оценкам объемная плотность силы Лоренца в области интенсивного вихревого движения составляет около 30 % силы тяжести, а скорость электровихревого движения расплава достигает 0,1 м/с.

14. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВТ В ПРОМЫШЛЕННЫХ СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПОДОВЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

14.1 Моделирование ЭВТ в электросталеплавильной печи постоянного тока цилиндрической формы

14.1.1 Построение расчетной модели печи

Основными элементами электросталеплавильной печи постоянного тока с подовым электродом являются: корпус с защитным слоем футеровки, ванна с расплавом металла, верхний и подовый электроды. Типовая схема такой печи разработки фирмы «DANIELI» приведена на рис. 14.1 [238]. Основные характеристики такой печи: емкость печи – 100 т, диаметр печи – 5500 мм, максимальная глубина печи – 1100 мм, диаметр электродов – 500 мм, толщина футеровки – 650 мм, величина постоянного тока – 80-100 кА, максимальное напряжение – 500-1000 В, мощность – 40-100 МВт, полярность электродов – «+» на подовый электрод.

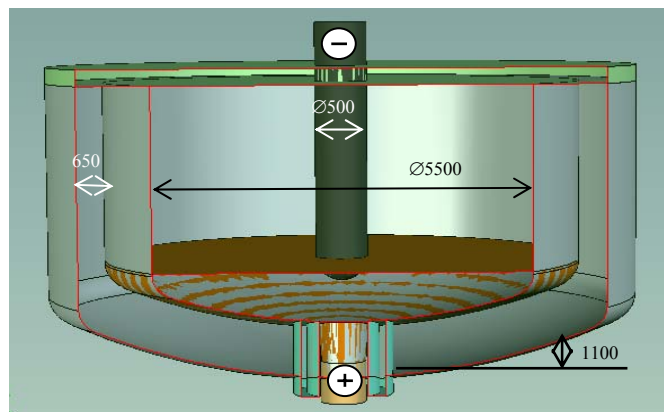


Рис. 14.1. Промышленная дуговая электросталеплавильная печь постоянного тока

В работе электродуговой печи постоянного тока с подовым электродом можно выделить несколько основных периодов:

- нагрев и плавление шихты;
- жидкий период, во время которого приготавливается сталь;
- слив жидкого металла.

Время жидкого периода колеблется от 15 до 60 % от общего времени плавки в зависимости от марки приготавливаемой стали и исходного сырья [135, 165, 166, 190]. Рассмотрим процессы, протекающие в расплаве во время жидкого периода.

В жидкий период плавки металл полностью расплавлен, а разность температур по объему металла может колебаться в зависимости от режима

работы печи. Так при включенной на полную мощность дуге температура изменяется от 3500 °С в зоне горячей дуги возле катода до 1650 °С в окрестности подового электрода и вдоль поверхности футеровки. Максимальные градиенты температуры на этом режиме наблюдаются в зоне горения дуги. На минимальных режимах работы дуги разность температур по объему не превышает 50 °С [115].

Рассмотрим физические свойства расплава металла, который находится в ванне электросталеплавильной печи, а также физические особенности, связанные с протеканием электрического тока в печи, как через систему проводников с учетом разной физической структуры и температуры каждого из токопроводящих элементов печи.

В рассматриваемой системе имеет место целый ряд физических эффектов, связанных с пропусканием электрического тока через сложную систему проводников в сталеплавильной печи. Рассмотрим наиболее распространенные из них и оценим возможное влияние каждого.

В сталеплавильной печи наблюдается как термоэлектрические, так и гальваномагнитные эффекты. Термоэлектрические эффекты представляют совокупность физических явлений, обусловленных взаимосвязью тепловых и электрических процессов в металлах и полупроводниках. К этим эффектам относятся эффект Зеебека, Пельтье и Томсона. В некоторой степени все эти эффекты одинаковы, поскольку причина всех термоэлектрических явлений – нарушение теплового равновесия в потоке носителей. Эффект Зеебека для соединений меди и железа в местах контакта электродов с расплавом составит $24 \cdot 10^{-6}$ В/град, что ничтожно мало в сравнении с током проводимости. Эффект Пельтье для контактов электродов составит 22 Дж, что много меньше тепла выделяемого по закону Джоуля-Ленца. Эффект Томсона составит 84 Дж/с, что также ничтожно мало в сравнении с джоулевым теплом. Для оценки эффектов все данные о расплаве и электродах были взяты из источника [192].

Гальваномагнитные эффекты представляют совокупность эффектов, связанных с воздействием магнитного поля на электрические свойства проводников (металлов и полупроводников), по которым течёт ток. Наиболее существенны гальваномагнитные эффекты в магнитном поле, которое направлено перпендикулярно току. К гальваномагнитным эффектам относятся: эффект Холла, магнетосопротивление, эффект Эттингсгаузена, гигантское магнитное сопротивление. Расчеты показали, что перечисленные эффекты оказывают ничтожно малое воздействие на протекающие процессы в печи и поэтому ими можно пренебречь.

Оценим некоторые характеристики ЭВТ в промышленной дуговой печи в жидкий период. Характерная скорость движения расплава (12.11), обусловленная электровихревыми силами, может быть оценена как $v_0 = j_0 L \sqrt{\mu_0 / \rho} \approx 0,3$ м/с [33]. Число Грасгофа, характеризующее относитель-

ную интенсивность конвективных потоков, существенно зависит от разности температур, и для электровихревых течений в печи в разные периоды колеблется от $Gr = \beta \Delta T g L / \nu_0^2 \approx 10^{-2} \cdot \Delta T \approx 10^{-2} \cdot 1850 \approx 18,5 > 1$ (при максимальной мощности дуги) до $Gr = 0,5 < 1$ (при минимальной мощности дуги), что соответствует существенному и незначительному вкладу конвекции в общий характер движения [33]. Согласно этим оценкам на режимах работы печи с большой мощностью необходимо учитывать конвективные потоки, а при работе на малой мощности ими можно пренебречь.

Относительная мощность джоулева тепла в сравнении с теплом, которое выделяется электрической дугой, невелика и составляет

$$Q = \frac{j_0^2 L}{\sigma \rho c \nu_0 \Delta T} \approx 10^{-3} \ll 1, \text{ что соответствует значительному преобладанию те-}$$

пла от электрической дуги над джоулевым теплом.

Тепловое число Пекле, характеризующее относительную роль конвективного переноса тепла в сравнении с его переносом за счет молекулярной теплопроводности $Pe = \nu_0 L / \chi \approx 10^{-5} \ll 1$, что обозначает преобладание молекулярного теплопереноса над конвективным.

Магнитное число Рейнольдса входит в уравнение магнитной индукции. При малых магнитных числах Рейнольдса, как в рассматриваемой задаче ($Re_m = \mu_0 \sigma \nu_0 L \approx 0,4 < 1$), движение проводящего расплава не сказывается на параметрах магнитного поля. Поэтому магнитное поле можно рассчитывать без учета закона электромагнитной индукции Фарадея.

По предварительным оценкам число Рейнольдса при движении расплава в печи составляет величину порядка $Re = \nu_0 L / \nu \approx 10^6$, что соответствует развитому турбулентному движению. Учитывая анализ известных решений, проведенный в разделе 1.3, и расчеты, проведенные для лабораторной установки в разделе 3.1, движение расплава описывалось в рамках $k - \varepsilon$ модели турбулентности.

Процессы в печи при выплавке металла нестационарные. Однако они протекают достаточно медленно и с хорошей точностью могут описываться в стационарной постановке. Для стационарных процессов система уравнений магнитной гидродинамики, описывающих турбулентное движение расплава металла в печи, имеет вид:

уравнение Навье-Стокса

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla \cdot \left[-pI + (\eta + \eta_T) (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) - (2/3) (\nabla \cdot \vec{v}) I \right] + \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B}; \quad (14.1)$$

уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0; \quad (14.2)$$

уравнения $k - \varepsilon$ модели турбулентности

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \eta_T P(\vec{v}) - \left(\frac{2\rho k}{3} \right) \nabla \cdot \vec{v} - \rho \varepsilon; \quad (14.3)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[\left(\eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \left(\frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon}{k} \right) \left[\eta_T P(\vec{v}) - \left(\frac{2\rho k}{3} \right) \nabla \cdot \vec{v} \right] - \frac{C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon^2}{k}; \quad (14.4)$$

где

$$P(\vec{v}) = \frac{\nabla \vec{v}}{\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T} - \frac{2(\nabla \cdot \vec{v})^2}{3}, \quad \eta_T = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon}; \quad (14.5)$$

уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (14.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho_e / \varepsilon_0; \quad (14.7)$$

обобщенный закон Ома для движущейся среды

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (14.8)$$

закон сохранения заряда

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0; \quad (14.9)$$

уравнение теплопроводности

$$\rho C_p \vec{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot ((a + a_T) \nabla T) + j^2 / \sigma. \quad (14.10)$$

Здесь \vec{v} , ρ и p – скорость, плотность и давление жидкости; I – единичный тензор, \vec{g} – ускорение свободного падения; \vec{j} – плотность тока; \vec{B} – индукция магнитного поля; η – коэффициент динамической вязкости расплава; η_T – турбулентная вязкость; $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, C_μ – константы модели турбулентности; k , ε – параметры модели турбулентности; σ – удельная проводимость среды; \vec{E} – напряженность электрического поля, T – температура, a – коэффициент теплопроводности, a_T – турбулентный коэффициент теплопроводности, j^2 / σ – мощность джоулевых источников тепла, C_p – удельная теплоем-

кость расплава. В уравнении (14.1) учтены силы: $-pI$ – давления, $\nabla \cdot (\eta + \eta_T)(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$ – вязкого трения, $\rho \vec{g}$ – тяжести, $\vec{j} \times \vec{B}$ – электромагнитная сила Лоренца.

Рассматриваемая задача не имеет аналитического решения и поэтому решается численно. По результатам анализа численных методов, приведенного в разделе 12.3, и предварительных расчетов, проведенных в разделе 13, были выбраны методы конечных элементов и конечных объемов [213] и их программная реализация в пакетах прикладных программ ANSYS Multiphysics [240], ANSYS CFX [241] и COMSOL [247]. Задача относится к классу мультифизических и стратегия решения такой задачи состоит из следующих этапов:

- 1-й этап – моделирование электромагнитных полей;
- 2-й этап – моделирование тепловых процессов;
- 3-й этап – моделирование электровихревых течений с учетом теплообмена и конвекции.

Такая последовательность расчета обусловлена особенностями решения задач мультифизики в рамках стандартных пакетов программ, которое проводится методом итераций.

На 1-ом этапе результатом моделирования электромагнитных полей являются значения силы Лоренца и других электромагнитных параметров, а также количества джоулева тепла, полученные для каждой узловой точки по объему расплава.

На 2-м этапе определяется температура расплава в каждой расчетной точке по заданным граничным условиям и мощности источников джоулева тепла, полученных на первом этапе.

На 3-м этапе рассчитывается поле скоростей и давлений расплава с учетом силы Лоренца и конвекции.

На этом заканчивается текущая итерация и проводится следующая итерация, в которой на 1-ом и 2-ом этапах учитывается поле скоростей, полученное при расчете на 3-м этапе предыдущей итерации. Расчет проводится до тех пор, пока итерации не сойдутся с заданной точностью.

Однако существуют различия в реализации алгоритма в различных пакетах программ. Так в ANSYS Multiphysics рассчитывается 1-й этап алгоритма методом конечных элементов, затем результаты расчета передаются в ANSYS CFX где реализуются 2-й и 3-й этапы расчета методом конечных объемов. В пакете COMSOL расчеты для всех трех этапов проводятся методом конечных элементов на одной расчетной сетке поэтапно до сходимости результатов.

14.1.2 Моделирование ЭВТ для изотермического и неизотермического режимов работы печи

Для моделирования процессов, протекающих в объеме расплава, за основу возьмем параметры промышленной дуговой сталеплавильной печи постоянного тока с подовым электродом, приведенные на рис. 14.1, а также геометрические размеры печи в миллиметрах, изображенной на рис. 14.2. Здесь 1 – футеровка, 2 – расплав металла, 3 – электроды, 4 – окружающая среда (воздух). Расчетная область в силу осевой симметрии задачи составляет половину реальной области.

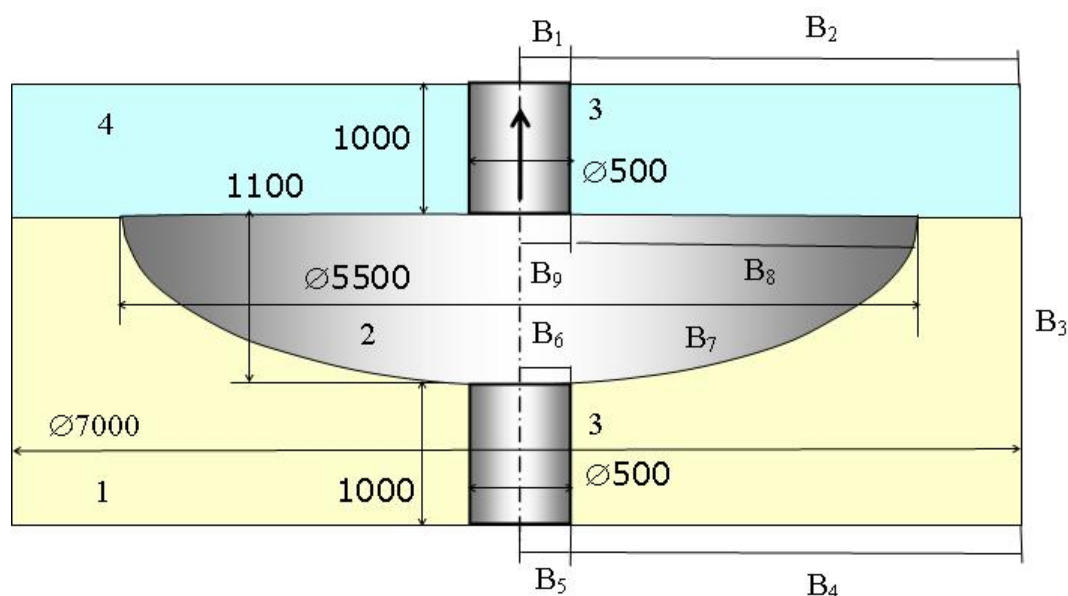


Рис. 14.2. Схема цилиндрической печи постоянного тока

Расчеты проводились при следующих граничных условиях, которые ставились на границах $B_1 - B_9$, изображенных на рис. 14.2 и приведены в таблице № 14.1.

Таблица № 14.1. Граничные условия для расчетной области									
Обозначение границы	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
Электрические	j_0	$j_n = 0$			j_0	$j_n = 0$			j_0
Магнитные	$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, D_{n_1} = D_{n_2}, B_{n_1} = B_{n_2}, B_{\tau_1} = B_{\tau_2}$								
Тепловые	-	-	-	-	-	$T_2 = 1980 \text{ К}$	$T_3 = 1900 \text{ К}$	$T_1 = 3300 \text{ К}$	
Гидродинамические	-	-	-	-	-	$\vec{v} = 0$			

На всех границах расплава используется граничное условие прилипания для задачи гидродинамики, даже на поверхности расплава (граница B_8), где находится шлак, вязкость которого значительно больше вязкости распла-

ва. Для всех типов анализа на оси симметрии расчетной области ставились условия осевой симметрии.

При моделировании использовались следующие физические данные для расплава, электродов и футеровки:

- удельная проводимость жидкого железа принята постоянной, равной значению $\sigma_1 = 0,712 \cdot 10^6 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ при температуре 1750 °С, т.к. слабо зависит от температуры и в интервале 1550-2730 °С изменяется всего на 9 %, и;
- удельная проводимость электродов $\sigma_2 = 0,2 \cdot 10^6 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$;
- относительная магнитная проницаемость железа и электродов $\mu = 1$;
- относительная магнитная проницаемость среды $\mu = 1$;
- относительная диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$;
- удельная теплоемкость стали слабо зависит от температуры и при температуре 1500-2000 °С составляет $C_p = 750 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$;
- теплопроводность жидкой стали практически не зависит от температуры и в интервале температур 1500-2500 °С и составляет $a = 32 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$;
- плотность и вязкость расплава считаются известными функциями температуры, которые заданы таблично [192].

В $k - \varepsilon$ модели турбулентности были выбраны следующие константы $C_\mu = 0,09$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{k2} = 1,92$, $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

Расчеты проводились на различных сетках с использованием различных видов анализа. На каждом этапе решения создавалась своя расчетная сетка, задавались соответствующие типы анализа и граничные условия в соответствии с рис. 14.2 и таблицей № 14.1. На 1-м этапе моделирования в ANSYS Emag (электромагнитный анализ) использовалась стандартная расчетная сетка, размеры ячеек которой подбирались так, чтобы дальнейшее уменьшение их размеров не влияло на результаты расчетов. В областях с большими градиентами параметров размеры ячейки сетки уменьшались, а в областях с малыми градиентами – увеличивались.

Расчетная сетка для моделирования гидродинамических и тепловых параметров создавалась отдельно с учетом перечисленных выше критериев. Расчетная область разбивалась на элементы неравномерно: в области подового электрода и на границах расплава, где большие градиенты всех параметров, элементы расположены густо и имеют небольшие размеры порядка 0,01 радиуса электрода. На остальных участках расчетной области, где градиенты параметров не столь существенны, элементы расположены реже и имеют размеры значительно больше (примерно в 10 раз). Отработана методика построения расчетной сетки, учитывающей особенности процесса, где расчеты проводились как для двумерного осесимметричного (2-D), так и для трехмерного (3-D) случаев [242]. На хорошо адаптированных сетках различие результатов расчетов в 2-D и 3-D постановке составляло около 1-3 %. Однако

время расчета в 3-D постановке в несколько раз больше, чем для 2-D случая. Поэтому целесообразно оценочные расчеты проводить в упрощенной 2-D постановке.

В пакете COMSOL расчеты для всех трех этапов проводились методом конечных элементов на одной расчетной сетке. Размер, форма и приблизительное расположение элементов расчетной сетки в пакете COMSOL соответствовало расчетной сетке в пакете ANSYS Multiphysics.

Пробными расчетами было определено оптимальное разбиение расчетной области на элементы, а также их форма в виде четырехугольников. На рис. 14.3 приведена оптимальная сетка при расчете в COMSOL, где 1 – футеровка, 2 – расплав металла, 3 – электроды, 4 – окружающая среда (воздух).

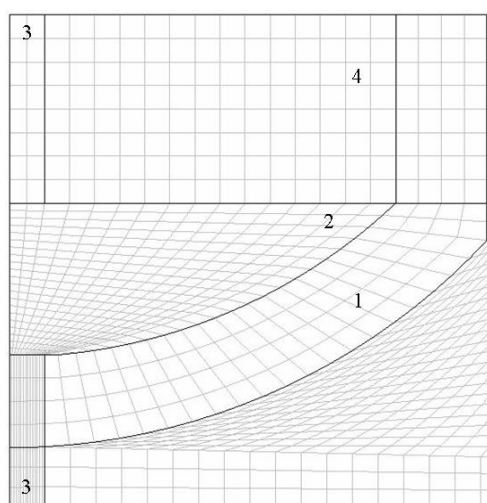


Рис. 14.3. Расчетные сетки цилиндрической печи постоянного тока

Рассмотрим наиболее важные результаты численного моделирования процессов, протекающих в расплаве металла во время выплавки стали. На рис. 14.4 приведено векторное и контурное поле сил Лоренца около подо-

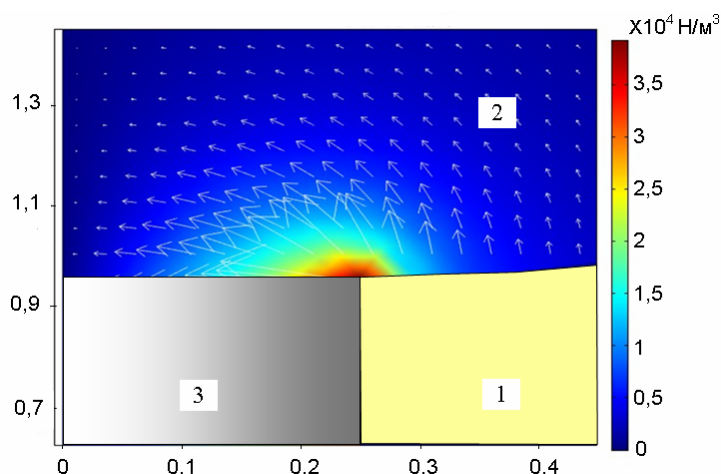


Рис. 14.4. Векторное и контурное поля сил Лоренца

вого электрода (анода). Здесь 1 – футеровка, 2 – расплав металла, 3 – электроды. Значение объемной силы Лоренца в расчетах в среднем составило величину порядка 30 % от объемной силы тяжести. Результаты расчетов подтверждают факт, что сила Лоренца в таких печах является определяющей при возникновении вихревого течения расплава.

На рис. 14.5 приведено контурное поле ротора силы Лоренца. Из графиков видно, что ротор силы Лоренца достигает максимальных значений в области подового электрода, что подтверждает теоретическое предположение о вихревом характере движения расплава, вызванного этой силой.

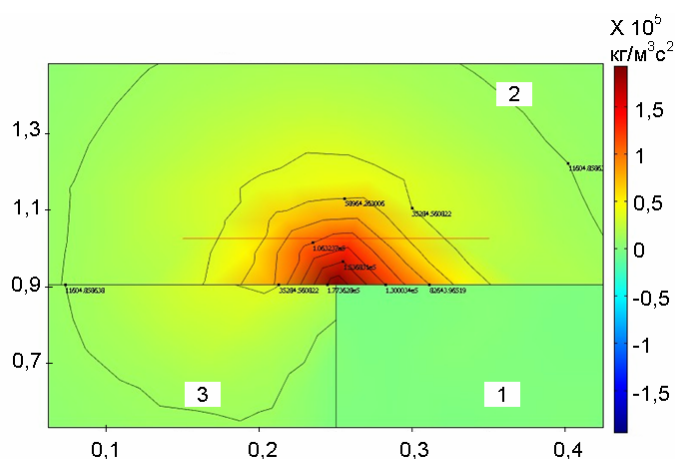


Рис. 14.5. Векторное и контурное поля ротора силы Лоренца

По заданному полю электромагнитных сил рассчитано поле скоростей для электровихревого течения расплава без учета конвекции для модели изотермической жидкости при небольших перепадах температуры во время работы печи на минимальном режиме мощности, при котором джоулево тепло компенсирует только тепловые потери в печи через футеровку [229]. Расчеты выполнены в осесимметричной 2-D и трехмерной 3-D постановке.

На рис. 14.6 приведено поле модуля и вектора скорости, а также изолинии движения расплава без учета конвекции. Как видно из графика в расплаве возникает интенсивное вихревое движение. Вихрь образуется вблизи подового электрода. Поток расплава на оси симметрии восходящий. Достигая верхней границы объема расплава, он движется вдоль поверхности расплава, а затем устремляется вниз. Вблизи верхнего электрода виден вихрь в расплаве с противоположным направлением движения. Максимальная скорость вихревого движения наблюдается в центре печи на оси электродов и достигает 0,3 м/с. Скорость расплава у торца анода возле футеровки около 0,1 м/с.

Экспериментальные исследования электровихревых течений показали, что на определенных режимах возникает азимутальное пространственное течение, которое невозможно смоделировать в осесимметричной постановке [35]. Учитывая эту особенность, в следующей задаче моделировалось движе-

ние расплава в печи цилиндрической формы в трехмерной постановке. Движение расплава описывалось приведенными выше уравнениями магнитной гидродинамики, а расчет проводился в трехмерной постановке.

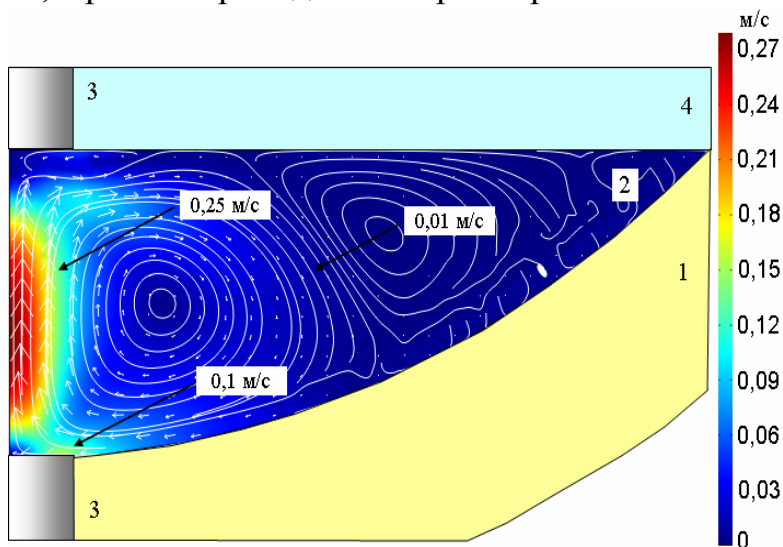


Рис. 14.6. Поле модуля и вектора скорости и изолинии движения расплава без учета конвекции

На рис. 14.7 приведено векторное и контурное поля силы Лоренца в области подового электрода, полученные в трехмерной постановке. Сравнение результатов в плоской осесимметричной и объемной постановках показало незначительное различие в значениях всех электромагнитных характеристик и составило порядка 1-3 %. Однако время расчета в трехмерной постановке на порядок больше, чем в осесимметричной. В осесимметричной постановке в расчетах использовался 441 элемент, а в трехмерной постановке – 9315 элементов. Из этого следует, что проводить расчеты для данного типа печи

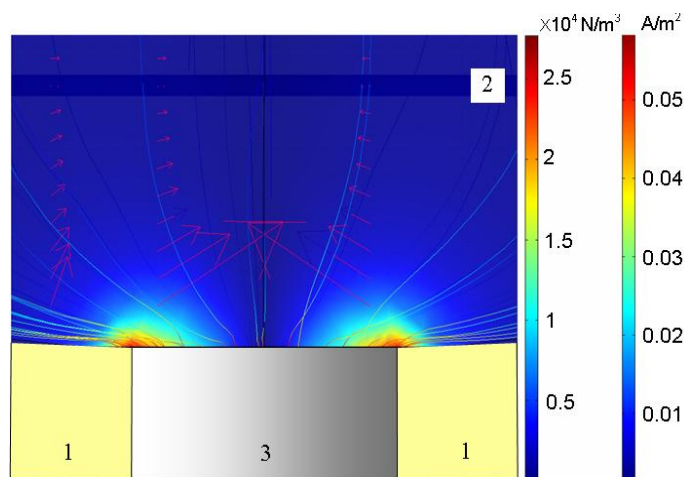


Рис. 14.7. Векторное и контурное поля силы Лоренца

на режимах без азимутального вращения целесообразно в плоской осесимметричной постановке.

На рис. 14.8 приведено векторное поле скоростей и изолинии движения расплава в трехмерной постановке для осевого сечения вблизи электрода. Скорость и характер вихревого движения для пространственной 3-D постановки такой же, как для 2-D осесимметричной.

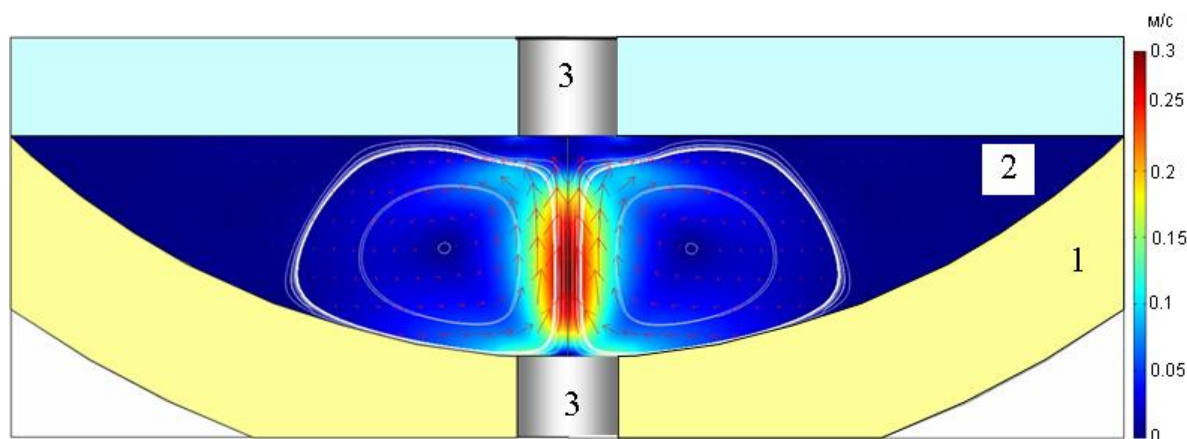


Рис. 14.8. Поле модуля и вектора скорости и изолинии движения расплава без учета конвекции

Хорошее совпадение результатов расчетов, приведенное на рис. 14.9, позволяет рассчитывать пространственные 3-D течения при несимметричном расположении электродов или несимметричной конструкции печи.

На следующем этапе были смоделированы тепловые процессы в расплаве металла в осесимметричной постановке в неизотермический период работы печи. На рис. 14.10 приведено поле температур в расплаве металла. Как видно из графика, максимальная температура локализована вблизи катода, где горит электрическая дуга, на расстоянии порядка радиуса электрода. В распределении температуры имеется радиальный градиент, который, как показано в [33], приводит к возникновению конвекции в электровихревых течениях. Причем направление циркуляции конвективного движения зависит от знака градиента температуры: при отрицательном градиенте ($\partial T/\partial r < 0$) циркуляция происходит по часовой стрелке, а при положительном ($\partial T/\partial r > 0$) – против часовой стрелки. В первом случае конвективное движение будет совпадать с электровихревым движением, и усиливать его, а во втором случае – ослаблять.

На следующем этапе, согласно стратегии решения задачи, были смоделированы гидродинамические процессы в расплаве металла в осесимметричной постановке с учетом конвекции и силы Лоренца. На рис. 14.11 приведены поле модуля и вектора скорости, а также изолинии движения расплава.

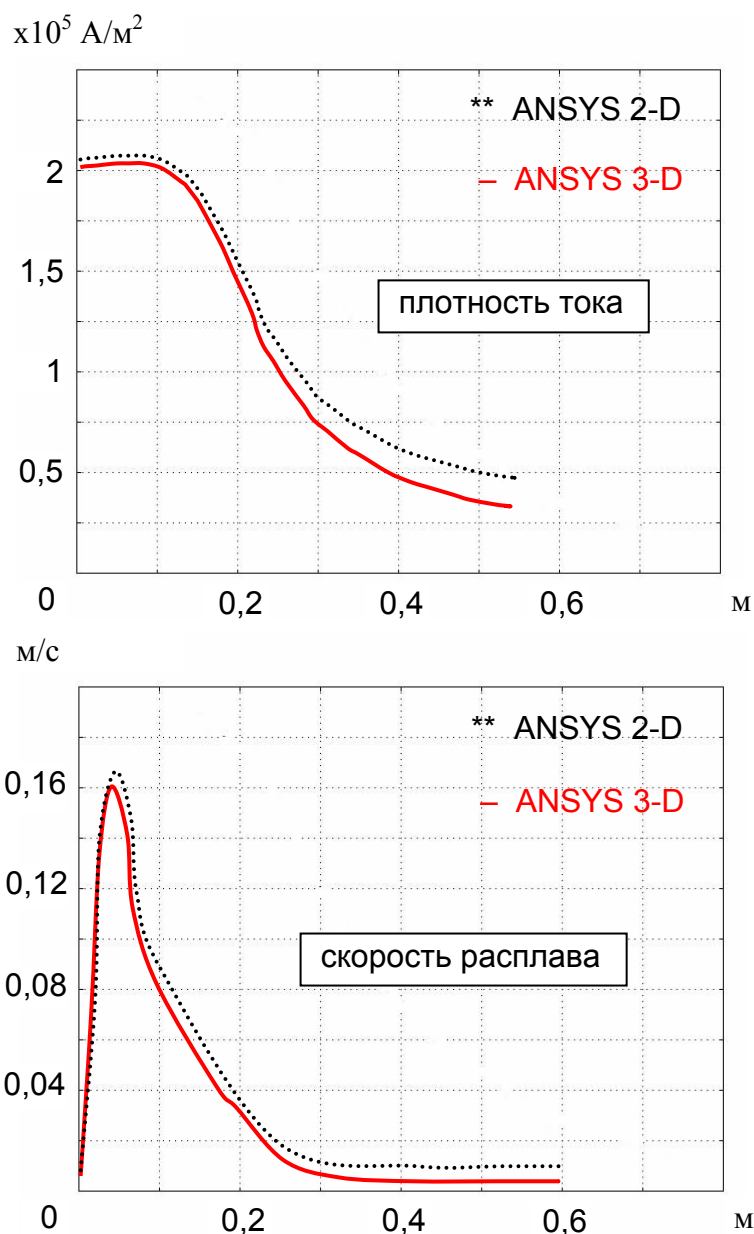


Рис. 14.9. Сравнение распределения плотности тока и скорости движения расплава в поперечном сечении

Как видно из графиков, в расплаве возникает интенсивное вихревое движение. Конвективное движение совпадает по направлению с электровихревым и усиливает его. Вихрь образуется в области подового электрода, как показано на рис. 14.11, и там имеет максимальную скорость. Поток расплава на оси симметрии восходящий и, достигая верхней границы объема расплава, устремляется вниз. Максимальная скорость вихревого движения наблюдается на оси электродов и достигает 0,5 м/с, что примерно в 1,5 раза больше скорости движения без конвекции. Скорость расплава у торца анода возле футеровки около 0,3 м/с. В области верхнего электрода виден небольшой вихрь с обратным направлением вращения, создаваемый неравномерным распределением плотности тока в области верхнего электрода.

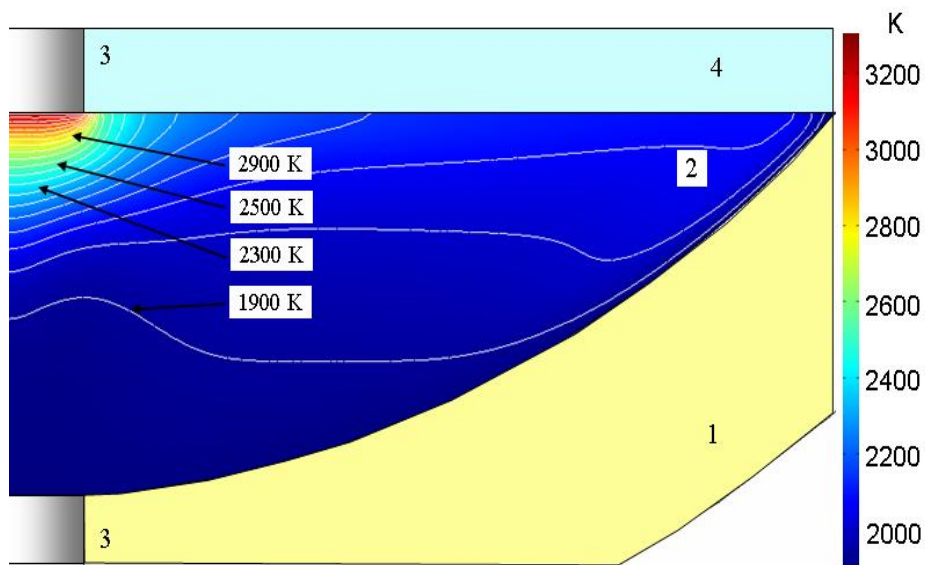


Рис. 14.10. Контурное поле и изолинии распределения температур

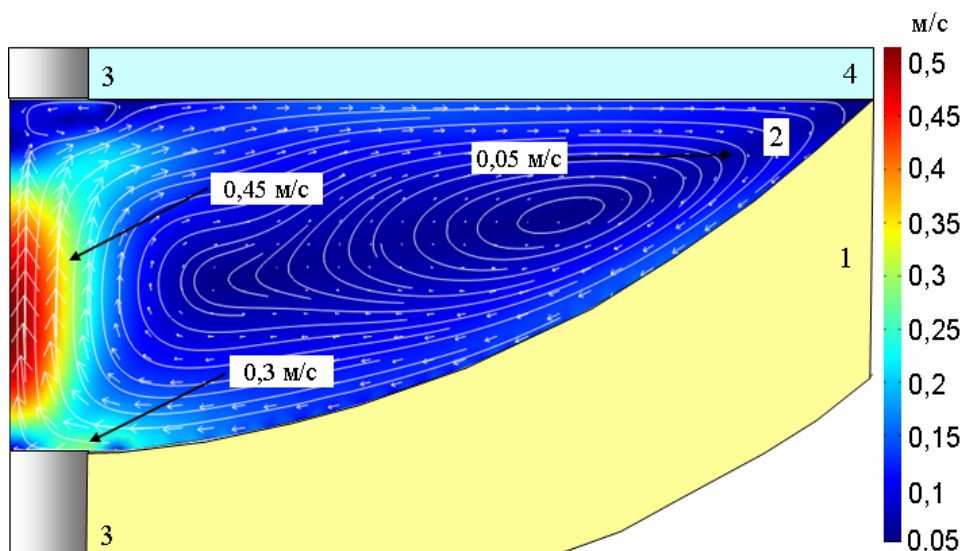


Рис. 14.11. Поле модуля и вектора скорости и изолинии движения расплава с учетом конвекции

Как показали расчеты, при учете конвекции в движение вовлекается весь объем расплава и отсутствуют застойные зоны вблизи края ванны печи, которые хорошо видны на рис. 14.6 для движения расплава без конвективных потоков. Кроме того, уменьшился вихрь в области верхнего электрода. Основной вклад в вихревое движение расплава вносит электромагнитная сила Лоренца. Учет конвекции приводит к увеличению максимальной скорости вихревого движения расплава на 1/3 по сравнению со скоростью электро-вихревого движения только под действием силы Лоренца.

14.2 Моделирование ЭВТ в сталеплавильной печи постоянного тока на 420 тонн

14.2.1 Модель промышленной печи

Для обобщения разработанных методов и подходов моделирования ЭВТ на печи со сложной геометрической формой были проведены расчеты для самой крупной на данный момент печи постоянного тока ёмкостью 420 тонн разработки фирмы «DANIELI» [138]. Основными геометрическими параметрами печи являются: наибольший поперечный размер печи – 8,5 м, глубина ванны с расплавом – 0,785 м, диаметр токоподводящих электродов – 0,4 м. Точная геометрическая форма печи взята из [138]. На рис. 14.12 приведен внешний вид рассматриваемой печи построенной японской фирмой "Japan Steel".



Рис. 14.12. Сталеплавильная печь постоянного тока на 420 тонн, построенная японской фирмой "Japan Steel"

Учитывая конструктивные особенности печи ёмкостью в 420 тонн произведем соответствующую оценку ЭВТ по аналогии с дуговой электросталеплавильной печью цилиндрической формы, приведенной в разделе 14.1. Характерная скорость движения (12.11) расплава составит $v_0 = j_0 L \sqrt{\mu_0 / \rho} \approx 0,3$ м/с. Число Грасгофа, характеризующее относительную интенсивность конвективных потоков для электровихревых течений в печи

при минимальной мощности дуги составляет $Gr = 0,5 < 1$, что соответствует незначительному вкладу конвекции в общий характер движения. Согласно этим оценкам на режимах работы печи при малой мощности конвективными потоками можно пренебречь.

По предварительным оценкам число Рейнольдса при движении расплава в печи составляет величину порядка $Re = v_0 L / \nu \approx 10^6$, что соответствует развитому турбулентному движению, которое хорошо описывается в рамках $k - \varepsilon$ модели турбулентности.

Магнитное число Рейнольдса входит в уравнение магнитной индукции. При малых магнитных числах Рейнольдса, как в этой задаче ($Re_m = \mu_0 \sigma v_0 L \approx 0,4 < 1$), движение проводящего расплава не сказывается на значениях магнитного поля. Поэтому магнитное поле можно рассчитывать, пренебрегая явлением электромагнитной индукции Фарадея.

Проведенные оценки показывают, что гидродинамические, магнитные и тепловые критерии подобия для этой печи такого же порядка, как для модельной и цилиндрической печи. Поэтому моделирование ЭВТ в такой печи можно проводить с использованием методов и подходов, отработанных для печи цилиндрической формы в разделе 14.1.

На первом этапе решения производится моделирование всех электромагнитных параметров для электросталеплавильной печи постоянного тока. При моделировании электромагнитных процессов в расплаве печи за расчетную область был выбран сам расплав. В качестве граничных условий были выбраны условия, отработанные для печи цилиндрической формы (раздел 14.1).

На рис. 14.13 приведена конечно-элементная модель для области расплава металла в промышленной печи. Расплав 1 занимает подину печи, геометрические размеры и форма которой обусловлены технологическими требованиями к производству металла. Печь имеет четыре подовых электрода 3 и два верхних электрода 2. Количество и расположение электродов обусловлены большой ёмкостью печи и стремлением обеспечить равномерное распределение плотности тока по объему расплава. Несимметричное расположение электродов вызывает пространственное движение расплава, что существенно усложняет изучение физических процессов, протекающих в печи. Физические параметры расплава металла, футеровки и электродов взяты такие же, как для электросталеплавильной печи цилиндрической формы из раздела 14.1.

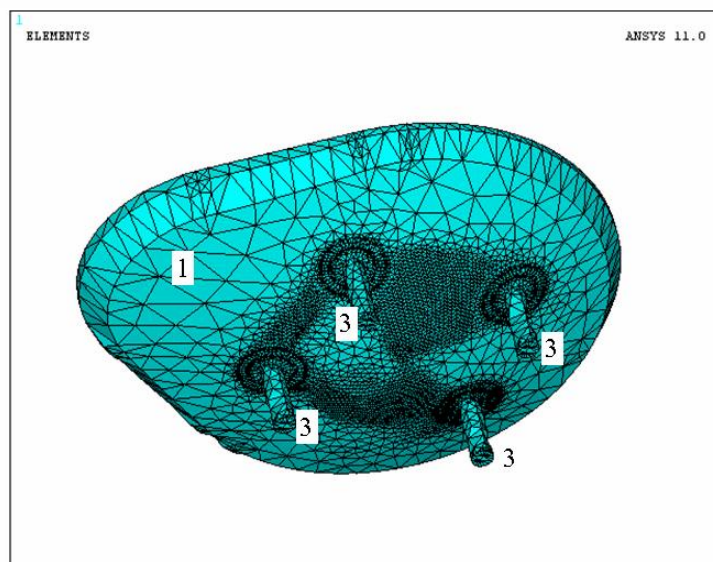
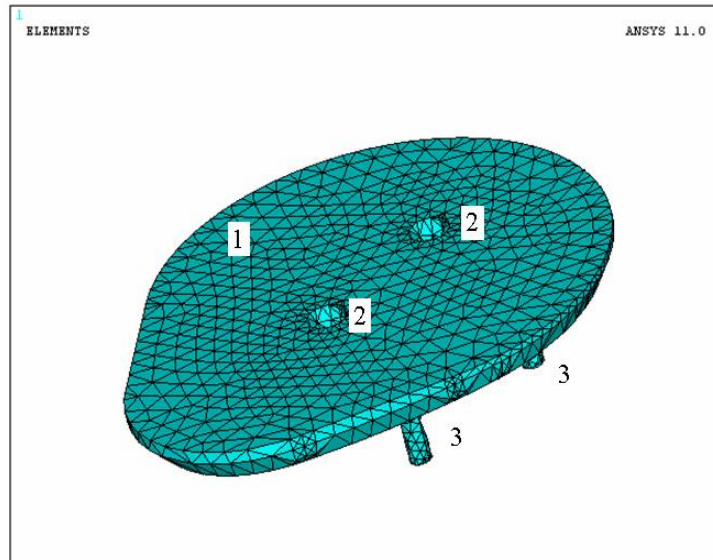


Рис. 14.13. Конечно-элементная модель расплава металла в промышленной печи при моделировании в ANSYS

14.2.2 Моделирование ЭВТ в печи

Ниже представлены некоторые результаты расчетов для рассматриваемой печи. На рис. 14.14 приведено векторное поле плотности тока на уровне верхних электродов, вид сверху. На графике видны существенные градиенты плотности тока в области электродов, локализованные на расстоянии порядка радиуса электродов.

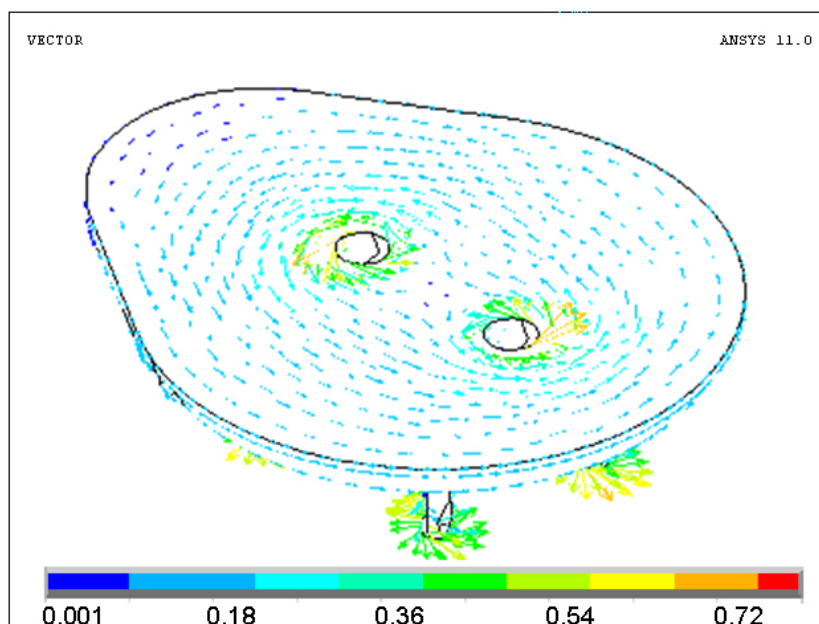


Рис. 14.14. Векторное поле плотности тока в области верхних электродов

На рис. 14.15 приведен векторный график распределения объемной магнитной силы Лоренца в области подовых электродов. Из графика видно, что существенных значений сила Лоренца достигает вблизи подовых электродов в области с размерами порядка радиуса электрода. Максимальное значение объемной силы Лоренца достигало $8,7 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$, что составляет около 30 % от объемного значения силы тяжести, как и для цилиндрической печи.

Из проведенных расчетов можно сделать следующие выводы. Предложенные модели и методы позволяют рассчитать электромагнитные и силовые поля для электросталеплавильной печи сложной конструкции. Установлено, что максимальные значения градиентов индукции магнитного поля, плотности тока и силы Лоренца локализованы в непосредственной близости подовых электродов (анодов) на расстояниях порядка радиуса электродов. При удалении от электродов эти величины быстро убывают. Результаты расчетов подтверждают факт, что сила Лоренца в печах с подовым электродом является определяющей при возникновении электровихревого течения. Результаты расчетов хорошо согласуются с теоретическими предположениями и экспериментальными данными по повышенному износу футеровки.

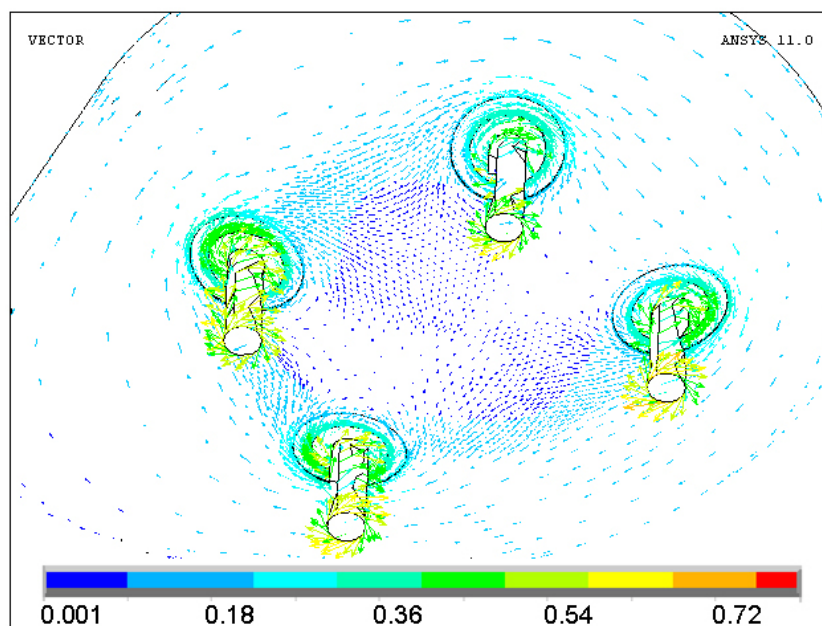


Рис. 14.15. Векторное поле объемной силы Лоренца в области подовых электродов

На следующем этапе, согласно стратегии решения задачи, моделировались гидродинамические процессы в расплаве металла. Турбулентное движение расплава в ANSYS CFX описывалось уравнением Навье-Стокса (14.1) и уравнением неразрывности (14.2). Для описания турбулентного движения использовалась стандартная $k - \varepsilon$ модель турбулентности (14.3-14.5) пакета CFX с настройками, отлаженными в разделе 3. Задача решалась численно методом конечных объемов. На рис. 14.16 представлена конечно-объемная модель расплава в ANSYS CFX.

Ниже представлены некоторые результаты моделирования гидродинамических процессов в расплаве. На рис. 14.17 приведены изолинии движения расплава по всему объему печи. Как видно из графика, в расплаве возникает интенсивное вихревое движение расплава в окрестности подовых электродов, где локализовано максимальное значение силы Лоренца.

Детально рассмотрим характер вихревого движения расплава на контурном графике вихревого движения в поперечном сечении на равном расстоянии между электродами печи на рис. 14.18 и с несколькими выделенными изолиниями вихревого движения и рис. 14.19. Как видно из рис. 14.19 вихри зарождаются вблизи подовых электродов под действием сил Лоренца и расплав устремляется вверх в область верхних электродов, имеющих противоположную полярность. Максимальная скорость движения расплава достигает 0,5 м/с на расстоянии порядка нескольких радиусов от подовых электродов. При увеличении расстояния до подовых электродов скорость вихревого движения расплава уменьшается до 0,2 м/с. При достижении верхней границы расплава действие силы Лоренца ослабевает, и скорость вихря существенно

снижается до величины порядка 0,1 м/с. Выталкиваемые следующими объемами расплава вихри устремляются в пристеночную область, где создается разрежение за счет стекающих вниз потоков. Таким образом, создается пространственное электровихревое течение расплава под действием силы Лоренца.

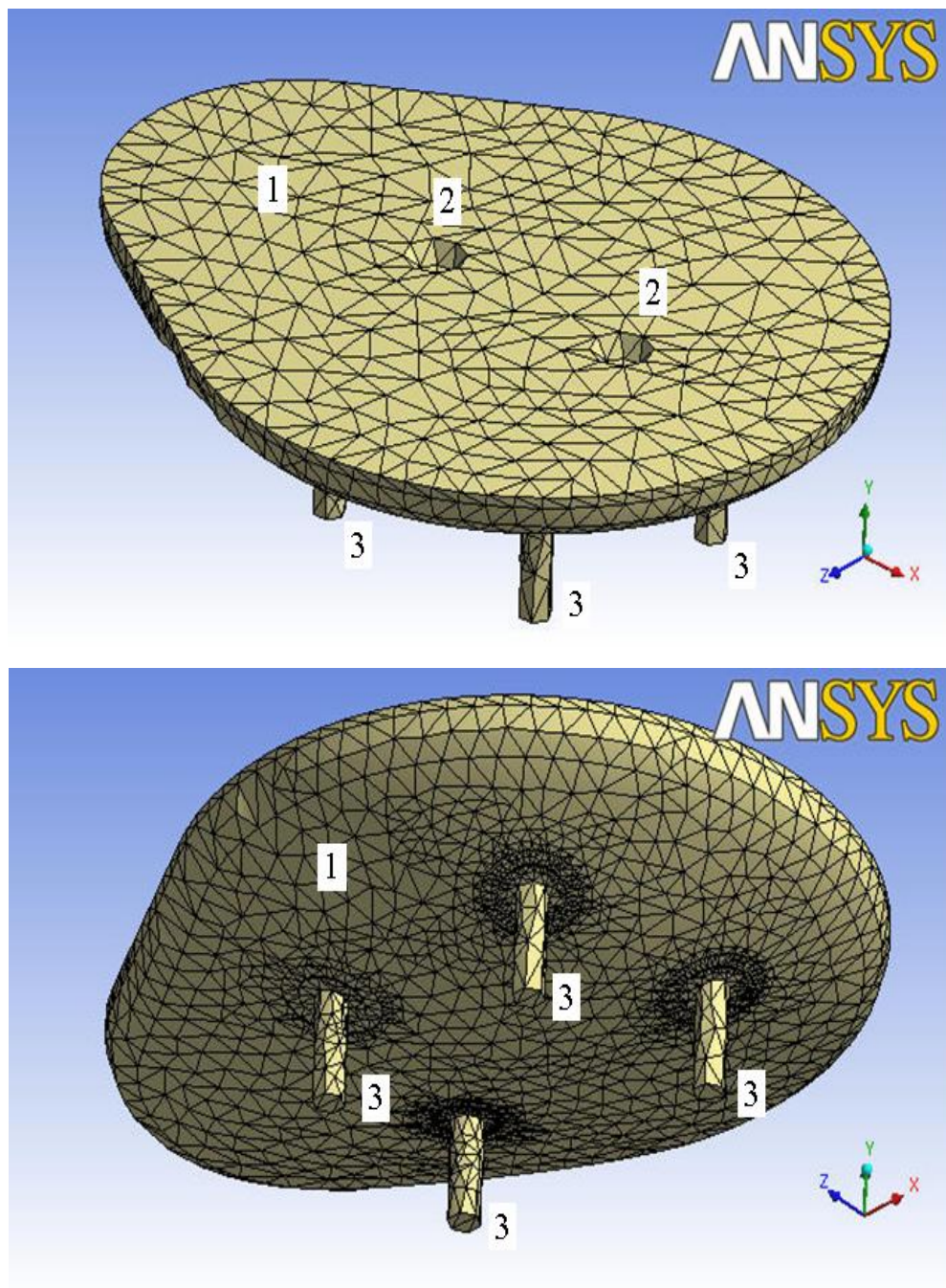


Рис. 14.16. Конечно-объемная модель расплава в ANSYS CFX

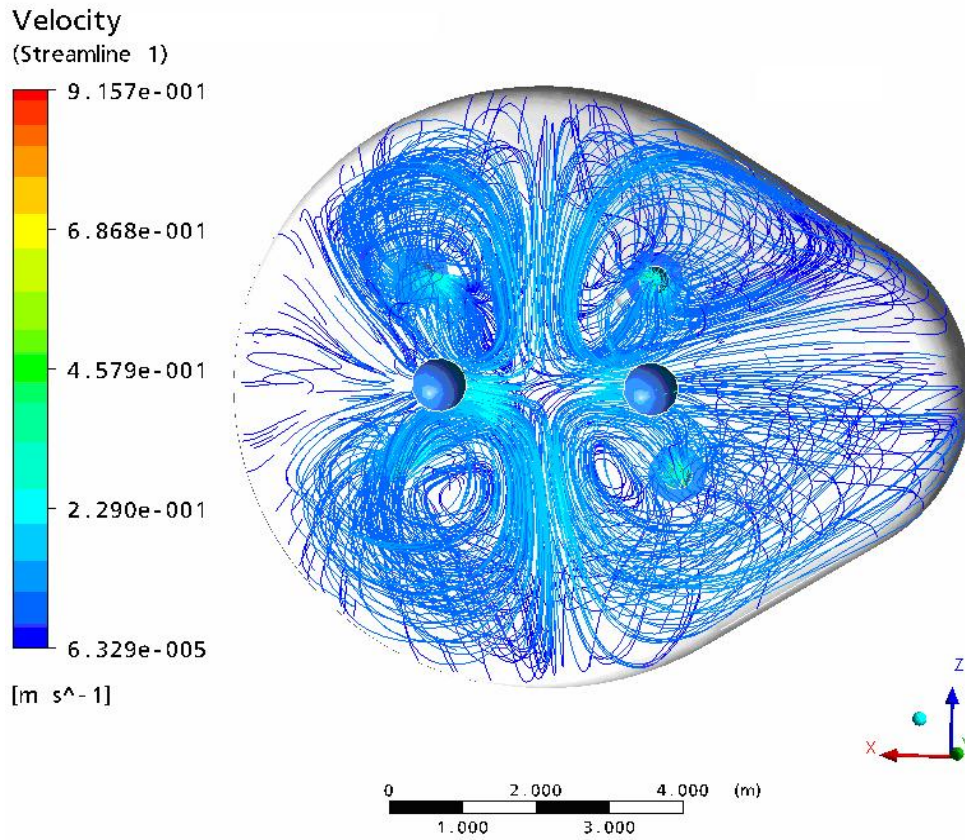


Рис. 14.17. Изолинии движения расплава

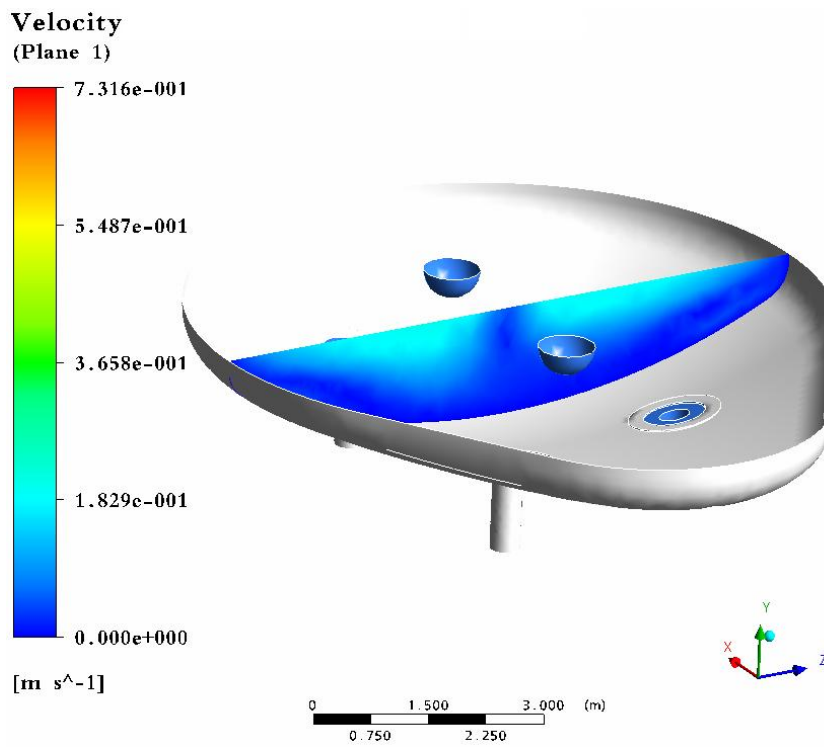


Рис. 14.18. Контурный график движения расплава в поперечном сечении

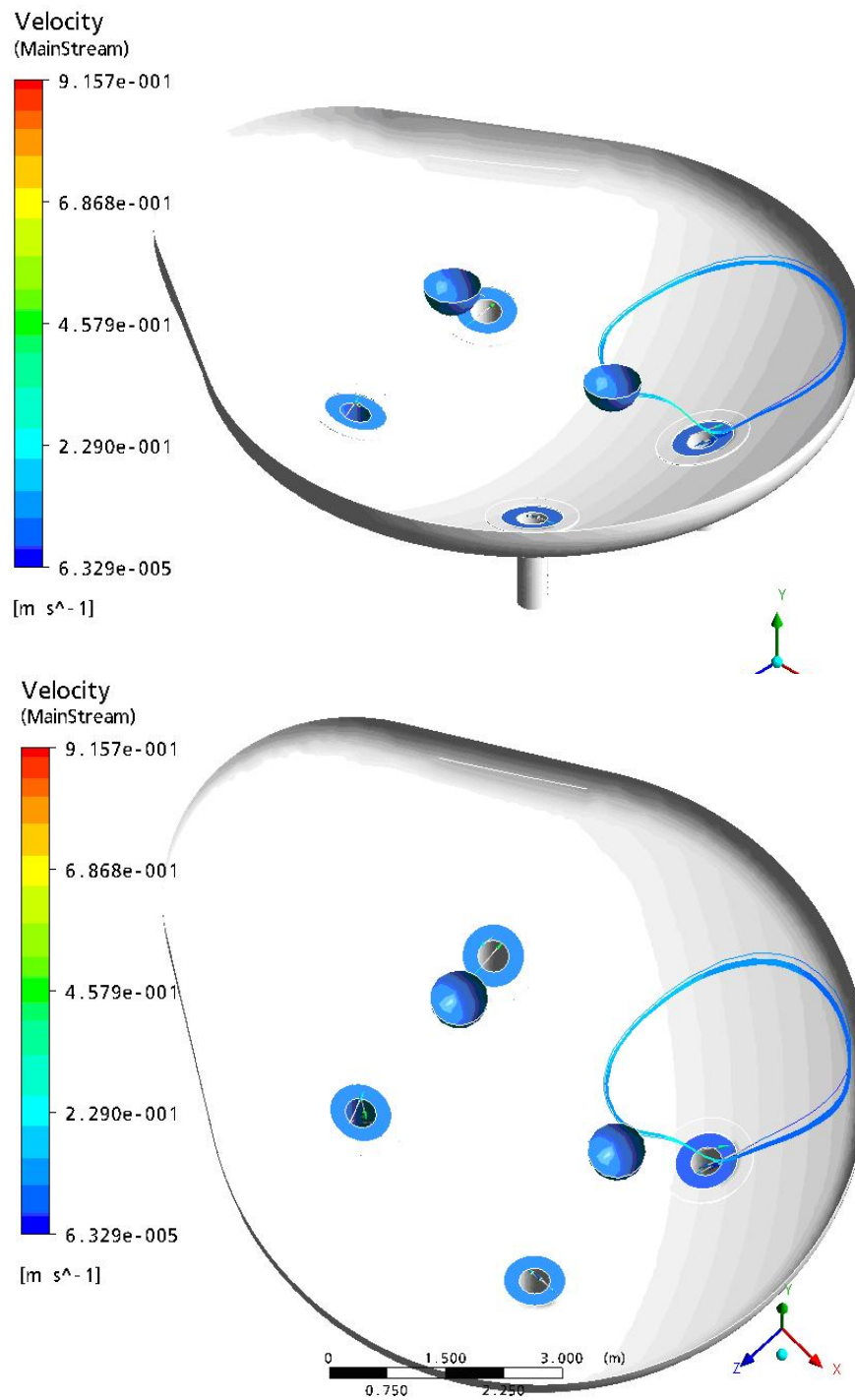


Рис. 14.19. Изолинии движения расплава (вид сверху под разными углами)

14.3 Верификация результатов расчетов

Для оценки достоверности и точности полученных данных в разделах 14.1 и 14.2 была проведена верификация результатов расчетов. Она проводилась по нескольким направлениям:

- сравнение с теоретическими положениями о характере движения расплава (для оценки адекватности физической и математической модели);
- проведение расчетов для лабораторной установки с известными экспериментальными данными и сравнение полученных результатов по характеру и скорости движения расплава;
- сравнение с данными по износу футеровки на промышленных металлургических печах постоянного тока с подовым электродом;
- сравнение с результатами расчетов другими методами в пакете COMSOL.

Характер вихревого движения расплава, полученный в результате численного моделирования, хорошо согласуется с общими теоретическими положениями, описанными в разделе 12.1. Движение жидкости, возникающее при прохождении по ней электрического тока, возбуждается, во-первых, электрическим током в отсутствие внешних магнитных полей, во-вторых, из-за вихревого характера электромагнитной силы при взаимодействии тока с собственным магнитным полем. Выделенный элемент жидкости под действием этих сил будет двигаться как единое целое в направлении равнодействующей сил и поворачиваться под действием момента этих сил.

Для подтверждения физической и математической моделей, а также стратегии моделирования ЭВТ в ограниченном объеме расплава металла были проведены расчеты турбулентных ЭВТ в полусферическом объеме приведенные в разделе 3.1, экспериментально исследованные в лабораторной установке [34, 35]. Результаты расчетов для лабораторной установки совпадают с экспериментальными данными в пределах 15 % (на уровне турбулентных пульсаций) для $k - \varepsilon$ модели турбулентности, которая использовалась в дальнейших расчетах.

На рис. 14.20 представлена схема износа подового электрода и футеровки в его окрестности после 400 плавов по данным исследований фирмы DANIELI, описанных в разделе 11.3. Здесь же для наглядности приведено распределение скорости движения расплава в непосредственной близости подового электрода на расстоянии $0,5 R$ от радиуса электрода вдоль поверхности футеровки.

Повышенный износ футеровки наблюдается в области максимальной скорости движения расплава, что подтверждает тот факт, что потоки с наибольшими скоростями локализованы в области подового электрода на расстоянии порядка радиуса электрода. Коническая форма краев изношенной части футеровки соответствует конусообразному характеру вихревого тече-

ния расплава. Износ футеровки только в непосредственной близости электрода указывает на то, что линии тока жидкости, движение которой обусловлено действием силы Лоренца, начинаются и заканчиваются на подовом электроде. Такой характер износа футеровки и совпадение максимального износа футеровки с максимальными значениями скорости движения расплава подтверждает тот факт, что основной причиной повышенного износа является вихревое течение расплава под действием вихревых сил Лоренца.

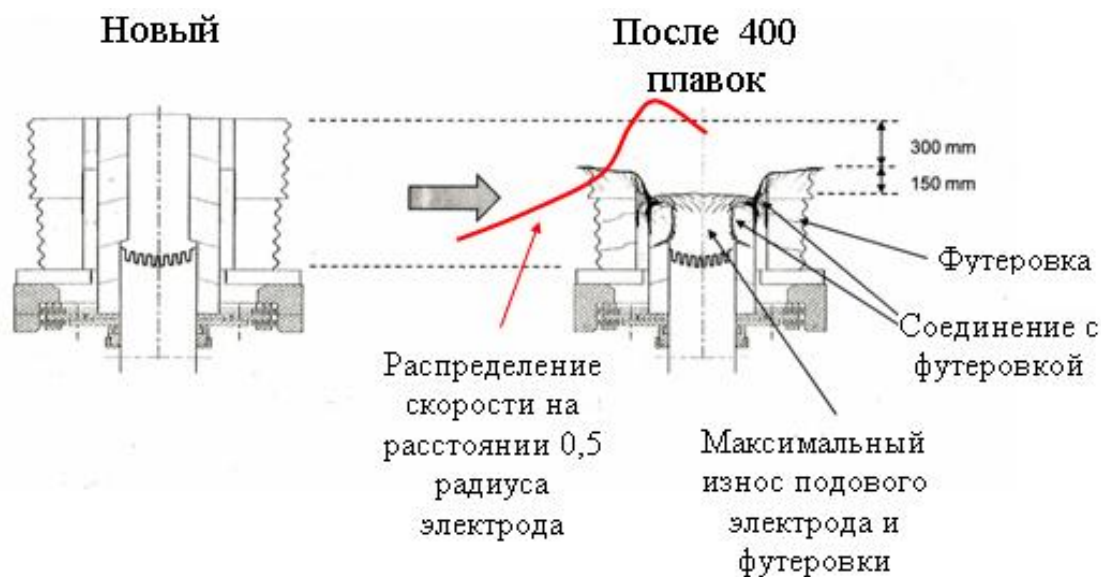


Рис. 14.20. Схема износа подового электрода и футеровки в его окрестности и распределение скорости движения расплава

Для верификации результатов численных расчетов аналогичные расчеты были проведены в пакете COMSOL. Количество конечных элементов, основные уравнения и методы их решения, а также граничные условия в пакете COMSOL совпадали с соответствующими условиями расчета в ANSYS Multiphysics и ANSYS CFX. Существенным отличием расчетов, выполненного в COMSOL, является единая расчетная сетка на всех этапах расчета, а также одновременное решение задачи нахождения электромагнитных полей и задачи гидродинамики.

На рис. 14.21 – 14.23 приведены наиболее характерные результаты расчетов, полученные при помощи COMSOL, ANSYS Multiphysics и ANSYS CFX.

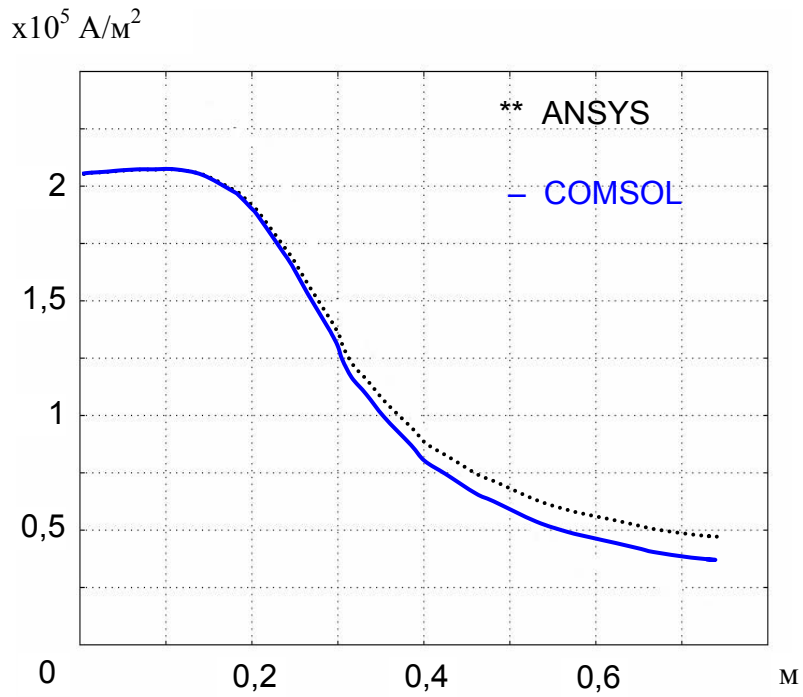


Рис. 14.21. Распределение плотности тока j по радиусу в поперечном сечении на расстоянии $0,5 R$ от анода для цилиндрической печи

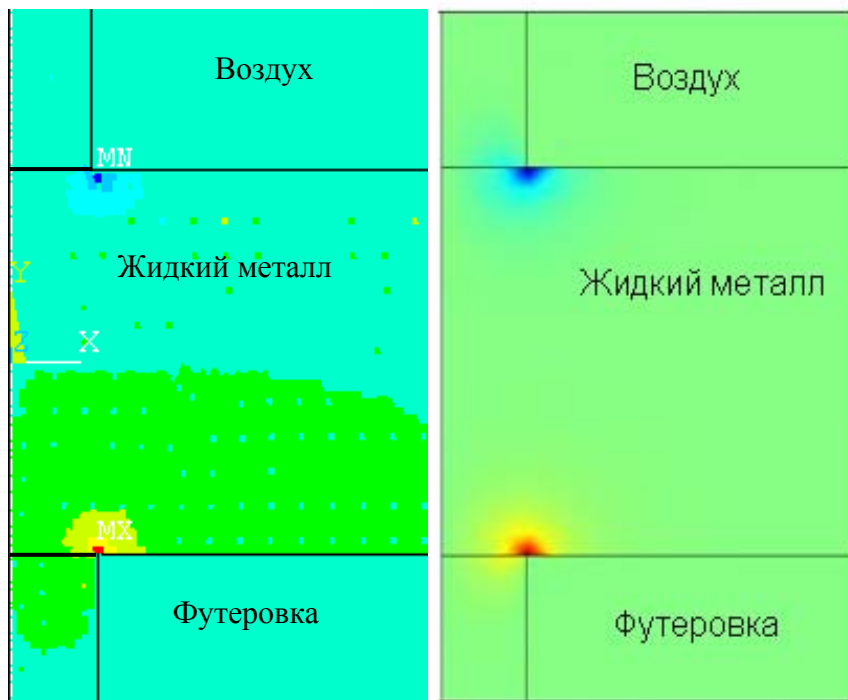


Рис.14.22. Поле ротора силы Лоренца в центральной области расплава для модельной задачи. Расчеты в ANSYS (слева) и COMSOL (справа)

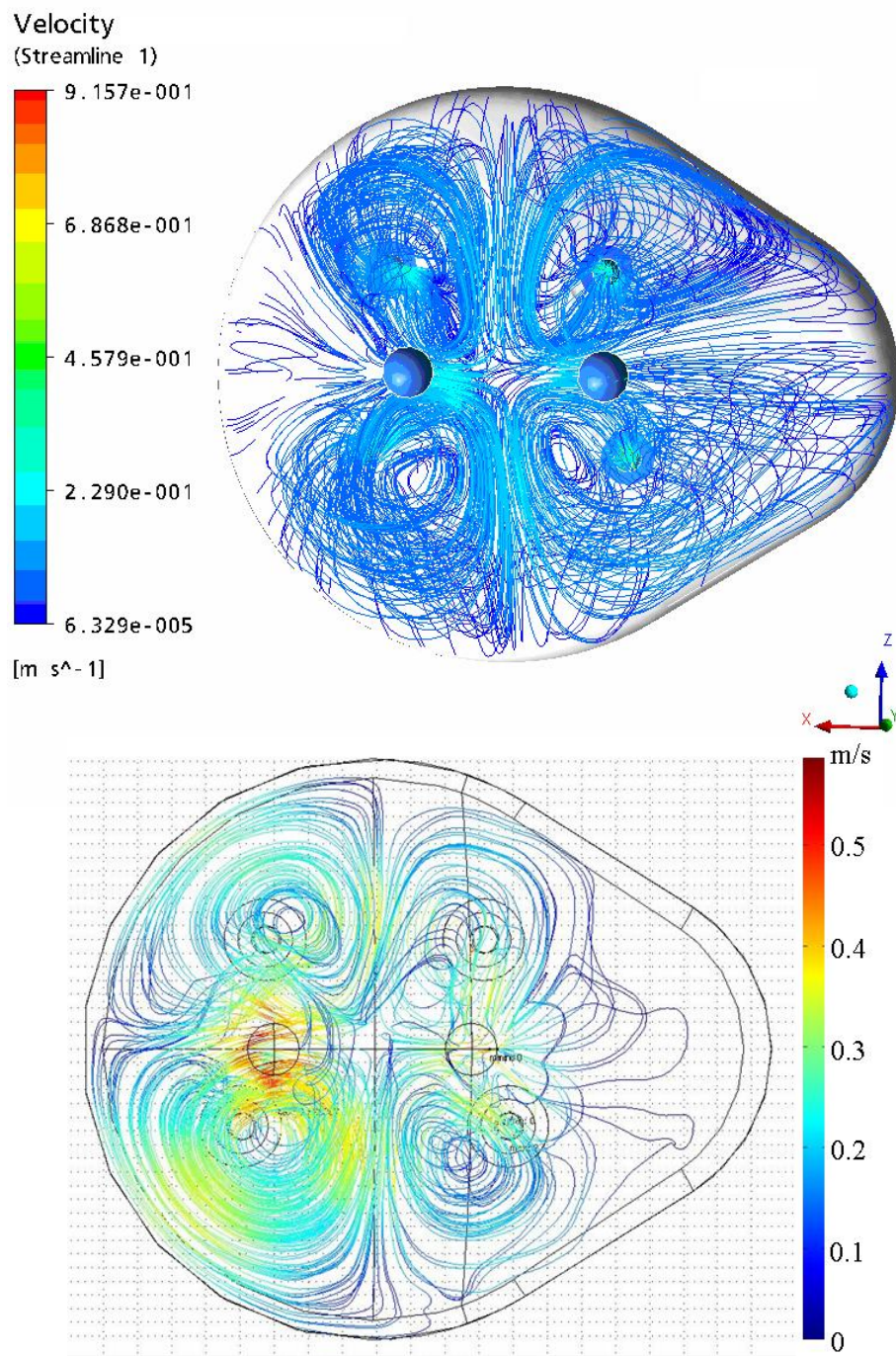


Рис. 14.23. Изолинии движения расплава по всему объему расплава в CFX (вверху) и COMSOL (внизу) для промышленной печи 420 тонн

Хорошее совпадение результатов расчетов, полученных разными методами и пакетами (см. рис. 14.21 – 14.23) говорит о надежности моделей, методов и достоверности результатов.

Часть 5. УПРАВЛЕНИЕ ЭВТ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ПЕЧАХ

15 ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ЭВТ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ПЕЧАХ

15.1 Выбор критериев оценки влияния ЭВТ на повышенный износ футеровки

Управление электровихревыми течениями является наиболее перспективным направлением в теории ЭВТ. Однако, несмотря на то, что ЭВТ присутствуют в широком спектре технологических и природных процессов, существует ограниченное количество работ, посвященных изучению возможности управления ЭВТ (см. раздел 11). Наибольший интерес вызывают работы по управлению ЭВТ в электрометаллургических печах, в частности электрометаллургических печах постоянного тока с подовым электродом. В таких печах ЭВТ носят как положительный, так и отрицательный характер. Электровихревое перемешивание металла, возникающее вследствие неравномерного распределения плотности тока в области токоподводящих электродов, положительно сказывается на равномерном распределении химического состава приготавливаемого металла и выравнивании его температуры. Однако как было показано в разделе 11.3 и 11.4, по мнению большинства экспертов, вихревое движение металла оказывает негативное воздействие, размывая подовый электрод и футеровку в его окрестности, что снижает продолжительность работы печи между капитальными ремонтами и приводит к аварийной остановке печи и дорогостоящему ремонту.

На данном этапе существует всего несколько общеизвестных способов управления ЭВТ в дуговых электросталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом, описанных в разделе 11.3. Наиболее распространенными из них являются:

- увеличение площади поперечного сечения токоподводящего электрода с целью снижения неоднородности плотности тока, вызывающей ЭВТ;
- попеременное подведение тока к нескольким подовым электродам с определенной частотой, что приводит к взаимодействию нескольких электровихревых потоков и снижению скорости движения расплава.

Существуют и другие способы управления ЭВТ, среди которых следует отметить предложенный фирмой «DANIELI» [249] метод снижения негативного воздействия ЭВТ путем уменьшения температуры подового электрода. Практическое использование такого метода показало уменьшение анодной ямы, но потребовало более строгого температурного контроля подового электрода в электропечи для предотвращения прожога водного канала.

В патенте [250] уменьшение воздействия ЭВТ на футеровку и подовый электрод предлагается осуществить путем охлаждения за счет эндотермического эффекта реакции крекинга гидрокарбонатов, смесь которых вдувается в ванну через специальные каналы. Информации об использовании этого метода на данный момент нет.

Однако все эти методы управления технологически сложны в применении, а некоторые из них снижают общую интенсивность движения расплава по всему объему, что в свою очередь негативно сказывается на перемешивании металла, однородном распределении легирующих добавок и выравниванию температуры по объему расплава. Также на данный момент не существует общеизвестного численного критерия оценки влияния движущегося расплава на износ поверхности футеровки.

Для оценки влияния ЭВТ на повышенный износ футеровки более подробно рассмотрим процессы в непосредственной близости подового электрода. На рис. 15.1 и 15.2 приведены графики зависимости модуля силы Лоренца и ротора силы Лоренца в поперечном сечении на расстоянии $0,5 R$ от подового электрода.

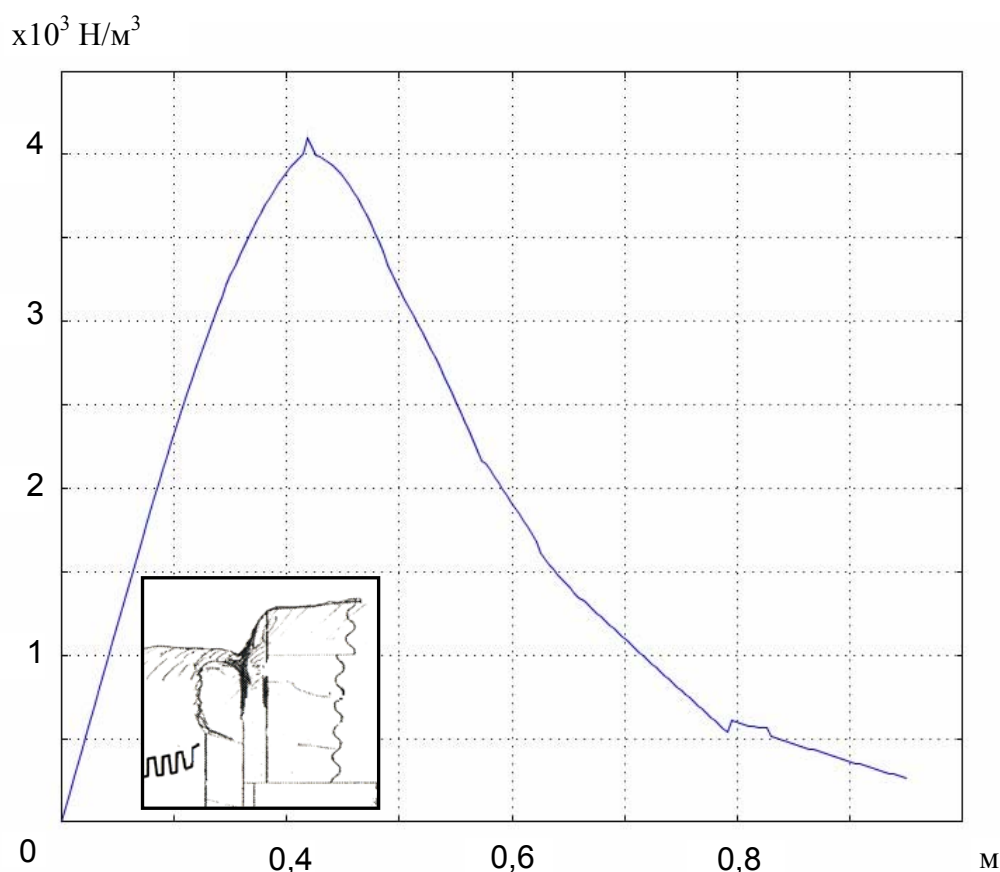


Рис. 15.1. Распределение силы Лоренца в поперечном сечении на расстоянии $0,5 R$ от анода и схема износа подового электрода (выделен рамкой)

Из графиков видно, что максимальные значения модуля силы Лоренца и ротора силы Лоренца в непосредственной близости от подового электрода совпадают с экспериментальными данными по повышенному износу футеровки. Учитывая связь, приведенную в разделе 11.1, между скоростью движения расплава и ротором силы Лоренца, порождающей движение расплава ($rot(\vec{V}) \sim rot(\vec{f}_e)$) и совпадением максимальных значений ротора силы Лоренца с максимумом износа подового электрода и футеровки в его окрестности, можно рассматривать ротор силы Лоренца как косвенный критерий оценки влияния ЭВТ на повышенный износ футеровки. Такой критерий применим в случаях, когда расчет гидродинамических параметров весьма затруднителен, а выводы носят предварительный оценочный характер.

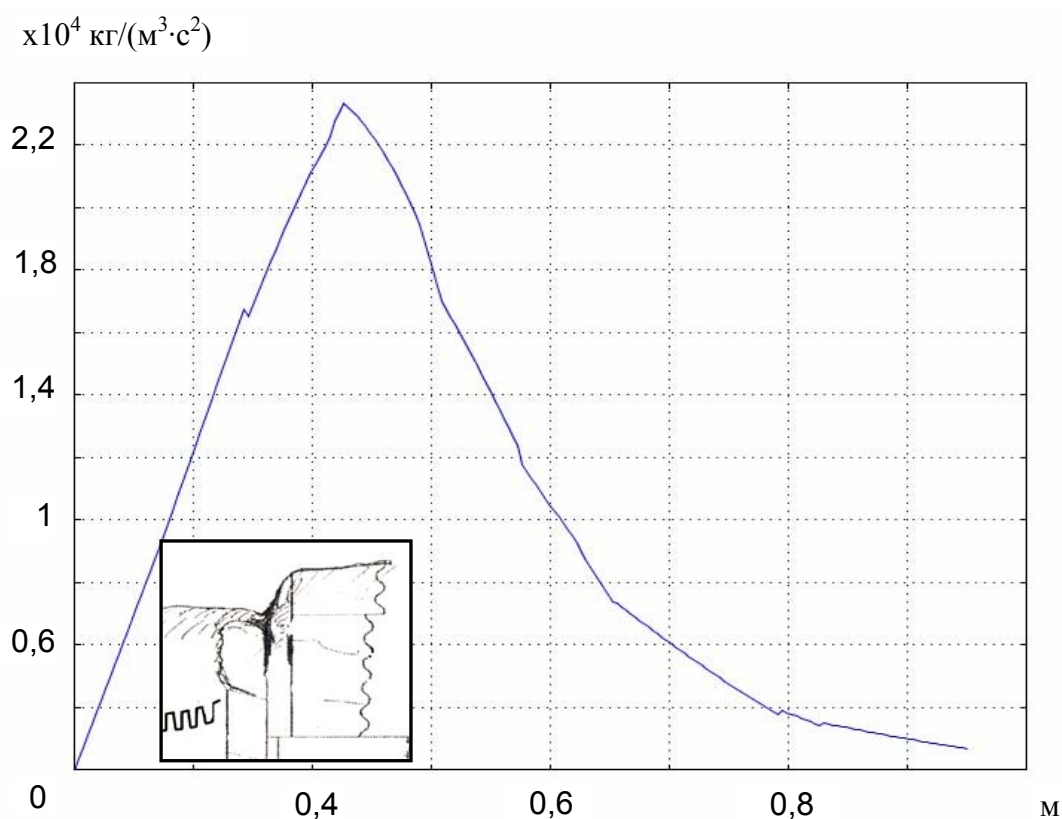


Рис. 15.2. Распределение ротора силы Лоренца в поперечном сечении на расстоянии $0,5 R$ от анода и схема износа подового электрода (выделен рамкой)

Для выбора более точной количественной оценки влияния ЭВТ на повышенный износ футеровки рассмотрим результаты расчетов гидродинамических параметров в непосредственной близости подового электрода. На рис. 5.3 приведены гидродинамические поля модуля скорости, вектора скорости и линии тока расплава вблизи подового электрода. Из графика видно многократное возрастание скорости движения расплава около подового электрода под действием сил Лоренца.

Для количественной оценки влияния движущегося расплава на износ футеровки целесообразно выбрать числовой критерий. Таким критерием может служить сдвиговое напряжение τ_w на поверхности футеровки, которое определяется по формуле

$$\tau_w = \left[\eta (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) - \left(\frac{2\eta}{3} - k \right) (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{I} \right]_w \cdot \vec{n}.$$

Здесь все переменные совпадают с обозначениями раздела 12.1.

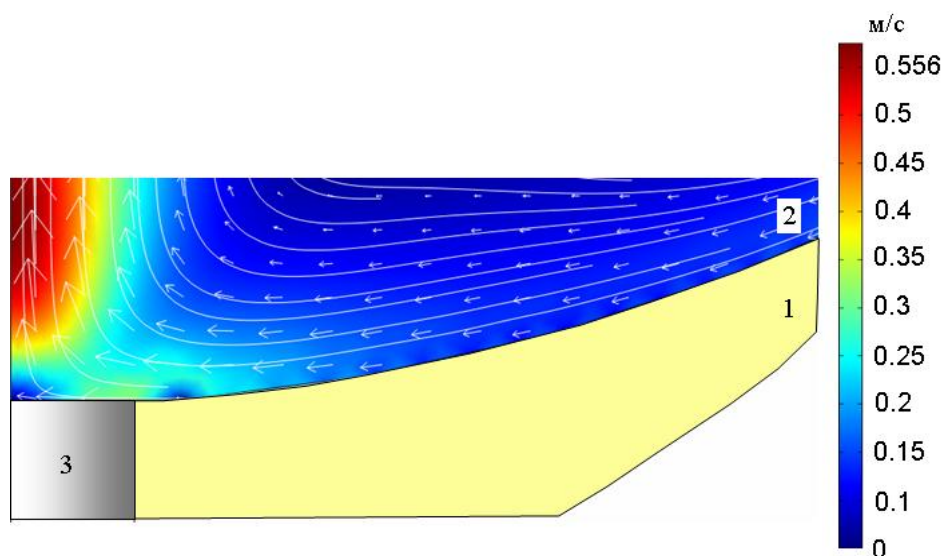


Рис. 15.3. Поле модуля и вектора скорости, изолинии скорости расплава вблизи подового электрода

На поверхности футеровки скорость расплава и характеристики турбулентности (энергия и интенсивность) равны нулю

$$\vec{v} = 0, k = 0, \varepsilon = 0.$$

Универсальный логарифмический закон в пристеночной области примет вид

$$\frac{\rho u_p k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\tau_w} = \frac{1}{k_{Kar}} \ln(Ey^+),$$

где y^+ – толщина сдвигового слоя, $E=9,79$ – эмпирическая константа, k_{Kar} – константа Кармана равная 0,42, u_p – модуль скорости движущегося расплава

на уровне сдвигового слоя. Толщина сдвигового подслоя составляет порядка 20-30 % от величины вязкого подслоя. В численных методах она рассчитывается как

$$y^+ = \frac{y_p k^{1/2} C_\mu^{1/4}}{\nu},$$

где y_p – расстояние до первой узловой точки расчетной сетки от поверхности футеровки [251].

На рис. 15.4 приведен график зависимости модуля скорости на границе сдвигового подслоя вдоль поверхности футеровки вблизи подового электрода. Из графика видно существенное увеличение скорости расплава в области подового электрода и футеровки на расстоянии порядка радиуса электрода. Повышенные значения скорости движения расплава соответствуют большим значениям сдвиговых напряжений на поверхности, вдоль которой движется расплав. Приведенные результаты расчетов, в которых отмечена максимальная интенсивность течения вблизи подового электрода, подтверждают предположение о существенном влиянии движущегося расплава металла на повышенный износ футеровки.

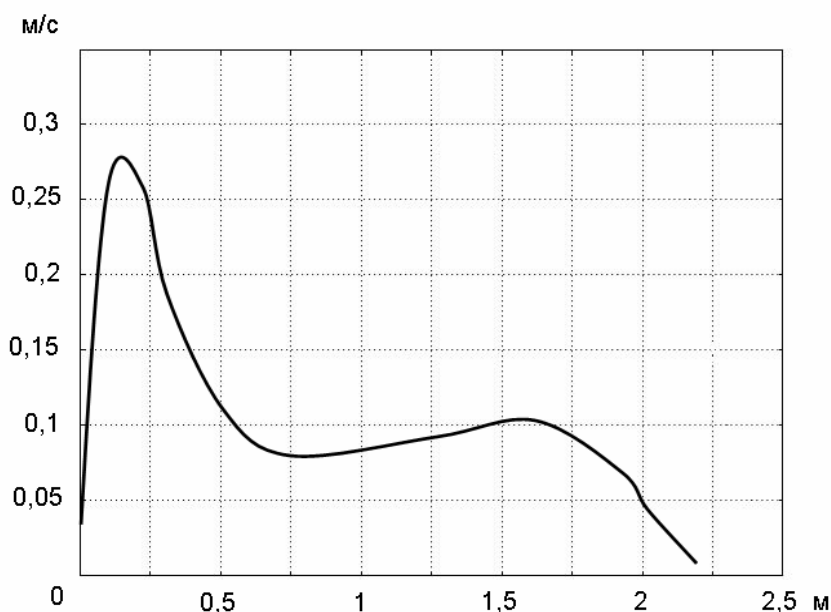


Рис. 15.4. Распределение скорости расплава на границе сдвигового подслоя вдоль поверхности футеровки

На рис. 15.5 приведен график зависимости сдвигового напряжения на поверхности футеровки вблизи подового электрода. Из графика видно многократное возрастание сдвигового напряжения вблизи подового электрода на

расстоянии порядка радиуса электрода. На расстоянии радиуса от оси электрода сдвиговое напряжение на 2 порядка больше, чем в средней части подины печи. График сдвигового напряжения на поверхности футеровки имеет характер ярко выраженного всплеска.

Анализируя результаты расчетов, и сравнивая их с экспериментальными данными по износу футеровки, которые приведены на рис. 15.6 [136] (слева новый подовый электрод, а справа электрод после 400 плавок), можно сделать вывод, что вихревое движение расплава негативно влияет на износ футеровки в окрестности подового электрода в местах значительного увеличения сдвигового напряжения на поверхности.

Немаловажным является согласование полученных результатов расчетов с результатами расчетов других авторов. В работе [252] приведены результаты расчетов сдвигового напряжения на поверхности желоба для транспортировки жидкого металла из сталеплавильного цеха в цех непрерывного разлива металла. Поверхность желоба была изготовлена из материала, близкого по свойствам к футеровке электросталеплавильной печи. В этом случае одной из главных причин, влияющим на износ футеровки желоба, является трение, возникающее при движении расплавленного металла по желобу. Авторами работы показана связь между изменением сдвигового напряжения и целым рядом практических данных по износу футеровки желоба. Стоит отметить количественное согласование величины сдвигового напряжения на поверхности футеровки вблизи подового электрода для электросталеплавильной печи с данными, приведенными в [252].

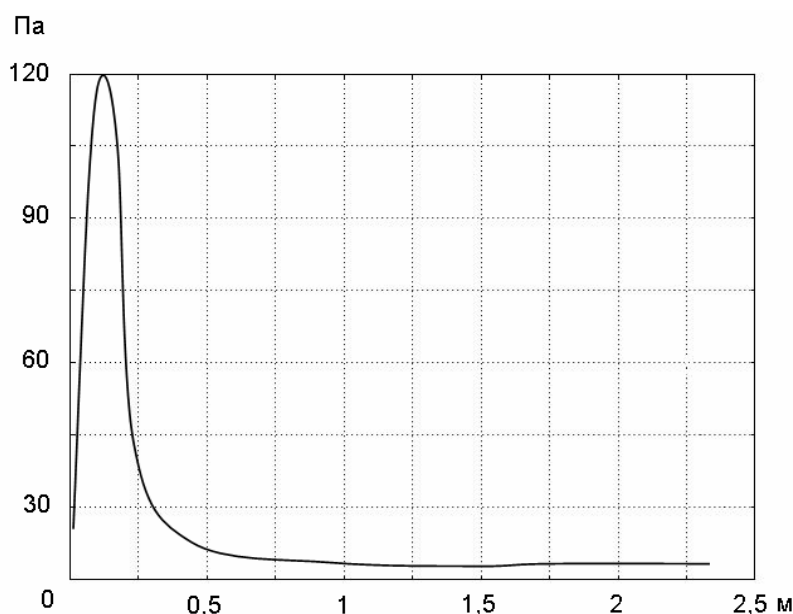


Рис. 15.5. Распределение сдвигового напряжения вдоль поверхности футеровки

Для дальнейшего анализа выберем характерную величину сдвигового напряжения равной $\tau_0 = 120$ Па для стандартной конструкции печи. За масштаб длины при сравнении результатов примем радиус электрода. Такой подход при оценке влияния воздействия ЭВТ на поверхность футеровки позволяет обобщить результаты численного эксперимента на печи других конструкций, отличающиеся формой, геометрическими размерами и силой тока, при этом одновременно сравнить эффективность того или иного метода управления ЭВТ в сравнении со стандартным режимом и конструкцией печи.

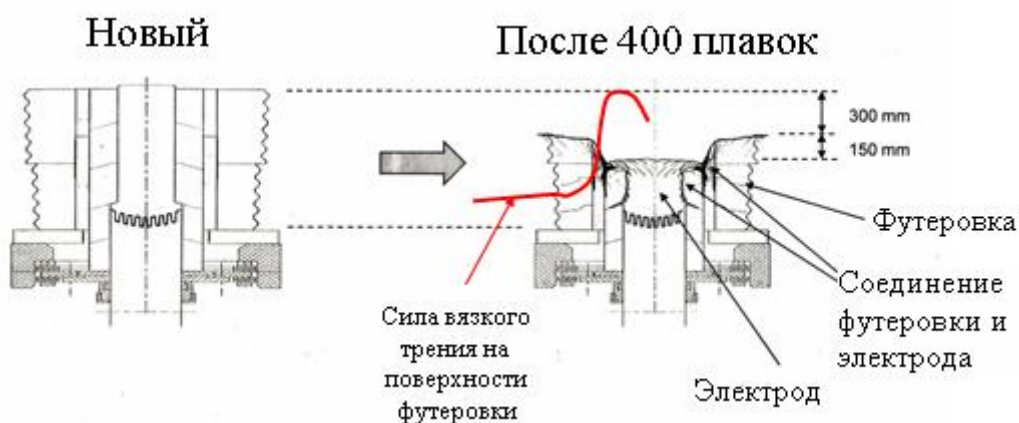


Рис. 15.6. Сравнение сдвигового напряжения на поверхности футеровки и экспериментальных данных для повышенного износа футеровки в области подового электрода

15.2 Снижение воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем понижения температуры подового электрода

Для снижения негативного воздействия движения расплава на защитный слой футеровки в области подового электрода и на сам подовый электрод был проведен ряд численных экспериментов, в которых варьировалась температура подового электрода, положение подового электрода, а также форма пода печи.

Рассмотрим результаты численного эксперимента для известного метода снижения воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем уменьшения температуры подового электрода, предложенного фирмой «DANIELI» [249]. При снижении температуры повышается вязкость расплава в непосредственной близости подового электрода и футеровки в его окрестности. Тем самым снижается скорость движения расплава в этой области, а также снижается значение сдвигового напряжения на поверхности футеровки. На рис. 15.7 приведен график зависимости скорости расплава при рабочей температуре

$T = 1890$ К. На рис. 15.8 и 15.9 приведены графики зависимости скорости при температуре $T = 1850$ К и $T = 1823$ К соответственно.

На рис. 15.10 и 15.11 приведены для сравнения графики распределения скорости движения расплава на уровне сдвигового подслоя и величин сдвигового напряжения в зависимости от расстояния до оси симметрии. График величины сдвигового напряжения приведен в безразмерных координатах. В качестве масштабов сдвигового напряжения взято характерное значение этой величины при рабочей температуре ($\tau_0 = 120$ Па), от расстояния, выраженного в радиусах электрода ($R = 0,25$ м).

Как видно из графиков, уменьшение температуры подового электрода мало влияет на общий характер и скорость движения расплава, однако существенно сказывается на скорости движения расплава в непосредственной близости подового электрода. Так, при понижении температуры подового электрода до температуры плавления металла скорость движения расплава на уровне сдвигового подслоя снижается на 20 %, а величина сдвигового напряжения – на 15 %.

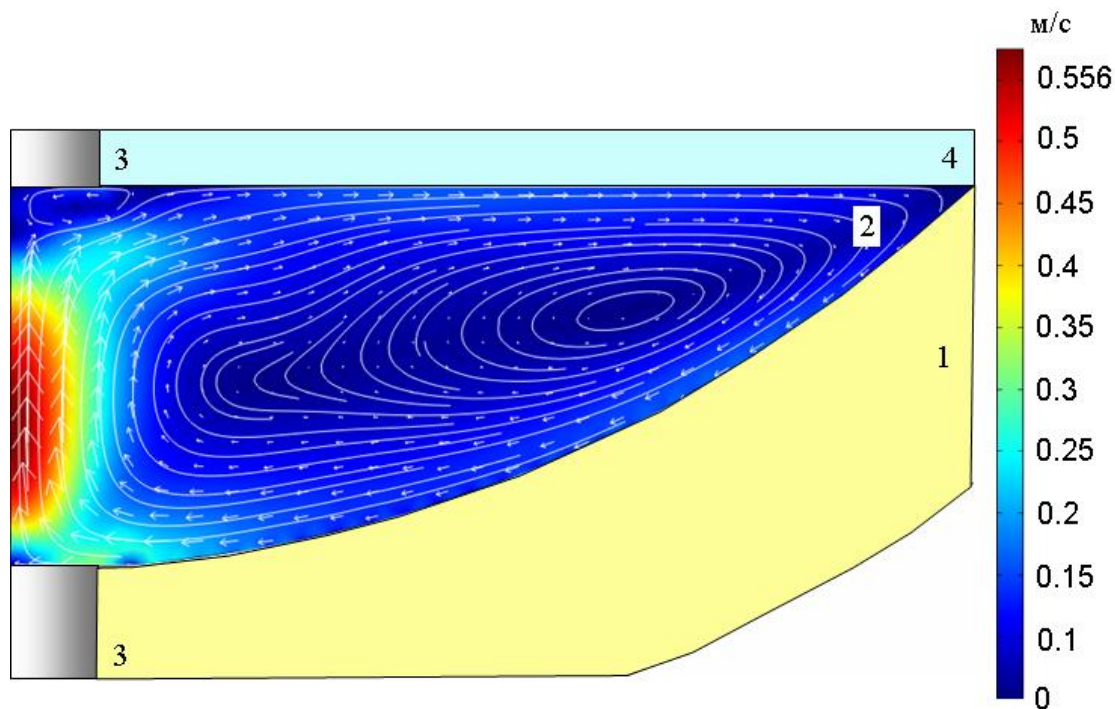


Рис. 15.7. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при стандартной температуре подового электрода $T = 1890$ К

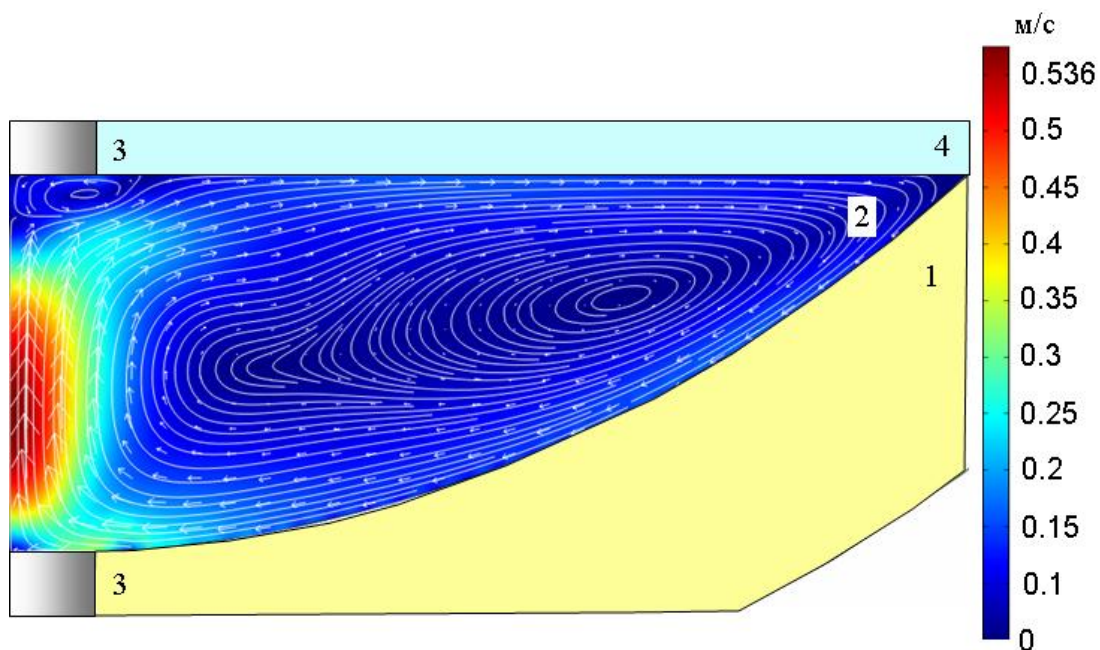


Рис. 15.8. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при пониженной температуре подового электрода $T = 1850$ К

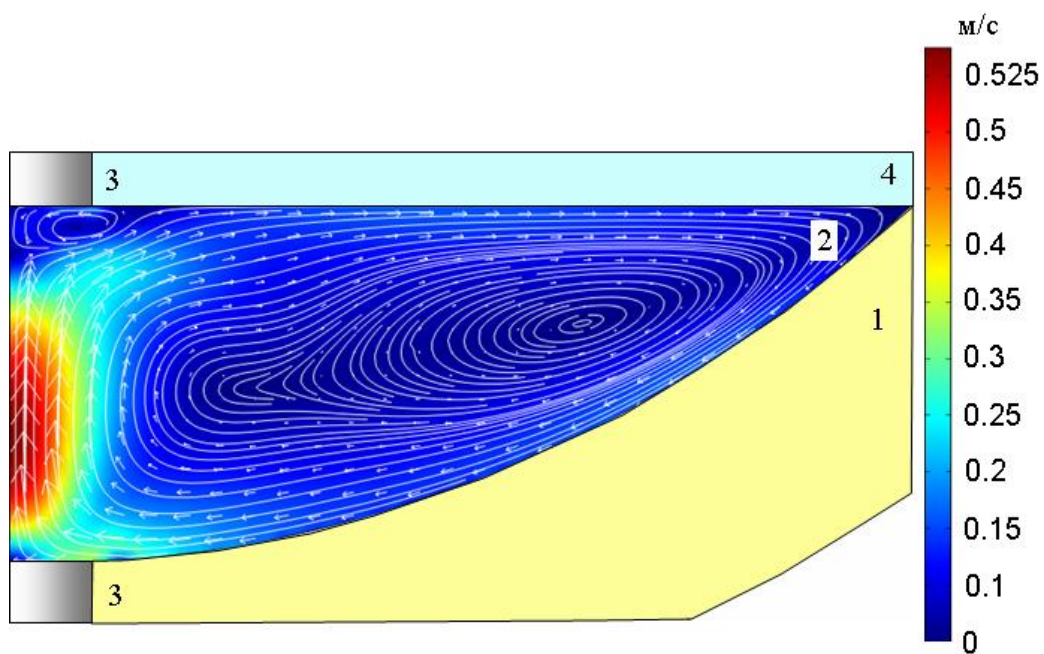


Рис. 15.9. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при пониженной температуре подового электрода $T = 1823$ К

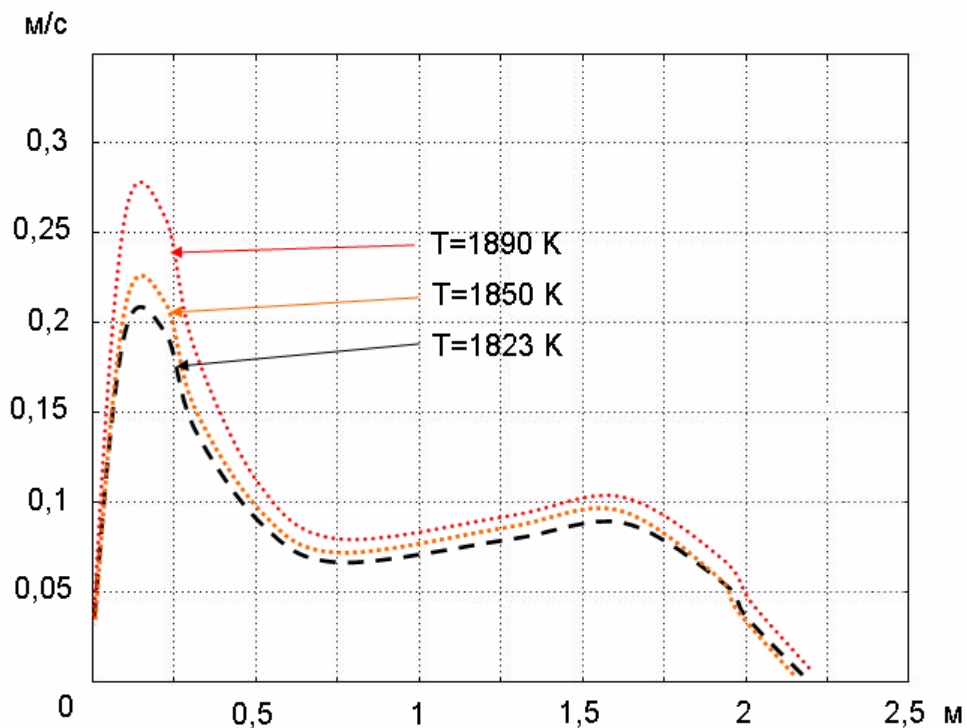


Рис. 15.10. Зависимость скорости движения расплава на уровне сдвигового подслоя при разных температурах подового электрода от расстояния до оси симметрии

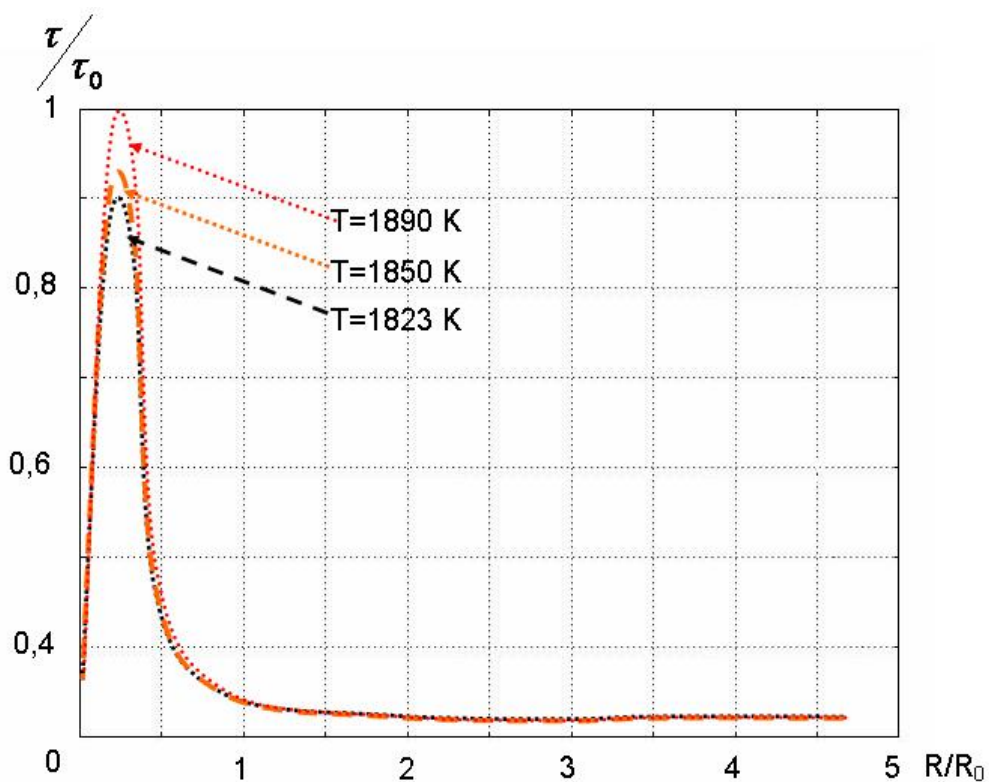


Рис. 15.11. Зависимость сдвигового напряжения на поверхности футеровки при разных значениях температуры подового электрода от расстояния до оси симметрии

15.3 Снижение воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем изменения положения подового электрода

Одним из возможных путей снижения негативного воздействия ЭВТ на поверхность футеровки является варьирование конструктивных особенностей подового электрода. Рассмотрим результаты моделирования гидродинамических процессов при различных положениях подового электрода.

На первом этапе численный эксперимент был проведен для положения подового электрода, опущенного ниже уровня футеровки на расстояние, равное двум радиусам электрода. На рис. 15.12 приведено поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при опущенном подовом электроде. Как видно, в расплаве возникает интенсивное вихревое движение. Вихрь образуется в области подового электрода, как показано на рис. 15.12., где дви-

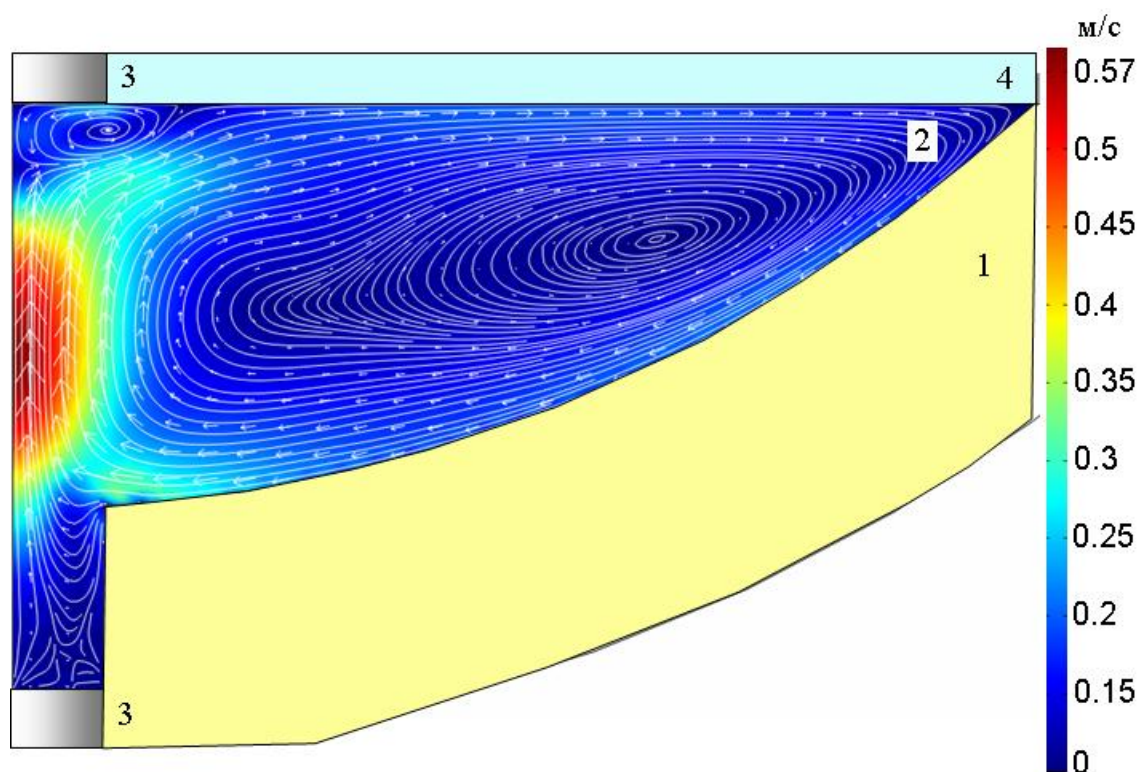


Рис. 15.12. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при опущенном подовом электроде

жение расплава наиболее интенсивное. Максимальная скорость вихревого движения наблюдается на оси электродов и достигает 0,57 м/с. В сравнении со стандартным положением подового электрода наблюдается возрастание максимальной скорости движения расплава. Также возрастает скорость в непосредственной близости края футеровки. При этом значение сдвигового напряжения на краю футеровки остается без изменений в сравнении со стандартным положением электрода. Следует отметить, что в пространстве над

опущенным подовым электродом структура течения носит весьма сложный характер и образует несколько небольших по размерам и интенсивности движения вихрей.

На следующем этапе был проведен численный эксперимент для подового электрода, опущенного ниже уровня футеровки и расширенным в диаметре на половину радиуса на краю футеровки. Результаты численного моделирования ЭВТ для этого случая приведены на рис. 15.13. При таком положении электрода в пространстве над ним появился вихрь, максимальная интенсивность движения которого локализована на поверхности футеровки вблизи оси симметрии, при этом вихрь в области верхнего электрода увеличился в размерах. Также существенно уменьшилась интенсивность движения. Так, на уровне сдвигового подслоя скорость уменьшилась в 1,5 раза, а сдвиговое напряжение на поверхности футеровки – на 10 %.

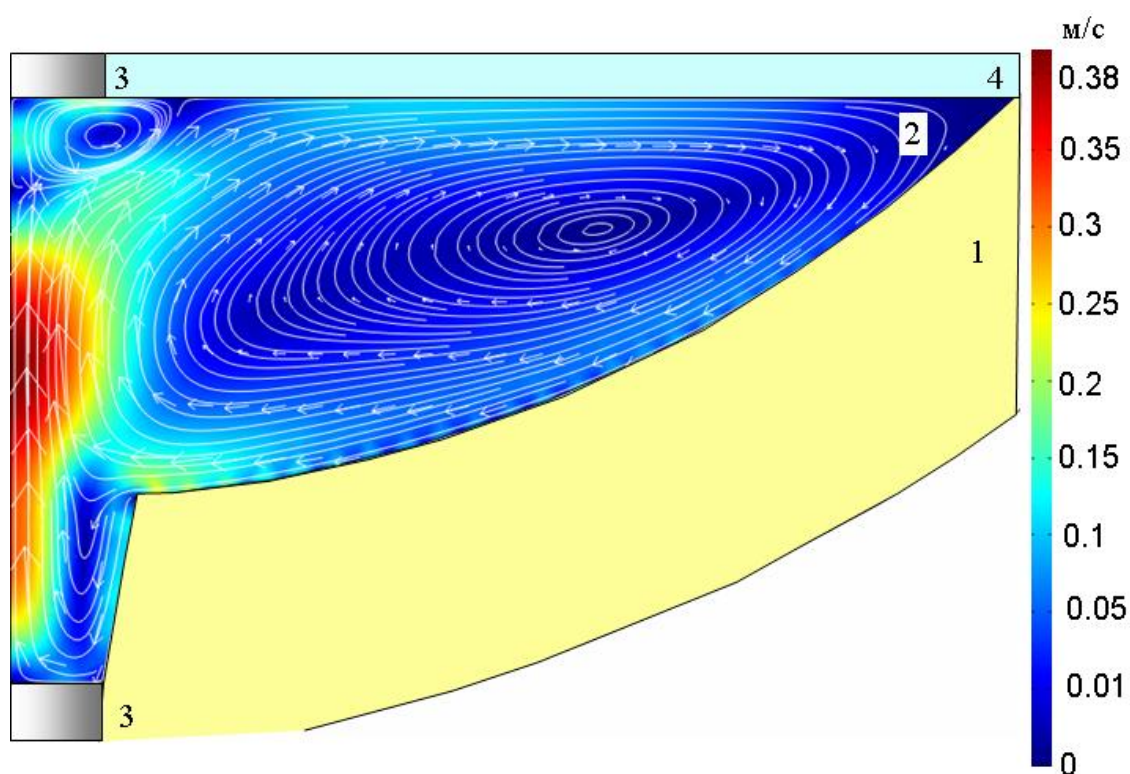


Рис. 15.13. Поле модуля скорости, вектора скорости и изолинии движения расплава при опущенном и расширенном подовом электроде

На рис. 15.14 приведены результаты расчетов для случая, когда подовый электрод приподнят выше уровня футеровки на высоту, равную радиусу электрода. Как показывают расчеты, скорость движения расплава в этом случае снижается почти в 2 раза. Существенное изменение претерпевает структура течения расплава: над подовым электродом образуется вихрь с незначительной интенсивностью движения.

На рис. 15.15 приведено распределение скорости движения расплава на уровне вязкого подслоя вдоль поверхности футеровки, а на рис и 15.16 – сдвигового напряжения на поверхности футеровки при различных положениях подового электрода.

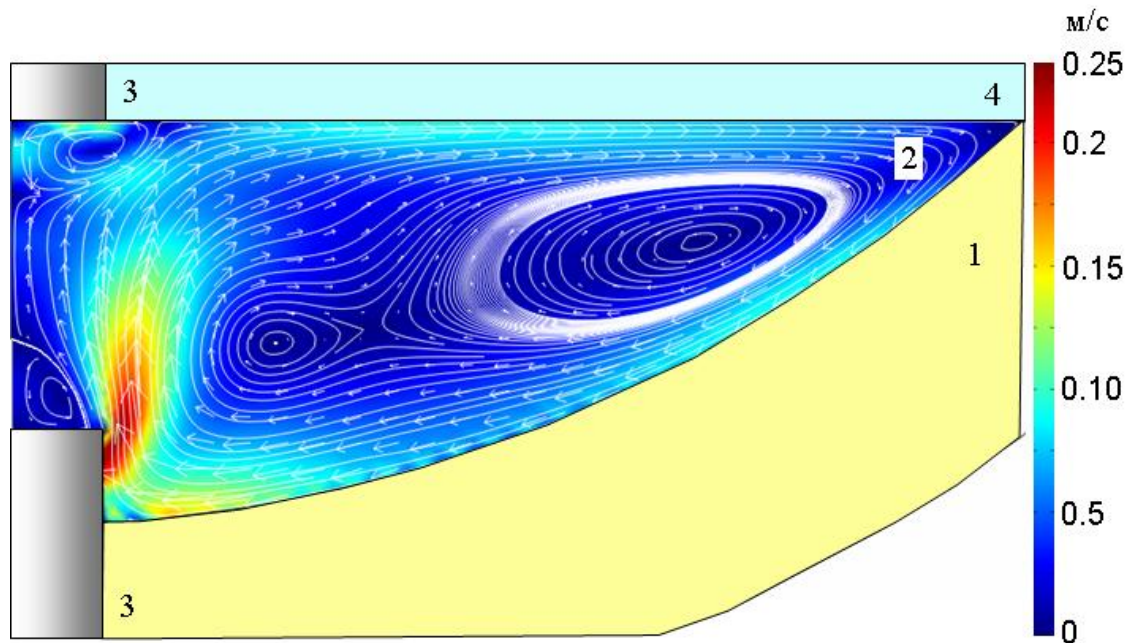


Рис. 15.14. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при поднятом электроде

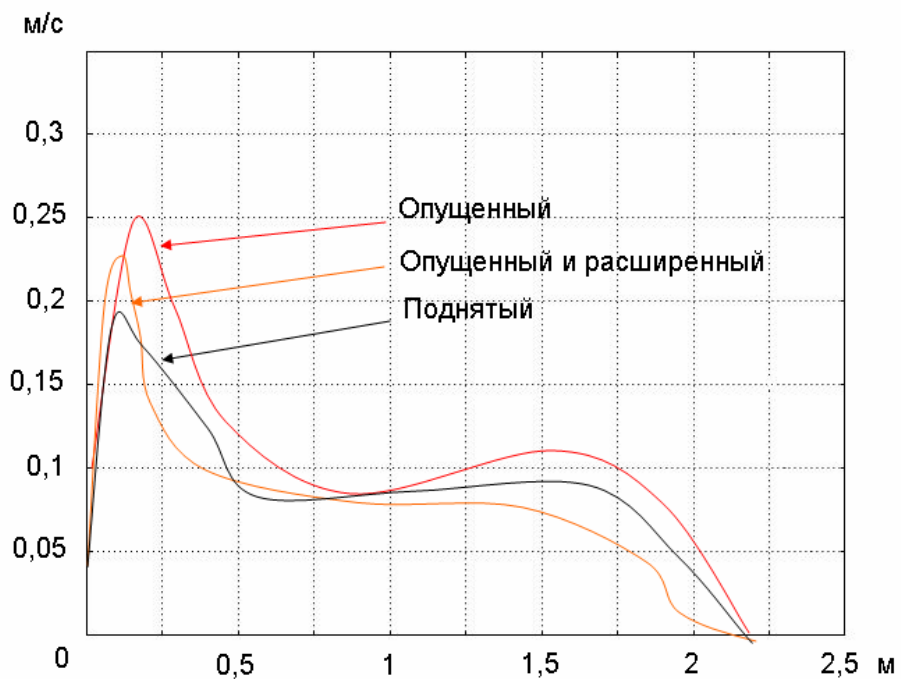


Рис. 15.15. Распределение скорости движения расплава на уровне вязкого подслоя при разных положениях подового электрода

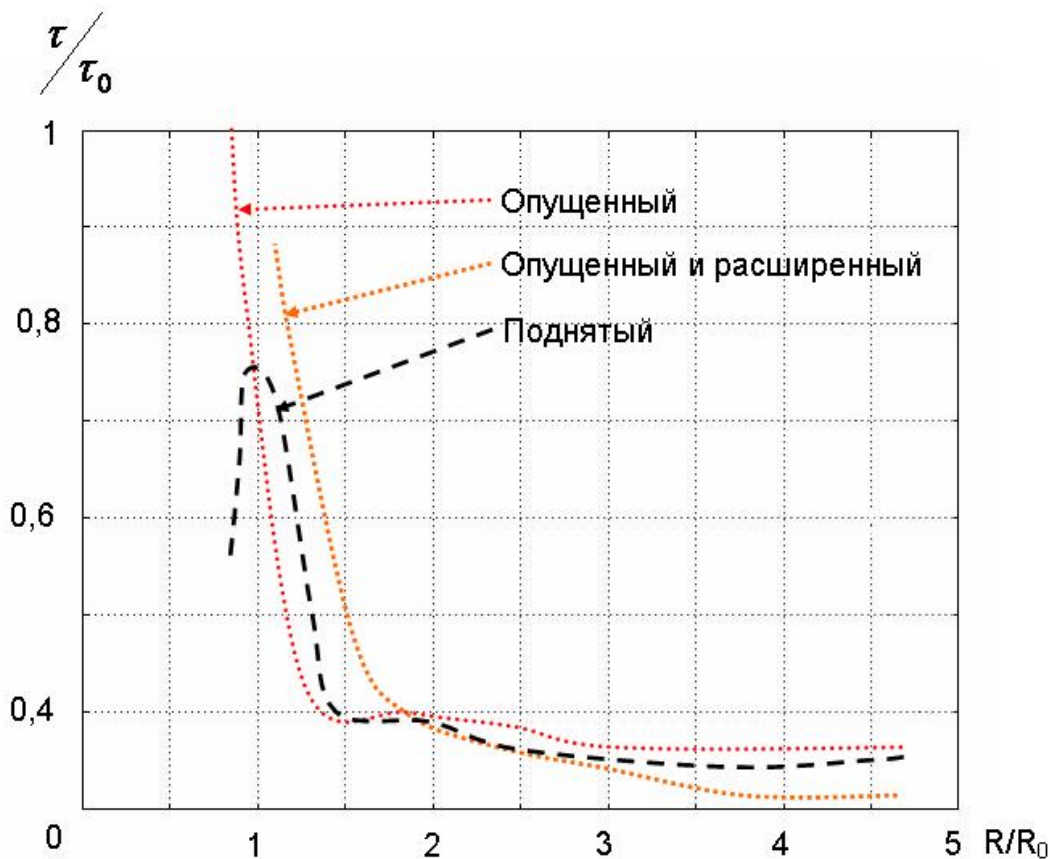


Рис. 15.16. Распределение сдвигового напряжения на поверхности футеровки при разных положениях подового электрода

График величины сдвигового напряжения приведен в безразмерных величинах, зависимости величины сдвигового напряжения отнесенного к характерному значению этой величины при положении подового электрода на уровне подины печи ($\tau_0 = 120$ Па), от расстояния, выраженного в радиусах электрода ($R = 0,25$ м).

Скорость движения расплава на уровне сдвигового подслоя снижается на 50 %, а величина сдвигового напряжения на поверхности футеровки у подового электрода – на 30 %.

15.4 Снижение воздействия ЭВТ на поверхность футеровки путем изменения угла наклона подины печи

На следующем этапе был проведен численный эксперимент с варьированием угла наклона пода печи. Как было показано в разделе 13.2, для печи, меридиональное сечение подины которой имеет вид прямоугольника (прямоугольная форма печи), движение представляет собой два симметричных относительно середины печи по высоте вихря. При этом существенно снижается скорость движения расплава по всему объему ванны печи. На рис. 15.17 приведено поле модуля и вектора скорости, а также изолинии движения расплава в печи прямоугольной формы. Максимальное значение скорости движения составляет 0,1 м/с.

На рис. 15.18 и 15.19 приведены поля модуля и вектора скорости, а также изолинии движения расплава в печах с измененным углом наклона пода печи. Из графиков видно существенное изменение структуры ЭВТ по всему объему расплава. При изменении угла наклона пода печи скорость движения расплава возрастает. Вихрь, возникающий в области подового электрода, полностью занимает весь объем, а верхний вихрь уменьшается. В результате взаимодействия двух вихрей, образующихся в области токоподводящих электродов, скорость движения расплава в области верхнего электрода снижается.

На рис. 15.20 и 15.21 приведены графики скорости движения расплава в области подового электрода на расстоянии сдвигового подслоя и сдвиговое напряжение на поверхности футеровки. График для сдвигового напряжения приведен в относительных величинах. Сдвиговое напряжение отнесено к характерному значению этой величины для стандартной конструкции пода печи ($\tau_0 = 120 \text{ Па}$), а расстояние – к радиусу электрода ($R = 0,25 \text{ м}$). Скорость движения расплава в непосредственной близости подового электрода при варьировании формы пода печи снижается почти в 3 раза, а величина сдвигового напряжения на 50 %.

Анализируя результаты численных экспериментов по снижению температуры подового электрода, изменению положения подового электрода, а также изменению угла наклона пода печи можно сделать следующие выводы:

- при поднятии подового электрода возможно снижение величины сдвигового напряжения на 30 %;
- при уменьшении температуры подового электрода до температуры плавления металла возможно снижение величины сдвигового напряжения на 15 % ;
- при изменении формы пода печи возможно снижение величины сдвигового напряжения на 50 %.

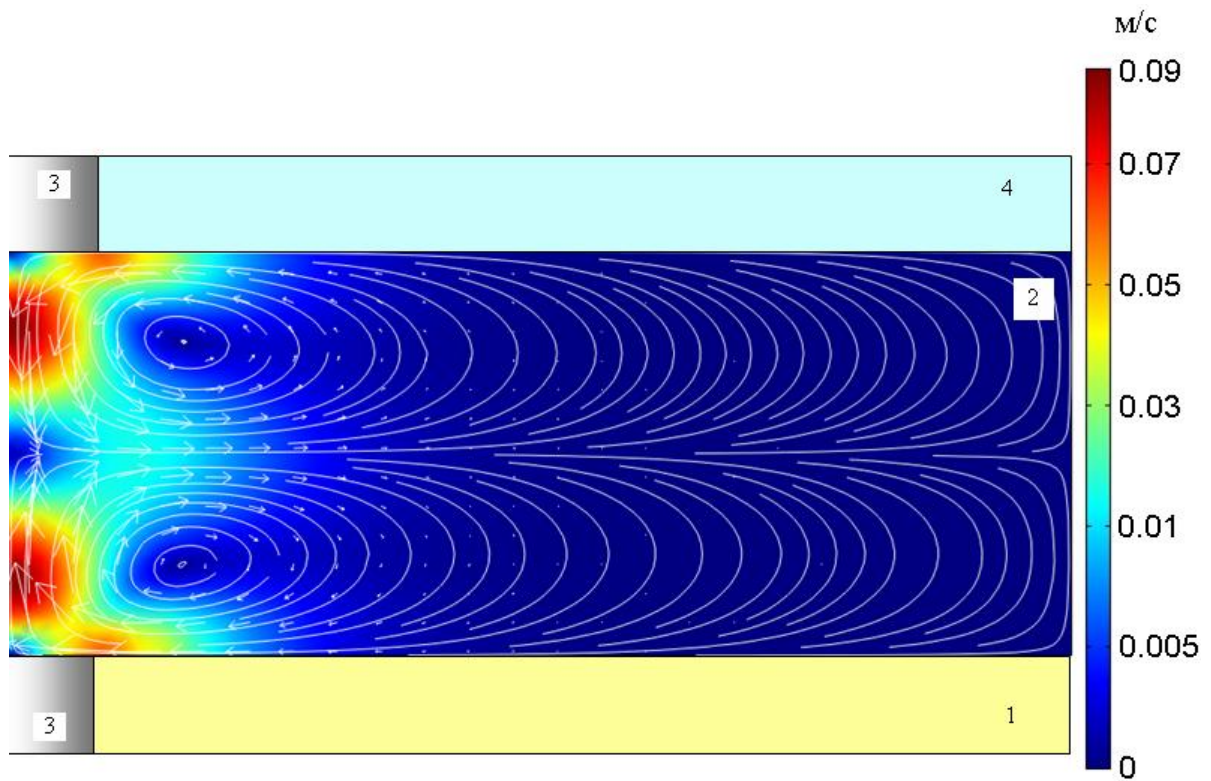


Рис. 15.17. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава в печи прямоугольной формы

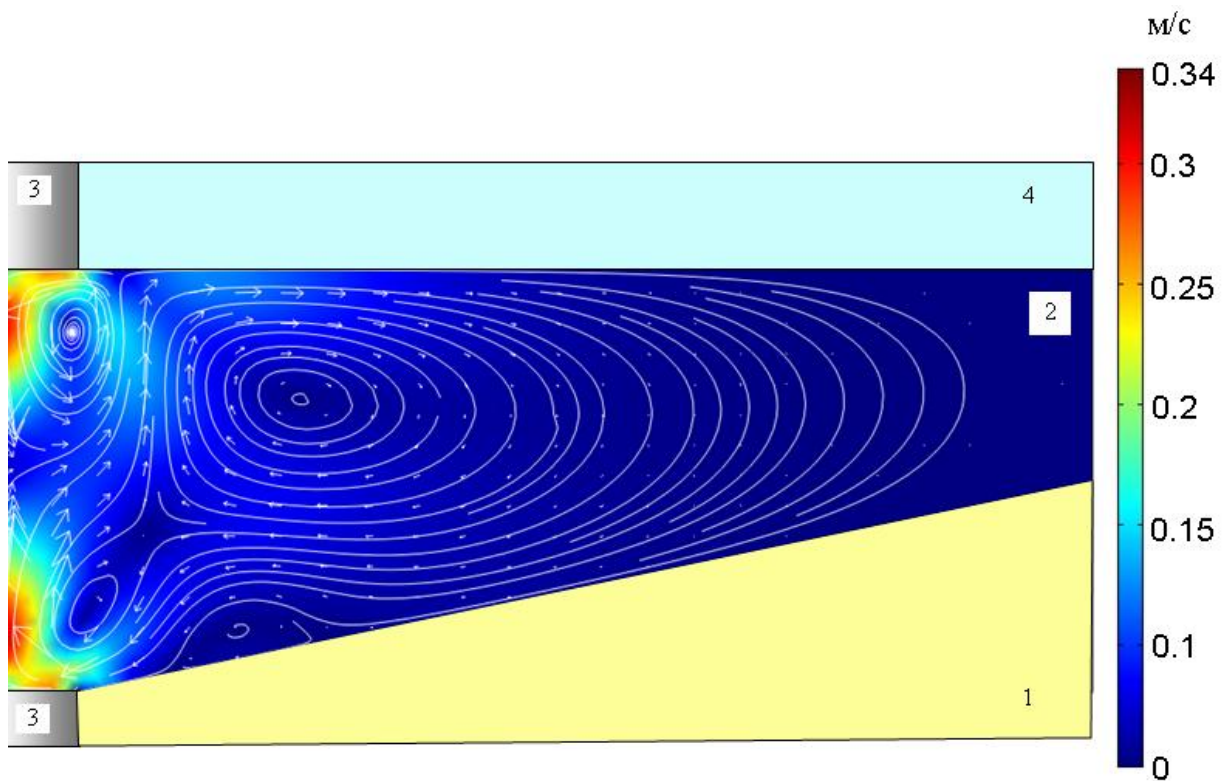


Рис. 15.18. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при незначительном угле наклона пода печи

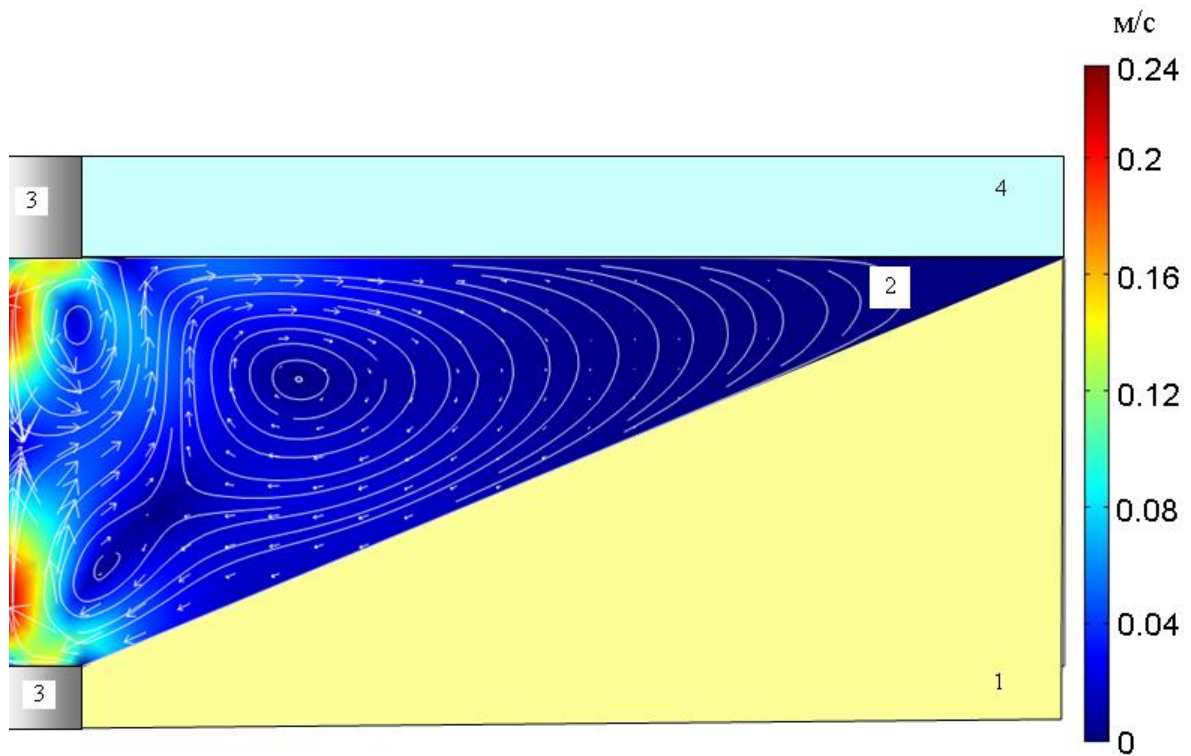


Рис. 15.19. Поле модуля и вектора скорости, изолинии движения расплава при максимальном угле наклона пода печи

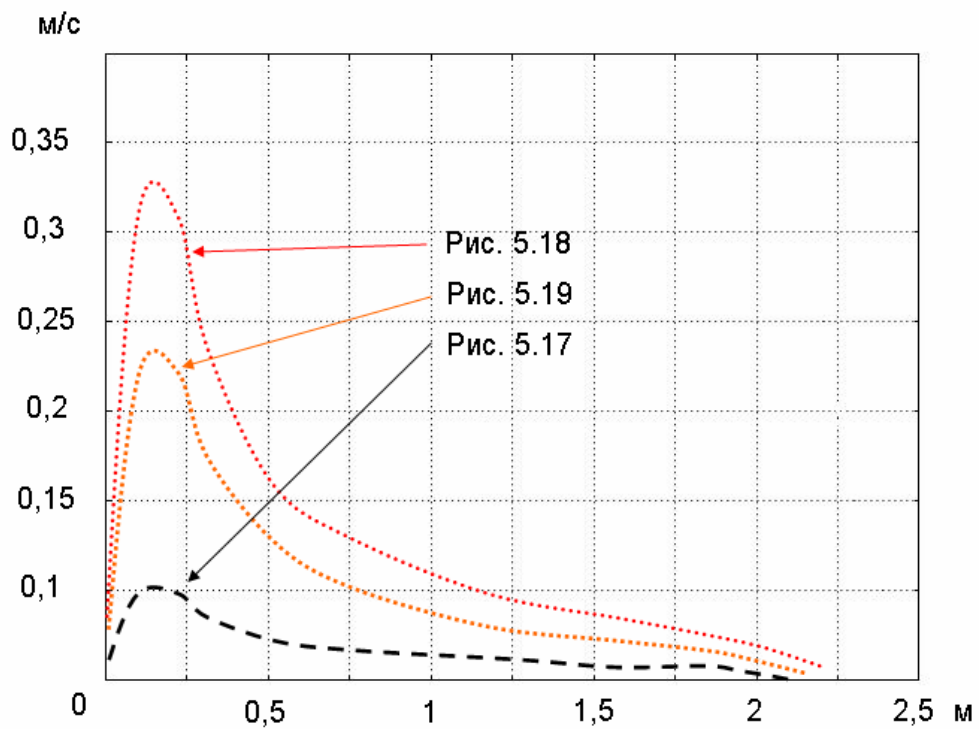


Рис. 15.20. Скорость движения расплава на уровне сдвигового подслоя при разных углах наклона пода печи

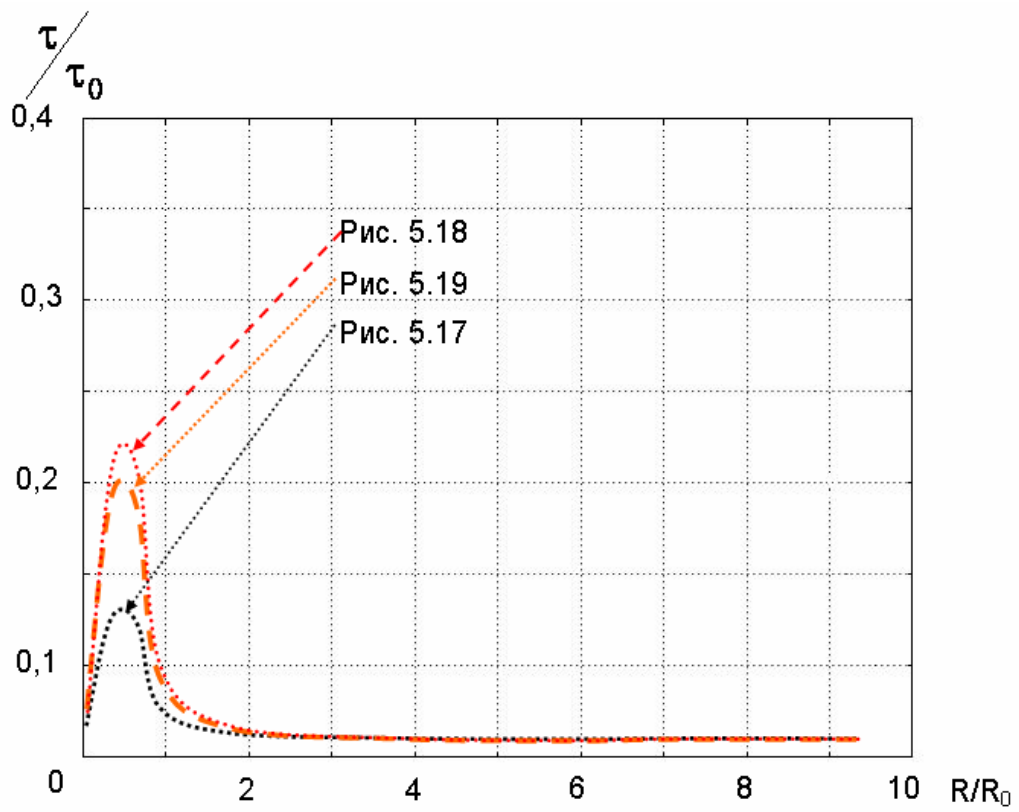


Рис. 15.21. Безразмерное сдвиговое напряжение на поверхности футеровки

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Повх И. Л. Техническая гидромеханика /И. Л. Повх// - Л.: Машиностроение, 1976. - 504 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа /Л. Г. Лойцянский// - М.: Наука, 1978. - 736 с.
3. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика /Г. Н. Абрамович// - М.: Наука, 1969. - 824 с.
4. Берд Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стюарт, Е. Лайтфут// - М.: Химия, 1974. - 686 с.
5. Слеттери Д. С. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах /Д. С. Слеттери// - М.: Энергия, 1978. - 447 с.
6. Филиппов Л. П. Явления переноса /Л. П. Филиппов// - М.: Моск. ун-т, 1986. - 119 с.
7. Кишиневский М. Х. Явления переносов / М. Х. Кишиневский// - Воронеж: Воронеж. ун-т, 1975. -113 с.
8. Повх И. Л. Процессы переноса в физике. Субстанциональная теория /И. Л. Повх // - Донецк: ДонГУ, 1996. - 40 с.
9. Бруяцкий Е. В. Турбулентные стратифицированные течения /Е. В. Бруяцкий// - Киев: Наук. думка, 1986. - 296 с.
10. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. Учебное пособие для педвузов /О. В. Голубева// - М.: Высшая школа. 1972. - 368 с.
11. Ступин А. Б. Экологическая гидродинамика: Учебное пособие /А. Б. Ступин, Ф. В. Недопёкин и др.// - Донецк: ДонНУ, 2001. -143 с.
12. Румянцев В. Д. Теория тепло- и массообмена: Учебное пособие /В. Д. Румянцев// - Днепропетровск: Пороги, 2006. - 532 с.
13. Лыков А. В. Тепломассообмен: Справочник. - М.: Энергия, 1978. - 480 с.
14. Теория тепломассообмена / Под ред.. А. И. Леонтьева// - М.: Высш. шк., 1979. - 416 с.
15. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем - Наука, 1971, 552 с.
16. Борисенко А.И. Газовая динамика двигателей. – М.: Оборонгиз, 1962.- 793 с.
17. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. - М.: Химия, 1974. - 688 с.

18. Исаченко В. П., Осиповна В. А, Сукомел А. С. Теплопередача. - М. Энергоатомиздат, 1981. - 416 с.
19. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. - М.: Энергия, 1973. - 320 с.
20. Беляев Н. М. Основы теплопередачи. - Киев: Вища шк., 1989. - 343 с.
21. Прихожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. - М.: Иностран. лит., 1960. - 127 с.
22. Де Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. - М.: Мир, 1964. - 456 с.
23. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. - М.: Наука, 1971. - 416 с.
24. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. - М.: Атомиздат, 1979. - 195 с.
25. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.:Наука, 1981. - 448 с.
26. Недопёкин Ф. В. Математическое моделирование гидродинамики и теплопереноса в слитках. - Ижевск. - УдГУ, 1995. - 236 с.
27. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. - М.: Госэнергоиздат, 1963. - 535 с.
28. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. - М.: Наука, 1978. - 336 с.
29. Недопёкин Ф. В. Теория теплопереноса: Учеб. пособие. - Донецк: ДонГУ, 1991. - 172 с.
30. Недопёкин Ф. В., Гресс А. В., Черноног В. Е. Оптимальное управление тепловыми процессами при непрерывной разливке стали // Теория и практика металлургии. - 2003 - №3 (35). - с. 40-44
31. Нащокин В.В. Техническая термодинамика и теплопередача: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1969. – 560 с.
32. Димніч А. Х., Троянський О. А. Теплопровідність: Навчальний посібник. - Донецьк: Норд-прес, 2004. - 370с.
33. Бояревич В.В. Электровихревые течения / В.В. Бояревич, Я.Ж. Фрейберг, Е.И. Шилова, Э.В. Щербинин. – Рига: Зинатне. – 1985. – 315 с.
34. Жилин В.Г. Экспериментальное исследование электровихревых течений в полусферическом объеме / В.Г. Жилин, Ю.П. Ивочкин, В.С. Игумнов, А.А. Оксман // Теплофиз. высок. температур. – 1995. – 33, N 1. – С. 3-6.

35. Жилин В.М. Исследование тепловых и гидродинамических эффектов, сопровождающих растекание электрического тока в объеме жидкого металла / В.М. Жилин, Ю.П. Ивочкин, А.А. Оксман, И.О. Тепляков, С.Н. Вавилов // VI minsk international heat and mass transfer for UM MIF 2008. – Minsk, may 19-23, 2008 A.V. Luikov Heat and mass transfer institute. Section 9. – P. 9-16
36. Щербинин Э.В. Электровихревое течение в сфероидальном контейнере / Э.В. Щербинин, Е.Е. Яковлева // Магнитная гидродинамика. – 1986. – N 4. – С. 64-69
37. Фельдман Е.Р. Стоксово электровихревое течение в сфероидальном контейнере / Е.Р. Фельдман, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1995. – N 1-2. – С. 197-203.
38. Peter, Kratzschmar Andreas Измерения скоростей жидкости в электровихревых течениях / Peter, Kratzschmar Andreas // Fluid velocity measurements in electro-vortical flows Mater. and Manuf. Processes. – 2004. – N 19, 4. – P. 665-678
39. Nortrup E.F. Some newly observed manifestations of force in the interior of an electric conductor / E.F. Nortrup // Phys. Rev. – 1907. – vol. 24. – P. 474-497
40. Финкельбург В. Электрические дуги и термическая плазма / В. Финкельбург, Г. Меккер. – М.: 1961. – 370 с.
41. Сердюк Г.Б. Магнитогидродинамические явления в электрической дуге / Сердюк Г.Б. // Магнитная гидродинамика. – 1966. – № 4. – С. 136-146
42. Maecker H. Plasmastromungen in Lichtbogen infolge eigemanmagnetischer Kompression / H. Maecker // Ztschr. Phys. – 1955. – Bd 141, S. – P. 198-216
43. Жигулев В.Н. О явлении эжекции электрическим разрядом / В.Н. Жигулев // ДАН. – 1960. – т. 130, № 2. – С. 280-283
44. Гроздовский Г.Л. Осеметричное меридиональное течение проводящей жидкости. Выравнивание параметров закрученного потока вязкой жидкости / Г.Л. Гроздовский, А.Н. Дюкалов, В.В. Токарев, А.И. Толстых // Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение. – 1960. – №1. – С. 41-46
45. Chow Ch.Y. Flow around a nonconducting sphere in a current carrying fluid / Ch.Y. Chow // Phys. Fluids. – 1966. – Vol. 9, N 5. – P. S.33-S.36
46. Chow Ch.Y. Hydromagnetic wake around a nonconducting sphere / Ch.Y. Chow // Phys. Fluids. – 1967. – Vol. 10, N 1. – P. 234-236

47. Chow Ch.Y. Current-carrying fluid past a nonconducting sphere at low Reynolds number / Ch.Y. Chow, D.F. Billings // *Phys. Fluids*. – 1967. – Vol. 10, N 4. – P. 871-873
48. Chow Ch.Y. Drag of a sphere of arbitrary conducting in a current-carrying fluid / Ch.Y. Chow, J.A. Halat // *Phys. Fluids*. – 1969. – Vol. 12, N 11. – P. 2317-2322
49. Орепер Г.М. Влияние электрического поля на поле скоростей около непроводящей капли и на скорость ее растворения в электропроводной жидкости / Г.М. Орепер // *Магнитная гидродинамика*. – 1974. – № 3. – С. 52-56
50. Орепер Г.М. Численное исследование гидродинамики и массообмена сферы в токнесущей жидкости / Орепер Г.М. // *Магнитная гидродинамика*. – 1979. – № 3. – С. 38-42
51. Орепер Г.М. Воздействие электромагнитного поля на движение проводящей жидкости вблизи сферы и на массоперенос с ее поверхности / Орепер Г.М. // *Магнитная гидродинамика*. – 1980. – № 4. – С. 69-72
52. Резников Б.И. Магнитогидродинамическое течение в окрестности критической точки в чисто азимутальном магнитном поле / Б.И. Резников, Ю.Н. Смыслов // *Изв. АН СССР. Мех. Жидк. И газа*. – 1967. – № 4. – С. 3-8
53. Пао Н.Р. Магнитогидродинамические течения около вращающегося диска / Н.Р. Пао // *Ракетная техн. и космонавтика*. – 1968. – т. 6, № 7. – С. 80-87
54. Uberoi M.S. Magnetohydrodynamics at small magnetic Reynolds numbers / M.S. Uberoi // *Phys. Fluids*. – 1962. – Vol. 5, N 4. – P. 401-406
55. Шилова Е.И. Теория движения сферических частиц суспензии в неоднородном электрическом поле / Е.И. Шилова, В.Р. Эсрела-Льопис // В кн.: *Поверхностные силы в тонких пленках и дисперсных системах*. – М.: Наука. – 1972. – С. 115-131
56. Шилова Е.И. Возможные проявления электровихревых течений в явлениях диэлектролиза / Шилова Е.И. // В кн.: *Девятое рижское совещание по магнитной гидродинамике*. Саласпилс. – 1978. – С. 158-159
57. Бояревич В.В. О границах применимости одного точного решения уравнений магнитной гидродинамики / В.В. Бояревич // *Магнитная гидродинамика*. – 1976. – № 4. – С. 140-142
58. Бояревич В.В. Электровихревое течение у полусферического электрода / В.В. Бояревич // *Магнитная гидродинамика*. – 1978. – № 4. – С. 77 - 81
59. Бояревич В.В. Усиление азимутального вращения в меридиональном электровихревом течении в полусфере / В.В. Бояревич, Р.П. Миллере // *Магнитная гидродинамика*. – 1982. – № 4. – С. 51-56

60. Бояревич В.В. Струя Ландау-Сквайра в радиально расходящемся электрическом токе / В.В. Бояревич, Е.И. Шилова // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 3. – С. 89-94
61. Шилова Е.И. Некоторые точные решения уравнений Навье-Стокса в магнитной гидродинамике / Е.И. Шилова, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1969. – № 4. – С. 59-64
62. Шилова Е.И. Некоторые аспекты теоретического анализа пространственного МГД-течения в диффузоре / Е.И. Шилова, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1971. – № 1. – С. 11-17
63. Шилова Е.И. Вихревое МГД-течение в конусе / Е.И. Шилова, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1971. – № 3. – С. 33-38
64. Щербинин Э.В. Об одном классе точных решений в магнитной гидродинамике / Щербинин Э.В. // Магнитная гидродинамика. – 1969. – № 4. – С. 46-58
65. Щербинин Э.В. Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле / Э.В. Щербинин. – Рига: Знатье. – 1973. – 303 с.
66. Бояревич В.В. МГД-течения у точечного источника электрического тока / В.В. Бояревич // Ч.1. – Магнитная гидродинамика. – 1981. – № 1. – С. 21-28
67. Бояревич В.В. МГД-течения у точечного источника электрического тока / В.В. Бояревич // Ч.2. – Магнитная гидродинамика. – 1981. – № 2. – С. 41-44
68. Бояревич В.В. Усиление азимутального вращения в меридиональном электровихревом течении в полусфере. / В.В. Бояревич, Р.П. Миллере // Магнитная гидродинамика. – 1982. – № 4. – С. 51-56
69. Бояревич В.В. Влияние продольного магнитного поля на движение среды при электродуговом и электрошлаковом процессах / В.В. Бояревич, В.И. Шарамкин, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 1. – С. 115-120
70. Буцениекс И.Э. МНД-течения в замкнутых жидких объемах при неоднородном растекании тока / И.Э. Буцениекс, Д.Е. Петерсон, В.И. Шарамкин, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1976. – № 1. – С. 92-97
71. Бояревич В.В. МГД-течения при растекании электрического тока в осесимметричном слое конечной толщины / В.В. Бояревич, В.И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 2. – С. 55-60
72. Смыслов Ю.Н. Нелинейная магнитногидродинамическая модель смерча / Ю.Н. Смыслов, Э.В. Щербинин // В кн.: Вопросы математической физики. Л.: Наука. – 1976. – С. 271-282

73. Шилова Е.И. Магнитогидродинамическая модель слабого смерча / Е.И. Шилова, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1974. – № 2. – С. 77-86
74. Фрейденберг Я. Течение в изогнутой трубе с током / Я. Фрейденберг // Магнитная гидродинамика. – 1981. – № 4. – С. 61-66
75. Фрейденберг Я. Осесимметричное электровихревое течение в гофрированной трубе / Я. Фрейденберг, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 4. – С. 46-54
76. Шарамкин В.И. Электровихревое течение при разряде между электродами гиперболоидной формы / В.И. Шарамкин, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1978. – № 2. – С. 32-38
77. Шилова Е.И. Об очистке жидких металлов от непроводящих примесей в собственном магнитном поле электрического тока / Шилова Е.И. // Магнитная гидродинамика. – 1975. – № 2. – С. 142-144
78. Бояревич В.В. Влияние продольного магнитного поля на движение среды при электродуговом и электрошлаковом процессах. / В.В. Бояревич, В.И. Шарамкин, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 1. – С. 115-120
79. Буцениекс И.Э. Экспериментальное изучение МГД-процессов при электрошлаковой сварке / И.Э. Буцениекс, Я.Ю. Компан, В.И. Шарамкин др. // Магнитная гидродинамика. – 1975. – № 3. – С. 143-148
80. Буцениекс И.Э. Моделирование давления в металлической ванне при электрошлаковой сварке / И.Э. Буцениекс, В.И. Шарамкин, Э.В. Щербинин // Автоматическая сварка. – 1977. – № 7. – С. 26-28
81. Жилин И.Г. Оптико-механический анемометр / И.Г. Жилин, В.П. Огородников, В.В. Осипов, Б.С. Петухов // Теплофизика высоких температур. – 1976. – т. 14, № 4. – С. 834-840
82. Ласис У.А. О влиянии схемы токоподвода на МГД-течение в жидкой ванне вакуумного дугового переплава / У.А. Ласис, В.Н. Мошняга, Ю.В. Чернов, В.И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 2. – С. 127-130
83. Мошняга В.Н. Экспериментальное исследование электровихревого течения в цилиндрической емкости / В.Н. Мошняга, В.И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 1. – С. 77-80
84. Шарамкин В.И. Экспериментальное исследование влияния продольного магнитного поля на давление при некоторых электрошлаковых процессах / В.И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 2. – С. 139-141.

85. Шарамкин В.И. МГД-течения при подводе тока двумя параллельными электродами / В.И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1977. – № 4. – С. 121-125.
86. Шарамкин В.И. Характер течений в ванне жидкого металла при вакуумном дуговом переплаве / В.И. Шарамкин, Ю.В. Чернов // Сталь. – 1977. – № 8. – С. 713-714.
87. Электрошлаковая сварка / Под ред. Б.Е. Патона. – М.-Киев: Машгиз. – 1859. – 58 с.
88. Коман Я.Ю. Электровихревые течения / Под ред. Э.В. Щербинина. – Рига: Зинатне. – 1985. – 124 с.
89. Тир Л.Л. Электромагнитные устройства для управления циркуляцией металла в электропечах / Л.Л. Тир, М.Я. Столов. – М.: Металлургия. – 1991. – 280 с.
90. Хрипченко Станислав Юрьевич. Электровихревые и магнитовихревые течения в плоских каналах технологических устройств: Дис. д.т.н. / Хрипченко Станислав Юрьевич. – Пермь, 2007. – 393 с.
91. Ячиков Игорь Михайлович. Математическое моделирование электровихревых течений и тепломассопереноса в токонесущих расплавах металлургических агрегатов: Дис. д.т.н. / Ячиков Игорь Михайлович. – Челябинск, 2009. – 363 с.
92. Жилин В.Г. Экспериментальное исследование поля скоростей в осесимметричном течении в цилиндрическом контейнере / В.Г. Жилин, Э.В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1986. – № 3. – С. 110-116
93. Дементьев С.Б. К вопросу о формировании электровихревого течения при много электродном токоподводе / С.Б. Дементьев, В.Г. Жилин // Магнитная гидродинамика. – 1988. – №4. – С. 121-125
94. Vlasyuk V.Kh. Critical values of electrovortex flow parameters in two-layer fluids (Критические величины параметров электровихревых потоков в двухслойных жидкостях) / V.Kh. Vlasyuk // Magnetohydrodynamics. – 2004. – 40, N 3. – С. 237-249
95. Фельдман Е.Р. Стоксово электровихревое течение в сфероидальном контейнере / Фельдман Е.Р., Щербинин Э.В. // Магнитная гидродинамика. – 1995. – N 1-2. – С. 197-203
96. Ivochkin Yu. Numerical and experimental investigation of the electrovortex flow in hemispherical container under action of external magnetic field / Yu. Ivochkin, A. Oksman, O. Kazak, I. Teplyakov, V. Zhilin // PAMIR Conference 2011. – Vol. 1. – P. 85-88
97. Жилин В.Г. Экспериментальное исследование пульсаций скорости и температуры в электровихревых течениях / В.Г. Жилин, Ю.П. Ивочкин,

А.А. Оксман, И.О. Тепляков, К.И. Белов // Труды 4 Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-4), Москва, Россия, 2006. – Т.4. – С.109-112

98. Белов К.И. Экспериментальное исследование тепловых и гидродинамических характеристик электровихревого течения / К.И. Белов, И.О. Тепляков // 9 Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики». Новосибирск, 17-20 окт., 2006: Тезисы докладов. Новосибирск: ИТ СО РАН. – 2006. – С. 18-19

99. Белов К.И. Экспериментальное исследование жидкометаллических течений, инициированных электрическим током / К.И. Белов, В.Г. Жилин, Ю.П. Ивочкин, А.А. Оксман, И.О. Тепляков // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды 16 Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева, Санкт-Петербург, 21-25 мая, 2007. – Т. 1. – С. 70-73

100. Peter, Kratzschmar Andreas Fluid velocity measurements in electrovortical flows / Kratzschmar Andreas Peter // Mater. and Manuf. Processes. – 2004. – 19, N 4. – С. 665-678

101. Будилов И.Н. Моделирование магнитно-гидродинамических процессов в промышленных электролизерах в ANSYS / И.Н. Будилов, Ю.В. Лукашук УГАТУ (Уфа) // ANSYS Solutions. Русская редакция. Инженерно-технический журнал, Осень 2007. – С. 13-18.

102. Severo S. Modelling magnitohydrodynamics of aluminum electrolysis cells with ANSYS and CFX / S. Severo, Andre F. Schneider, Elton C.V. Pinto, Vanderlei Gusberti, Vinko Potocnik // Light metals. – 2005. – P. 127-138

103. Schnick M. Simulation of Plasma and Shielding Gas Flows in Welding and Cutting Arcs with Ansys CFX / Michael Schnick, Uwe Füssel, Jörg Zscheitzsche // International Scientific Colloquium Modelling for Material Processing Riga, 8-9 June, 2006. – P. 143-148

104. Гельфгат Ю.М. Жидкий металл под воздействием электромагнитных сил / Ю.М. Гельфгат, О.А. Лиелаусис, Э.В. Щербинин. – Рига: Зинатне. – 1976. – 230 с.

105. Krauze A. Numerical modeling of 2d axisymmetric flow under the influence of dc em field for industrial cz silicon single crystal growth facilities / A. Krauze, A. Muiznieks, L. Gorbunov, A. Pedchenko // Magnetohydrodynamics. – 2005. – Vol. 41, N 2. – P. 159-188

106. Гришин С.Д. Электрические ракетные двигатели космических аппаратов / С.Д. Гришин, Л.В. Лесков. – М.: Машиностроение. – 1989. – 216 с.

107. Юман М. Молния / М. Юман; пер. С.И. Кириллова, ред. Н.В. Красногорская. – М: Мир. – 1972. – 323 с.

108. Dijkhuis G.C. Threshold current for fireball generation / G.C. Dijkhuis // J. Appl. Phys. – 1982. – Vol. 53, N 5. – P. 3516-3519
109. Hagyard H. On the presence of electric currents in the Solar atmosphere / H. Hagyard, B.C. Low, E. Tandberg-Hassen // Solar Phys. – 1981. – Vol. 73. – P. 257-268
110. Соколов Д.Д. Современное состояние и перспективы лабораторного динамо-эксперимента / Д.Д. Соколов // Соросовский образовательный журнал. – 2001. – № 4. – С. 111-115
111. Свенчанский А.Д. Электрические промышленные печи / А.Д. Свенчанский, М.Я. Смелянский. – М.:1970. – 264 с.
112. Линчевский Б.В. Metallurgy чёрных металлов / Б.В. Линчевский, А.Л. Соболевский, А.А. Кальменев. – М.: 1986. – 360 с.
113. Макаров, А.Н. Теплообмен в дуговых сталеплавильных печах. Текст. / А.Н. Макаров. – Тверь: ТГТУ, 1998. – 184 с.
114. Поволоцкий Д.Я. Электрометаллургия стали и ферросплавов / Д.Я. Поволоцкий, В.Е. Рошин, Н.В. Мальков. – М.: Metallurgy. – 1995. – 592 с.
115. Ячиков И.М. Моделирование электромагнитных процессов в электродуговых печах постоянного тока / И.М. Ячиков, О.И. Карандаева, Т.П. Ларина, И.В.Портнова. – Магнитогорск: МГТУ. – 2005. – 139 с.
116. Сойфер В.М. Дуговые печи в сталелитейном цехе / В.М. Сойфер, Л.Н. Кузнецов. – М.: Metallurgy. – 1989. – 176 с.
117. Смляренко В.Д. Электросталеплавильное производство в первом десятилетии XXI века / В.Д. Смляренко, Ф. Мюллер // Электрометаллургия. – 2004. – № 8. – С.2-6
118. Фукс Г. Опыт поэтапной реконструкции мартеновского цеха с переходом на электросталеплавильное производство / Г. Фукс, Б. Пельц // Сталь. – 2002. – № 9 – С. 49-53
119. Ячиков И.М. Определение экономически оптимальной мощности электродуговой печи / И.М. Ячиков, И.В. Портнова, А.Ф. Миляев // Новые программные средства для предприятий Урала. Вып. 2: Сб. тр. Регион. Научно.-техн. Конф. / Под ред. В.Д. Тутаровой. – Магнитогорск: МГТУ. – 2003. – С. 78-82
120. Кудрин В.А. Теория и технология производства стали: Учебник для вузов / В.А. Кудрин. – М.:«Мир», ООО «Издательство АСТ». – 2003. – 528 с.
121. Луценко В.Т. Дуговая сталеплавильная печь / В.Т. Луценко, В.А. Павлов, А.И. Докшицкая. – Екатеринбург. – 2005. – 41 с.

122. Егоров А.В. Электроплавильные печи черной металлургии. Учебник для вузов / А.В. Егоров. – М.: Металлургия. – 1985. – 280 с.
123. Электрические промышленные печи: Дуговые печи и установки специального нагрева: Учебник для вузов / Свенчанский А.Д., Жердев И.Т., Кручинин А.М. и др.; под ред. А.Д. Свенчанского. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоиздат. – 1981. – 296 с.
124. Устройство и работа сверхмощных дуговых сталеплавильных печей / Поволоцкий Д.Я., Гудим Ю.А., Зинуров И.Ю. и др. – М.: Металлургия. – 1990. – 176 с.
125. Сойфер В.М. Дуговые печи в сталелитейном цехе / В.М. Сойфер, Л.Н. Кузнецов. – М.: Металлургия. – 1989. – 176 с.
126. Егоров А.В. Расчет мощности и параметров электропечей черной металлургии: Учеб. пособие для вузов / А.В. Егоров. – М.: Металлургия. – 1990. – 280 с.
127. Дуговые сталеплавильные печи: Атлас / под ред. И.Ю. Зинурова. – М.: Металлургия. – 1981. – 180 с.
128. Никольский, Л.Е. Тепловая работа дуговых сталеплавильных печей / Л.Е. Никольский, В.Д. Смоляренко, Л.Н. Кузнецов. – М.: Металлургия. – 1981. – 320 с.
129. Свинолобов Н.П. Печи черной металлургии: Навчальний посібник / Н.П. Свинолобов, В.Л. Бровкин. – Дніпропетровськ: Пороги. – 2004. – 154 с.
130. Электрометаллургия стали и ферросплавов: Учебник для вузов / Под ред. Д.Я. Поволоцкого. – М.: Металлургия. – 1984. – 568 с.
131. Морозов А.Н. Современное производство стали в дуговых печах / А.Н. Морозов. – М.: Металлургия. – 1983. – 184 с.
132. Поволоцкий, Д.Я. Выплавка легированной стали в дуговых печах / Д.Я. Поволоцкий, Ю.А. Гудим. – М.: Металлургия. – 1987. – 136 с.
133. Свенчанский А.Д. Электрические промышленные печи / А.Д. Свенчанский, М.Я. Смелянский. – М.: 1981. – 296 с.
134. Огороков Г.Н. Технологические особенности выплавки стали в дуговых печах постоянного тока и перспективы их использования / Г.Н. Огороков, А.И. Донец, Ал.Г. Шалимов и др. // Сталь. – 1994. – № 5. – С. 24-30
135. Wang F. Numerical study of dc arc plasma and molten bath in dc electric arc furnace / F. Wang, Z. Jin, Z. Zhu // Ironmaking and Steelmaking. – 2006. – Vol. 33, N 1. – P. 39-44

136. Зайцев В.А. Подовые электроды дуговых печей постоянного тока / В.А. Зайцев, Л.Б. Медовар // Современная электрометаллургия. – 2009. – N 2. – С. 3-8
137. Michielan A. Печь Danieli Danarc фирмы ABS / A. Michielan, G. Lavaroni, A. Fior // The Danieli Danarc™ furnace at ABS Rev. met. (France), 2000. – N 6. – С. 745-752
138. Соيفер В.М. Новые проекты ДСП фирмы Даниели / В.М. Соيفер // Электрометаллургия. – 2008. – № 4. – С. 46-48
139. Дуговая печь постоянного тока и способ плавления или нагрева шихты или расплава. Direct current arc furnace and a method for melting or heating raw material or molten material Пат. 6137822 США, МПК 7 F 27 D 1/00. NKK Steel Engineering, Inc., Hake Joseph L., Cook Richard L. N 09/032442; Заявл. 27.02.1998; Оpubл. 24.10.2000; НПК 373/72.
140. Дугова піч постійного струму Пат. 30616 Украина, МПК 6 H 05 B 7/02, 7/20. Иванов Валентин Георгійович, Кравченко Наталія Олександрівна. N 98031505; Заявл. 25.03.1998; Оpubл. 15.12.2000.
141. Попов В.Н. Дуговая печь постоянного тока нового поколения на ОАО «Металлургический завод Электросталь» / В.Н. Попов, Н.А. Кривенков // Литейн. пр-во. – 2005. – N 7. – С. 20-21
142. Pleschiutschnigg Fritz-Peter, Wu Wei-Ping Дуговая сталеплавильная печь постоянного тока. Gleichstromlichtbogenofen zur Herstellung von Stahl sowie Verfahren hierzu Заявка 19846100 Германия, МПК 7 C 21 C 5/52, F 27 D 11/10. SMS Schloemann-Siemag AG. N 19846100.3; Заявл. 07.10.1998; Оpubл. 13.04.2000.
143. Макаров А.Н., Макаров Р.А., Дунаев А.Ю. Дуговая сталеплавильная печь постоянного тока Пат. 2190815 Россия, МПК 7 F 27 B 3/08, C 21 C 5/52. Твер. ГТУ. N 2001112039/02; Заявл. 03.05.2001; Оpubл. 10.10.2002.
144. Бакуменко Сергей Пантелеевич Дуговая сталеплавильная печь с подогревом шихты в шахте и способ осуществления в ней плавки Пат. 2249774 Россия, МПК 7 F 27 B 3/08, C 21 C 5/52. N 2003116362/02; Заявл. 02.06.2003; Оpubл. 10.04.2005.
145. Нехамин С.М. Дуговые печи постоянного тока – высокоэффективные плавильные агрегаты / С.М. Нехамин, М.М. Крутянский, А.К. Филиппов // Литейщик России. – 2005. – N 5. – С. 25-26
146. Малиновский В.С. Дуговые печи постоянного тока нового поколения (ДППТНП) в сталеплавильном производстве / В.С. Малиновский, Л.В. Ярных // Труды 6 Конгресса сталеплавильщиков, Череповец, 17-19 окт., 2000. – М.: ОАО «Черметинформация». – 2001. – С. 213-220

147. Макаров А.Н. Анализ КПД дуг дуговых сталеплавильных печей постоянного и трехфазного тока / А.Н. Макаров, Р.А. Макаров, Р.М. Зуйков // Труды IV Международная конференция «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», Клязьма, 18-22 сент., 2000: МКЭЭ. – М.: Изд-во МЭИ. – 2000. – С. 397
148. Макаров А.Н. Анализ основных технико-экономических показателей работы дуговых печей постоянного и переменного тока / А.Н. Макаров, М.Б. Шимко, В.В. Острик // Электрометаллургия. – 2004. – N 3. – С. 5-9
149. Соيفер В.М. Анализ работы дуговых плавильных печей постоянного тока в литейных цехах / В.М. Соифер // Труды 8 Съезда литейщиков России, Ростов-на-Дону, 23-27 апр., 2007. Т. 2. Оборудование. Специальные способы литья. Изготовление форм и стержней. Средства контроля. Управление производством. Компьютерные технологии. Экономика. Экология. Подготовка кадров. Ростов. – 2007. – С. 66-70
150. Bergman K. Twin-cathode DC EAF concepts and results at Hylsa, Mexico / K. Bergman, R. Gonzales, M.A. Pedroza, M. Herrera // Rapp. Journees siderurgiques internationales ATS 2000, Paris, 13 dec., 2000 Rev. met. (France). – 2001. – N 1. – С. 55-62
151. Prichard Leroy C. First operational results at the new SeverCorr mini-mill, USA / C. Prichard Leroy, Stephan Kramer, Christoph Klein, Jurgen Muller // MPT Int. – 2008. – N 4. – С. 52-54, 56, 58, 60-61
152. Каплун М.Я. Подовые электроды дуговых печей постоянного тока / М.Я. Каплун // Электрометаллургия. – 2008. – N 9. – С. 21-25
153. Zinurov I.Yu. The new bottom electrode for DC electric arc furnaces / I.Yu. Zinurov // MPT Int. – 2000. – N 3. – С. 81
154. Каплун М.Я. Подовые электроды плавильных печей / М.Я. Каплун, Н.В. Кобря // Электротехническая промышленность, Сер. Электротермия. – 1983. – Вып. 4. – С. 9-10
155. Каплун М.Я. Подовые электроды плавильных печей / М.Я. Каплун, Н.В. Кобря // Электротехническая промышленность, Сер. Электротермия. – 1983. – Вып. 6. – С. 27-29
156. Степанова В.Ю. Подові електроди (короткий огляд) / В.Ю. Степанова // Спеціальна металургія: вчора, сьогодні, завтра: 36 наук. робіт студентів і випускників кафедри ФХОТМ. – Київ: Політехніка, 2007. – С. 46-50
157. Xu Hai Mathematical model on heat transfer of water-cooling steel-stick bottom electrode of DC electric are furnace / Hai Xu, Zhi Wen, Hongxiang Zhu, Xiao Liu, Hongzhi Shi // J. Univ. Sci. and Technol. Beijing, 2002. – N 5. – С. 338-342

158. Liu X. Melting mechanism of water-cooled billet-type bottom electrode of direct current arc furnace: a numerical approach / X. Liu, J.P. Zhou, H.Z. Shi, Y.L. Yang, B.Q. Yang, A.M. Hu, Z.H. Du, F. Yuan, Y.P. Wang // *Met. and Mater. Trans. B*. 2008. – N 5. – С. 713-724

159. Pavlicevic M. The Danieli competitive solution for DC electric arc bottom electrode / M. Pavlicevic, A. Poloni, B. Matijasevic, C. Bassi // 7 European Electric Steelmaking Conference, Venice, 26-29 May, 2002: Proceedings. Milano: AIM. – 2002. – Vol. 2. – С. 2/365-2/375

160. Патон Б.Е. Электрошлаковая технология в производстве биметаллических заготовок / Б.Е. Патон, В.Я. Саенко, Л.Б. Медовар и др. // *Современная электрометаллургия*. – 2004. – № 2. – С. 8-11

161. Патон Б.Е. Современные достижения ИЭС им. Е.О. Патона в области сварки и родственных процессов / Б.Е. Патон // *Современная электрометаллургия*. – 2004. – № 2. – С. 3-18

162. Castillejos E.A.H. A thermal study to improve the lifetime of billet-type bottom electrodes of DC electric arc furnaces. / E.A.H. Castillejos, G.F.A. Acosta, C.M.A. Pedroza, G.M.A. Herrera // Pt I. Melting of the metallic charge, *Iron and Steelmaker*. – 2001. – N 10. – С. 61-71

163. Liu X. Melting mechanism of water-cooled billet-type bottom electrode of direct current arc furnace: a numerical approach / X.Liu, J.Zhou, H.Shi et al // *Metallurgical and materials transactions B*. – October 2008. – № 39B. – P. 713-724

164. Тищенко П.И. Подовый электрод с жидкометаллическим теплоносителем для дуговой печи постоянного тока / П.И. Тищенко, С.Н. Тимошенко, С.Ю. Пасечник, А.П. Тищенко, А.Ю. Пасечник // *Наукові праці ДонНТУ, Металургія*. – 2011. – Випуск 12 (177). – С. 164-170

165. Ushio M. Mathematical modelling of flow field and heat transfer in high-current arc discharge / M. Ushio, J. Szekely, and C.W. Chang // *Ironmaking and Steelmaking*. – 1981. – No. 6. – P. 279-286.

166. Szekely J. Heat-transfer fluid flow and bath circulation in electric arc furnaces and dc plasma furnaces / J. Szekely, J. McKelliget and M. Choudhary // *Ironmaking and Steelmaking*. – 1983. – Vol. 10, N 4. – P. 169-179

167. Ячиков И.М. Использование электровихревых течений для перемешивания жидкого металла в ванне ДППТ / И.М. Ячиков // *Труды 10 Конгресса сталеплавильщиков, Магнитогорск, 13-17 окт., 2008. – М.: 2009. – С. 340 - 346.*

168. Ячиков И.М. Математическое моделирование электровихревых течений в ванне расплава ДППТ / И.М. Ячиков // *Творческое наследие Б.И. Китаева: Труды Международной научно-практической конференции,*

Екатеринбург, 11-14 февр., 2009. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ. – 2009. – С. 313-319

169. Ячиков И.М. Моделирование объемных электромагнитных сил в ванне расплава ДППТ / И.М. Ячиков, В.Н. Манагаров // Вестн. СамГУ. – 2008. – N 6. – С. 330-340

170. Ячиков И.М. Моделирование течения жидкости в ванне дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков, Е.А. Крылов // Математика. Приложение математики в экономических, технических и педагогических исследованиях: Сборник научных трудов. Вып. 4. Магнитог. гос. техн. ун-т. Магнитогорск: МГТУ. – 2006. – С. 227-237

171. Ячиков И.М. Моделирование течения металла в ванне расплава дуговых печей постоянного тока / И.М. Ячиков, И.В. Портнова, А.Ф. Миляев // Электротехн. системы и комплексы. – 2002. – N 7. – С. 227-234

172. Ячиков И.М. Моделирование электровихревых течений в ванне расплава дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков // Инф. технол. в проектир. и пр-ве. – 2009. – N 1. – С. 42-48

173. Ячиков И.М. Моделирование электровихревых течений жидкого металла в ванне ДППТ / И.М. Ячиков // Metallurgia стали. Проблемы и решения: Материалы 3 Конгресса металлургов Урала, Челябинск, 2008. – Челябинск: Рекпол. – 2008. – С. 99-101

174. Ячиков И.М. Моделирование электровихревых течений расплава в ванне ДППТ с осесимметричным подовым электродом / И.М. Ячиков // Изв. вузов. Чер. Metallurgia. – 2010. – N 1. – С. 11-16

175. Ячиков И.М. Моделирование электромагнитных процессов в ванне расплава дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков, В.Н. Манагаров // Прогр. продукты и системы. – 2008. – N 3. – С. 81-83

176. Ячиков И.М. Моделирование электромагнитных процессов в электродуговых печах постоянного тока / И.М. Ячиков, О.И. Карандаева, Т.П. Ларина, И.В. Портнова // Магнитогорск: Изд-во МГТУ. – 2005. – 140 с.

177. Ячиков И.М. Моделирование электромагнитных процессов, протекающих в ванне расплава ДППТ / И.М. Ячиков, И.В. Портнова, В.Н. Манагаров // Сообщ. 2. Электрические характеристики ванны дуговой печи постоянного тока с двумя подовыми электродами Изв. вузов. Чер. metallurgia. – 2006. – N 11. – С. 23-26

178. Ячиков И.М. Моделирование электромагнитных процессов, протекающих в ванне сталеплавильной дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков, К.Н. Колокольцев // Международная научно-практическая конференция «Metallurgia России на рубеже XXI века», Новокузнецк, 15-18 ию-

ня, 2005: Сборник научных трудов. Т. 2. Новокузнецк: Изд-во СибГИУ. – 2005. – С. 34-41

179. Ячиков И.М. Моделирование электромагнитных сил в ванне дуговой печи постоянного тока с двумя подовыми электродами / И.М. Ячиков, В.Н. Манагаров, И.В. Портнова // Математика. Приложение математики в экономических, технических и педагогических исследованиях: Сборник научных трудов. Вып. 4. Магнитог. гос. техн. ун-т. Магнитогорск: МГТУ. – 2006. – С. 219-227

180. Ячиков И.М. Нестационарное электровихревое течение в ванне расплава при включении и отключении тока дуги / И.М. Ячиков // Инф. техн. в проектир. и пр-ве. – 2009. – N 2. – С. 79-83

181. Ячиков И.М. Пути интенсификации массопереноса в ванне дуговых печей постоянного тока / И.М. Ячиков, А.Ф. Миляев, И.В. Портнова // Энергосбережение, теплоэнергетика и металлургическая теплотехника: Сборник научных трудов. Магнитог. гос. техн. ун-т. Магнитогорск: Изд-во МГТУ. – 2003. – С. 16-20.

182. Ячиков И.М. Характер поведения объемных электромагнитных сил в ванне ДППТ при изменении токов через подовые аноды / И.М. Ячиков, И.В. Портнова, В.Н. Манагаров // Электротехнические системы и комплексы: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 14. Магнитогорск: МГТУ. – 2007. – С. 215-219

183. Ячиков И.М. Моделирование электровихревых течений в ванне дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков, О.И. Карандаева, Т.П. Ларина. – Монография. – Магнитогорск, ГОУ ВПО «МГТУ». – 2008. – 234 с.

184. Ячиков И.М. Электромагнитные силы в ванне дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков, В.М. Колокольцев, И.В. Портнова // Труды 9 Конгресса сталеплавильщиков, Старый Оскол, 17-19 окт., 2006. – М.: 2007. – С. 250-255

185. Ramirez Marco Modeling of a DC electric arc furnace - mixing in the bath / Marco Ramirez, Jonas Alexis, Gerardo Trapaga, Par Jonsson, John Mckelliget // ISIJ Int. – 2001. – N 10. – С. 1146-1155

186. Смирнов С.А. Математическое моделирование электромагнитного перемешивания жидкой стали в дуговой печи постоянного тока / С.А. Смирнов, В.В. Калаев, С.М. Нехамин, М.М. Крутянский, С.Н. Колгатин, И.С. Нехамин // Теплофизика высоких температур. – 2010. – N 1. – С. 74-83

187. Ramirez M. Effects of the Arc, Slag and Bottom bubbling of argon on the fluid flow and heat transfer of a DC EAF Bath / M. Ramirez, G. Trapaga, J. Alexis, P. Jonsson // Part II, Electric Furnace Conference Proceedings. – 1999. – P. 751-761

188. Ramirez M. Fluid flow and heat transfer in steel or steel/slag baths of a DC electric arc furnace under the influence of the arc and gas injection / M. Ramirez, G. Trapaga, J. McKelliget // Paper presented at the Brimacombe Memorial Symposium, Vancouver. – 2000. – British Columbia, Canada. – P. 156-166
189. Ogasawara Takuma Flow of conducting liquid around two nonconducting particles in DC electromagnetic field and the electromagnetic migration force / Takuma Ogasawara, Noboru Yoshikawa, Shoji Taniguchi, Toshihumi Asai // Met. and Mater. Trans. B. – 2004. – N 5. – С. 847-855
190. Henning B. DC furnace containment vessel design using computational fluid dynamics / B. Henning, M. Shapiro, L.A. le Grange // Proceedings: Tenth International Ferroalloys Congress, INFACON X: «Transformation through Technology», 1-4 February 2004, Cape Town, South Africa. – 2004. – P. 565-574
191. Ячиков И.М. Электровихревые течения в ванне расплава ДППТ при включении и отключении тока дуги / И.М. Ячиков // Автоматизация технологических и производственных процессов в металлургии: Межвузовский сборник научных трудов. Магнитогорск: МГТУ. – 2009. – С. 66-72
192. Таблицы физических величин. Справочник. // Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат. – 1976. – 1008 с.
193. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Издание 5-е. – Т. VI. Гидродинамика. – 2006. – 736 с.
194. Повх И.Л. Магнитная гидродинамика в металлургии / И.Л. Повх, А.Б. Капуста, Б.В. Чекин. – М.: Металлургия. – 1974. – 240 с.
195. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев: Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1978. – 463 с.
196. Ватажкин А.Б. Магнитогидродинамические течения в каналах / А.Б. Ватажкин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. – М.: Наука. – 1970. – 672 с.
197. Калихман Л.Е. Элементы магнитной гидродинамики / Л.Е. Калихман. – М.: Атомиздат. – 1964. – 423 с.
198. Кирко И.М. Жидкий металл в электромагнитном поле / И.М. Кирко. – Л.: Энергия, 1964. – 160 с.
199. Саттон Дж. Основы технической магнитной гидродинамики: Пер. с англ. / Дж. Саттон, А. Шерман. – М.: Мир. – 1968. – 492 с.
200. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики: Пер. с англ. / Дж. Шерклиф. – М.: Мир. – 1967. – 320 с.
201. Вулис Л.А. Теория и расчет магнитогидродинамических течений / Л.А. Вулис, А.Л. Генкин, Б.А. Фоменко. – М.: Атомиздат. – 1971. – 384 с.
202. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика Пер. с англ. / Т. Каулинг. – М. – 1959. – 132 с.

203. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит. – 1950. – 678 с.
204. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: «Наука». – 1974. – 712 с.
205. Теория подобия в технической магнитной гидродинамике / И.Л. Повх // Труды Ленинградского политехнического института. – Л. – 1961. – № 217. – С. 83-94.
206. Левич В.Г. Курс теоретической физики / В.Г. Левич, Ю.А. Вдовиным, В.А. Мямлиным. – Изд. 2-е. – М. – 1969. – Т. 1. – 912 с.
207. Wang F. Numerical study of dc arc plasma and molten bath in dc electric arc furnace / F. Wang, Z. Jin, Z. Zhu // Ironmaking and Steelmaking. – 2006. – Vol 33, N 1. – P. 39-44
208. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат. – 1984. – 119 с.
209. Оран Э. Численное моделирование реагирующих потоков / Э. Оран, Дж. Борис. – М.: Мир. – 1990. – 661 с.
210. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – Том 2. – М.: Мир. – 1990. – 384 с.
211. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер. – М.: Мир. – 1991. – Т.1. – 502 с.
212. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер. – М.: Мир. – 1991. – Т.2. – 552 с.
213. Trif D. Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics / D. Trif, T. Petrila. – Boston: Springer Science Business Media Inc. – 2005. – 438 p.
214. Finlayson B.A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles / B.A. Finlayson. – Academic, New York. – 1972. – 412 p.
215. Зейферт Г. Вариационное исчисление в целом 2-е изд. / Г. Зейферт, В. Трельфалль. – М.: РХД. – 2000. – 161 с.
216. Петров Ю.П. Из истории вариационного исчисления и теории оптимальных процессов / Ю.П. Петров // Историко-математические исследования. – М.: Наука. – 1990. – № 32/33. – С. 53-73
217. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ / Р. Галлагер. – М.: Мир. – 1984. – 428 с.
218. Деклу Ж. Метод конечных элементов: Пер. с франц / Ж. Деклу. – М.: Мир. – 1976. – 96 с.

219. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир. – 1975. – 542 с.
220. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир. – 1986. – 318 с.
221. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене / А.А. Приходько. – Киев: Наукова думка. – 2003. – 379 с.
222. Introduction to CD-adapco / Copyright CD-adapco, 2011: <http://www.cd-adapco.com/about/index.html><http://www.cd-adapco.com>
223. Области применения flowvision / flowvision: <http://www.flowvision.ru/content/view/16/26/lang,russian/>
224. CFD Software: FLOW-3D Overview / Copyright 2000 - 2011 Flow Science, Inc: http://www.flow3d.com/flow3d/flow3d_over.htmlhttp://www.flow3d.com/flow3d/flow3d_over.html
225. Multiphysics Solutions / ANSYS, Inc., 2011: <http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Multiphysics>
226. ANSYS CFX / CFX Berlin Software GmbH: <http://www.cfx-berlin.de/de/software/cfx/index.html>
227. COMSOL Multiphysics / COMSOL, 1998-2011: <http://www.comsol.com/products/multiphysics>
228. Казак О.В. Моделирование электровихревых течений в металлургических печах с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н.Семко // Тези Другої науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка», Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ 29-30 вересня, 2010 р. – 2010. – С. 19-20
229. Казак О.В. Электровихревое движение расплава в печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Том 84, №1. – С. 209-217
230. Казак О.В. Электровихревые течения в осесимметричных сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Вісник донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки. – 2010. – Вип. 2. – С. 116-122
231. Kazak O. Modelling Vortex Fields in Metal Smelting Furnaces / O. Kazak, O. Semko // The International Journal of Multiphysics. – 2010. – Vol. 4, N 4. – P. 351-358
232. Казак О.В. Моделирование электровихревых полей в металлургических печах / О.В. Казак, А.Н. Семко // Математичне моделювання. – 2009. – №2(21). – С. 48-53
233. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD / D.C. Wilcox. – DCW Industries Inc, 1993. – 477 p.

234. Versteeg H.K. Introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method / H.K. Versteeg, W. Malalasekera. – Longman, 1995. – 267 p.
235. Казак О.В. Электровихревые поля в сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Вісник донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки. – 2010. – Вип. 1. – С. 118-125.
236. Kazak O. Modelling Vortex Fields in Metal Smelting Furnaces / O. Kazak, O. Semko // The International Journal of Multiphysics. – 2010. – Vol. 4, N 4. – P. 351-358.
237. Казак О.В. Особенности электровихревого движения расплава в сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Математическое моделирование в технике и технологиях (Харьков) . – 2011, № 13 . – С. 114-116.
238. Latest Technological Achievements / DANIELI inc.: <http://www.danieli.com/technology/Latest-Technological-Achievements>
239. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене. - Киев: Наукова думка, 2003. - 379 с.
240. ANSYS: «Theory Reference. Electromagnetic Field Fundamentals. Ninth Edition» / ANSYS inc. // Release 9, Pittsburgh. – 2008. – 135 p.
241. CFX: «11.0 USER MANUAL – Solver Modelling, Multiphase Flow Modelling»/ ANSYS CFX inc. // Release 11.0, Pittsburgh. – 2008. – 150 p.
242. <http://www.fluent.com/software/fluent/index.htm>
243. <http://www.cd-adapco.com>
244. <http://www.flowvision.ru/>
245. <http://www.flow3d.com/>
246. <http://www.tcg-hsv.com>
247. COMSOL Multiphysics Version 3.5: «Modeling guide – COMSOL Multiphysics Modeling Guide» / COMSOL inc. // USA, Boston. – 2008. – 503 p.
248. O. Kazak, O. Semko Electro vortex field in DC arc steel making furnaces with bottom electrode // Ironmaking and Steelmaking. – 2011. – Vol. 38, N 4. – P. 273-278.
249. G. Gensini, M. Pavlicevic. Cooled bottom electrode for a direct current electric furnace. Patent US 5651024.

250. Berger H., Mittag P., Steins J. Bottom electrode for a metallurgical vessel. Patent US 5529598.

251. Бредшоу П. Турбулентность / П. Бредшоу // М.: «Машиностроение». – 1980. – 343 с.

252. Kumar A. Optimal configuration of blast furnace slag runner to reduce fluid flow stresses at wall using mathematical modeling / A. Kumar, S.K. Ajmani and A.R. Pal // Ironmaking and Steelmaking. – 2010. – Vol. 37, No 1. – P. 9-14.