# Вісник Донецького університету



НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

*Заснований у 1997 році*

## *Серія А*
## природничі науки

1/2003

# Вісник Донецького університету

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

ЗАСНОВАНИЙ У 1997 РОЦІ

*Серія А.* **Природничі науки**

**№1/2003**


## З М І С Т


***Математика***

Бондарєв Б.В., Селяков К.Б. Про ймовірність відхилень оцінки параметру авторегресії першого порядку при випадковій кількості спостережень, якщо похибки задовольняють умові Крамера (випадок $|\beta|<1$) 7

Шурко Г.К., Шурко І.Л. Експоненціальні поля мартингального типу і заміна міри 12

Лиманський В.В. Будова вільних множень на деяких локально кінцевих многовидах груп 17

Лавренко М.І. Групова інваріантність двозначної логіки. І 22

Степанищева А.О. Асимптотичні властивості оцінки функції інтенсивності маркірованого пуассонового поля 31

Березін В.Т. Коваріантні знакові модифікації в градуйованому численні 40

***Механіка***

Михайлов А.П., Узбек Є.К. Про регулярні прецесії гіростату під дією потенціальних гіроскопічних сил 48

Калоєров С.О., Баєва А.І. Двомірна задача електропружності для тіла з п'єзоелектричними включеннями 53

Калоєров С.О., Глущенко Ю.О. Наближений метод визначення електропружного стану анізотропного півпростору з порожнинами та тріщинами 60

Кривень В.А., Сулим Г.Т., Яворська М.І. Пластичне відшаровування при поздовжньому зсуві періодичних систем жорстких тонких включень 66

Фільштінський Л.О., Ібеда А. Стаціонарний хвильовий процес в пружному шарі з порожниною 72

Дем'яненко А.Г. До проблеми динаміки підкріплених циліндричних оболонок у полі сил інерції рухомих навантажень 80

Каюк Я.Ф., Шекера М.К. Нелінійні коливання тіл обертання змінної маси 84

Шульга М.О., Богданов С.Ю. Чисельне моделювання вимушених коливань підкріплених конічних оболонок при нестаціонарних навантаженнях 89

Шульга В.М., Шульга О.М. Чисельний спосіб аналізу дисперсії осесиметричних хвиль в ортотропному циліндрі з рідиною 94

Карлаш В.Л. Електропружні коливання й уточнена формула коефіцієнта передачі плоского пластинкового п'єзотрансформатора 98

Зеленський А.Г. Метод збурень пружних властивостей в некласичній теорії згинання анізотропних оболонок 103

Чернишов Г.М., Козинцев В.М., Попов О.Л., Антонов О.О., Пономарьов І.І. Лазерний інтерферометричний спосіб оцінки технологічних напруг в деформуємих твердих тілах 109

Алтухова М.Л., Камишан В.В., Конарєв В.В., Федотов С.М. Вплив напружено-деформованого стану масиву на його проникливість в околі тріщини гідророзриву 114

Зальотов В.В., Камишан В.В., Конарєв В.В., Мануйленко Р.І., Хапілова Н.С. Оцінка кількості метану, що виділяється у вертикальну тріщину гідророзриву 118

Макаренков Є.А., Сясєв А.В. Розрахунково-експериментальне дослідження термопружного стану просторових залізобетонних фундаментних конструкцій 122

Веселовський В.Б., Клим В.Ю. Температурні поля елементів конструкцій, що розігріваються внаслідок високочастотного циклічного навантаження 127

Ключникова В.Г., Проценко О.П. Про особливості динамічних характеристик криволінійних трубопроводів просторової конфігурації 131

Ткаченко Н.Є., Ткаченко С.Є. Два режими руху дисперсійної суміші 134

Кононов Ю.М. Вільні коливання пружних платівок на вільній та внутрішній поверхнях двошарової рідини 139

Зенін О.К., Лашин А.В., Білоусов В.В., Кір'якулов Г.С., Метлова О.Л. Математичне моделювання процедури балонної ангіопластики 143

Русанова О.О., Семко О.М. Моделювання нестаціонарної кавітації в рідині 148

Коваленко А.О., Соколов В.І., Кондауров Є.М., Дядічев К.М. Статика та динаміка об'ємного гідравлічного приводу вентилятора охолоджуювачого пристрою транспортної машини 157

Коловандін Б.А., Болонов М.І. Про турбулентну течію електропровідної рідини із звішеними частинками при наявності електричного та магнітного полів 161

Ступін О.Б., Асланов П.В., Фоменко С.О. Зниження турбулентного тертя домішками міцелоутворюючих поверхнево-активних речовин 168

Погребняк В.Г., Федоркіна І.А. Зменшення ефекту зниження опору течії рідини при підведенні полімерного розчину в прикордонний шар пожежного рукава 176

Ступін О.Б., Бруяцкий Є.В., Оверко В.С., Дмитренко М.О. Чисельне дослідження полів концентрації біля перешкоди в умовах термічних інверсій атмосфери 180

Недопьокін Ф.В., Меліхов В.М., Білоусов В.В., Кондратенко В.М. Математична модель теплофізичних процесів у затвердиваючому композитному злитку 184

Рибалов А.А., Губинський В.Й. Теплообмін при прискореному охолодженні гарячого прокату 189

Жуганські Є.-А., Кінаш Р.І., Копилов О.Є. Аеродинамічні дослідження системи з трьох колових циліндрів 194

Друс А.Ю., Поляков В.Ф., Семикін С.І. Моделювання розтікання електричного струму у ртутній ванні та оцінка виділення джоулева тепла 199

Іщенко А.В. Моделювання нестаціонарних процесів осадження порошкового матеріалу при детонаційному напиленні 202

***Фізика***

Шевченко І.М., Солонський Ю.М., Крижанівський В.Г. Моделювання планарного транзистора у циліндричній системі координат 206

Данилов В.В., Іванов С.В. Дослідження фізичної реалізуємості структурних елементів акустооптичних пристроїв 214

Кривошеєв Я.М., Бажин А.І., Петренко О.Г., Дмитренко В.Ю. Термолюмінісценція цинк – сульфідних люмінофорів у випадку загальної кінетики свічення 224

Єремейченкова Ю.В., Метлов Л.С., Морозов О.Ф. Солітони у картині теплової рівноваги нелінійних ціпочок 229

Березін В.Т. Градуйоване неповне афінне розширення групи Лоренца у В-моделі об'єднання елементарних частинок 234

Федоров С.А., Румянцев В.В. Гіротропія молекулярних кристалів в умовах одновісної деформації 241

Кушнір М.П. Про корозійну стійкість сталі 20 після азотування та послідуючого її обезводнення 247

Сорочан А.Г. J- кореляційний метод пеленгації при обробці псевдошумового сигналу 249

Жиров Г.І., Гольцова М.В., Карімова О.О. Виявлення границь зерен на поверхні β– и α–гідридів паладію внаслідок прискореного насичення газоподібним воднем 255

***Хімія***

Бутюгін О.В., Зубкова Ю.М., Узденніков М.Б., Гнеденко М.В. До питання взаємозв'язку структури та властивостей вугілля. Повідомлення 2. ІК- спектроскопія вихідного бурого вугілля, матриці та гуматів 261

Мельніченко В.І., Манько К.І., Бовкуненко О.П. Кінетика сополімерізації метилметакрилату з фторвмісним мономером 264

Горохов Є.В., Висоцький Ю.Б., Корольов В.П., Сохіна С.І., Шевченко О.М., Селютин Ю.В. Іден-кумаронові смоли та синтетичні жирні кислоти у модифікованих протикорозійних плівках 267

Гнеденко М.В. Сорбційні властивості бурого вугілля відносно до аніонних барвників 271

***Біологія***

Зенін О.К., Цитрін А.Г., Білоусов В.В., Кір'якулов Г.С., Неудачина К.А. Спосіб визначення всличини залишкових деформацій порожнього біологічного об'єкта in vitro 274

Білоусов В.В., Цитрін А.Г., Зенін О.К., Лашін А.В., Неудачина К.А., Метлова О.Л. Біомеханічні властивості загальних сонних артерій 278

Гончаренко І.В. Використання центроїдного методу в ординації угруповань 281

Лихолат Ю.В. Водний обмін дерноутворюючих трав, що зростають у штучних фітоценозах 288

Чирва Г.І. Вплив адаптації до холоду і ізопропилнорадреналіна на значення „установочної точки" в системі терморегуляції 291

Дев'яткова Ю.А. Стан $\alpha_1$-адренергіченої реакції семявиносящого протоку білих щурів при вираженому тиреотоксикозі 295

Риктор І.А., Антонова А.Л., Зубкова Ю.М. Використання гумату амонію на овочевих культурах 298

Приседський Ю.Г. Закономірності пошкодження деяких видів деревних та чагарникових рослин за умов комплексного забруднення повітря сполуками фтору, сірки та азоту 304

***Екологія та техногенна безпека***

Висоцький С.П., Фаткулина Г.В. Технології очищення води для систем питного та промислового водопостачання 312

Блакберн А.А. Структура та характер розміщення ПЗФ України і окремих її регіонів (Порівняльні аспекти). Частина II. Аналіз територіальної структури природних територій, що охороняються особливо (ПТОО) вищого рангу природно-заповідного фонду України відповідно до фізико-географічного районування її території 317

Басенкова В.Л., Курбанова О.Р., Бориско Н.А. Моніторинг важких металів у хлібобулочних виробах 325

Швіндлєрман С.П. Царства природи в світі вчення В.І. Вернадського про біосферу 329

Швіндлєрман С.П., Дмитрієва Н.А. Екологічні аспекти культури 335

***Системи та процеси керування***

Борухсон В.Є. Автоматизована система інтерпретації виробничих ситуацій на прикладі мукомольного заводу 338

Сенченко О.С. Визначаюча система для частково-визначених автоматів 345

Сапунов С.В. Побудова контрольних експериментів для детермінованих графів 351

Баркалов О.О., Ель-Джейбі Ахмад Камаль, Красичков А.А. Синтез пристроїв управління перетворенням наборів мікрооперацій в коди станів 355

***Короткі повідомлення***

Товстоліс О.В. Нерівність типу Бернштейна та нерівність різних метрик в просторах Харді 359

Очаковська О.А. Відображення з властивістю зберігання гіперболічної міри 365

# Вестник Донецкого университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В 1997 ГОДУ

*Серия А.* **Естественные науки**

№1/2003


**СОДЕРЖАНИЕ**


***Математика***

Бондарев Б.В., Селяков К.Б. Про вероятность отклонений оценки параметра авторегрессии первого порядка при случайном числе наблюдений, если ошибки удовлетворяют условию Крамера (случай $|\beta|<1$) 7

Шурко Г.К., Шурко И.Л. Экспоненциальные поля мартингального типа и замена меры 12

Лиманский В.В. Строение свободных умножений нанекоторых локально конечных многообразиях групп 17

Лавренко Н.И. Групповая инвариантность двузначной логики. I 22

Степанищева А.А. Асимптотические свойства оценки функции интенсивности маркированного пуассоновского поля 31

Березин В.Т Ковариантные знаковые модификации в градуированном исчислении 40

***Механика***

Михайлов А.П., Узбек Е.К. Орегулярных прецессиях гиростата под действием потенциальных гироскопических сил 48

Калоеров С.А., Баева А.И. Двумерная задача электроупругости для тела с пьезоэлектрическими включениями 53

Калоеров С.А., Глущенко Ю.А. Приближенный метод определения электроупругого состояния анизотропного полупространства с полостями и трещинами 60

Кривень В.А., Сулим Г.Т., Яворская М.И. Пластическое отслаивание при продольном сдвиге периодических систем жестких тонких включений 66

Фильштинский Л.А., Ибеда А. Стационарный волновой процесс в упругом слое с полостью 72

Демьяненко А.Г. К проблеме динамики подкрепленных цилиндрических оболочек в поле сил инерции подвижных нагрузок 80

Каюк Я.Ф., Шекера М.К. Нелинейные колебания тел вращения переменной массы 84

Шульга М.А., Богданов С.Ю. Численное моделирование вынужденных колебаний подкрепленных конических оболочек при нестационарных нагрузках 89

Шульга В.М., Шульга А.М. Численный способ анализа дисперсии осесимметричных волн в ортотропном цилиндре с жидкостью 94

Карлаш В.Л. Электроупругие колебания и уточненная формула коэффициента передачи плоского пластинчатого пьезотрансформатора 98

Зеленский А.Г. Метод возмущения упругих свойств в неклассической теории изгиба анизотропных оболочек 103

Чернышев Г.Н., Козинцев В.М., Попов А.Л., Антонов А.А., Пономарев И.И. Лазерный интерферометрический способ оценки технологических напряжений в деформируемых твердых телах 109

Алтухова М.Л., Камышан В.В., Конарев В.В., Федотов С.Н. Влияние напряженно-деформированного состояния массива на его проницаемость в окрестности трещины гидроразрыва 114

Залетов В.В., Камышан В.В., Конарев В.В., Мануйленко Р.И., Хапилова Н.С. Оценка количества метана, выделяющегося в вертикальную трещину гидроразрыва 118

Макаренков Е.А., Сясев А.В. Расчетно-экспериментальное исследование термонапряженного состояния пространственных железобетонных фундаментных конструкций 122

Веселовский В.Б., Клим В.Ю. Температурные поля элементов конструкций, разогревающихся вследствие высокочастотного циклического нагружения 127

Ключникова В.Г., Проценко О.П. Об особенностях динамических характеристик криволинейных трубопроводов пространственной конфигурации 131

Ткаченко Н.Е., Ткаченко С.Е. Два режима движения дисперсионной смеси 134

Кононов Ю.Н. Свободные колебания упругих пластинок, находящихся на свободной и внутренней поверхностях двухслойной жидкости 139

Зенин О.К., Лашин А.В., Белоусов В.В., Кирьякулов Г.С., Метлова О.Л. Математическое моделирование процедуры балонной ангиопластики 143

Русанова О.А., Семко А.Н. Моделирование нестационарной кавитации 148

Коваленко А.А., Соколов В.И., Кондауров Е.Н., Дядичев К.М. Статика и динамика объемного гидравлического привода вентилятора охлаждающего устройства транспортной машины 157

КолованднБ.А., Болонов Н.И. О турбулентном течении электропроводной жидкости со взвешенными частицами при наличии электрического и магнитного полей 161

Ступин А.Б., Асланов П.В., Фоменко С.А. Снижение турбулентного трения добавками мицеллообразующих поверхностно-активных веществ 168

Погребняк В.Г., Федоркина И.А. Уменьшение эффекта снижения сопротивления течения жидкости при подводе полимерного раствора в пограничный слой пожарного рукава 176

Ступин А.Б., Бруяцкий Е.В., Оверко В.С., Дмитренко Н.А. Численное исследование полей концентрации возле препятствия в условиях термических инверсий атмосферы 180

Недопекин Ф.В., Мелихов В.М., Белоусов В.В., Кондратенко В.М. Математическая модель теплофизических процессов в затвердевающем композитном слитке 184

Рыбалов А.А., Губинский В.Й. Теплообмен при ускоренном охлаждении горячего проката 189

Журански Є.-А., Кинаш Р.И., Копылов О.Е. Аэродинамические исследования системы из трех круговых цилиндров 194

Дреус А.Ю., Поляков В.Ф., Семыкин С.И. Моделирование растекания электрического тока в конвертерной ванне и оценка выделения джоулева тепла 199

Зинченко А.В. Моделирование нестационарных процессов осаждения порошкового материала при детонационном напылении 202


©Донецкий национальный университет

***Физика***

Шевченко И.Н., Солонский Ю.Н., Крыжанвский В.Г. Моделирование планарного транзистора в цилиндрической системе координат 206

Данилов В.В., Иванов С.В. Исследование физической реализуемости структурных элементов акустооптических устройств 214

Кривошеев Я.М., Бажин А.И., Петренко А.Г., Дмитренко В.Ю. Термолюминесценция цинк – сульфидных люминофоров в случае общей кинетики свечения 224

Еремейченкова Ю.В., Метлов Л.С., Морозов А.Ф. Солитоны в картине теплового равновесия нелинейных цепочек 229

Березин В.Т. Градуированное неполное аффинное расширение группы лоренца в В-модели объединения элементарных частиц 234

Федоров С.А., Румянцев В.В. Гиротропия молекулярных кристаллов в условиях одноосной деформации 241

Кушнир М.П. О коррозионной стойкости стали 20 после азотирования и последующего ее обезводораживания 247

Сорочан А.Г. J–корреляционный метод пеленгации при обработке псевдошумового сигнала 249

Жиров Г.И., Гольцова М.В., Каримова Е.А. Выявление границ зерен на поверхности β– и α–гидридов палладия вследствие ускоренного насыщения газообразным водородом 255

***Химия***

Бутюгин А.В., Зубкова Ю.Н., Узденников Н.Б., Гнеденко М.В. К вопросу взаимосвязи структуры и свойств угля. сообщение 2. ИК - спектроскопия исходного бурого угля, матрицы и гуматов 261

Мельниченко В.И., Манько К.И., Бовкуненко О.П. Кинетика сополимеризации метилметакрилата с фторсодержащим мономером 264

Горохов Е.В., Высоцкий Ю.Б., Королев В.П., Сохина С.И., Шевченко О.Н., Селютин Ю.В. Инден-кумароновые смолы и синтетические жирные кислоты в модифицированных противокоррозионных пленках 267

Гнеденко М.В. Сорбционные способности бурого угля по отношению к анионным красителям 271

***Биология***

Зенин О.К., Цитрин А.Г., Белоусов В.В., Кирьякулов Г.С., Неудачина Е.А. Способ определения величины остаточных деформаций полого биологического объекта in vitro 274

Белоусов В.В., Цитрин А.Г., Зенин О.К., Лашин А.В., Неудачина Е.А., Метлова О.Л. Биомеханические свойства общих сонных артерий 278

Гончаренко И.В. Использование центроидного метода в ординации сообществ 281

Лихолат Ю.В. Водный обмен дернообразующих трав, произрастающих в искусственных фитоценозах 288

Чирва Г.И. Влияние адаптации к холоду и изопропилнорадреналина на значение "установочной точки" в системе терморегуляции 291

Девяткова Ю.А. Состояние $\alpha_1$-адренергической реакции семявыносящего протока белых крыс при выраженном тиреотоксикозе 295

Рыктор И.А., Антонова А.Л., Зубкова Ю.Н. Использование гумата аммония на овощных культурах 298

Приседский Ю.Г. Закономерности повреждаемости некоторых видов древесных и кустарниковых растений в условиях комплексного загрязнения воздуха соединениями фтора, серы и азота 304

***Экология и техногенная безопасность***

Высоцкий С.П., Фаткулина А.В. Технологии очистки воды для систем питьевого и промышленного водоснабжения 312

Блакберн А.А. Структура и характер размещения ПЗФ Украины и отдельных ее регионов (сравнительные аспекты). Часть II. Анализ территориальной структуры ООПТ высших категорий ПЗФ Украины согласно физико-географическому районированию ее территории 317

Басенкова В.Л., Курбанова О.Р., Бориско Н.А. Мониторинг тяжелых металлов в хлебобулочных изделиях 325

Швиндлерман С.П. Царства природы в свете учения В.И. Вернадского о биосфере 329

Швиндлерман С.П., Дмитриева Н.А. Экологические аспекты культуры 335

***Системы и процессы управления***

Борухсон В.Е. Автоматизированная система интерпретации производственных ситуаций на примере мукомольного завода 338

Сенченко А.С. Определяющая система для частичных автоматов 345

Сапунов С.В. Построение контрольных экспериментов для детерминированных графов 351

Баркалов А.А., Эль-Джейби Ахмад Камаль, Красичков А.А. Синтез устройств управления с преобразованием наборов микроопераций в коды состояний 355

***Краткие сообщения***

Товстолис А.В. Неравенство типа Бернштейна и неравенство разных метрик в пространствах Харди 359

Очаковская О.А. Отображения со свойством сохранения гиперболической меры 365

# Bulletin of Donetsk University

SCIENTIFIC JOURNAL

FOUNDED IN 1997

## *Series A.* Natural Sciences

№1/2003


CONTENTS


***Mathematics***

Bondarev B.V., Selyakov K.B. About the probability of parameter estimate's deviation in first order autoregressive scheme with random number of observations, if mistakes satisfy Kramer's condition (case $|\beta| < 1$) 7

Shurko G.K, Shurko I.L. Exponential martingale fields and substitution of a measure 12

Limansky V.V. Structure of free products on some locally finite varieties 17

Lavrenko N.I. Group invariance of two valued logic. I 22

Stepanistcheva A.A. Asymptotic properties of estimation function of intensity marked Poisson field 31

Berezin V.T. Covariant sign modifications in graded calculus 40

***Mechanics***

Mihaylov A.P., Uzbek E.K. About of gyrostats regular precessions under influence potential gyroscopic forces 48

Kaloerov S.A., Baeva A.I. Two dimension of electroelastic problem for a body with piezoelectric inclusions 53

Kaloerov S.A., Glustchenko Yu.A. The approached method of definition of an electroelastic state of anisotropic half-space with cavities and cracks 60

Krywen V.A., Sulym G.T., Yavorska M.I. Plastic sliding of periodic systems of rigid thin inclusions due to longitudinal shear loadings 66

Filshtinsky L.A., Ibeda A. Stationary wave process in the layer with cavity 72

Demyanenko A.G. To a problem of dynamics of the supported cylindrical shells in a field of forces of inertia of mobile loadings 80

Kayuk Ya.F., Shekera M.K. Nonlinear vibrations of the bodies of revolution of variable mass 84

Shulga M.A., Bogdanov S.Yu. Numerical simulation forced vibration stiffened conical shells with non-steady loading 89

Shulga V.M., Shulga A.M. Numerical way of the analysis of a dispersion axisymmetric waves in orthotropic the cylinder with a liquid 94

Karlash V.L. The electroelastic vibrations and improved formula of the transformation ratio of a planar piezoceramic transformer 98

Zelensky A.G. Method of perturbation of elastic properties in the nonclassical theory of curving of non – isotropic envelopes 103

Chernyshev G.N., Kozyntsev V.M., Popov A.L., Antonov A.A., Ponomarev I.I. Laser interferometric methods for determination of technological stresses at deformable solid bodies 109

Altuhova M.L., Kamyshan V.V., Konarev V.V., Fedotov S.N. The influence of the stressed-strained state of the rock mass on its permeability near crack of hydrofracture 114

Zaletov V.V., Kamyshan V.V., Konarev V.V., Manuylenko R.I., Hapilova N.S. The estimation of the quantity of the methane extracting to a hydrofracture crack 118

Makarenkov E.A., Syasev A.V Calculate-experimental research of thermo-stresses state for tree-dimensional ferroconcreting foundation constructions 122

Veselovsky V.B., Klim V.Yu. Temperature fields of elements of constructions which are warmed up owing to high-frequency cyclic load 127

Klyuchnikova V.G., Protsenko O.P. On pecurities of dynamic characteristics of curved pipelines in spatial configuration 131

Tkachenko N.E., Tkachenko S.E. Two motion modes of dispersing mixture 134

Kononov Yu.N. Free oscillations elastic plates, located on free and interior surfaces of two-layer liquid 139

Zenin O.K., Lashin A.V., Belousov V.V., Kiryakulov G.S., Metlova O.L. The mathematical simulation of procedure balloon angioplastic 143

Rusanova O.A., Semko A.N. Modeling of the unsteady cavitations 148

Kovalenko A.A., , Sokolov V.I., Kondaurov E.Y., Dyadichev K.M. Static and dynamics of a volumetric hydraulic drive of the vane of a refrigerator of the transport machines 157

Kolovandin B.A Bolonov N.I. About a turbulent flow electroconductive of a fluid with fluidized particles at presence of electrical and magnetic fields 161

Stupin A.B., Aslanov P.V., Fomenko S.A. Decrease of turbulent friction by the additives micella-constitutive surface-active substances 168

Pogrebnyak V.G., Fedorkina I.A. The decrease in the effect of drag reduction at the introduction of the polymer solution into the boundary layer of the fire hose 176

Stupin A.B., Bruyatskiy E.V., Overko V.S., Dmitrenko N.A. Numerical investigations of fields of concentration near a obstacles in requirements of thermal inverses of an atmosphere 180

Nedopekin F.V., Melihov V.M., Belousov V.V., Kondratenko V.M. Mathematical model of thermal processes in an indurating composite ingot 184

Rybalov A.A., Gubinskiy V.I. Heat exchange at the accelerated cooling of hot rolled metal 189

Juransky E.-A., Kinash P.И., Kopylov O.E. Aerodynamic investigations of system from three circular cylinders 194

Dreus A.Yu., Polyakov V.F., Semikin S.I. Model operation of a diffluence of an electric current in a converter bath and estimate of an electrocaloric effect 199

Zinchenko A.V. Numerical simulation of transient precipitation of powders in detonation coating processes 202


©Donetsk national university

***Physics***

Shevchenko I.N., Solonskiy Yu.N., Kryjanovskiy V.G. Model operation of the planar transistor in a cylindrical frame 206

Danilov V.V., Ivanov S.V. Investigation of physical realizability of building blocks of optical-acoustic devices 214

Krivosheyev Ya.M., Bajin A.I., Petrenko A.G., Dmitrenko V.Yu. Thermoluminescence zincum - sulpha of phosphors in f case of a general kinetics of glow 224

Eremeichenkova Yu.V., Metlov L.S., Morozov A.F. Solitons in the picture of thermodynamical equilibrium of nonlinear chains 229

Berezin V.T. Graded incomplete affine extension of the lorentz group in the B-model union of elementary particles 234

Fedorov S.A., Rumyantsev V.V. Gyrotropy of molecular crystals in requirements of uniaxial strain 241

Kushnir M.P. About rust resistance of steel 20 after nitriding and subsequent her dehydrogenization 247

Sorochan A.G. J-correlation method of the direction finding under processing of the pseudo-noise signal 249

Zhirov G.I., Goltsova M.V., Karimova E.A. Grain border appearance on the surface of β– and α– hydrides in result of accelerated saturation with gaseous hydrogen 255

***Chemistry***

Butyugin A.V., Zubkova Yu.N., Uzdennikov N.B., Gnedenko M.V. Toa question about interrelation of structure and properties of coal. Report 2. IR-spectrums of initial and residual coal, matrix and humates 261

Melnichenko V.I., Manko K.I., Bovkunenko O.P. Copolymerization kinetics of methylmetacrylate with fluorcontained monomer 264

Gorokhov E.V., Vysotsky Yu.B., Korolev V.P., Sohina S.I., Shevchenko O.N., Selyutin Yu.V. Modified antirust stuffs on the basis of indene coumarone resin and synthetic fatty acids 267

Gnedenko M.V. The adsorption abilities of the brown coal regarding of the anionic dyes 271

***Biology***

Zenin O.K., Citrin A.G., Belousov V.V., Kiryakulov G.S., Neudachina E.A. The way of definition of size of residual deformations of hollow biological object in vitro 274

Belousov V.V., Citrin A.G., Zenin O.K., Lashin A.V., Neudachina E.A., Metlova O.L. Mechanical properties of aa. caroticae communis 278

Goncharenko S.V. Use of centroid method for ordination of communities 281

Lykholat Yu.V. Water exchange of sod-forming cereals in the condition of industrial saturation 288

Chirva G.I. Influencing of adaptation to chill and isopropilnoradrenaline on value " of a customizing point " in system of thermal control 291

Devyatkova Yu.A. State of $\alpha_1$-adrenergic response of a "ductus ejaculatorius" white rats at the expressed thyrotoxicosis 295

Ryktor I.A., Antonova A.L., Zubkova Yu.N. Usage of humate of ammonium on vegetable cultures 298

Prisedsky Yu.G. Legitimacies damage of some species of arboreal and bushes plants in conditions of complex air pollution by compounds of fluorine, sulphur and nitrogen 304

***Ecology and technogenous security***

Vysotsky S.P., Fatkulina A.V. Waterfredtment technology for potable and industrial water preparation 312

Blackburn A.A. Structure and location of natural reserve fund of Ukraine and some of its regions (comparative aspects). Part II. Analysis of territorial structure for natural areas of special protection (NASP) of the highest rank of Ukrainian natural reserve fund (NRF) according to physico-geographical 317

Basenkova V.L., Kurbanova O.R., Borisko N.A. Monitoring of heavy metals in bread articles 325

Shvindlerman S.P. Empires of a nature in a light of the doctrine V.I. Vernadsky about a biosphere 329

Shvindlerman S.P., Dmitrieva N.A. Ecological aspects of culture 335

***Systems and processes of control***

Boruhson V.E. Automized system of interpretation of industrial situations on an example milling plant of a factory 338

Senchenko A.S. Defining system for partial automata 345

Sapunov S.V. Checking experiment derivation for deterministic graphs 351

Barkalov A.A., El-Djeybi Ahmad Kamal, Krasichkov A.A. The synthesis of control units with transformation of sets of microoperations in the codes of states 355

***Short papers***

Tovstolis A.V. Bernstein type inequality and different metrics inequality in Hardy spaces 359

Ochakovskaya O.A. Mappings with property of preserving of a hyperbolic measure 365

# М А Т Е М А Т И К А

УДК 519.21

## ПРО ЙМОВІРНІСТЬ ВІДХИЛЕНЬ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРУ АВТОРЕГРЕСІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ПРИ ВИПАДКОВІЙ КІЛЬКОСТІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ, ЯКЩО ПОХИБКИ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВІ КРАМЕРА (ВИПАДОК $|\beta|<1$)

*Б.В.Бондарєв, К.Б.Селяков.*

Нехай на повному ймовірностному просторі (Ω,F,P) є послідовність ( $\varepsilon_k$ , k = 1,2,...)-незалежних, однаково розподілених величин з середнім нуль, дисперсією 1 та невідомою функцією розподілу. Розглянемо скалярну процедуру авторегрессії першого порядку $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ , у якій $\beta$ - невідомий невипадковий параметр, котрий необхідно оцінити за спостереженнями $U_k$ , k=1,2,...; початкове значення $U_0=\varepsilon_0$ в загальному випадку також є випадковим елементом, стохастично незалежним від ( $\varepsilon_k$ , k=1,2,...). Будемо вважати, що $|\beta|<1$ .

Нехай $\beta_\xi$ - оцінка параметра $\beta$ , при умові, що кількість спостережень дорівнює $\xi+1$ , де $\xi$ є дискретна невід'ємна випадкова величина з розподілом $P\{\xi=k\}=p_k$ , $M\xi<+\infty$ , стохастично незалежна від ( $\varepsilon_k$ , k = 1,2,...). Легко переконатися, що $\beta_\xi$ , отримана методом найменших квадратів, має вид:

$$\beta_\xi=\frac{\sum_{k=1}^{\xi+1}U_kU_{k-1}}{\sum_{k=1}^{\xi+1}U_{k-1}^2}.$$

Метою даної роботи є побудова нерівностей зверху для ймовірності відхилення оцінки $\beta_\xi$ від оцінюваного параметру за зростаючий рівень для різних розподілів $\xi$ . На основі цих нерівностей легко отримувати довірчий інтервал для $\beta$ з наперед заданою надійністю накриття.

Теорема: *нехай випадкові похибки ( $\varepsilon_k$ , k = 1,2,...) такі, що* $M\varepsilon_k=0$ , $D\varepsilon_k=1$ , $M|\varepsilon_k|^m\le\frac{H^{m-2}m!}{2}$ , $m\ge 2$ *(де H деяка відома стала); відома апріорна оцінка параметру* $\beta$ , *тобто* $\exists\Lambda:|\beta|\le\Lambda<1$ , *тоді* $\forall R>0$ , $\forall\varepsilon:0<\varepsilon<\left(\sqrt{2}-1\right)$ *виконується нерівність*

$$P\left\{\sqrt{M\xi}\,|\beta_\xi-\beta|>R\right\}\le 2e^{-t}M\left(e^{-t}\right)^\xi+2\left[M\left(\exp\left\{-\frac{z}{2\sqrt{M\xi}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right)^\xi+\left(M\xi+1\right)\exp\left\{-z\sqrt{M\xi+2}\right\}\right]+$$

$$+2e^{\varepsilon^2}\left[c_1M\left(\exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)M\xi}\right\}\right)^\xi+\exp\left\{-R\varepsilon^2\sqrt{\frac{M\xi+1}{M\xi}}\right\}\right],$$

$$\text{де } z=\frac{\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2}\left[0.81+\frac{1}{\sqrt{1-\Lambda^2}}\right]^{-1},\ t=\frac{1}{48H^2}\left(2-\frac{\varepsilon^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}\right)^2,\ c_1=2\exp\left\{-\frac{z^2\left(2-z^2\right)}{4}\right\}.$$

Зауваження 1: надалі вважатимемо, що $z<1$ .

Зауваження 2: R вибираймо так, щоб $R(M\xi)\to+\infty, M\xi\to+\infty;\frac{R^2(M\xi)}{M\xi}\to 0, M\xi\to+\infty$ .

©Бондарєв Б.В., Селяков К.Б.

Зауваження 3: таким чином, дослідження поведінки ймовірності відхилення зводиться до вивчення поведінки виробничої функції у вказаних значеннях.

Доведення:

$$P\left\{\sqrt{M\xi}\left|\beta_\xi-\beta\right|>R\right\}=\sum_k P\left\{\sqrt{M\xi}\mid\beta_\xi-\beta|>R\right\}p_k=\sum_k P\left\{\sqrt{n+1}\mid\beta_\xi-\beta|>\frac{R\sqrt{n+1}}{\sqrt{M\xi}}\right\}p_k.$$

Згідно [1] отримаємо, що $P\left\{\sqrt{M\xi}\left|\beta_\xi-\beta\right|>R\right\}\le 2\sum_k exp\left\{-\left(\frac{R\sqrt{k+1}}{\sqrt{M\xi}}-1\right)\varepsilon^2\right\}p_k+$

$$+2\sum_k exp\left\{-(k+1)\frac{1}{48H^2}\left(2-\frac{\varepsilon^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}\right)^2\right\}p_k+2\sum_k(k+1)exp\left\{-\sqrt{k+1}\frac{\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2}\left[0.81+\frac{1}{\sqrt{(k+1)\left(1-\Lambda^2\right)}}\right]^{-1}\right\}p_k.$$

Розглянемо другий доданок. Нехай $t=\frac{1}{48H^2}\left(2-\frac{\varepsilon^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}\right)^2$, тоді $\sum_k exp\left\{-(k+1)t\right\}p_k=e^{-t}M\left(e^{-t}\right)^\xi$.

Тепер розглянемо третій доданок

$$\sum_k(k+1)exp\left\{-\sqrt{k+1}\frac{\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2}\left[0.81+\frac{1}{\sqrt{(k+1)\left(1-\Lambda^2\right)}}\right]^{-1}\right\}p_k\le\sum_k(k+1)exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}p_k,$$

де $z=\frac{\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2}\left[0.81+\frac{1}{\sqrt{1-\Lambda^2}}\right]^{-1}$; $\sum_k(k+1)exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}p_k=\sum_{k=0}^{[M\xi]}(k+1)exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}p_k+$

$$+\sum_{k=[M\xi]+1}^{\infty}(k+1)exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}p_k\le\sum_{k=0}^{[M\xi]}(k+1)exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}p_k+$$

$$+exp\left\{-z\sqrt{M\xi+2}\right\}\sum_{k=[M\xi]+1}^{\infty}(k+1)p_k\le\sum_{k=0}^{[M\xi]}(k+1)exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}p_k+(M\xi+1)exp\left\{-z\sqrt{M\xi+2}\right\}.$$

Зауважимо, що $exp\left\{-z\sqrt{k+1}\right\}=$

$$=exp\left\{-z\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}\right)-z\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}\right)-\ldots-z\left(\sqrt{k+[M\xi]-1}-\sqrt{k+[M\xi]}\right)-\sqrt{k+[M\xi]}\right\}\le$$

$$\le exp\left\{\frac{z}{2\sqrt{k+1}}+\frac{z}{2\sqrt{k+2}}+\ldots+\frac{z}{2\sqrt{k+[M\xi]-1}}-\sqrt{k+[M\xi]}\right\}\le$$

$$\le exp\left\{z\sqrt{k+[M\xi]-1}-z\sqrt{k}-z\sqrt{k+[M\xi]}\right\}\le exp\left\{-z\left(\sqrt{k+M\xi}-\sqrt{M\xi}\right)\right\}=exp\left\{-\frac{kz}{\sqrt{k+M\xi}+\sqrt{M\xi}}\right\}\le$$

$$exp\left\{-\frac{kz}{\sqrt{M\xi}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\},\text{ оскільки }\int_k^{k+1}\frac{dx}{2\sqrt{k+1}}\le\int_k^{k+1}\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Таким чином,

$$\sum_k(k+1)exp\left\{-\sqrt{k+1}\frac{\sqrt{1-\Lambda^2}}{8H^2}\left[0.81+\frac{1}{\sqrt{(k+1)\left(1-\Lambda^2\right)}}\right]^{-1}\right\}p_k\le$$

$$\le \sum_{k=0}^{[M\xi]} (k+1)\left( exp\left\{ -\frac{z}{\sqrt{M\xi\left(\sqrt{2}+1\right)}} \right\} \right)^k p_k + (M\xi+1)exp\left\{-z\sqrt{M\xi+2}\right\} \le$$

$$\le c_1 M\left[ exp\left\{ -\frac{z}{2\sqrt{M\xi}\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} \right]^{\xi} + (M\xi+1)exp\left\{-z\sqrt{M\xi+2}\right\},$$

оскільки $k+1 \le c_1 exp\left\{ \frac{zk}{2\sqrt{M\xi}\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\}$, де $c_1 = 2exp\left\{ -\frac{z^2\left(2-z^2\right)}{4} \right\}$.

Тепер перейдемо до першого доданку

$$\sum_k exp\left\{ -\left( \frac{R\sqrt{k+1}}{\sqrt{M\xi}} - 1 \right)\varepsilon^2 \right\} p_k = e^{\varepsilon^2} \sum_k exp\left\{ -\frac{R\varepsilon^2}{\sqrt{M\xi}}\sqrt{k+1} \right\} p_k \le$$

$$\le e^{\varepsilon^2} M\left[ exp\left\{ -\frac{R\varepsilon^2}{M\xi\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} \right]^{\xi} + exp\left\{ -R\varepsilon^2\sqrt{\frac{M\xi+1}{M\xi}} \right\}.$$

Доведення теореми завершено.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1: Нехай $\xi$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda$. $M\xi = \lambda \to +\infty, \lambda \to +\infty$, виробнича функція $p(x) = exp\{\lambda(x-1)\}$. Тоді

$$M\left(e^{-t}\right)^{\xi} = exp\{\lambda(exp\{-t\}-1)\}, M\left[ exp\left\{ -\frac{z}{2\sqrt{M\xi}\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} \right]^{\xi} = exp\left\{ \lambda\left( exp\left\{ -\frac{z}{2\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} - 1 \right) \right\} \le$$

$$\le exp\left\{ \lambda\left( 1 - \frac{z}{2\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{2}+1\right)} + \frac{z^2}{8\lambda\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - 1 \right) \right\} = exp\left\{ \frac{z^2}{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2} \right\} exp\left\{ -\frac{z\sqrt{\lambda}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\},$$

$$M\left[ exp\left\{ -\frac{R\varepsilon^2}{M\xi\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} \right]^{\xi} = exp\left\{ \lambda\left( exp\left\{ -\frac{R\varepsilon^2}{\lambda\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} - 1 \right) \right\} \le exp\left\{ -\frac{R\varepsilon^2}{\sqrt{2}+1} \right\} exp\left\{ \frac{R^2\varepsilon^4}{2\lambda\left(\sqrt{2}+1\right)^2} \right\}.$$

Приклад 2: Геометричний розподіл з параметром $p$.

$$M\xi = \frac{1-p}{p} \to +\infty, p \to 0,\ p(x) = \frac{p}{1-(1-p)x}.\ M\left(e^{-t}\right)^{\xi} = \frac{p}{1-(1-p)e^{-t}},$$

$$M\left( exp\left\{ -\frac{z}{2\sqrt{\frac{1-p}{p}}\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\} \right)^{\xi} = \frac{p}{1-(1-p)exp\left\{ -\frac{z\sqrt{p}}{2\sqrt{1-p}\left(\sqrt{2}+1\right)} \right\}} \le$$

$$\le \frac{p}{1-(1-p)\left( 1 - \frac{z\sqrt{p}}{2\sqrt{1-p}\left(\sqrt{2}+1\right)} + \frac{z^2 p}{8(1-p)\left(\sqrt{2}+1\right)^2} \right)} = \frac{\sqrt{p}}{\left( 1 + \frac{z^2}{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2} \right)\sqrt{p} - \frac{z\sqrt{1-p}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}}.$$

$$M\left\{exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{\frac{1-p}{p}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right\}^{\xi}=\frac{p}{1-(1-p)exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2 p}{(1-p)\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}}\le$$

$$\le\frac{p}{1-(1-p)\left(1-\frac{R\varepsilon^2 p}{(1-p)\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{R^2\varepsilon^4 p^2}{2(1-p)^2\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right)}=\frac{1}{1+\frac{R\varepsilon^2}{\sqrt{2}+1}-\frac{R^2\varepsilon^4 p}{2(1-p)\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}.$$

Приклад 3: від'ємний біноміальний розподіл з параметрами $p,r$.

$$M\xi=\frac{r(1-p)}{p}\to+\infty, p\to 0, p(x)=\left[\frac{p}{1-(1-p)x}\right]^r.$$

$$M\left(e^{-t}\right)^{\xi}=\left[\frac{p}{1-(1-p)e^{-t}}\right]^r,$$

$$M\left\{exp\left\{-\frac{z}{2\sqrt{\frac{r(1-p)}{p}}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right\}^{\xi}\le\left[\frac{\sqrt{p}}{\left(1+\frac{z^2}{8r\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right)\sqrt{p}-\frac{z\sqrt{1-p}}{2\sqrt{r}\left(\sqrt{2}+1\right)}}\right]^r,$$

$$M\left\{exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{\frac{r(1-p)}{p}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right\}^{\xi}\le\left[\frac{1}{1+\frac{R\varepsilon^2}{r\left(\sqrt{2}+1\right)}-\frac{R^2\varepsilon^4 p}{2r^2(1-p)\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}\right]^r.$$

Приклад 4: біноміальний розподіл з параметрами $p,n$.

$$M\xi=np\to+\infty, n\to+\infty, p(x)=\left(1+p(x-1)\right)^n.$$

$$M\left(e^{-t}\right)^{\xi}=\left(1+p\left(e^{-t}-1\right)\right)^n\le exp\left\{-np\left(1-e^{-t}\right)\right\},$$

$$M\left[exp\left\{-\frac{z}{2\sqrt{np}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right]^{\xi}=\left(1+p\left(exp\left\{-\frac{z}{2\sqrt{np}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}-1\right)\right)^n\le$$

$$\le\left(1+p\left(1-\frac{z}{2\sqrt{np}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{z^2}{8np\left(\sqrt{2}+1\right)^2}-1\right)\right)^n\le\left[exp\left\{-\frac{z\sqrt{p}}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{z^2}{8n\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right\}\right]^n=$$

$$=exp\left\{\frac{z^2}{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right\}exp\left\{-\frac{z\sqrt{np}}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\},$$

$$M\left[exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{np\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right]^{\xi}=\left(1+p\left(exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{np\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}-1\right)\right)^{n}\le exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{\sqrt{2}+1}\right\}exp\left\{\frac{R^2\varepsilon^4}{2np\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right\}.$$

Приклад 5: логарифмічний розподіл з параметром $p$.

$$M\xi=-\frac{1-p}{p\ln p}\to+\infty,\ p\to 0,\ p(x)=\frac{1}{\ln p}\ln\left(1-(1-p)x\right).$$

$$M\left(e^{-t}\right)^{\xi}=\frac{1}{\ln p}\ln\left(1-(1-p)e^{-t}\right)\le\frac{1}{\ln p}(p-1)e^{-t},$$

$$M\left[exp\left\{-\frac{z}{2\sqrt{\frac{p-1}{p\ln p}}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right]^{\xi}\le\frac{1}{\ln p}\ln\left(exp\left\{-(1-p)exp\left\{-\frac{z}{2\sqrt{\frac{p-1}{p\ln p}}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right\}\right)=$$

$$=\frac{p-1}{\ln p}exp\left\{-\frac{z\sqrt{-p\ln p}}{2\sqrt{1-p}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\},\ M\left[exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2}{\frac{p-1}{p\ln p}\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}\right]^{\xi}\le\frac{p-1}{\ln p}exp\left\{-\frac{R\varepsilon^2 p\ln p}{(p-1)\left(\sqrt{2}+1\right)}\right\}.$$


**РЕЗЮМЕ**

Рассматривается схема авторегрессии $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ (k=1,..,n), где β- неизвестный и неслучайный параметр, $\varepsilon_k$- независимые , одинаково распределенные случайные элементы со средним нуль, дисперсией 1 и неизвестной функцией распределения. Количество наблюдений является дискретной случайной величиной. Исследовалось поведение вероятности выхода величины $\sqrt{M\xi}\left|\beta_\xi-\beta\right|$ за растущий уровень при $M\xi\to+\infty$.

**SUMMARY**

Let $U_k=\beta U_{k-1}+\varepsilon_k$ (k=1,..,n) are n observations of autoregressive scheme, where β is unknown nonrandom parameter and $\varepsilon_k$ are independent identically distributed random variables with zero mean, variance 1 and unknown distribution function. Quantity of observations is discreet random variable. It's researching behavior for the exit's probability $\sqrt{M\xi}\left|\beta_\xi-\beta\right|$ from increasing level if. $M\xi\to+\infty$.


**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**


1. Бондарєв Б.В. Нерівність С.Н. Бернштейна для оцінки параметру авторегресії першого порядку. – Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1996. – Вип.55. – С.13-19.


*Надійшла до редакції 03.03.2003 р.*

УДК 519.21

# ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ МАРТИНГАЛЬНОГО ТИПА И ЗАМЕНА МЕРЫ

*Г.К.Шурко*, И.Л.Шурко*
*Донбасская государственная академия строительства и архитектуры, г. Макеевка*

Пусть $\{\Omega,F,P\}$ – некоторое вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\left\{F_z, z\in R_+^2\right\}$, которые непрерывны справа и $F_0$ содержит все нулевые подмножества $F$.

Рассмотрим случайное поле вида:

$$\xi(z)=\int_0^x\int_0^y\left(\alpha(s,t)dsdt+\beta(s,t)w(ds,dt)+\int_\Theta\psi(s,t,\theta)\tilde{v}(ds,dt,d\theta)\right), \tag{1}$$

где $w(z)$ – винеровское поле в $R^d$, $\tilde{v}(.)$ – центрированная пуассоновская мера на $(\Theta,G)\times(D_0\times B_{D_0})$ с компенсатором $m(d\theta)dsdt$.

Пусть функции $\alpha(z),\beta(z),\psi(z,\theta)$ удовлетворяют условию

$$|\alpha(z)|^2+|\beta(z)|^2+|\psi(z,\theta)|^2<C, \tag{2}$$

$\forall z\in D_0$, $\theta\in\Theta$; $m(\Theta)<\infty$; (здесь $C$ – некоторая постоянная).

**Определение.** Поле $\xi(z)$ назовем экспоненциальным полем мартингального типа, если

$$M\left\{e^{\xi[z,z']}/F_z\right\}=1,\forall z,z'\in D_0, z<z'.$$

**Теорема.** Пусть поле $\xi(z)$ определено равенством (1) и выполнены условия (2) и условие

$$\alpha(z)=-\frac{1}{2}\beta(z)-\int_\Theta\left(e^{\psi(z,\theta)}-1-\psi(z,\theta)\right)m(d\theta). \tag{3}$$

Тогда поле $\xi(z)$ является экспоненциальным полем мартингального типа.

**Доказательство.** Применяя формулу Ито из [1] к функции $f(g)=e^g$, получим:

$$\rho(z)=e^{\xi(z)}=1+\int_0^x\int_0^y\tilde{A}(du,dv)+\int_0^x\int_0^y\tilde{M}(du,dv), \tag{4}$$

где $\tilde{A}(du,dv)=e^{\xi(u,v)}A(du,dv)=e^{\xi(u,v)}\{[\alpha(u,v)dudv+\frac{1}{2}\beta^2(u,v)du+$

$$+\int_\Theta\left(e^{\psi(u,v,\theta)}-1-\psi(u,v,\theta)\right)m(d\theta)dudv+$$

$$+\int_0^u\alpha(s,v)ds\left[\int_0^v\left(\alpha(u,t)+\frac{1}{2}\beta^2(u,t)+\int_\Theta\left(e^{\psi(u,t,\theta)}-1-\psi(u,t,\theta)\right)m(d\theta)\right)dt\right]\times$$

$$\times dudv+\frac{1}{2}\int_0^u\beta^2(s,v)ds\left[\int_0^u\alpha(u,t)+\frac{1}{2}\beta^2(u,t)+\int_\Theta\left(e^{\psi(u,t,\theta)}-1-\psi(u,t,\theta)\right)m(d\theta)\right)dt\Big]dudv+$$

$$+\int_0^u\int_\Theta\left(e^{\psi(s,v,\theta)}-1-\psi(s,v,\theta)\right)m(d\theta)ds\left[\int_0^v\left(\alpha(u,t)+\frac{1}{2}\beta^2(u,t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_\Theta e^{\psi(u,t,\theta)}-1-\psi(u,t,\theta)\right)m(d\theta)\right)dt\Big]dudv;$$



©Шурко Г.К., Шурко И.Л.

$$\tilde{M}(du,dv)=e^{\xi(u,v)}M(du,dv)=e^{\xi(u,v)}\Bigg(\int_0^u\beta(s,v)\Bigg[\int_0^v\Big(\alpha(u,t)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2(u,t)+\int_\Theta\Big(e^{\psi(u,t,\theta)}-1-\psi(u,t,\theta)\Big)m(d\theta)\Big)dt\Big]w(ds,dv)du+$$

$$+\int_0^u\Big(\alpha(s,v)+\frac{1}{2}\beta^2(s,v)+\int_\Theta\Big(e^{\psi(s,v,\theta)}-1-\psi(s,v,\theta)\Big)m(d\theta)\Big)ds\times\int_0^v\beta(u,t)w(du,dt)dv+$$

$$+\int_0^u(\alpha(s,v)+\frac{1}{2}\beta^2(s,v))ds\int_0^v\int_\Theta(e^{\psi(u,t,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dt,d\theta)dv+$$

$$\int_0^u\int_\Theta(e^{\psi(s,v,\theta)}-1)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v(\alpha(u,t)+\frac{1}{2}\beta^2(u,t)dtdu+$$

$$+\int_0^u\int_\Theta\psi(s,v,\theta)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v\int_\Theta(e^{\psi(u,t,\theta)}-1)m(d\theta)dtdu+$$

$$\int_0^u\int_\Theta\Big(e^{\psi(s,v,\theta)}-1\Big)m(d\theta)ds\int_0^v\int_\Theta\psi(u,t,\theta)\tilde{v}(du,dt,d\theta)dv+$$

$$+\int_0^u\beta(s,v)w(ds,dv)\int_0^v\int_\Theta(e^{\psi(u,t,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dt,d\theta)+\int_0^u\int_\Theta(e^{\psi(s,v,\theta)}-1)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v(\beta(u,t)w(dt,du)+$$

$$+\int_0^u\int_\Theta\psi(s,v,\theta)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v\int_\Theta(e^{\psi(u,t,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dt,d\theta)+$$

$$\int_0^u\int_\Theta(e^{\psi(s,v,\theta)}-1)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v\int_\Theta\psi(u,t,\theta)\tilde{v}(du,dt,d\theta)+$$

$$+\beta(u,v)w(du,dv)+\int_\Theta(e^{\psi(u,\upsilon,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dv,d\theta)+\int_0^u\beta(s,v)w(ds,dv)\int_0^v\beta(u,t)w(du,dt).$$

Далее легко видеть, что при замене в (4) $e^{\xi(z)}$ на $e^{\xi[z',z]}$, $z',z\in D_0$, $z'<z$, равенство будет иметь вид:

$$e^{\xi[z',z]}=1+\int_{x'}^{x}\int_{y'}^{y}\tilde{A}(du,dv)+\int_{x'}^{x}\int_{y'}^{y}\tilde{M}(du,dv).$$

Взяв от обеих частей последнего равенства условное математическое ожидание относительно $\sigma$-алгебры $F_z$ и учтя условия теоремы и вид поля $\xi(z)$, получим, что теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При выполнении условий (2) и (3) поле $\rho(z)=e^{\xi(z)}$ имеет вид:

$$\rho(z)=e^{\xi(z)}\exp\Bigg\{\int_0^x\int_0^y\beta(s,t)w(ds,dt)+\int_0^x\int_0^y\int_\Theta\psi(s,t,\theta)\tilde{v}(ds,dt,d\theta)-$$

$$-\int_0^x\int_0^y(\frac{1}{2}\beta^2(s,t)dsdt+\int_\Theta(e^{\psi(s,t,\theta)}-1-\psi(s,t,\theta))m(d\theta))dsdt\Bigg\} \qquad (5)$$

и удовлетворяет уравнению:

$$\rho(z)=1+\int_0^x\int_0^y\rho(s,t)M_1(ds,dt), \qquad (6)$$

где поле $M_1(z)$ имеет вид:

$$M_1(z)=M_1(x,y)=\int_0^x\int_0^y\int_0^u(\alpha(s,v)+\frac{1}{2}\beta^2(s,v))ds\int_{0\Theta}^{v}(e^{\psi(u,v,\theta)}-1)\times$$

$$\times\tilde{v}(du,dt,d\theta)dv+\int_{000\Theta}^{xyu}(e^{\psi(s,v,\theta)}-1)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v(\alpha(u,t)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2(u,t))dtdu+\int_{000\Theta}^{xyu}\psi(s,v,\theta)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_0^v(e^{\psi(u,t,\theta)}-1)\times$$

$$\times m(d\theta)dtdu+\int_{000\Theta}^{xyu}(e^{\psi(s,v,\theta)}-1)m(d\theta)ds\int_{0\Theta}^{v}\psi(u,t,\theta)\tilde{v}(du,dt,d\theta)dv+$$

$$+\int_{000}^{xyu}\beta(s,v)w(ds,dv)\int_{0\Theta}^{v}(e^{\psi(v,t,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dt,d\theta)+$$

$$+\int_{000\Theta}^{xyu}(e^{\psi(v,t,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dt,d\theta)\int_0^v\beta(u,t)w(du,dt)+$$

$$+\int_{000\Theta}^{xyu}\psi(s,v,\theta)\tilde{v}(ds,d\upsilon,d\theta)\int_{0\Theta}^{v}(e^{\psi(v,t,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dt,d\theta)+$$

$$+\int_{000\Theta}^{xyu}(e^{\psi(v,t,\theta)}-1)\tilde{v}(ds,dv,d\theta)\int_{0\Theta}^{v}\psi(u,t,\theta)\tilde{v}(du,dt,d\theta)+$$

$$+\int_{00}^{xy}\beta(u,v)w(du,dv)+\int_{00\Theta}^{xy}(e^{\psi(u,v,\theta)}-1)\tilde{v}(du,dv,d\theta)+$$

$$+\int_{000}^{xyu}\beta(s,v)w(ds,dv)\int_0^v\beta(u,t)w(du,dt). \qquad (7)$$

Кроме исходного вероятностного пространства $\{\Omega,F,P\}$ рассмотрим еще одно вероятностное пространство $\{\Omega,F,P\}$, где для $F_z$– измеримой величины $\xi$

$$\int\xi(\omega)P^*(d\omega)=\int\xi(\omega)\rho(\omega)P(d\omega).$$

**P*(.)** – вероятностная мера, т.к. $M\rho(z)=1,\forall z\in D_0$.

Поле **η*(z)**,будет полем мартингального типа, т.е. будет удовлетворять условию

$$M\eta^*(z,z']=0,\forall z,z'\in D_0,z<z',$$

на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$ относительно потока $\{F_z\}$ тогда и только тогда, когда $\eta^*(z)\rho(z)$ будет полем мартингального типа на $\{\Omega,F,P\}$, т.к. для всякой $F_z$ – измеримой ограниченной случайной величины $\xi$ при $z'>z$,

$$M^*\eta^*(z,z']\xi=0$$

тогда и только тогда, когда

$$M(\eta^*\rho)(z,z']\xi=0$$

Предположим, что поле $\eta^*(z)$ представимо в виде:

$$\eta^*(z)=\int_{00}^{xy}\alpha^*(s,t)dsdt+\int_{00}^{xy}\beta^*(s,t)w(ds,dt)+\int_{00\Theta}^{xy}\varphi(s,t,\theta)\tilde{v}(ds,dt,d\theta) \qquad (8)$$

Воспользовавшись формулой Ито для произведения двух полей, можем записать:

$$\rho(z)\cdot\eta^*(z)=\int_0^x\int_0^y \rho(s,t)\eta^*(ds,dt)+\int_0^x\int_0^y \eta^*(s,t)\rho(ds,dt)$$

$$+\int_0^x\int_0^y \rho(ds,t)\eta^*(s,dt)+\int_0^x\int_0^y \rho(s,dt)\eta^*(ds,t)+$$

$$+[\rho,\eta^*](z)+\int_0^x\int_0^y \rho(ds,dt)\eta^*(ds,t)+\int_0^x\int_0^y \eta^*(ds,dt)\rho(ds,t)+$$

$$\int_0^x\int_0^y \rho(ds,dt)\eta^*(s,dt)+\int_0^x\int_0^y \rho(s,dt)\eta^*(ds,dt) \qquad (9)$$

Здесь $[\rho,\eta^*](z)$ - совместная квадратическая вариация полей $\rho(z)$ и $\eta^*(z)$, понимаемая как предел по вероятности сумм

$$\sum_{i,k}\rho(z_{ik},z_{i+1,k+1}]\eta^*(z_{ik},z_{i+1,k+1}].$$

Учитывая этот факт, а также вид поля $M_1(z)$, несложно получить, что:

$$[\rho,\eta^*](z)=\int_0^x\int_0^y \rho(s,t)\beta(s,t)\beta^*(s,t)(ds,dt)+\int_0^x\int_0^y\int_\Theta \rho(s,t)(e^{\psi(s,t,\theta)}-1)\varphi(s,t,\theta)m(d\theta)dsdt.$$

Тогда

$$\rho(z)\eta^*(z)=\int_0^x\int_0^y \rho(s,t)\alpha^*(s,t)dsdt+\int_0^x\int_0^y \rho(s,t)(\beta^*(s,t)w(ds,dt)+$$

$$+\int_\Theta \varphi(s,t,\theta)\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta))+\int_0^x\int_0^y \eta^*(s,t)\rho(s,t)M_1(ds,dt)+$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^t \rho(s,v)M_1(ds,dv)\int_0^v(\alpha^*(u,t)dvdt+\beta^*(u,t)w(du,dt)+$$

$$+\int_\Theta \varphi(u,t,\theta)\tilde{\nu}(du,dt,d\theta))+\int_0^x\int_0^y\int_0^v \rho(u,t)M_1(du,dt)\times$$

$$\times\int_0^t(\alpha^*(s,v)dsdv+\beta^*(s,v)w(ds,dv)+\int_\Theta \varphi(s,v,\theta)\tilde{\nu}(ds,dv,d\theta))+\int_0^x\int_0^y \rho(s,t)\beta(s,t)\beta^*(s,t)dsdt+$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_\Theta \rho(s,t)(e^{\psi(s,t,\theta)}-1)\varphi(s,t,\theta)m(d\theta)dsdt+$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^t(\alpha^*(s,v)dsdv+\beta^*(s,v)w(ds,dv)+\int_\Theta \varphi(s,v,\theta)\tilde{\nu}(ds,dv,d\theta))\times$$

$$\times\rho(s,t)M_1(ds,dt)+\int_0^x\int_0^y(\alpha^*(s,t)dsdt+\beta^*(s,t)w(ds,dt)+$$

$$+\int_\Theta \varphi(s,t,\theta)\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta))\int_0^t \rho(s,v)M_1(ds,dv)+$$

$$+\int_0^x\int_0^y\int_0^s(\alpha^*(u,t)dudt+\beta^*(u,t)w(du,dt)+\int_\Theta \varphi(u,t,\theta)\tilde{\nu}(du,dt,d\theta))\times$$

$$\times\rho(s,t)M_1(ds,dt)+\int_0^x\int_0^y(\alpha^*(s,t)dsdt+\beta^*(s,t)w(ds,dt)+$$

$$\int_\Theta\varphi(s,t,\varphi)\tilde{v}(ds,dt,d\theta))\int_0^s\rho(u,t)M_1(du,dt). \qquad (10)$$

Легко видеть, что поле $\rho(z)\cdot\eta^*(z)$ будет полем мартингального типа, если:

$$\alpha^*(s,t)+\beta(s,t)\cdot\beta^*(s,t)+\int_\Theta(\alpha^{\psi(s,t,\theta)}-1)\varphi(s,t,\theta)m(d\theta)=0. \qquad (11)$$

Таким образом, чтобы мартингальное поле

$$\eta(z)=\int_0^x\int_0^y\beta^*(s,t)w(ds,dt)+\int_0^x\int_0^y\int_\Theta\varphi(s,t,\theta)\tilde{v}(ds,dt,d\theta),$$

заданное на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$, превратить в поле мартингального типа на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P^*\}$ достаточно к нему прибавить поле $\int_0^x\int_0^y\alpha^*(s,t)dsdt$, где $\alpha^*(z)$ удовлетворяет равенству (11).

**РЕЗЮМЕ**

В роботі наведені умови, при яких поля певного вигляду є експоненціальними полями мартингального типу.

**SUMMARY**

The paper contains conditions, when special fields are exponentional martingale fields.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Мишура Ю.С. Условия существования стохастических интегралов по слабым семимартингалам и обобщенная формула Ито для семимартингалов на плоскости. – Теория вероятностей и математическая статистика. – 1989 .– Вып.40. – С.63-73

*Надійшла до редакції 03.03.2003 р.*

УДК 519.4

# СТРОЕНИЕ СВОБОДНЫХ УМНОЖЕНИЙ НА ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП

*В.В.Лиманский*

**1. Введение.** В пределах любого многообразия групп $\mathfrak{I}$ определена свободная операция (см. [2]). Если $G$ и $H$ — группы из $\mathfrak{I}$, то их $\mathfrak{I}$ – свободное умножение $G(\mathfrak{I})H$ совпадает с наибольшей группой многообразия $\mathfrak{I}$, содержащей $G$ и $H$ в качестве подгрупп и порождаемой ими. Конструктивное описание $G(\mathfrak{I})H$ известно лишь для некоторых многообразий: для многообразия коммутативных групп — прямое произведение, для многообразия всех групп — свободное произведение, для многообразия нильпотентных класса 2 групп — описание дано О. Н. Головиным в работе [1]. В работе [3] А. Ю. Ольшанский дал описание свободного умножения в произведении двух коммутативных многообразий с взаимно простыми экспонентами. В работе автора [5] результат А. Ю. Ольшанского был распространен на подмногообразия произведения коммутативного и нильпотентного многообразий с взаимно простыми экспонентами. В настоящей работе дано построение свободного умножения для подмногообразий произведения двух локально нильпотентных и локально конечных многообразий с взаимно простыми экспонентами.

Ниже приведены некоторые определения, обозначения и результаты, используемые в работе.

1.1. Если $\mathfrak{I}$ — примитивный класс алгебраических систем, $G,H,G_\alpha \in \mathfrak{I}$, $\alpha \in I$, то через $G(\mathfrak{I})H$ или $\prod_{\alpha\in I}(\mathfrak{I})G_\alpha$ будет, как правило, обозначаться свободное в пределах $\mathfrak{I}$ произведение (см. [2], 12.1) систем $G$ и $H$ или $G_\alpha, \alpha \in I$. Хорошо известно.

1.2. **Утверждение.** Если $H_\alpha$ — ретракты групп $G_\alpha$, $\alpha \in I$ из многообразия $\mathfrak{I}$, то подгруппа $gp\{H_\alpha\}$ группы $\prod_{\alpha\in I}(\mathfrak{I})G_\alpha$, порожденная $H_\alpha$, совпадает с $\prod_{\alpha\in I}(\mathfrak{I})H_\alpha$ (мальцевость для ретрактов).

1.3. Для многообразия групп $\mathfrak{I}$ и группы $G$ через $\mathfrak{I}(G)$ будет обозначаться вербальная подгруппа группы $G$, соответствующая $\mathfrak{I}$.

Из определения вербального произведения групп ([4], гл. 1, §8) следует

1.4. **Утверждение.** Если $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}_1$ — два многообразия групп и $\mathfrak{I} \supseteq \mathfrak{I}_1$, $G=\prod_{\alpha\in I}(\mathfrak{I})G_\alpha$, то $G/\mathfrak{I}_1(G)=\prod(\mathfrak{I}_1)\overline{G_\alpha}$. Здесь $\overline{G_\alpha}$ — естественные образы групп $G_\alpha$ в $G/\mathfrak{I}_1(G)$, причем $\overline{G_\alpha} \cong G_\alpha/\mathfrak{I}_1(G_\alpha)$.

В частности, если $G_\alpha \in \mathfrak{I}_1$, то справедливо

1.5. **Следствие.** $G/\mathfrak{I}_1(G)=\prod_{\alpha\in I}(\mathfrak{I}_1)G_\alpha$.

1.6. Если $X$ и $V$ — группы и $X$ действует на $V$ как группа операторов, то можно составить полупрямое произведение $X$ на $V$. В работе оно будет обозначаться через $XV$. Будет предполагаться, что $X$ и $V$ вложены в $XV$.

1.7. Через $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{C}$ обозначаются множества натуральных, целых и комплексных чисел соответственно. Через $\boldsymbol{Z}_k$ обозначается циклическая группа порядка $k$.

**2. Прямой образ модуля.** Пусть $\mathfrak{R}_i$ — локально конечные нильпотентные многообразия групп экспоненты $m_i, i=1, 2$. Причем $(m_1,m_2)=1$. $\mathfrak{I}$ — такое многообразие групп, что $\mathfrak{R}_1 \vee \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ (см. [4], гл. 2). В силу теоремы Шура, конечные группы из $\mathfrak{I}$ — это полупрямые произведения групп из $\mathfrak{R}_1$ при помощи групп из $\mathfrak{R}_2$. Поэтому задание конечной группы из $\mathfrak{I}$ равносильно заданию группы $H$ из $\mathfrak{R}_1$, группы $X$ из $\mathfrak{R}_2$ и действия $X$ на $H$. Для любой такой группы $G$ $\mathfrak{R}_1$ – подгруппа $H$ определена однозначно и совпадает с вербальной подгруппой $\mathfrak{R}_2(G)$ (см. [4], 12.21). Поэтому однозначен естественный эпиморфизм $\pi: G \to X, X \in \mathfrak{R}_2$. Для любого расщепляющего вложения $\alpha: X \to G$ ограничение $\pi$ на $\alpha(X)$ будет однозначно определенным изоморфизмом, который в дальнейшем будет использоваться для отождествления $X$ и $\alpha(X)$.

©Лиманский В.В.

**2.1.** Рассмотрим класс $L(X)$ $X$ – операторных групп $H$ из $\mathfrak{R}_1$ таких, что полупрямое произведение $XG \in \mathfrak{I}$. Этот класс будет примитивным классом универсальных алгебр. Действия элементов из $X$ на $H$ рассматриваются как унарные операции. Таблица умножения $X$, тождества $\mathfrak{I}$ в группе $XH$ и тождества $\mathfrak{R}_1$ в группе $H$ интерпретируются как тождества класса $L(X)$. По аналогии с коммутативным случаем, группы из $L(X)$ будут называться $X$ – модулями. В классе $L(X)$ определено свободное умножение [2, с.165]. Если $G$ и $H$ - группы из $L(X)$, то их $L(X)$ – свободное произведение будет обозначаться через $G * H$.

**Теорема 1.** . $G * H = F / N$ Здесь $F = G(\mathfrak{R}_1)H$, $N = \mathfrak{I}(XF)$. Действие $X$ на $H$ индуцировано действием $X$ на $G$ и $H$, $X$ – модули $G$ и $H$ естественно изоморфны ретрактам $X$ – модуля $G * H$, а $X$ - модуль $G * H$ - его эпиморфный образ.

Доказательство. Так как $X \in \mathfrak{I}$, то $\mathfrak{I}(XF) \subseteq F$. Если $\alpha$ и $\beta$ есть $X$ – гомоморфизмы $G$ и $H$ в $X$ – модуль $T$ из $L(X)$, то существует $X$ – гомоморфизм $\varphi : F \to T$, продолжающий $\alpha$ и $\beta$, и существует гомоморфизм $\psi : XF \to XT$, продолжающий $\varphi$ и тождественный на $X$. Так как $XT \in \mathfrak{I}$, то $Ker\ \psi \subset \mathfrak{I}(XF)$. Поэтому $\alpha$ и $\beta$ продолжаются до $\theta : F / N \to T$. Аналогично устанавливается, что ядра проекций $F$ на $G$ и $H$ содержат $N$ и, следовательно, индуцируют ретракции $F / N$ с образами, естественно изоморфными $G$ и $H$.

Последняя часть теоремы 1 следует из того, что $X$ – модуль $G * H$ принадлежит $L(X)$.

**Теорема 2.** Если $G$ — конечный $X$ – модуль из $L(X)$ и $G = G_1 * \ldots * G_k = H_1 * \ldots * H_l$ — два его разложения с неразложимыми и неединичными сомножителями, то $k = l$, и после возможного изменения нумерации $X$ – модули $G_i$ и $H_i$ изоморфны.

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.22 из работы [5].

**2.2.** Для группы $H$ из $L(X)$ через $[H]$ будет обозначаться класс всех $X$ – модулей, изоморфных $H$. В силу теоремы 2, множество, составленное из классов $[H]$, соответствующих конечным $X$ – модулям, относительно операции $[H_1] + [H_2] = [H_1 * H_2]$ является свободной коммутативной полугруппой, свободными образующими которой будут классы неразложимых $X$ –модулей. Данная полугруппа стандартно вкладывается в свободную коммутативную группу с той же системой свободных образующих. Эта группа будет обозначаться через $[L(X)]$. Ее элементы можно записывать в виде $[H_1] - [H_2]$; здесь $H_i$ — конечные $X$ –модули из $L(X)$.

Если $f : X \to Y$ — гомоморфизм групп из $\mathfrak{R}_2$, а $W$ — это $Y$ –модуль, то $W$ — также $X$ –модуль относительно действия $xw = f(x)w$.

**Утверждение 1.** Если $Y$ –модуль $W$ — из $L(Y)$, то $X$ –модуль $W$ — из $L(X)$.

Доказательство. Полупрямое произведение $XW$ изоморфно подгруппе прямого произведения $X \times (YW)$, порожденной элементами вида $(x, f(x))$, $x \in X$ и подгруппой $W$.

**2.3.** Рассматриваемая ниже конструкция аналогична конструкции индуцированного представления. Пусть $f : X \to Y$ — гомоморфизм групп из $\mathfrak{R}_2$, а $V$ — это $X$ –модуль из $L(X)$. Через ${}^fV$ будет обозначаться такой $Y$ – модуль из $L(Y)$, что задан гомоморфизм $X$ –модулей ${}^f\theta : V \to {}^fV$ и выполняется универсальное свойство:

*Для любого $Y$ – модуля $W$ из $L(Y)$ и любого гомоморфизма $X$ –модулей $f : V \to W$ существует единственный гомоморфизм $Y$ –модулей ${}^f\varphi : {}^fV \to W$, такой что $\varphi = ({}^f\varphi)({}^f\theta)$.*

**Утверждение 2.** Если $Y$ – модуль $H$ из $L(Y)$ и гомоморфизм $X$ – модулей $\lambda : V \to H$ удовлетворяют условию из 2.3, то существует такой однозначно определенный изоморфизм $Y$ – модулей $\mu : {}^fV \to H$, что $\mu({}^f\theta) = \lambda$. То есть универсальное свойство гарантирует однозначность с точностью до естественных изоморфизмов ${}^fV$.

Введенные в 2.3 модуль ${}^fV$ и гомоморфизм ${}^f\theta$ обладают функториальными свойствами. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — гомоморфизмы конечных групп из $\mathfrak{R}_2$, $V \in L(X)$.

**Утверждение 3.** Если ${}^fV$ и ${}^g({}^fV)$ определены, то ${}^{gf}V$ определен и ${}^{gf}V = {}^g({}^fV)$. Причем

${}^{gf}\theta = {}^{g({}^{f}\theta)}$.

Доказательство. Пусть $W \in L(Z)$ и $\varphi : V \to W$ — $X$ - гомоморфизм. Ввиду 2.3, существуют $Y$ - гомоморфизм ${}^{f}\varphi : {}^{f}V \to W$ и $Z$ - гомоморфизм ${}^{g({}^{f}\varphi)} : {}^{g({}^{f}V)} \to W$, такие что ${}^{f}\varphi {}^{f}\theta = \varphi$, ${}^{g({}^{f}\varphi)}({}^{g}\theta) = {}^{f}\varphi$. Поэтому ${}^{g({}^{f}\varphi)}({}^{g}\theta)({}^{f}\theta) = \varphi$. Если найдется еще один $Z$ – гомоморфизм $\psi : {}^{g({}^{f}V)} \to W$, для которого $\psi({}^{g}\theta)({}^{f}\theta) = \varphi$, то применение 2.3 к $\psi({}^{g}\theta)$ показывает, что $\psi({}^{g}\theta) = {}^{f}\varphi$. Отсюда опять, ввиду 2.3, $\psi = {}^{g({}^{f}\varphi)}$.

**2.4.** Так как любой гомоморфизм $f : X \to Y$ можно разложить в композицию вложения $i : X \to X(\mathfrak{R}_2)Y$, $i(x) = (x,1)$ и эпиморфизма $\pi : X(\mathfrak{R}_2)Y \to Y$; $\pi(x) = f(x)$, $\pi(y) = y$, $x \in X$, то для построения $Y$ – модулей вида ${}^{f}V$ достаточно научиться строить такие модули в случае, когда $f$ — вложение или эпиморфизм.

**Утверждение 4.** Пусть $f : X \to Y$ - эпиморфизм конечных групп из $\mathfrak{R}_2$, а $X$–модуль $V$ - из $L(X)$. Тогда ${}^{f}V = V/N$; здесь $N$ - нормальный делитель $V$, порожденный элементами вида $(x \circ v)v^{-1}$, $x \in Ker\, f$, $v \in V$. Действие элемента $y$ из $Y$ на смежный класс $vN$ из ${}^{f}V$ определяется правилом $y \circ (vN) = (x \circ y)N$, где $f(x) = y$. Гомоморфизм ${}^{f}\theta$ совпадает с естественным эпиморфизмом $V$ на $V/N$.

**2.5.** Пусть $i : X \to Z$ - вложение конечных групп из $\mathfrak{R}_2$, $V$ - конечный $X$ - модуль из $L(X)$, $Y$ - система представителей левых смежных классов $Z$ по $i(X)$, $V^y$, $y \in Y$ - его изоморфные копии, причем для элемента $v \in V$ через ${}^{y}v$ обозначен образ $v$ при изоморфизме $V$ на ${}^{y}V$, ${}^{1}V$ отождествлен с $V$. Пусть $F = \prod_{y \in Y} (\mathfrak{R}_1)({}^{y}V)$. Действие $Z$ на $F$ будет определено по правилу: $(yx) \circ ({}^{y'}v) = {}^{y''}(x' \circ v)$. Здесь $y, y', y'' \in Y$; $x, x' \in X$; $yxy' = x'y''$. Относительно этого действия $F$ будет $Z$ – модулем. Подгруппа $P = \Im(ZF)$ полупрямого произведения $ZF$ лежит в $F$ и является нормальным $Z$ – подмодулем. Поэтому $F/P$ будет $Z$ – модулем из $L(Z)$. Так как ядро эпиморфизма $F \to V$, продолжающего изоморфизмы ${}^{y}V \to V$, содержит $P$, то $V^y$ изоморфно вложены в $F/P$. Будем обозначать $F/P$ через $V^Z$.

**Теорема 3.** $V^Z = {}^{i}V$, ${}^{i}\theta : V \to {}^{i}V$ совпадает с вложением .

Доказательство. Пусть $W$ – это $Z$–модуль, а $\varphi : V \to W$ - это $X$ - гомоморфизм. Отображения ${}^{y}v \to y \circ (\varphi v)$ продолжаются до $Z$ - гомоморфизма $F \to W$, ядро которого содержит $P$ и который поэтому определяет $Z$ - гомоморфизм ${}^{i}\varphi : V^Z \to W$, удовлетворяющий условию $({}^{i}\varphi)({}^{i}\theta) = \varphi$. Если $\psi : V^Z \to W$ - еще один $Z$ - гомоморфизм с условием $\psi({}^{i}\varphi) = \varphi$, то $\psi({}^{y}v) = \psi(y \circ v) = y \circ (\psi v) = y(\psi({}^{i}\theta)v) = y \circ (\varphi v) = {}^{i}\varphi({}^{y}v)$. Поэтому ${}^{i}\varphi = \psi$.

**Следствие.** Для любого $X$ – модуля $V$ из $L(X)$ и любого гомоморфизма $f : X \to Y$ конечных групп из $\mathfrak{R}_2$ определен $Y$ – модуль ${}^{f}V$ и гомоморфизм ${}^{f}\theta : V \to {}^{f}V$.

**3. Строение свободных умножений конечных групп из $\Im$.**

**Теорема 4.** Если $V_1$ и $V_2$ — $X$ – модули из $L(X)$, а $f : X \to Y$ — гомоморфизм конечных групп из $\mathfrak{R}_2$, то $f(V_1 * V_2) = ({}^{f}V_1) * ({}^{f}V_2)$.

Доказательство. Если $W \in L(Y)$, а $\varphi : V_1 * V_2 \to W$ — $X$ – гомоморфизм, то ${}^{f}\varphi : {}^{f}\varphi_1 * {}^{f}\varphi_2$, где $\varphi_i$ – ограничение $\varphi$ на $V_i$. Ясно, что $({}^{f}\varphi){}^{f}\theta_1 * {}^{f}\theta_2 = \varphi$ и что ${}^{f}\varphi$ этими соотношениями определен однозначно.

**Следствие.** Если $f : X \to Y$ - гомоморфизм конечных групп из $\mathfrak{R}_2$, то отображение $f[V] = [{}^{f}V]$

продолжается до гомоморфизма группы $[L(X)]$ в группу $[L(Y)]$. В частности, действие $f[V]=[{}^{f}V]$ определяет на $[L(X)]$ структуру $Aut\,X$ – модуля.

**3.1.** Пусть $XV$ и $YW$ — конечные полупрямые произведения из $\Im$; $X,Y\in\Re_2$, $V\in L(X)$, $W\in L(Y)$. Группа $F=XV(\Im)YW$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы $N$ из $\Re_1$ и группы, изоморфной $Z=X(\Re_2)Y$, которая так и будет обозначаться. Так как $X$ и $Y$ — ретракты $XV$ и $YW$, то подгруппы $G=gp\{X,Y\}$, $H=gp\{XV,Y\}$, $K=gp\{X,YW\}$ группы $F$ совпадают с $X(\Im)Y$, $XV(\Im)Y$, $X(\Im)YW$ соответственно. Обозначим $\Re_1$ – подгруппы групп $G$, $H$, $K$ через $[X,Y]$, $V^Z$, $W^Z$. Ясно, что $N$, $[X,Y]$, $V^Z$, $W^Z$ лежат в $L(Z)$.

**3.2.** Частный случай теоремы 5 установлен в [3]. Пусть $i:X\to Z$ и $j:Y\to Z$ — вложения свободного умножения.

**Теорема 5.** $V^Z={}^{i}V$, $W^Z={}^{j}W$, $N=V^Z*W^Z*[X,Y]$ (в $L(Z)$).

Доказательство. ${}^{i}\theta:V\to V^Z$ - тождественное вложение. Если $E\in L(Z)$ и $\varphi:V\to E$ — $X$ - гомоморфизм, то ${}^{i}\varphi:V^Z\to E$ — ограничение на $V^Z$ гомоморфизма $XV(\Im)Y\to ZE$, продолжающего $(i,\varphi):XV\to ZE$, и . Так как $V^Z$ порождается , $y\in Y$, то $Z$ – гомоморфизм $V^Z\to E$, продолжающий $\varphi$, определен однозначно. Это доказывает, что $V^Z={}^{i}V$. Аналогично устанавливается соотношение $W^Z={}^{j}W$. Тождественные отображения ${}^{i}V$, ${}^{j}W$, $[X,Y]$ продолжаются до эпиморфизма $Z$ – модулей $M={}^{i}V*{}^{j}W*[X,Y]\to N$. Для завершения доказательства достаточно построить эпиморфизм этих модулей, действующий в обратном направлении. Рассмотрим подгруппу $L$ полупрямого произведения $Z({}^{i}V*{}^{j}W*[X,Y])$, порожденную $X$, $Y$ и $[X,Y]$. Она совпадает с $X'(\Im)Y'$. Здесь $X'$ и $Y'$ — подгруппы $L$, изоморфные $X$ и $Y$, причем изоморфизмы тождественны по модулю $[X,Y]$. Так как $L$ — конечная разрешимая группа, то к ней применимы теоремы Ф. Холла ([6], теорема 9.3.1). Порядок подгруппы $X(\Re_2)Y$ и ее индекс в $L$ взаимно просты, а порядок $Y'$ делит $|Z|$; поэтому найдется внутренний автоморфизм $\alpha:L\to L$, $\alpha\,l=g^{-1}l\,g$, такой что $\alpha(Y')\subseteq Z$. Так как $L=Z[X,Y]$, а $Z$ нильпотентна, то можно выбрать $g$ из $[X,Y]$. Поэтому $\alpha(Y')=Y$. Пусть $\alpha(X')=X''$. Отсюда $L=X''(\Im)Y$. Аналогично показывается существование элемента $h\in[X,Y]$, такого что $h^{-1}Xh=X''$.

Рассмотрим внутренний автоморфизм $\beta(t)=h^{-1}th$ группы $ZN$. Так как для $t\in M$, $\beta(t)\equiv t(mod\ [M,M])$, $M$ нильпотентна и $M=gp\{{}^{i}V,{}^{j}W,[X,Y])\}$, то $M=gp\{\beta({}^{i}V),{}^{j}W,[X,Y])\}$.

Пусть гомоморфизм $\psi:XV(\Im)YW\to ZM$ продолжает изоморфизмы $XV\to X''\beta(V)$ и $id:YW\to YW$. Так как образ $\psi$ содержит $X''$, $Y$, $\beta({}^{i}V)$, $[X'',Y]=[X,Y]$, ${}^{j}W$, то $\psi$ - эпиморфизм. Это завершает доказательство теоремы.

**4. Вычисление группы $[X,Y]$.**

**Утверждение 5.** Если $V$ -конечный $X$ -модуль из $L(X)$, $t\in V$ и $\forall x\in X:x\circ t\equiv t(mod\ [V,V])$, то $\exists s\in V$, $s\equiv t(mod\ [V,V])$, такой что $\forall x\in X:x\circ s=s$.

Доказательство. Допустим, что найден элемент $s'\in V$, $s'\equiv t(mod\ [V,V])$, такой что $\forall x\in X$, $x\circ s'\equiv s'(mod\,\gamma_k(V))$. Пусть $s''=\left(\prod_{x\in X}x\circ s'\right)^{q}$. Здесь $q$ -такое натуральное число, что $|X|q\equiv 1\ (mod\,m_1)$. Тогда $s''\equiv s\equiv{}'t(mod\ [V,V])$ и, $\forall x'\in X:x'\circ s''\equiv s''(mod\ [\gamma_k(V),\gamma_k(V)])$. Применив несколько раз, начиная с $s'=t$, описанное преобразование, получим элемент $s$. Здесь $\gamma_k(V)$ — $k$ – ый член нижнего центрального ряда $V$.

Конструкция группы $[X,Y]$ будет получена для случая, когда $\Re_2$ коммутативно.

**Теорема 6.** $(X\times\mathbf{Z}_{m_1})(\Im)(Y\times\mathbf{Z}_{m_1})\cong(X\times Y\times\mathbf{Z}_{m_1})(\Im)\mathbf{Z}_{m_1}$. Здесь $X,Y$ — конечные группы

из $\mathfrak{R}_2$.

Доказательство. *Случай* $\mathfrak{I}=\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ *и* $\mathfrak{R}_1$ *— коммутативное* (см. [3]). Пусть $a,b,c,d$ — образующие групп $\boldsymbol{Z}_{m_1}$ из формулировки теоремы при перечислении слева направо. Изоморфизм $\varphi$ определяется формулами

$$\varphi(a^y)=\prod_{x\in X} d^{xy},\quad \varphi(b^x)=c\prod_{y\in Y} d^{xy},\quad \varphi(s^{xy})=d^{xy}(d^x)^{-1}(d^y)^{-1}d.$$

Здесь $p^q=q^{-1}pq$; $s^{xy}=[x,y]$, $x\in X$, $y\in Y$ (в группе $G=(X\times\boldsymbol{Z}_{m_1})(\mathfrak{I})(Y\times\boldsymbol{Z}_{m_1})$).

*Случай* $\mathfrak{I}\subseteq\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2$ *и* $\mathfrak{R}_1$ *— коммутативное* получается из предыдущего в результате применения 1.5.

*Общий случай.* Рассмотрим $G=(X\times\boldsymbol{Z}_{m_1})(\mathfrak{I})(Y\times\boldsymbol{Z}_{m_1})$. Пусть $a$ и $b$ — образующие левой и правой групп $\boldsymbol{Z}_{m_1}$ из выражения для $G$. Рассмотрим многообразие $\mathfrak{I}_1$, которое получается в результате добавления к тождествам $\mathfrak{I}$ тождества $[x^{m_1},y^{m_1}]=1$. Если полупрямое произведение $XV\in\mathfrak{I}$, $X\in\mathfrak{R}_2$, $V\in\mathfrak{R}_1$, то $\mathfrak{I}_1(XV)=[V,V]$. Ввиду 1.5., $G/\mathfrak{I}_1(G)=(X\times\boldsymbol{Z}_{m_1})(\mathfrak{I}_1)(Y\times\boldsymbol{Z}_{m_1})$. По доказанному ранее, у $G/\mathfrak{I}_1(G)$ имеется переразложение $(X\times Y\times\boldsymbol{Z}_{m_1})(\mathfrak{I}_1)\boldsymbol{Z}_{m_1}$. Полученный изоморфизм можно поднять на группу $G$ и группу $(X\times Y\times\boldsymbol{Z}_{m_1})(\mathfrak{I})\boldsymbol{Z}_{m_1}$, учитывая нильпотентность $V$ и утверждение 5.

Теорема доказана.

**4.1.** Пусть $T\in\mathfrak{R}_2$. Обозначим через $\boldsymbol{Z}_m(T)$ группу $\boldsymbol{Z}_m$, рассматриваемую как тривиальный $T$ – модуль. При $T=\{1\}$ $\boldsymbol{Z}_m(T)$ будет обозначаться через $\boldsymbol{Z}_m$.

**Следствие.** В группе $[L(X\times Y)]$ класс $X\times Y$ – модуля $[X,Y]$ совпадает с $[\boldsymbol{Z}_{m_1}(X\times Y)]+[\boldsymbol{Z}_{m_1}^{X\times Y}]-[\boldsymbol{Z}_{m_1}(X)^{X\times Y}]-[\boldsymbol{Z}_{m_1}(Y)^{X\times Y}]$.

**4.2. Замечание.** Автор предполагает, что предыдущее следствие можно обобщить на случай, когда $\mathfrak{I}_2$ — нильпотентное многообразие.

***РЕЗЮМЕ***

Відомо усього лише кілька прикладів конструктивних описів вільних операцій на многовидах груп: для комутативних, нільпотентних класу 2 многовидів, для многовиду всіх груп. У роботі А.Ю.Ольшанського зазначена будова вільних множень для добутку комутативних многовидів із взаємно простими експонентами. У даній роботі отримано опис будови вільного множення скінчених груп у випадку підмноговида добутку двох локально нільпотентних многовидів із взаємно простими експонентами. При цьому використано конструкцію, аналогічну індукованому зображенню груп.

**SUMMARY**

Some examples of the constructive descriptions of free operations on varieties of groups are known only for commutative, nilpotent of class 2 varieties and for a variety of all groups. In the work of Ol'shansky the structure of free products for product of commutative varieties with mutually simple exponents is specified. In the given work the description of a structure of free products of finite groups in a case of subvariety of a product of two locally nilpotent varieties with mutually simple exponents is obtained. Thus the construction similar to an induced representation of groups is used.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. О.Н.Головин. К вопросу об изоморфизме нильпотентных разложений группы // Матем. сб. – Т.28. – Вып.2. – С.445-452.
2. А.И.Мальцев. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
3. А.Ю.Ольшанский. Два замечания о многообразиях групп // Вестник МГУ. Серия: математика, механика. – 1971. – №1. – С.42-46.
4. Х.Нейман. Многообразия групп. – М.: Мир, 1969.
5. В.В.Лиманский. Свободные операции на локально конечных многообразиях групп // Труды ММО. – 1998. – Т.60. – С.155-184.
6. М. Холл. Теория групп. – М.: ИЛ, 1962.

*Надійшла до редакції 03.03.2003 р.*

УДК 510.6

# ГРУППОВАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ДВУЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ. I

*Н.И. Лавренко*

## Введение

Логическая операция отрицания устанавливает равноправные отношения между истинностными значениями высказываний: отрицание истины есть ложь, отрицание лжи есть истина. Это обстоятельство наводит на мысль, что не существует логических оснований для предпочтения одного истинностного значения другому, что пара этих значений симметрична. Предпочтение, отдаваемое истине в классической логике, обусловлено внелогическими причинами. Оно постулируется при ее построении либо посредством законов-тавтологий алгебры логики, либо посредством соответствующих аксиом и правил вывода логических исчислений (ср., например [1]).

Вниманию читателя предлагается первая часть работы, представляющей собой попытку обосновать симметрию пары истинностных значений, а затем в соответствии с этой симметрией построить двузначную логику. В §1 установлена двойственность истинностных значений как инвариантность пары этих значений относительно циклической группы преобразований второго порядка. В §2 такая двойственность введена в систему пропозициональных связок, формул и контекстов логики высказываний.

## §1. Двойственность истинностных значений

В связи с различением истинностных значений «истина» и «ложь» в логической семантике обратимся к естественному языку. В этом языке всякое высказывание, имеющее одно из двух истинностных значений, либо утверждается, либо отрицается. Тем самым носитель языка выражает свое мнение об истинностном значении высказывания. Достигается это посредством выражений «верно, что» и «неверно, что» (или их синонимов), присоединяемых (приписываемых) к высказываниям слева. Первое из этих выражений означает утверждение высказывания, а второе – отрицание. Первое выражает истинность высказывания, а второе – ложность, хотя такое выражение может и не соответствовать действительному истинностному значению высказывания, которое утверждается или отрицается. Утверждение высказывания не изменяет его истинностного значения, тогда как отрицание – изменяет. Поэтому выражение «верно, что» обычно опускается (не пишется) в начале утверждаемого высказывания, но при этом его функция подразумевается. Например, явно утверждаемое высказывание «Верно, что человек смертен» без каких-либо логических потерь, оставаясь истинным, может быть записано и как неявно утверждаемое «Человек смертен»; это же истинное высказывание посредством отрицания преобразуется в ложное «Неверно, что человек смертен». Таким образом, в естественном языке высказывания необходимо подвержены модальности, противопоставляющей их по признаку «утверждение-отрицание».

Выражение «верно, что» (или его синоним) означает унарную операцию над высказываниями, сохраняющую их истинностные значения и логически представляющую собой тождественное преобразование высказываний. Эту операцию утверждения будем обозначать вертикальной чертой $|$, помещаемой перед утверждаемым высказыванием, т.е. слева от него.

Выражение «неверно, что» (или его синоним) означает унарную операцию над высказываниями, изменяющую их истинностные значения. Эту операцию отрицания будем обозначать горизонтальной чертой $\overline{\ }$, помещаемой над отрицаемым высказыванием, т.е. сверху него.

Пусть $A$ – произвольное высказывание, а $И$ и $Л$ – истинностные значения «истина» и «ложь» соответственно. Тогда истинностные таблицы операций утверждения и отрицания имеют вид:

| $A$ | $\|A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $И$ | $И$ | $Л$ |
| $Л$ | $Л$ | $И$ |

В естественном языке высказывание $A$ может быть утверждаемо и отрицаемо многими способами. Например, оно может быть утверждаемо так: «верно, что $A$», «истинно, что $A$» или, короче, «да, $A$», – и соответственно отрицаемо так: «неверно, что $A$», «ложно, что $A$» или, короче, «не $A$». Однако по существу многообразие таких способов сводится к следующему. *Утверждение (верно, истинно, да) обозначает истину, а его действие на высказывание (функция модальности) означает приписывание (присвоение) высказыванию значения «истина»; тогда как отрицание (неверно, ложно, не) обозначает ложь, а его действие на высказывание означает приписывание высказыванию значения «ложь».* Область определения утверждения и отрицания как унарных логических операций включает в себя класс высказываний. Ей принадлежат также значения «истина» и «ложь», так что

«да, истина» есть «истина», «да, ложь» есть «ложь»,
«не истина» есть «ложь», «не ложь» есть «истина».

Определив умножение операций утверждения и отрицания как последовательное их выполнение

«да, да» есть «да», «да, не» есть «не», «не да» есть «не», «не не» есть «да», получим таблицу умножения (таблицу Кэли)

| | | |
|---|---|---|
| | \| | ¯ |
| \| | \| | ¯ |
| ¯ | ¯ | \| |

Эта таблица задает циклическую группу второго порядка { ¯ } [2], которую обозначим буквой С.

*Группа* С *является группой автоморфизмов пары* {*И, Л*}.

Элементы всякой пары, инвариантной относительно группы преобразований С, будем называть *двойственными* друг другу. Каждый из двойственных объектов является отрицанием другого.

Инвариантность пары {*И, Л*} относительно преобразований из группы С геометрически интерпретируется как симметрия пары концов отрезка относительно его середины *О* – центра симметрии (рис.1.). При этом преобразование отрицания интерпретируется как отражение концов отрезка в центре *О*.

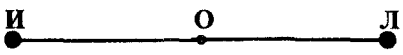



Рис.1.

Как видно, инвариантность пары {*И, Л*} относительно группы преобразований С, т.е. двойственность истинностных значений, означает, что в рамках чистой логики истинностные значения неразличимы так же, как неразличимы две зеркально симметричные геометрические точки. Не существует априорных, чисто логических, оснований для того, чтобы отличить одно из этих значений от другого и отдать предпочтение какому-либо из них. Такие основания имеют место вне логики, а именно при сопоставлении высказываний (их смысла) с некой реальностью (наблюдаемой или абстрактной). Соответствие высказывания такой реальности принимается за истинность высказывания, а несоответствие – за ложность. Тем самым истинность ассоциируется с реальностью и становится предпочтительной. Эта предпочтительность затем постулируется различными способами при построении классической логики. Такая асимметрия пары истинностных значений не свойственна двузначной логике и не должна иметь места при построении последней.

Относительно преобразований из группы С, очевидно, инвариантна и произвольная пара высказываний вида {*A*, $\overline{A}$}. Следовательно, относительно этих преобразований инвариантен и универсальный класс высказываний *P*, распадающийся на пары высказываний вида {*A*, $\overline{A}$}, а также распадающийся на два подкласса $P^t$ и $P^f$, где $P^t$ – подкласс истинных высказываний, $P^f$ – подкласс ложных высказываний. Пара { $P^t$, $P^f$ } инвариантна относительно группы преобразований С, т.е. классы $P^t$ и $P^f$ двойственны. (Здесь под преобразованием класса высказываний понимается соответствующее преобразование каждого высказывания этого класса).

В силу двойственности истинностных значений, всякое логическое построение, отдающее предпочтение одному из этих значений, предопределяет и предполагает (посредством отрицания) двойственное себе логическое построение, отдающее предпочтение другому истинностному значению. Так, классическая логика, исследуя лишь методы рассуждений, в силу которых истинность заключений вытекает из истинности посылок [1], отдает предпочтение истине. Следовательно, эта логика предопределяет существование логики, отдающей предпочтение лжи и исследующей методы рассуждений, в силу которых ложность заключений вытекает из ложности посылок. Пара этих двойственных логик представляет собой двузначную логику в целом – понятие такой двойственности логик будет уточнено в §2.

Обратимся теперь к системе действительных чисел без нуля. В этой системе знак «+» обозначает положительность, а приписывание его к символу числа (слева) означает присвоение числу положительности, т.е. сохранение прежнего знака числа и числа в целом неизменными. Поэтому знак «+» перед числом обычно опускается. (Сравним это тождественное преобразование числа с описанным выше преобразованием высказывания посредством утверждения |.) Знак «–» обозначает отрицательность, а приписывание его к символу числа (слева) означает присвоение числу отрицательности, что сводится к изменению знака числа на противоположный знак, т.е. к изменению положительности числа на отрицательность, а отрицательности на положительность. (Сравним это преобразование отрицания числа с описанным выше преобразованием высказывания посредством отрицания ¯.)

Таким образом, + (плюс) и – (минус) являются преобразованиями числа *a* точно так же, как связки | и ¯ являются преобразованиями высказывания *A*. При этом последовательное выполнение преобразо-

ваний + и – так же, как и последовательное выполнение логических операций | и $\overline{\ }$, представляет собой умножение этих преобразований. Тем самым преобразования + и – так же, как операции | и $\overline{\ }$, образуют циклическую группу порядка 2 с таблицей умножения

| | + | – |
|---|---|---|
| + | + | – |
| – | – | + |

Обозначим эту группу через C′.

Произвольная пара действительных чисел вида $\{a, -a\}$ инвариантна относительно группы преобразований C′. Что означает инвариантность относительно этих преобразований класса $R'$ отличных от нуля действительных чисел, распадающегося на пары чисел вида $\{a, -a\}$, а также распадающегося на два подкласса $R^+$ и $R^-$, где $R^+$ – подкласс положительных действительных чисел, $R^-$ – подкласс отрицательных действительных чисел. Пара $\{R^+, R^-\}$ инвариантна относительно группы преобразований C′. (Здесь под преобразованием класса чисел понимается соответствующее преобразование каждого числа этого класса.)

В силу изоморфности групп C и C′ (элементам | и $\overline{\ }$ группы C соответствуют, в том же порядке, элементы + и – группы C′), пара высказываний $\{A, \overline{A}\}$ и пара чисел $\{a, -a\}$, а также пара подклассов высказываний $\{P^t, P^f\}$ и пара подклассов действительных чисел $\{R^+, R^-\}$ обладают одинаковой симметрией: геометрически интерпретируются как пары зеркально симметричных точек. При этом высказываниям $A$ и $\overline{A}$ соответствуют (в том же порядке) числа $a$ и $-a$, а подклассам высказываний $P^t$ и $P^f$ соответствуют (в том же порядке) подклассы чисел $R^+$ и $R^-$.

Здесь система высказываний и система действительных чисел представлены предельно схематически. Тем не менее очевидная изоморфность этих схематических систем, являющаяся следствием изоморфности групп C и C′, в достаточной мере отражает общность их структур, сводящихся к отношению двойственности в каждой из этих систем. Разумеется, этот изоморфизм не является изоморфизмом между логикой и системой действительных чисел (тем более математикой), хотя обе группы преобразований C и C′ являются основополагающими – первая в логике, вторая в математике.

Итак, имеет место соответствие между основными логическими понятиями (объектами) и основными математическими понятиями (объектами), представленное в таблице 1. Оно является изоморфизмом между этими двумя системами понятий, различие между которыми лишь в логической и математической интерпретациях, да терминах и символах.

Таблица 1.

| **Основные понятия логики** | **Основные понятия математики** |
|---|---|
| истинность<br>\|<br>истинно | положительность<br>+<br>положительно |
| ложность<br>$\overline{\ }$<br>ложно | отрицательность<br>$\overline{\ }$<br>отрицательно |
| группа C | группа C′ |
| высказывание $A$ | число $a$ |
| $\|A$<br>утверждение $A$ (да, $A$) | $+a$<br>утверждение $a$ (плюс $a$) |
| $\overline{A}$<br>отрицание $A$ (не $A$) | $-a$<br>отрицание $a$ (минус $a$) |
| $\{A, \overline{A}\}$ | $\{a, -a\}$ |
| подкласс $P^t$ | подкласс $R^+$ |
| подкласс $P^f$ | подкласс $R^-$ |
| $\{P^t, P^f\}$ | $\{R^+, R^-\}$ |
| класс высказываний $P$ | класс чисел $R'$ |

С целью отражения двойственности истинностных значений (и заодно избавления от термина «ложь», одиозность которого обусловлена отнюдь не логическим содержанием понятия, обозначаемого этим термином) изменим традиционную логическую терминологию согласно изоморфизму между группами С и С′. Термины «истина» и «ложь» заменим терминами «позитив» и «негатив» соответственно, а термин «истинностное значение» – термином «логическое значение». Буквы *И* и *Л* заменим знаками «+» и «–» соответственно. Истинное высказывание будем называть *позитивным* (*положительным*), а ложное – *негативным* (*отрицательным*). Истинностную таблицу будем называть *таблицей логических значений.*

Логику, в которой исследуется позитивность как свойство логических объектов, назовем *позитивной,* или *позитивно ориентированной*; а логику, в которой исследуется негативность как свойство логических объектов, – *негативной,* или *негативно ориентированной.* Позитивная (классическая) логика и негативная логика в паре образуют собственно двузначную логику. В силу рассмотренного выше изоморфизма, существование позитивной и негативной логик необходимо (и обосновано) так же, как необходимо (и обосновано) существование подсистем положительных и отрицательных действительных чисел.

**§2. Логика высказываний: пропозициональные связки и формулы, двойственность**

В дальнейшем символы языка-объекта (в частности, пропозициональные связки) употребляются в качестве своих имен. При введении новых терминов кавычки опускаются. Знак $\rightleftharpoons$ заменяет выражение «тождественно по значению», или «равно по определению»; каждое из соединяемых этим знаком выражений заменимо другим. Высказывание понимается традиционно: оно либо позитивно, либо негативно.

Унарными операциями над высказываниями (унарными связками) являются утверждение $|$ и отрицание $\overline{\ }$, образующие группу С (§1).

Пусть $A$ – произвольное высказывание. Согласно определению группы С,

$$\|A \rightleftharpoons |A,\ |\overline{A} \rightleftharpoons \overline{A},\ \overline{|A} \rightleftharpoons \overline{A},\ \overline{\overline{A}} \rightleftharpoons |A,\ |A \rightleftharpoons A. \qquad (1)$$

Таким образом, пара высказываний $\{A,\ \overline{A}\}$ инвариантна относительно группы преобразований С, т.е. высказывания $A$ и $\overline{A}$ двойственны. Каждое из них является утверждением самого себя и отрицанием другого, может быть представлено (без изменения его логического значения) и как утверждение, и как отрицание. Так, $A$ читается: «верно, что $A$», или: «неверно, что $\overline{A}$»; тогда как $\overline{A}$ читается: «верно, что $\overline{A}$», или: «неверно, что $A$». Пусть, например, $A$ есть высказывание «Снег бел». Тогда имеем $A$ как явное утверждение «Верно, что снег бел» и как отрицание «Неверно, что снег не бел». С другой стороны, имеем $\overline{A}$ как утверждение «Верно, что снег не бел» и как отрицание «Неверно, что снег бел».

Как видно, для логики высказываний не существенно, какое именно из двух высказываний $A$ и $\overline{A}$ является утверждением и какое – отрицанием, какое из них позитивно и какое негативно. Существенно лишь то, что эти высказывания двойственны, и, следовательно, двойственны их логические значения.

Учитывая это обстоятельство, произвольные высказывания будем обозначать как рукописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$(возможно с чертой $|$ слева), так и теми же буквами с чертой $\overline{\ }$ сверху $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \ldots$, причем одно из двойственных высказываний (неважно, какое именно) будет обозначаться буквой без черты сверху, а другое – той же буквой с чертой сверху.

Традиционно бинарными пропозициональными связками (операциями) классической логики высказываний являются $\wedge$ (*конъюнкция*), $\vee$ (*дизъюнкция*), $\supset$ (*импликация*), $\sim$ (*эквиваленция*). Из них лишь пара связок $\wedge$, $\vee$ отражает двойственность логических значений. Конъюнкция $A \wedge B$ позитивна, если и только если $A$ позитивно и $B$ позитивно. Дизъюнкция $A \vee B$ негативна, если и только если $A$ негативно и $B$ негативно. Что же касается связок $\supset$ и $\sim$, то они отражают и обеспечивают позитивную ориентацию (позитивную направленность) в классической логике и не имеют парных себе связок, отражающих негативную ориентацию. Исправим это нарушение двойственности, введя недостающие бинарные связки.

Сохраняя таблицу логических значений для импликации $\supset$, назовем эту логическую операцию *позитивной импликацией* и переобозначим ее символом $\leqslant$. Запись $A \leqslant B$ будем читать так: «$A$ позитивно имплицирует $B$», или: «Если $A$, то $B$». По определению позитивная импликация $A \leqslant B$ принимает значение «позитив» (+) во всех случаях, кроме случая $A$ позитивно, а $B$ негативно.

Введем бинарную логическую операцию под названием *негативная импликация*, присвоив ей символ $\geqslant$ и читая запись $A \geqslant B$ так: «$A$ негативно имплицирует $B$». Определим эту операцию так, чтобы негативная импликация $A \geqslant B$ принимала значение «негатив» (–) во всех случаях, кроме случая $A$ негативно, а $B$ позитивно.

Далее, сохраняя таблицу логических значений для эквиваленции $\sim$, назовем эту операцию *позитивной эквиваленцией* и переобозначим ее символом $\leq$. Запись $A \leq B$ будем читать так: «$A$ позитивно

эквивалентно $B$». По определению позитивная эквиваленция $A \preceq B$ принимает значение «позитив» (+) при совпадении логических значений высказываний $A$, $B$ и значение «негатив» (–) в остальных случаях.

Введем бинарную логическую операцию под названием *негативная эквиваленция*, присвоив ей символ $\succeq$ и читая запись $A \succeq B$ так: «$A$ негативно эквивалентно $B$». Определим эту операцию так, чтобы негативная эквиваленция $A \succeq B$ принимала значение «негатив» (–) при совпадении логических значений высказываний $A$, $B$ и значение «позитив» (+) в остальных случаях.

Таким образом, каждая бинарная связка имеет парную себе связку.

Приведем таблицы логических значений для всех бинарных связок.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \leqslant B$ | $A \geqslant B$ | $A \preceq B$ | $A \succeq B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | – | + | – |
| – | + | – | + | + | + | – | + |
| + | – | – | + | – | – | – | + |
| – | – | – | – | + | – | + | – |

При этом таблицы логических значений для $A \wedge B$, $A \leqslant B$, $A \preceq B$ соотносятся с таблицами логических значений для $\overline{A} \vee \overline{B}$, $\overline{A} \geqslant \overline{B}$, $\overline{A} \succeq \overline{B}$ следующим образом:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \leqslant B$ | $A \preceq B$ |
|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + |
| – | + | – | + | – |
| + | – | – | – | – |
| – | – | – | + | + |

| $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A} \vee \overline{B}$ | $\overline{A} \geqslant \overline{B}$ | $\overline{A} \succeq \overline{B}$ |
|---|---|---|---|---|
| – | – | – | – | – |
| + | – | + | – | + |
| – | + | + | + | + |
| + | + | + | – | – |

Как видно, эта система таблиц инвариантна относительно замены в ней всюду каждого из высказываний $A$, $B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ двойственным ему высказыванием и (либо) каждой связки каждой из пар $\{\wedge, \vee\}$, $\{\leqslant, \geqslant\}$, $\{\preceq, \succeq\}$ другой связкой той же пары, каждого логического значения двойственным ему значением.

В соответствии с этой инвариантностью и (1) введем определения:

$$|(A \wedge B) \rightleftharpoons |A \wedge |B, \quad |(A \vee B) \rightleftharpoons |A \vee |B, \qquad \overline{A \wedge B} \rightleftharpoons \overline{A} \vee \overline{B}, \quad \overline{A \vee B} \rightleftharpoons \overline{A} \wedge \overline{B}. \tag{2}$$

$$|(A \leqslant B) \rightleftharpoons |A \leqslant |B, \quad |(A \geqslant B) \rightleftharpoons |A \geqslant |B, \qquad \overline{A \leqslant B} \rightleftharpoons \overline{A} \geqslant \overline{B}, \quad \overline{A \geqslant B} \rightleftharpoons \overline{A} \leqslant \overline{B}. \tag{3}$$

$$|(A \preceq B) \rightleftharpoons |A \preceq |B, \quad |(A \succeq B) \rightleftharpoons |A \succeq |B, \qquad \overline{A \preceq B} \rightleftharpoons \overline{A} \succeq \overline{B}, \quad \overline{A \succeq B} \rightleftharpoons \overline{A} \preceq \overline{B}. \tag{4}$$

Эти определения необходимо дополнить следующими определениями:

$$\begin{aligned} &|\wedge \rightleftharpoons \wedge, \quad \overline{\wedge} \rightleftharpoons \vee, \qquad |\leqslant \rightleftharpoons \leqslant, \quad \overline{\leqslant} \rightleftharpoons \geqslant, \qquad |\preceq \rightleftharpoons \preceq, \quad \overline{\preceq} \rightleftharpoons \succeq, \\ &|\vee \rightleftharpoons \vee, \quad \overline{\vee} \rightleftharpoons \wedge, \qquad |\geqslant \rightleftharpoons \geqslant, \quad \overline{\geqslant} \rightleftharpoons \leqslant, \qquad |\succeq \rightleftharpoons \succeq, \quad \overline{\succeq} \rightleftharpoons \preceq. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу (2)-(5), *утверждение (отрицание) соединения двух высказываний посредством любой бинарной связки сводится к утверждению (отрицанию) как соединяемых высказываний, так и бинарной связки.*

Итак, система пропозициональных связок инвариантна относительно преобразований из группы C и распадается на пары двойственных связок: $\{|, \overline{\ }\}$, $\{\wedge, \vee\}$, $\{\leqslant, \geqslant\}$, $\{\preceq, \succeq\}$.

Относительно группы преобразований C инвариантна и система последних таблиц логических значений для связок. (Здесь под преобразованием таблицы логических значений понимается соответствующее преобразование в ней всюду каждой связки, согласно (1), (5), и каждого логического значения.)

Элементарные высказывания, структура которых не рассматривается в логике высказываний, будем обозначать большими печатными латинскими буквами P, Q, R, ..., возможно с индексами. Эти буквы будем называть *пропозициональными*.

Определение *пропозициональной формулы:*

1) Все пропозициональные буквы со связкой $|$ слева или, что то же по определению, без нее и эти же буквы со связкой $\overline{\ }$ сверху суть пропозициональные формулы. Назовем их *простыми* формулами.

2) Если $A$, $B$ – пропозициональные формулы, то $|A$, $\overline{A}$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \leqslant B)$, $(A \geqslant B)$, $(A \preceq B)$, $(A \succeq B)$ – тоже пропозициональные формулы, причем $|A \rightleftharpoons A$.

3) Других формул, кроме указанных в 1) и 2), не существует.

Внешние скобки формул будем опускать. Формулу, в которую входит хотя бы одна бинарная связка, будем называть *составной*. Согласно (1), всякая формула либо простая, либо составная.

По определению каждая формула является результатом последовательного выполнения логических операций, которое начинается выполнением операций над некоторыми простыми формулами (или над пропозициональными буквами).

Пропозициональную формулу, в которой связка $|$ находится только перед пропозициональными буквами, а связка $\overline{\ }$ находится только над такими буквами, назовем *приведенной*. В приведенной формуле унарные связки входят лишь в простые подформулы, а буквы без связки $\overline{\ }$ рассматриваются как буквы со связкой $|$ (даже если эта связка опущена). В частности, дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы [1] являются приведенными формулами.

Формулы $A$ и $\overline{A}$ *двойственны*. Под отличным от операций $|$ и $\overline{\ }$ *преобразованием* формулы $A$ будем понимать замену этой формулы отличной от нее формулой, равной формуле $A$ по определению.

Ко всякой формуле $A$ применимо следующее очевидное

**Правило приведения.** *Выполнив, согласно* (1)-(4), *операции утверждения и отрицания в формуле A в последовательности, обратной последовательности их выполнения при построении этой формулы, преобразуем формулу A в приведенную формулу.*

**Пример.** Согласно (1)-(4), выполним операции утверждения и отрицания в следующей формуле

$$\overline{((P \vee \overline{Q}) \leqslant (\overline{\overline{R} \wedge S})) \preceq (\overline{Q \succeq S})} \rightleftharpoons \overline{((P \vee \overline{Q}) \geqslant (\overline{\overline{R} \wedge S}))} \preceq (\overline{Q} \leqslant \overline{S}) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons ((\overline{P} \wedge \overline{\overline{Q}}) \geqslant (\overline{R} \wedge S)) \preceq (\overline{Q} \leqslant S) \rightleftharpoons ((\overline{P} \wedge Q) \geqslant (\overline{R} \wedge S)) \preceq (\overline{Q} \leqslant S).$$

По правилу приведения исходная формула преобразована в приведенную формулу.

Итак, по правилу приведения универсальный класс формул логики высказываний сводится к подклассу приведенных формул.

Из (1)-(5) с очевидностью вытекают следующие два правила.

**Правило утверждения приведенной формулы.** *Выполнив утверждение каждой связки в приведенной формуле, т.е. сохранив в ней каждую связку неизменной, получим утверждение этой формулы.*

**Правило отрицания приведенной формулы.** *Выполнив отрицание каждой связки в приведенной формуле, т.е. заменив в ней каждую связку двойственной связкой, получим отрицание этой формулы.*

**Пример.** Пусть $A$ есть приведенная формула $((\overline{P} \succeq Q) \leqslant (R \wedge \overline{S})) \geqslant \overline{Q}$. В силу (1)-(5), получим $\overline{A}$:

$$\overline{((\overline{P} \succeq Q) \leqslant (R \wedge \overline{S})) \geqslant \overline{Q}} \rightleftharpoons \overline{((\overline{P} \succeq Q) \leqslant (R \wedge \overline{S}))} \overline{\geqslant} \overline{\overline{Q}} \rightleftharpoons \overline{(\overline{P} \succeq Q)} \overline{\leqslant} \overline{(R \wedge \overline{S})} \leqslant Q \rightleftharpoons ((\overline{\overline{P}} \overline{\succeq} \overline{Q}) \geqslant$$

$$\geqslant (\overline{R} \overline{\wedge} \overline{\overline{S}})) \leqslant Q \rightleftharpoons ((P \preceq \overline{Q}) \geqslant (\overline{R} \vee S)) \leqslant Q \quad \text{или, распределив общее отрицание сразу таким образом:}$$

$$\overline{((\overline{P} \succeq Q) \leqslant (R \wedge \overline{S})) \geqslant \overline{Q}} \rightleftharpoons ((\overline{\overline{P}} \overline{\succeq} \overline{Q}) \overline{\leqslant} (\overline{R} \overline{\wedge} \overline{\overline{S}})) \overline{\geqslant} \overline{\overline{Q}} \rightleftharpoons ((P \preceq \overline{Q}) \geqslant (\overline{R} \vee S)) \leqslant Q.$$

Последняя формула получается из данной по правилу отрицания приведенной формулы.

Отрицание приведенной формулы по предыдущему правилу, очевидно, также является приведенной формулой. Таким образом, имеет место

**Предложение 1.** *Каждая из двойственных приведенных формул $A$ и $\overline{A}$ получается из другой заменой в ней каждой связки двойственной связкой.*

Класс пропозициональных формул распадается на пары двойственных формул вида $\{A, \overline{A}\}$ и потому инвариантен относительно преобразований из группы С. (Здесь под преобразованием класса формул понимается соответствующее преобразование каждой его формулы.)

Согласно таблицам логических значений для связок, каждому распределению логических значений пропозициональных букв, входящих в формулу, соответствует некоторое логическое значение этой формулы. Тем самым каждая пропозициональная формула имеет свою таблицу логических значений.

В дальнейшем там, где это не будет вызывать недоразумений, ради краткости вместо выражений вида «распределение логических значений пропозициональных букв, входящих в формулу (формулы), при котором формула имеет (формулы имеют) значение» будем использовать выражения вида «случай, в котором формула имеет (формулы имеют) значение».

Теперь вернемся к пропозициональным связкам и рассмотрим их с точки зрения позитивной и негативной ориентаций в двузначной логике. Будем исходить из таблиц логических значений для связок.

Утверждение | сохраняет и позитивность, и негативность; а отрицание $\overline{\ }$ изменяет и позитивность, и негативность. Тем самым эти операции не имеют ни позитивной, ни негативной ориентации.

При одном и том же логическом значении (либо «позитив», либо «негатив») формул $A$ и $B$ это же логическое значение имеют конъюнкция $A \wedge B$ и дизъюнкция $A \vee B$. Вследствие этого очевидно

**Предложение 2.** *Во всех случаях, в которых все произвольно заданные формулы имеют одно и то же логическое значение (либо «позитив», либо «негатив»), это же значение имеет всякая формула, построенная из заданных формул посредством только связок $\wedge$ и $\vee$.*

В смысле предложения 2 связки $\wedge$, $\vee$ сохраняют как позитивность, так и негативность при построении из произвольно заданных формул любых формул с помощью только этих связок.

В этом аспекте конъюнкция и дизъюнкция не имеют ни позитивной, ни негативной ориентации. Однако, имеют место следующие два очевидные предложения.

**Предложение 3.** *Все формулы (каждая формула) любой конечной совокупности формул имеют (имеет) значение «позитив» во всех тех и только тех случаях, в которых значение «позитив» имеет конъюнкция всех формул этой совокупности.*

**Предложение 4.** *Все формулы (каждая формула) любой конечной совокупности формул имеют (имеет) значение «негатив» во всех тех и только тех случаях, в которых значение «негатив» имеет дизъюнкция всех формул этой совокупности.*

В этом смысле конъюнкция имеет позитивную ориентацию, а дизъюнкция – негативную.

Позитивные импликация и эквиваленция имеют позитивную ориентацию в следующем смысле. При одном и том же логическом значении (либо «позитив», либо «негатив») формул $A$, $B$ позитивные импликация $A \preccurlyeq B$ и эквиваленция $A \preceq B$ имеют значение «позитив». Отсюда получаем

**Предложение 5.** *Во всех тех и только тех случаях, в которых все произвольно заданные формулы имеют значение «позитив», это же значение имеет всякая формула, построенная из заданных формул посредством только связок $\preccurlyeq$ и $\preceq$; в каждом из остальных случаев для заданных формул построенные указанным способом формулы имеют различные логические значения.*

**Доказательство.** Для произвольно заданных формул при каждом распределении логических значений пропозициональных букв, входящих в эти формулы, есть только две возможности:

1. Все заданные формулы имеют значение «позитив». Тогда, согласно таблицам логических значений для связок $\preccurlyeq$ и $\preceq$, всякая формула, построенная из некоторых заданных формул посредством только связок $\preccurlyeq$ и $\preceq$, имеет значение «позитив».

2. Не все заданные формулы имеют значение «позитив». Пусть $A$ – заданная формула, имеющая значение «негатив». Тогда формула $A \preccurlyeq A$ имеет значение «позитив», а формула $(A \preccurlyeq A) \preceq A$ – значение «негатив».

Предложение доказано.

В смысле предложения 5 связки $\preccurlyeq$, $\preceq$ сохраняют только позитивность при построении из произвольно заданных формул любых формул с помощью только этих связок. Кроме того, имеет место очевидное

**Предложение 6.** *Для всяких формул $A$ и $B$ во всех случаях, в которых обе формулы $A$ и $A \preccurlyeq B$ имеют значение «позитив», это же значение имеет и формула $B$.*

Негативные импликация и эквиваленция имеют негативную ориентацию в следующем смысле. При одном и том же логическом значении (либо «негатив», либо «позитив») формул $\overline{A}$, $\overline{B}$ негативные импликация $\overline{A} \succcurlyeq \overline{B}$ и эквиваленция $\overline{A} \succeq \overline{B}$ имеют значение «негатив». Отсюда получаем

**Предложение 7.** *Во всех тех и только тех случаях, в которых все произвольно заданные формулы имеют значение «негатив», это же значение имеет всякая формула, построенная из заданных формул*

*посредством только связок* $\succcurlyeq$ *и* $\preccurlyeq$; *в каждом из остальных случаев для заданных формул построенные указанным способом формулы имеют различные логические значения.*

**Доказательство.** Доказательство предложения 7 получается из доказательства предложения 5 заменой в последнем доказательстве всюду каждого термина логического значения термином двойственного значения и каждого символа логической операции символом двойственной операции.

В смысле предложения 7 связки $\succcurlyeq$, $\preccurlyeq$ сохраняют только негативность при построении из произвольно заданных формул любых формул с помощью только этих связок. Кроме того, имеет место очевидное

**Предложение 8.** *Для всяких формул* $\overline{A}$ *и* $\overline{B}$ *во всех случаях, в которых обе формулы* $\overline{A}$ *и* $\overline{A} \succcurlyeq \overline{B}$ *имеют значение «негатив», это же значение имеет и формула* $\overline{B}$.

Таким образом, пропозициональные связки имеют общелогический статус. Однако, в указанном выше смысле (предложения 5-8) связки $\prec$, $\preccurlyeq$ имеют четкую позитивную ориентацию и относятся к позитивной логике; а связки $\succcurlyeq$, $\succ$ имеют четкую негативную ориентацию и относятся к негативной логике.

Позитивную и негативную ориентации будем называть *логическими ориентациями.*

Под *контекстами* логики высказываний будем понимать ее принципы (законы, аксиомы), правила, определения, теоремы (предложения), доказательства (выводы) – назовем их *основными* контекстами; а также различные совокупности (системы) этих основных контекстов – назовем их *контекстами-разделами*. В контексты-разделы вместе с основными контекстами входят и сопровождающие их тексты, поясняющие и связующие основные контексты. Контексты-разделы, составленные не произвольно, а построенные в процессе (по ходу) построения логики высказываний, представляют собой не просто совокупности основных контекстов, а системы основных контекстов. Объясняется это тем, что входящие в такие контексты-разделы основные контексты объединены (связаны) некоторыми логическими идеями и потому находятся в соответствующих логических отношениях. Контекстами-разделами являются, в частности, позитивная и негативная логики высказываний, а также вся логика высказываний.

Двойственность логических значений, а также пропозициональных связок (попарно) и формул (попарно), распространяется и на контексты логики высказываний, в которых описываются эти попарно двойственные объекты, следующим образом. Тождественное преобразование контекста будем называть *утверждением* этого контекста. Замену в контексте, содержащем термины (символы) некоторых из попарно двойственных объектов, каждого термина (символа) логического значения термином (символом) двойственного значения, каждого термина (символа) логической операции термином (символом) двойственной операции и каждой формулы двойственной формулой будем называть *отрицанием* этого контекста. Контекст, который не содержит терминов (символов) объектов, имеющих двойственные себе объекты, как пустой класс таких терминов (символов) инвариантен относительно операции отрицания. Утверждение (отрицание) контекста-раздела, очевидно, означает утверждение (отрицание) каждого входящего в него контекста.

Разумеется, при отрицании контекстов метаязыка логики высказываний, которым является естественный язык, необходимо учитывать особенности этого языка, изменяя речевые обороты, а то и формулировку всего контекста там, где это требуется (например, при вхождении в контекст выражений «$\overline{}$ слева» и «$\overline{}$ сверху»). К тому же, следует иметь в виду особенности употребления букв *A, B, C, ...*, возможно с чертой $\overline{}$ сверху, для обозначения произвольных формул. При отрицании контекста обозначенные в нем такими буквами формулы, строго говоря, должны отрицаться.

Из определения утверждения и отрицания контекстов с очевидностью следуют два предложения.

**Предложение 9.** *Для всякой пары контекстов логики высказываний либо каждый из них является утверждением другого, либо каждый из них не является утверждением другого.*

**Предложение 10.** *Для всякой пары контекстов логики высказываний либо каждый из них является отрицанием другого, либо каждый из них не является отрицанием другого.*

Итак, если один из двух различных контекстов является отрицанием другого, то и другой является отрицанием первого, а их пара инвариантна относительно группы преобразований С, т.е. эти контексты *двойственные*. Контекст, инвариантный относительно этой же группы, будем называть *самодвойственным*. Пара двойственных контекстов, очевидно, представляет собой самодвойственный контекст.

Если один из двойственных (симметричных) контекстов логики высказываний имеет позитивную ориентацию (описывает позитивность) и принадлежит позитивной логике высказываний, то другой имеет негативную ориентацию (описывает негативность) и принадлежит негативной логике высказываний, и обратно.

Контексты, двойственность которых обусловлена двойственностью лишь унарных логических операций, (например, предложения 9, 10) не имеют логической ориентации, как и сами унарные операции. Такие контексты, а также самодвойственные контексты (в частности, контексты, которые не содержат терминов (символов) объектов, имеющих двойственные себе объекты) принадлежат двузначной логике высказываний в целом.

Кстати, определение пропозициональной формулы и предложения 1, 2 самодвойственны; а предложения 3 и 4, 5 и 7 (и их доказательства), 6 и 8, 9 и 10 двойственны попарно. Каждое из них получается из другого (парного) посредством отрицания. Кроме того, предложения 3, 5, 6 принадлежат позитивной логике высказываний; а предложения 4, 7, 8 – негативной. Предложения 2, 3, 4 вместе с сопровождающим их текстом образуют самодвойственный контекст-раздел логики высказываний. Пара предложений 5, 6 с сопровождающим их текстом и пара предложений 7, 8 с таким текстом представляют собой двойственные контексты-разделы. Настоящий параграф в целом является самодвойственным контекстом-разделом логики высказываний.

В силу двойственности, т.е. симметрии, корректность в каком бы то ни было смысле одного из двойственных контекстов распространяется и на другой контекст. Таким образом, имеет место следующий

**Принцип двойственности.** *Всякий контекст логики высказываний либо самодвойственный, либо имеет двойственный себе контекст, получаемый из данного посредством отрицания. Всякий имеющий логическую ориентацию контекст имеет двойственный себе контекст противоположной логической ориентации. При этом корректность в любом смысле (в частности, доказуемость, непротиворечивость, независимость, полнота) одного из двойственных контекстов (с учетом его логической ориентации) означает такую же корректность другого контекста (с учетом его логической ориентации).*

Именно в соответствии с этим принципом двойственны позитивная и негативная логики высказываний, а их пара, т.е. двузначная логика высказываний в целом, самодвойственна – инвариантна относительно группы преобразований С. При этом классическая логика высказываний является позитивной.

**РЕЗЮМЕ**

Установлена двоїстість істинностних значень як інваріантність пари цих значень відносно циклічної групи перетворень другого порядку. Така двоїстість введена в систему пропозиційних зв'язок, формул та контекстів логіки висловлень.

**SUMMARY**

Duality of true values is determined as invariance of a pair of these values in regard to the circular group of the second order transformations. Such duality is brought in the system of propositional connectives, formula and contexts of logic of sentences.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Клини С.К. Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
2. Курош А.Г. Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

*Надійшла до редакції 03.03.2003 р.*

УДК 519.2

# АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ ФУНКЦІЇ ІНТЕНСИВНОСТІ МАРКІРОВАНОГО ПУАССОНОВОГО ПОЛЯ

*А.О.Степанищева*

У статті [1] вивчено властивості оцінки максимальної правдоподібності (ОМП) для функції інтенсивності λ неоднорідного пуассонового поля, причому оцінка побудована за спостереженнями подій пуассонового поля на множинах $G_k$, що розширюються . В даній роботі вивчаються асимптотичні властивості оцінки функції інтенсивності маркірованого пуассонового поля. Доведено конзистентність непараметричної оцінки функції λ та отримана швидкість її середньоквадратичної збіжності. Можливі застосування отриманих результатів в екології та фінансовій математиці.

У статті $E$ позначає математичне сподівання, ***var*** – дисперсію випадкової величини, а ***mes*** позначає міру Лебега. Послідовність випадкових величин, що прямує до 0 за імовірністю, будемо позначати через $o_p(1)$, а послідовність стохастично обмежених випадкових величин позначаємо через $O_p(1)$ (або O(1)).

**1. Модель спостережень та конзистентність непараметричної оцінки.**

Згідно [2], с.46 введемо означення часткового випадку маркірованого пуассонового поля.

**Означення 1**. Точковою мірою на борельовій множині $A \subset \mathbf{R}^m \times H$ назвемо міру μ на борельовій σ - алгебрі B *(A)*, що має представлення

$$\mu = \sum_{i \geq 1} \delta_{x_i h_i}$$

де $\{(x_i, h_i),\ i \geq 1\}$ – скінчена або злічена множина точок в A, а $\delta_{xh}$ – міра Дірка, задана на B *(A)* і зосереджена в точці (*x, h)*. Простір усіх таких точкових мір позначатимемо через *M(A)*.

Нехай $(\Omega, \Im, P)$ – повний імовірнісний простір. Далі усі випадкові процеси та поля вважаються заданими на цьому просторі. У просторі *M(A)* розглядається σ – алгебра S(A) – це найменша σ – алгебра, відносно якої усі відображення *M(A)* $\ni \mu \mapsto \mu(B)$ вимірні, де B – довільна борельова підмножина A.

**Означення 2.** Точковим процесом на A назвемо $\Im$ – S(A) – вимірне відображення $N : \Omega \to M(A)$.

Таким чином, при кожному $\omega \in \Omega$ $N(\omega)$ є випадковою точковою мірою. Значення цієї міри на $B \in$ B *(A)* позначатимемо через *N(B) = N(B, ω)*.

**Означення 3**. Нехай ν є σ- скінченою мірою на B *(A)*. Точковий процес $N : \Omega \to M(A)$ назвемо неоднорідним маркірованим пуассоновим полем з мірою інтенсивності ν, якщо:

а) при всіх $B \in$ B *(A)* з ν *(B)*< ∞, значення *N(B)* має пуассонів розподіл з параметром ν *(B)*;

б) для кожного набору $B_1, \ldots, B_k$ борельових підмножин A, що попарно не перетинаються, $k \geq 1$, значення $N(B_1), \ldots, N(B_k)$ є незалежними випадковими величинами.

**Означення 4**. Якщо міра інтенсивності ν пуассонового поля абсолютно неперервна відносно міри Лебега $\mu_m$, то похідна Радона – Никодима $d\nu / d\mu_m$ називається функцією інтенсивності.

Припустимо, що ми спостерігаємо точки пуассонового поля $N(\cdot)$ на $\mathbf{R}^m \times H$ на зростаючих множинах $G_k \times H_0$. Тут $H$ – сепарабельний дійсний нескінченновимірний гільбертовий простір, $H_0$ - борельова множина в $H$, $G_k$ - обмежена множина в $\mathbf{R}^m$ з *mes* $G_k$>0.

Припустимо, що множина $(H_0)^0$ внутрішніх точок $H_0$ є непустою; $\{G_k, k \geq 1\}$- зростаюча послідовність обмежених борельових множин, причому $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ має нескінченну міру Лебега; $G_k^0$ - множина внутрішніх точок $G_k$.

Введемо наступні умови:

©Степанищева А.О.

(i) $N(\cdot)$ - пуассонове випадкове поле з невідомою мірою інтенсивності вигляду

$\tilde{\lambda}_0(t)dt \times dg(x),\ t \in \mathbf{R}^m,\ x \in H$.

Тут $\tilde{\lambda}_0 : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $g$ - міра на B *(H)*, а міра інтенсивності задана на $\sigma(S_m \times \text{B}(H))$, де $S_m$ - σ - алгебра вимірних за Лебегом множин в $\mathbf{R}^m$. Нехай також виконані умови (ii) – (iv) із [1].

(ii) Для фіксованих додатних чисел $\tau_1,...,\tau_m$

$\tilde{\lambda}_0(t_1 + n_1\tau_1,...,t_m + n_m\tau_m) = \tilde{\lambda}_0(t_1,...,t_m),\quad \forall t_1,...,t_m \in \mathbf{R}\ \forall n_1,...,n_m \in \mathbf{Z}.$

Позначимо $\Delta_0 = \prod_{i=1}^{m}[0,\tau_i]$.

(iii) Функція $\tilde{\lambda}_0$ у внутрішніх точках $\Delta_0$ співпадає з неперервною функцією $\lambda_0$, причому $\lambda_0$ належить $K$ – заданій компактній у просторі $\left(C(\Delta_0), \|\cdot\|_\infty\right)$ підмножині невід'ємних функцій.

Покладемо $\lambda_*(t) := \min\{\lambda(t) \mid \lambda \in K\},\ t \in \Delta_0$ та $M_K := \max\{\lambda(t) \mid t \in \Delta_0, \lambda \in K\}$.

(iv) $\int_{\Delta_0} \frac{dt}{\lambda_*(t)} < \infty$.

(v) $g = N(a_0, S)$, тут S – відомий коваріаційний оператор, який має нульове ядро; $a_0 \in S^{1/2}H$ та невідоме.

Зауважимо, що $g(H_0) > 0$. Умова $a_0 \in S^{1/2}H$ нам потрібна для того, щоб $g << g_0 := N(0,S)$. Далі будемо писати $g = g_{a_0}$. Тоді [3]

$$\rho_{b_0}(x) := \frac{dg_{a_0}}{dg_0}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|b_0\|^2 + \left(b_0, S^{-1/2}x\right)\right\} (\mathrm{mod}\, g_0). \qquad (1)$$

Тут $b_0 = S^{-1/2}a \in H$; $\left(b_0, S^{-1/2}x\right)$, $x \in H$ - це $N(0,\|b_0\|^2)$- гауссова випадкова величина в імовірнісному просторі $(H, g_0)$.

Нехай $\tilde{N}$ - пуассонове поле на $\mathbf{R}^m \times H$ з функцією інтенсивності $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t)dt \times dg(x)$, яка задовольняє умові періодичності (ii), нехай також $\tilde{\lambda}$ співпадає у внутрішніх точках $\Delta_0$ з неперервною функцією $\lambda \in K$. Позначимо через $P_\lambda$ міру на просторі точкових мір $M(G_k \times H)$, породжену полем $\tilde{N}$; аналогічну міру на $M(G_k \times H)$, побудовану для поля $N$ з умови (i), позначимо через $P_0$. Тоді згідно з [2], с.78 при умовах (i)-(v) $P_\lambda << P_0$ та для майже всіх відносно $P_0$ точкових мір $\mu \in M(G_k \times H_0)$

$$\frac{dP_\lambda}{dP_0} = \exp\left\{\int_{G_k \times H_0} \ln\left(\frac{\tilde{\lambda}(t,\beta)}{\tilde{\lambda}_0(t,\beta)} \cdot \frac{dg_{b_0}}{dg_0}(x)\right) d\mu(t,x) + \nu_0(G_k \times H_0) - \right.$$
$$\left. - \int_{G_k \times H_0} \frac{\tilde{\lambda}(t,\beta)}{\tilde{\lambda}_0(t,\beta)} \cdot \frac{dg_{b_0}}{dg_0}(x) dt dg_0(x)\right\}. \qquad (2)$$

Тут $\nu_0(A) = EN(A),\ A \in \Im - \sigma - \text{алгебра в } (G_k \times H_0)$ – міра інтенсивності маркірованого пуассонового поля на $A$. Якщо покласти $\tilde{\lambda}_0 = 1$, то враховуючи (1), метод максимальної правдоподібності приводить до максимізації функціоналу

$$Q_k(\lambda;b)=\frac{1}{mesG_k}\left(-\int\limits_{G_k}\lambda(t)dt\int\limits_{H_0}\rho_b(x)dg_0(x)+\int\limits_{G_k\times H_0}\ln\lambda(t)dN(t,x)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{G_k\times H_0}\ln\rho_b(x)dN(t,x)\right). \tag{3}$$

Тут щільність $\rho_b$ можна отримати з (1), якщо підставити $b$ замість $b_0$.

Зауважимо, що $\ln\rho_b(x)=-\frac{1}{2}\|b\|^2+\left(b,S^{-1/2}x\right)$ та доданок $\left(b,S^{-1/2}x\right)$ визначений для $x\in H\setminus E_b$, де $g_0(E_b)=0$.

Для того, щоб функціонал (3) міг задавати випадкову функцію від $b$, будемо вимагати виконання більш сильної умови, ніж (v).

(vi) $a_0\in S(H)$.

Позначимо $S^{-1/2}b_0:=c_0;\quad S^{-1/2}b:=c$ і перепишемо (1) у вигляді

$$\rho_{c_0}(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\|S^{1/2}c_0\right\|^2+(c_0,x)\right\}. \tag{4}$$

Зараз це визначено при всіх $x\in H$. Також перепишемо (3):

$$Q_k(\lambda;c)=\frac{1}{mesG_k}\left(-\int\limits_{G_k}\lambda(t)dt\int\limits_{H_0}\rho_c(x)dg_0(x)+\int\limits_{G_k\times H_0}\ln\lambda(t)dN(t,x)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{G_k\times H_0}\ln\rho_c(x)dN(t,x)\right). \tag{5}$$

(vii) $c_0\in\Theta$, де $\Theta$ - компактна множина в $H$.

Таким чином, в (5) пара $(\lambda;c)\in K\times\Theta$, де $K$ – компактна множина з (iii).

Функціонал $Q_k$ з імовірністю 1 неперервний на $K\times\Theta$, завдяки цьому ми можемо означити вимірну ОМП $(\lambda_k,c_k)$ як рішення оптимізаціонної задачі

$$Q_k(\lambda_k;c_k)=\max_{(\lambda\in K,c\in\Theta)}Q_k(\lambda,c),\ \omega\in\Omega_0. \tag{6}$$

Тут $\Omega_0$ - деяка подія повної імовірності. Така оцінка існує завдяки теоремі про вимірний вибір [5].

Аналогічно [1] введемо обмеження на області спостережень. Якщо позначити

$$\tau=(\tau_1,...,\tau_m),\quad i=(i_1,...,i_m)\in\mathbf{Z}^m.$$
$$\tilde{\Delta}_i:=\prod_{k=1}^{m}(i_k\tau_k,(i_k+1)\tau_k];\quad i\tau:=(i_1\tau_1,...,i_m\tau_m); \tag{7}$$
$$G_k^0:=\bigcup_{i:\tilde{\Delta}_i\in G_k}\tilde{\Delta}_i,\qquad G_k^1:=\bigcup_{i:\tilde{\Delta}_i\cap G_k\neq\emptyset}\tilde{\Delta}_i,\ \text{то}$$

(viii) $mesG_k\to\infty$ та $\frac{mesG_k}{mesG_k^0}\to 1,\ k\to\infty$.

Це означає, що прямують до нескінченості за Ван Ховом [6, с.8].

**Теорема 1**. Нехай виконані умови (i)- (vii). Тоді з імовірністю 1

$$\|\lambda_k - \lambda_0\|_\infty + \|c_k - c_0\| \to 0, \ k \to \infty. \tag{8}$$

*Доведення.* Для доведення конзистентності (8) ми перевіряємо три умови теореми [7], с.76. Розглянемо різницю

$$\left|Q_k(\lambda_1;c) - Q_k(\lambda_2;c)\right| \le \frac{1}{mesG_k}\left(\int_{G_k}|\lambda_1-\lambda_2|dt + \int_{G_k\times H_0}\frac{\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty}{\lambda_*(t)}dN(t,x)\right).$$

Тому аналогічно [4], при умові (viii), отримаємо

$$P\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{(\lambda_{1,2}\in K,\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma,\ c\in\Theta)}\left|Q_k(\lambda_1;c)-Q_k(\lambda_2;c)\right| \le \gamma\left(1+\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_*}dt\right)\right\} = 1. \tag{9}$$

Далі,

$$\left|Q_k(\lambda;c_1)-Q_k(\lambda\ ;c_2)\right| \le M_K\int_{H_0}\left|\rho_{c_1}(x)-\rho_{c_2}(x)\right|dg(x) +$$

$$+\int_{G_k\times H_0}\left(\|c_1-c_2\|\|x\|+\frac{1}{2}\left\|S^{1/2}(c_1-c_2)\right\|^2\cdot const\right)dN(t,x)\cdot\frac{1}{mesG_k}. \tag{10}$$

Перший доданок правої частини рівний $\|c_1-c_2\|\cdot O(1)$, тому що $\int_H e^{\alpha\|x\|}dg(x)<\infty$, для будь-якого $\alpha>0$.

У другому доданку ми можемо довести, що

$$\frac{1}{mesG_k}\int_{G_k\times H_0}\|x\|dN(t,x) \to \int_{H_0}\|x\|dg_{c_0}(x),\ k\to\infty \text{ м.н.}$$

Тут $g_{c_0} \sim N(S_{c_0}, S)$. Для цього використаємо, по-перше, для $G_k^0$ закон великих чисел, а далі нам потрібно встановити, що

$$\frac{1}{mesG_k}\int_{(G_k\setminus G_k^0)\times H_0}\|x\|dN(t,x) := \gamma_k \to 0 \text{ м.н.}$$

Але

$$E\gamma_k \le \frac{mes(G_k\setminus G_k^0)\cdot M_k\cdot\int_{H_0}\|x\|dg_{c_0}(x)}{mesG_k} \to 0;$$

$$var\gamma_k = \frac{1}{mes^2G_k}\int_{(G_k\setminus G_k^0)\times H_0}\|x\|^2\cdot\lambda_0(t)dt\cdot dg_{c_0}(x) \le \frac{const\cdot mes(G_k\setminus G_k^0)}{mes^2G_k}.$$

Застосовуючи (viii) та лему Бореля – Контеллі, подібно до [4], с.94 доводиться, що $\gamma_k \to \infty$ м.н.

Далі з умови (10) випливає, що існує $c>0$ таке, що $\forall\gamma>0$:

$$P\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{(c_{1,2}\in\Theta,\|c_1-c_2\|_\infty<\gamma)}\sup_{\lambda\in K}\left|Q_k(\lambda,c_1)-Q_k(\lambda,c_2)\right| \le \gamma\cdot c\right\} = 1.$$

Тому з (9) та (10) маємо, що для деякого $c>0$

$$P\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{(\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma,\|c_1-c_2\|_\infty<\gamma)}|Q_k(\lambda_1,c_1)-Q_k(\lambda_2,c_2)|\le\gamma\cdot c\right\}=1,\ \forall\gamma>0. \qquad (11)$$

Зауважимо також, що з імовірністю 1 при $k\to\infty$

$$Q_k(\lambda,c)\to\Phi(\lambda,c;\lambda_0,c_0)=:-\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0}\lambda(t)dt\int_{H_0}\rho_c(x)dg_0(x)+$$

$$+\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0}\lambda_0(t)\ln\lambda(t)dt\cdot\int_{H_0}dg_{c_0}(x)+\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0}\lambda_0(t)dt\int_{H_0}\ln\rho_c(x)dg_{c_0}(x) \qquad (12)$$

Перепишемо (12) у вигляді:

$$\Phi(\lambda,c;\lambda_0,c_0)=\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0\times H_0}(-\lambda\rho_c+\lambda_0\rho_{c_0}\ln(\lambda\rho_c))dt\times dg_0(x) \qquad (13)$$

В (13) $\rho_c>0$; обидві функції $\lambda$ та $\lambda_0$ невід'ємні; вони можуть бути рівними нулю тільки на множині $A=\{t\in\Delta:\lambda_*(t)=0\}$, але ця множина у відповідності з (iv) має нульову міру.

Отже, ми розглядаємо $t$ таке, що $t\notin A, t\in\Delta$, звідки $\lambda(t)>0, \lambda_0(t)>0$.

Функція $u(z)=-z+z_0\ln z,\ z>0\ (z_0>0)$ досягає свого максимуму тільки в точці $z=z_0$, тому

$-\lambda\rho_c+\lambda_0\rho_{c_0}\ln(\lambda\rho_c)\le-\lambda_0\rho_{c_0}+\lambda_0\rho_{c_0}\ln(\lambda_0\rho_{c_0})$, та

$$\Phi(\lambda,c;\lambda_0,c_0)\le\Phi(\lambda_0,c_0;\lambda_0,c_0)=\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0\times H_0}(\ln(\lambda_0\rho_{c_0})-1)\lambda_0\rho_{c_0}dt\times dg_0(x).$$

У цьому виразі рівність має місце, якщо

$\lambda(t)\rho_c(x)=\lambda_0(t)\rho_{c_0}(x),\ \forall(t,x)\in\Delta_0\times H_0\ (mod\ mes\times g_0)$.

Але $\lambda$ та $\rho_c$ неперервні, тому $\forall\lambda\in K, c\in H$ випливає

$\lambda(t)\rho_c(x)=\lambda_0(t)\rho_{c_0}(x),\ \forall(t,x)\in\Delta_0\times(H_0)^0$.

Якщо покласти тут, що $t\in\Delta\setminus A$, ми отримаємо, що $\rho_c(x)=const\cdot\rho_{c_0}(x),\ x\in(H_0)^0$.

Звідки випливає рівність для скалярних добутків

$(c,x)=(c_0,x)+const,\ x\in B(x_0,r_0)\Rightarrow c=c_0$ та $\rho_c\equiv\rho_{c_0},\ \lambda=\lambda_0$.

Тут $B(x_0,r_0)$ позначає кулю радіусу $r_0$ з центром в точці $x_0$.

Таким чином, точка максимуму функціоналу $\Phi(\lambda,c)$ існує єдина та співпадає з $(\lambda_0,c_0)$.

Тому із збіжності (12), єдності точки максимуму функціоналу $\Phi(\lambda,c)$ та співвідношення (11) згідно умовам конзистентності [7], с. 76 отримуємо твердження теореми 1. □

**Наслідок 1.** Нехай $(V,\|\cdot\|_V)$– деякий банахів простір, неперервно вкладений в простір $(C(\Delta_0),\|\cdot\|_\infty)$. Нехай $K$– компактна у просторі $V$ множина невід'ємних функцій, така що:

1) $\lambda_0\in K$;

2) для функцій з K виконана умова (iv). Тоді при виконанні умов (i)-(iii), (v)-(viii)

$\|\lambda_k-\lambda_0\|_V+\|c_k-c_0\|\to\infty, k\to\infty$ м.н.

**2. Швидкість середньоквадратичної збіжності**

Щоб записати функціонал (5) у зручнішій формі, введемо додаткові позначення. Нехай

$n(k):=\#\{i\in\mathbf{Z_m}:\tilde\Delta_i\subset G_k\}$

$n_1(k):=\#\{i\in\mathbf{Z_m}:\tilde\Delta_i\cap G_k\ne\emptyset\}$

Тут $\widetilde{\Delta}_i$ означено в (7). Введемо пуассонове поле $N_i$ на $\widetilde{\Delta}_0^- \times H$, для якого при кожному $B \in \mathrm{B}(\widetilde{\Delta}_0^-)$ та $C \in \mathrm{B}(H)$ $N_i(B \times C) := N\big((B + i\tau) \times C\big)$, $i \in \mathbf{Z}^m$. Пуассонові поля $\{N_i,\ i \in \mathbf{Z}^m\}$ незалежні та в наслідок умови (ii) породжують однаковий розподіл в $M(\widetilde{\Delta}_0^- \times H)$.

Далі,

$$Q_k(\lambda;c) = -\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\frac{1}{mes\Delta_0}\int\limits_{\Delta_0}\lambda(t)dt\int\limits_{H_0}\rho_c(x)dg_0(x)+$$

$$+\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\frac{1}{n(k)mes\Delta_0}\sum_{i:\widetilde{\Delta}_i\subset G_k}\int\limits_{\widetilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\lambda(t)dN_i(t,x)+. \qquad (14)$$

$$+\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\frac{1}{n(k)mes\Delta_0}\sum_{i:\widetilde{\Delta}_i\subset G_k}\int\limits_{\widetilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\rho_c(x)dN_i(t,x)+R_k(\lambda,c),$$

де

$$R_k(\lambda,c) = -\frac{1}{mesG_k}\int\limits_{(G_k\setminus G_k^0)}\lambda(t)dt\int\limits_{H_0}\rho_c(x)dg_0(x)+$$

$$+\frac{1}{mesG_k}\left(\sum_{i:\widetilde{\Delta}_i\subset(G_k^1\setminus G_k^0)}\int\limits_{(\widetilde{\Delta}_i\cap G_k)\times H_0}\ln\lambda(t)dN(t,x)+.\sum_{i:\widetilde{\Delta}_i\subset(G_k^1\setminus G_k^0)}\int\limits_{(\widetilde{\Delta}_i\cap G_k)\times H_0}\ln\rho_c(x)dN(t,x)\right). \qquad (15)$$

Введемо додаткові умови:

(ix) Множина $K$ складена з невід'ємних функцій та компактна в просторі Соболєва $W_2^d(\Delta_0)$, з натуральним $d \ge m$, $d > \frac{3}{2}m - 1$.

(x) При кожному $t \in \Delta_0$ виконана нерівність $\lambda_0(t) > 0$.

Простір $W_2^d(\Delta_0)$ неперервно вкладений у простір $C(\Delta_0)$ [8], с.475 . Тому з умови (ix) випливає, що $K$ також компактна в $C(\Delta_0)$.

**Теорема 2.** Нехай виконані умови (i)-(x). Тоді при $k \to \infty$

$$\|c_k - c_0\| + \int\limits_{\Delta_0}(\lambda_k(t)-\lambda_0(t))^2dt = \frac{o_p(1)}{\sqrt{n(k)}} + \frac{o_p(1)}{n(k)}\cdot mes(G_k\setminus G_k^0).$$

*Доведення.* Позначимо

$$a_0(t,x) = \int\limits_{\Delta_0\times H_0}\lambda_0(t)dt\times\rho_{c_0}(x)dg_0(x),$$

$$A_k(B\times C) = \frac{1}{n(k)}\sum_{i:\widetilde{\Delta}_i\subset G_k}N_i(B\times C) - a_0(t,x), \qquad (16)$$

$$\delta_k(t) := \lambda_k(t) - \lambda_0(t), \quad t\in\Delta_0,$$

$$r_k(x) := \rho_{c_k}(x) - \rho_{c_0}(x), \quad x \in H_0.$$

Та перепишемо (14) у вигляді

$$Q_k(\lambda;c)=\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\frac{1}{mes\Delta_0}\left(-\int\limits_{\Delta_0}\lambda(t)dt\int\limits_{H_0}\rho_c(x)dg_0(x)+\right.$$

$$+\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\lambda_0(t)\rho_{c_0}(x)\ln\lambda(t)dtdg_{c_0}+\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\lambda(t)dA_k(t,x)+ \tag{17}$$

$$\left.+\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\lambda_0(t)\rho_{c_0}(x)\ln\rho_c(x)dtdg_{c_0}+\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\rho_c(x)dA_k(t,x)\right)+R_k(\lambda,c).$$

Далі міркування аналогічні доведенню теореми 2 [1]. Але у формулі (17) в порівнянні з [1] з'явилися нові доданки $\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\lambda_0(t)\rho_{c_0}(x)\ln\rho_c(x)dtdg_{c_0}$ та $\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\rho_c(x)dA_k(t,x)$. І в процесі доведення треба буде ще оцінювати інтеграли по простору $H_0$.

З нерівності $Q_k(\lambda_k,c_k)\ge Q_k(\lambda_0,c_0)$ отримаємо

$$\int\limits_{\Delta_0}\delta_k(t)dt\int\limits_{H_0}|\rho_{c_k}(x)|dg_0(x)+\int\limits_{\Delta_0}\lambda_0(t)dt\int\limits_{H_0}|r_k(x)|dg_0(x)-$$

$$-\int\limits_{\Delta_0}\lambda_0(t)\ln\left(1+\frac{\delta_k(t)}{\lambda_0(t)}\right)dt\int\limits_{H_0}|\rho_{c_0}(x)|dg_{c_0}(x)-$$

$$-\int\limits_{\Delta_0}\lambda_0(t)dt\int\limits_{H_0}|\rho_{c_0}(x)|\cdot\left|\ln\frac{\rho_{c_k}(x)}{\rho_{c_0}(x)}\right|dg_{c_0}(x)\le\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\left(1+\frac{\delta_k(t)}{\lambda_0(t)}\right)dA_k(t,x)+ \tag{18}$$

$$+\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\left|\ln\frac{\rho_{c_k}(x)}{\rho_{c_0}(x)}\right|dA_k(t,x)+|R_k(\lambda_k,c_k)-R_k(\lambda_0,c_0)|.$$

Аналогічно міркуванням в доведенні теореми 1, зауважимо що

$$\int\limits_{H_0}|\rho_{c_k}(x)|dg_0(x)\le const\int\limits_{H_0}\|x\|dg_0(x)<+\infty, \tag{19}$$

$$\int\limits_{H_0}|r_k(x)|dg_0(x)=O(1)\cdot\|c_k-c_0\|. \tag{20}$$

Оцінимо

$$\left|\ln\frac{\rho_{c_k}(x)}{\rho_{c_0}(x)}\right|\le\left|\left(-\frac{1}{2}\|c_k\|^2+\left(c_k,S^{-1/2}x\right)+\frac{1}{2}\|c_0\|^2-\left(c_0,S^{-1/2}x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left|\left(c_k-c_0,S^{-1/2}x\right)\right|+\frac{1}{2}\left|\|c_0\|^2-\|c_k\|^2\right|\le\left|\left(c_k-c_0,S^{-1/2}x\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\|c_0\|-\|c_k\|\right|\cdot\left(\|c_0\|+\|c_k\|\right)\le\|c_k-c_0\|\cdot\left\|S^{-1/2}x\right\|+const\cdot\|c_k-c_0\|. \tag{21}$$

$$\int\limits_{H_0}|\rho_{c_0}(x)|dg_{c_0}(x)=O(1),\quad\int\limits_{\Delta_0}\lambda_0(t)dt\le const. \tag{22}$$

З твердження теореми 1 та (x) маємо

$$\max_{t\in\Delta_0}\frac{|\delta_k(t)|}{\lambda_0(t)}=o_p(1). \tag{23}$$

Тоді, враховуючи (19)-(23), для достатньо малого $\delta>0$ з імовірністю, що прямує до 1 при $k\to\infty$, ліва частина (18) не менша за величину $\delta\cdot\left(\|c_k-c_0\|+\int\limits_{\Delta_0}\delta_k^2(t)dt\right)$.

З (15) випливає, що

$$\begin{aligned}|R_k(\lambda_k,c_k)-R_k(\lambda_0,c_0)|\le{}&\frac{\|\lambda_k-\lambda_0\|}{mesG_k}\cdot mes(G_k\setminus G_k^0)\cdot const+\\ &+\frac{\|c_k-c_0\|}{mesG_k}\cdot N((G_k\setminus G_0)\times H_0)\cdot const+\\ &+\frac{1}{mesG_k}\cdot\sup_{t\in\Delta_0}\left(\ln\left(1+\frac{\delta_k(t)}{\lambda_0(t)}\right)\right)\cdot N((G_k\setminus G_0)\times H_0)\cdot const=\frac{o_p(1)}{n(k)}\cdot mes(G_k\setminus G_k^0).\end{aligned} \tag{24}$$

Тут ми використали (19)-(23), теорему 1 і те, що

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\,N((G_k\setminus G_0)\times H_0)=O(1)\cdot mes(G_k\setminus G_0),\\ &\int\limits_{(G_k\setminus G_k^0)}\lambda(t)dt\int\limits_{H_0}dg_0(x)=N((G_k\setminus G_0)\times H_0).\end{aligned}$$

Далі, $A_k(t_0,x_0)=\dfrac{O_p(1)}{\sqrt{n(k)}}$ при фіксованому $t_0\in\Delta_0$, $x_0\in H_0$. Тому, використовуючи теорему 1, наслідок 1, з умови (ix) аналогічно [1] отримаємо

$$\int\limits_{\tilde{\Delta}_0^-\times H_0}\ln\left(1+\frac{\delta_k(t)}{\lambda_0(t)}\right)dA_k(t,x)=\frac{o_p(1)}{\sqrt{n(k)}}. \tag{25}$$

Загалом із співвідношень (18)-(25) отримуємо шукане співвідношення

$$\|c_k-c_0\|+\int\limits_{\Delta_0}\delta_k^2(t)dt=\frac{o_p(1)}{\sqrt{n(k)}}+\frac{o_p(1)}{n(k)}\cdot mes(G_k\setminus G_k^0). \tag{26}$$

Введемо наступну умову

(xi) $$\frac{mes(G_k\setminus G_k^0)}{\sqrt{mesG_k}}=O_p(1).$$

**Наслідок 2**. Нехай виконані умови теореми 2, а також умова (xi). Тоді

$$\|c_k-c_0\|+\int\limits_{\Delta_0}(\lambda_k(t)-\lambda_0(t))^2dt=\frac{o_p(1)}{\sqrt{n(k)}}.$$

**РЕЗЮМЕ**

В данной работе рассматривается неоднородное маркированное пуассоновское поле с неизвестной мерой интенсивности. По наблюдениям над полем на возрастающей последовательности областей построена оценка макси-

мального правдоподобия интенсивности. Изучены условия состоятельности непараметрической оценки и скорость ее среднеквадратической сходимости.

**SUMMARY**

In the given work, a nonhomogeneous marked Poisson field is considered, with unknown intensity measure. By observations over the field within an increasing sequence of domains the maximum likelihood estimator of intensity is constructed. Conditions providing consistency of the nonparametric estimator and the rate of convergence of it are studied.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. О.Г.Кукуш, А.О.Степанищева, Асимптотичні властивості непараметричної оцінки інтенсивності неоднорідного пуассонового поля. – Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2001. – Вип.65. – С.97-109.
2. R.D.Reiss, A Course on Point Processes. – Springer, New York, 1993.
3. Х.-С. Го, Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: "Мир", 1979.
4. А.Я.Дороговцев, А.Г.Кукуш, Асимптотические свойства непараметрической оценки интенсивности неоднородного процесса Пуассона.– Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №1. – С.91-104.
5. A.Ya.Dorogovtsev, N. Zerek, A.G. Kukush, Weak convergence of an infinite-dimensional parameter estimator to a normal distribution. – Theor. Probab. and Math. Statist. – 1988. – No.37. – P.45-51.
6. Н.Н.Леоненко, А.В.Иванов Статистический анализ случайных полей. – К.: "Вища школа", 1986. – 216 с.
7. А.Я.Дороговцев Теория оценок параметров случайных процессов. – К.: "Вища школа", 1982.
8. Ю.М.Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель Функциональный анализ. – К.: "Вища школа", 1990.

*Надійшла до редакції 03.03.2003 р.*

УДК 512.5

# КОВАРИАНТНЫЕ ЗНАКОВЫЕ МОДИФИКАЦИИ В ГРАДУИРОВАННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

*В.Т.Березин*
*Донецкий физико-технический институт НАН Украины*

**1. Введение**. Исчисление с чётными и нечётными переменными в смысле внешней алгебры (кольца) Грассмана по определению будем называть *градуированным*. Линейные пространства над этой алгеброй также называем градуированными. Однако если в некотором *пространстве значений функций* действует группа суперсимметрии, так что в каждом неприводимом мультиплете взаимно преобразуются бозе- и ферми-компоненты — с необходимостью в равном числе, — то такое пространство будем называть *суперсимметричным*, хотя оно и остаётся в классе градуированных. В частности, любое из *пространств значений аргументов* (включая все базы расслоений) по этому определению не может быть суперсимметричным, но градуированным вполне может быть. Для найденного нами решения проблемы объединения элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий (*B*-модель [1,2]) группа суперсимметрии не нужна, и тем не менее градуированные пространства используются. Линейную алгебру над алгеброй Грассмана **AG** обозначим LINAG. В литературе (например, [3-5]) отсутствует единообразный способ индексации весовых знаков в конструкциях LINAG. Как следствие, верные результаты одной работы автоматически могут оказаться ложными в другой с отличной системой знаков. Так часто бывает при нарушении ковариантности.

На самом деле существует естественный *(канонический)* принцип, фиксирующий способ индексации весовых знаков с точностью до двух стандартов, определяемых значениями 0 или 1 двузначного параметра $\forall$ (этот логический символ мы используем в качестве буквы с сохранением его обычного смысла "для всех"; читается: forall). Следовательно, по одной и той же теме можно написать два разных, но равноценных, математических текста. При этом, вообще говоря, никакие фрагменты одного текста нельзя вставлять в другой. При неканонической индексации знаков таких текстов может быть много. Реально это и наблюдается, так что большинство из них не сопоставимы. Чтобы не запутаться при сравнении научных результатов, удобно всегда писать один текст, но с явным включением в него параметра $\forall$ без конкретизации его значения. В обычной линейной алгебре параметр $\forall$ отсутствует. Физические аспекты работы обсуждаются в следующей статье.

**2. Канонические правила весовых знаков.** Пусть $V^{m|n}=V^{m|0}\oplus V^{0|n}$ --- линейное пространство (градуированный модуль над кольцом **AG**) с особо выбранными базисными векторами $\{{}^0e_1,\ldots,{}^0e_m\}\subset V^{m|0}$ и $\{{}^1e_1,\ldots,{}^1e_n\}\subset V^{0|n}$ соответственно. Они образуют $\mathbf{Z}_2$-градуированный *стандартный базис* $\{e_i\}\subset V^{m|n}$, $i=1,\ldots,m+n$, — такой, что $e_a={}^0e_a$, $a=\overline{1,m}$; $e_{m+\alpha}={}^1e_\alpha$, $\alpha=\overline{1,n}$. Чтобы точно описать смысл градуировки базисных векторов в LINAG, определим *линейность* и *билинейность* как обычные понятия, но используемые с точностью до перестановочных знаков (формулы (1)--(3) ниже). Пусть $C:\ V^{m|n}\times V^{m|n}\to$ **AG** — билинейное отображение. Здесь всегда можно использовать стандартный базис $\{e_i\}$ для одного прямого сомножителя и тот же самый или отличный стандартный базис $\{e^i\}\subset V^{m|n}$ — для другого. Введём в различные конструкции LINAG двузначный параметр $\forall=0$ или 1. Для начала свяжем *невырожденное* отображение $C$ и базисы $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ следующими соотношениями *двойственности,* имеющими, как оказывается, ковариантный характер:

$$C(e^i,e_j)\equiv e^i\cdot e_j=(-1)^{\forall i}\delta^i{}_j,\qquad C(e_j,e^i)\equiv e_j\cdot e^i=(-1)^{\forall i}\delta_j{}^i\equiv(-1)^{i(\forall+j)}\delta^i{}_j, \tag{1}$$

так что $C$ зависит от параметра $\forall$: $C=C_\forall$. Здесь $\delta^i{}_j$ (=1, если $i=j$ и 0, если $i\neq j$) есть символ Кронекера, но $\delta_i{}^j=(-1)^{ij}\delta^i{}_j$ им не является. Всюду используется соглашение, по которому все буквы (не считая $\forall$) в показателях степеней $(-1)^{\cdots}$ принимают целые значения (parity $\wp(\ldots)$) по модулю 2. Значение ноль отвечает чётной величине в смысле $\mathbf{Z}_2$-градуировки и алгебры Грассмана **AG**, а значение единица — нечётной. Эти числа, называемые *показателями четности* значений букв, касаются



©Березин В.Т.

как тензорных индексов, так и коренных букв (например, $X$ в $X^i$) индексируемых и скалярных величин, если последние обладают определённой *внутренней четностью*, причем символ $\wp$ мы часто не пишем, но подразумеваем, когда речь идет о показателях четности. Тензорные индексы градуируются согласно формуле:

$$(-1)^i = (-1)^{\wp i} = \begin{cases} 1, & i = 1,\ldots,m \\ -1, & i = m+1,\ldots,m+n \end{cases} \tag{2}$$

для $\wp(i) \equiv i = 0$ или 1 в соответствии с выбором стандартных базисов. Внутренняя чётность коренной буквы порождает знак $(-1)^X = \pm 1$ (intrinsic grading). Считаем, что $(-1)^e = 1$ для базисных векторов, а также $(-1)^\varnothing = 1$ для пустого множества $\varnothing$, когда возникает ситуация формальной замены $X \to \varnothing$. Согласно сформулированному правилу, всегда $(-1)^{2i} = (-1)^{2X} = 1$. Предположим, что при перестановке (градуировано) однородных сомножителей со многими индексами действует правило внешней алгебры относительно *знака перестановки* $(-1)^{\cdots}$, как в примере

$$U_{j_1\cdots j_r} V^{i_1\cdots i_s} = (-1)^{(U+j_1+\cdots+j_r)(V+i_1+\cdots+i_s)} V^{i_1\cdots i_s} U_{j_1\cdots j_r} \tag{3}$$

Возможна формальная замена $U \to \varnothing$ или $V \to \varnothing$ с сохранением всех написанных индексов, которые передаются оставшейся величине. Так, при $V \to \varnothing$, $r = s = 1$ запись $U_j{}^i = (-1)^{i(U+j)} ({}^i U_j)$ точна. Пусть $u = \overline{1,r}$, $v = \overline{1,s}$. Умножим обе части равенства (3) на $(-1)^{j_u\cdot(\forall j_u + j_{u+1}+\cdots+j_r+V+i_1+\cdots+i_{v-1})}$ и просуммируем результаты по $j_u = i_v = k$. Тогда получим:

$$\sum_k (-1)^{\forall k} \cdot (-1)^{k(j_{u+1}+\cdots j_r+V+i_1+\cdots+i_{v-1})} U_{j_1\cdots j_{u-1} k j_{u+1}\cdots j_r} V^{i_1\cdots i_{v-1} k i_{v+1}\cdots i_s} =$$

$$= (-1)^{(U+j_1+\cdots \hat{j_u} \cdots+j_r)(V+i_1+\cdots \hat{i_s} \cdots+i_s)} \sum_k (-1)^{k(\forall+1)} \cdot (-1)^{k(i_{v+1}+\cdots+i_s+U+j_1+\cdots+j_{u-1})} V^{i_1\cdots i_{v-1} k i_{v+1}\cdots i_s} U_{j_1\cdots j_{u-1} k j_{u+1}\cdots j_r}. \tag{4}$$

Здесь и далее шляпка (^) означает пропуск (отсутствие) соответствующего индекса. Обе суммы весьма характерны. Из (4) можно вывести три важных правила:

**(R1)** Каждое северо-восточное суммирование (слева в (4) типа $\cdots_k \cdots^k \cdots$) по схеме

$$\sum_{k=1}^{m+n} (-1)^{\forall k + k\Sigma} \cdots_k (mbox)^k \cdots$$

сопровождается *весовым знаком* $(-1)^{\forall k + k\Sigma}$, где $\forall = 0$ или $1$, а $\Sigma$ есть показатель четности $\wp(mbox) = 0$ или $1$, т.е. по модулю **2** сумме показателей четности всех тензорных индексов и букв, стоящих между индексами суммирования *k*.

**(R2)** Каждое северо-западное суммирование (справа в (4) типа $\cdots^k \cdots_k \cdots$) по схеме

$$\sum_{k=1}^{m+n} (-1)^{(\forall+1)k + k\Sigma} \cdots{}^k (mbox)_k \cdots$$

сопровождается знаком $(-1)^{(\forall+1)k+k\Sigma}$, где $\forall$ и $\Sigma$ имеют прежние значения.

**(R3)** Согласно (3), где $U$ или $V$ могут быть опущены $(\to \varnothing)$ с удержанием индексов на своих местах, любое изменение места, скажем, индекса $i$ относительно заданных букв и/или индексов с общим показателем четности $\Sigma$ компенсируется весовым знаком $(-1)^{i\Sigma}$, как в примере после формулы (3). Полный *градуированный знак* в (4) перед правой суммой имеет как раз эту природу.

Сформулированные *канонические правила весовых знаков* устанавливают два стандарта вычислений – соответственно для $\forall = 0$ и $\forall = 1$. Оба равноценны, так как справедливость равенства (4) не зависит от выбора значения $\forall$. Однако многие математические конструкции, не являющиеся прямым следствием соотношений типа (3) или (4), сильно зависят от выбора стандарта, что ведёт к двум различ-

ным математическим текстам по одному и тому же вопросу. Например, отображение $C$ зависит от $\forall$. Поэтому все конструкции в LINAG, определяемые с помощью $C$, (свертка тензоров, умножение матриц, след и т.д.) будут зависеть от значения $\forall$. В дальнейшем, за редким исключением, знаки сумм, сконструированных по рецепту **(R1) – (R3)**, будем опускать, постоянно, однако, имея их в виду. Канонические правила, являясь ковариантными, никогда не могут быть нарушены. Их конкретное действие мы продемонстрируем на ряде важных примеров, которые сами по себе оказываются достаточно общими математическими конструкциями.

**3. Свёртка градуированных тензоров.** Не зависящий от параметра $\forall$ тензор

$$T=(-1)^{(\forall+1)(i_1+\cdots+i_s)+\forall(j_1+\cdots+j_r)}T^{i_1\ldots i_s}_{(\forall)\ j_1\ldots j_r}e^{j_r}\otimes\cdots\otimes e^{j_1}\otimes e_{i_s}\otimes\cdots\otimes e_{i_1}, \tag{5}$$

где *компоненты* $T^{\ldots}_{(\forall)\ldots}$ зависят от $\forall$ в силу очевидного равенства

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_s}T^{i_1\ldots i_s}_{(\forall=0)j_1\ldots j_r}=(-1)^{j_1+\cdots+j_r}T^{i_1\ldots i_s}_{(\forall=1)j_1\ldots j_r}, \tag{6}$$

*доставляет нам пример ковариантной, более того --- инвариантной, величины, сконструированной по* рецепту **(R1) – (R3)** так, что между любыми парными индекса-ми суммирования другие индексы встречаются также попарно. Это свойство позволяет вычислять $\Sigma$ из правил **(R1) – (R2)** как сумму только показателей чётности промежуточных коренных букв, не обращая внимания на попарные индексы. Вообще, если при переносе сомножителя или индекса на пути встречаются два одинаковых индекса, то их влияние на перестановочный знак исчезает. Так, в (5) при каждом суммировании имеем $\Sigma=0$, так как $(-1)^e=1$. *Следовательно, на конструкцию* (5) влияют только правила учета параметра $\forall$. В дальнейшем индекс $(\forall)$ при тензорных компонентах писать не будем, постоянно помня, однако, о его существовании.

Тензоры, например, вида

$$U=(-1)^{\forall(j_1+\cdots+j_r)}U_{j_1\ldots j_r}e^{j_r}\otimes\cdots\otimes e^{j_1},\quad V=(-1)^{(\forall+1)(i_1+\cdots i_s)}V^{i_1\ldots i_s}e_{i_s}\otimes\cdots\otimes e_{i_1} \tag{7}$$

можно *тензорно* перемножить. Согласно **(R1) – (R2)** определим произведение как

$$V\otimes U=(-1)^{(\forall+1)(i_1+\cdots+i_s)+(V+\forall)(j_1+\cdots+j_r)+UV}U_{j_1\ldots j_r}V^{i_1\ldots i_s}e_{i_s}\otimes\cdots\otimes e_{i_1}\otimes e^{j_r}\otimes\cdots\otimes e^{j_1} \tag{8}$$

и аналогично

$$U\otimes V=(-1)^{(U+\forall+1)(i_1+\cdots+i_s)+\forall(j_1+\cdots+j_r)+UV}V^{i_1\ldots i_s}U_{j_1\ldots j_r}e^{j_r}\otimes\cdots\otimes e^{j_1}\otimes e_{i_s}\otimes\cdots\otimes e_{i_1}. \tag{9}$$

Тензоры (7)-(9) не зависят от $\forall$, и для их компонент существуют аналоги формулы (6). При этом, в соответствии с (5), для компонент тензорных произведений пишем:

$$\left.\begin{aligned}(V\otimes U)_{j_1\ldots j_r}{}^{i_1\ldots i_s}&=(-1)^{V(j_1+\cdots+j_r)+UV}U_{j_1\ldots j_r}V^{i_1\ldots i_s},\\ (U\otimes V)^{i_1\ldots i_s}{}_{j_1\ldots j_r}&=(-1)^{U(i_1+\cdots+i_s)+UV}V^{i_1\ldots i_s}U_{j_1\ldots j_r}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Здесь появление знаков соответствует действию правила **(R3)**. Действительно, например, в первой формуле массив индексов $(j_1,\ldots,j_r)$ в левой части равенства стоит правее буквы $V$, а в правой части — левее. Во второй формуле это касается буквы $U$ и массива $(i_1,\ldots,i_s)$. Подобная знаковая ситуация в дальнейшем будет встречаться часто.

*Свертка* тензорных произведений по паре *разновысотных* индексов выполняется с помощью избирательного действия невырожденного билинейного отображения $C$ на пару $(e^{j_u},e_{i_v})$ базисных векторов по правилам (1). Для этого свёртываемые векторы нужно поставить рядом (неважно, где), учтя при этом перестановочный знак. Свёртку по $e^{j_u}$ и $e_{i_v}$ $(u=\overline{1,r};\ v=\overline{1,s})$ обозначим линейным отображением $C_{u,v}:\mathsf{T}(r,s)\to\mathsf{T}(r-1,s-1)$ из одного пространства тензоров типа $(r,s)$ в другой типа $(r-1,s-1)$, если $e^{j_u}$ стоит левее $e_{i_v}$, или $C_{v,u}$ в противоположном случае. Тогда

$$C_{v,u}(V\otimes U)=(-1)^{(\forall+1)(i_1+\cdots\hat{i}_v\cdots+i_s)+\forall(j_1+\cdots\hat{j}_u\cdots j_r)}\times$$

$$\times T^{i_1\ldots\hat{i}_v\ldots i_s}_{j_1\ldots\hat{j}_u\ldots j_r}e_{i_s}\otimes\cdots\hat{e}_{i_v}\cdots\otimes e_{i_1}\otimes e^{j_r}\otimes\cdots\hat{e}_{i_v}\cdots\otimes e^{j_1}. \tag{11}$$

Для компонент свёртки имеем выражение (опять в связи со схемой (5)):

$$T_{\substack{\hat{j}_1\cdots\hat{j}_u\cdots j_r}}^{\quad i_1\cdots\hat{i}_v\cdots i_s} = (-1)^{V(j_1+\cdots\hat{j}_u\cdots j_r)+UV}\sum_k(-1)^{k(V+\forall)}\times$$
$$\times(-1)^{k(j_{u+1}+\cdots+j_r+i_1+\cdots+i_{v-1})}U_{j_1\cdots j_{u-1}kj_{u+1}\cdots j_r}V^{i_1\cdots i_{v-1}ki_{v+1}\cdots i_s}. \qquad (12)$$

Здесь была учтена формула (1) при $e_j\cdot e^i\to e_{i_v}\cdot e^{j_u}$; $\sum_{j_u}\sum_{i_v}\to\sum_k$, что соответствует переобозначению $j_u=i_v=k$. Знаки в (11) и (12) получаются из знака формулы (8), который предварительно нужно умножить на знак $(-1)^{k(j_{u+1}+\cdots+j_r)+k(i_1+\cdots+i_{v-1})}$, получаемый за счёт помещения рядом свёртываемых векторов $e^{j_u}$ и $e_{i_v}$. Аналогично,

$$C_{u,v}(U\otimes V) = (-1)^{(\forall+1)(i_1+\cdots\hat{i}_v\cdots+i_s)+\forall(j_1+\cdots\hat{j}_u\cdots j_r)}\times$$
$$\times\, T^{i_1\cdots\hat{i}_v\cdots i_s}_{\quad\hat{j}_1\cdots j_u\cdots j_r}\, e^{j_r}\otimes\cdots\hat{e^{j_u}}\cdots\otimes e^{j_1}\otimes e_{i_s}\otimes\cdots\hat{e^{j_u}}\cdots\otimes e_{i_1}, \qquad (13)$$

где

$$T^{i_1\cdots\hat{i}_v\cdots i_s}_{\quad\hat{j}_1\cdots j_u\cdots j_r} = (-1)^{U(i_1+\cdots\hat{i}_v\cdots+i_s)+UV}\times$$
$$\times\sum_k(-1)^{k(\forall+1+U)+k(i_{v+1}+\cdots+i_s+j_1+\cdots+j_{u-1})}V^{i_1\cdots i_{v-1}ki_{v+1}\ldots i_s}U_{j_1\cdots j_{u-1}kj_{u+1}\cdots j_r}. \qquad (14)$$

В (12) и (14) под символом $T$ следует подразумевать, соответственно, $C^{*}_{v,u}(V\otimes U)$ и $C_{u,v}(U\otimes V)$. Поэтому знаковые множители перед суммами в правых частях этих равенств соответствуют правилу **(R3)** или комментариям перед определением свёртки. Свёртки (11) и (13) через $C$ зависят от значения параметра $\forall$. Явно также это следует из того, что если тензоры (7) не зависят от $\forall$ и, следовательно, для их компонент существуют аналоги равенств (6), то для правых частей выражений (12) и (14) уже нет таких аналогов. Структура всех формул (5)--(14) согласуется с требованиями канонических правил знаков **(R1) – (R3),** коммутационной формулой (3) (с возможной заменой букв на $\varnothing$) и определением двойственности (1). Это обстоятельство мы называем *градуированной ковариантностью.*

**4. Метрика над $V^{m|n}$.** Ковариантное *градуированное транспонирование* (значок T; в обычном варианте --- t) $(m+n)\times(m+n)$-матрицы $M$ мы определяем формулами:

$$(M^{\mathrm{T}})^{ij}=(-1)^{ij}M^{ji};\quad (M^{\mathrm{T}})_{ij}=(-1)^{ij}M_{ji};\quad (M^{\mathrm{T}})_i{}^j=(-1)^{ij}M^j{}_i. \qquad (15)$$

Поэтому двойное транспонирование есть тождественная операция: $\mathrm{T}\cdot\mathrm{T}=\mathrm{id}$. Пусть $\{e_j\}$ и $\{e^i\}$, двойственные (уравнение (1)) стандартные базисы пространства $V^{m|n}$. Тогда можем написать взаимно обратные разложения:

$$\left.\begin{aligned} e^i &= (-1)^{(\forall+1)j}\gamma^{ij}e_j=(-1)^{(\forall+1)j+\forall k}\gamma^{ij}\gamma_{jk}e^k\\ e_i &= (-1)^{\forall j}\gamma_{ij}e^j=(-1)^{\forall j+(\forall+1)k}\gamma_{ij}\gamma^{jk}e_k\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Здесь *метрические* матрицы $\gamma$ имеют положительную внутреннюю чётность --- следствие стандартного выбора базисов. Из (16) получаем два матричных равенства:

$$\gamma^{-1}\cdot\gamma\equiv\left\|(-1)^{(\forall+1)j}\gamma^{ij}\gamma_{jk}\right\|=1_\gamma\equiv\left\|(-1)^{\forall i}\delta^i{}_k\right\|\equiv\begin{pmatrix}1_m & 0\\ 0 & (-1)^{\forall}\mathrm{I}_n\end{pmatrix}, \qquad (17a)$$

$$\gamma\cdot\gamma^{-1}\equiv\left\|(-1)^{\forall j}\gamma_{ij}\gamma^{jk}\right\|=1^{\mathrm{T}}_\gamma\equiv\left\|(-1)^{(\forall+1)i}\delta^i{}_k\right\|\equiv\begin{pmatrix}1_m & 0\\ 0 & (-1)^{\forall+1}\mathrm{I}_n\end{pmatrix}. \qquad (17b)$$

Левые части этих соотношений можно интерпретировать как подъём или опускание тензорных

индексов. Фактически, матрицы $1_\gamma = \|\gamma^i{}_j\|$ и $1_\gamma^{\mathrm{T}} = \|\gamma_j{}^i\|$ суть частные формы *метрики* $\gamma$, играющей роль *ковариантной единичной градуированной матрицы*. Можно строго показать, что соотношения (17) дают единственный ковариантный способ определения *обратной градуированной матрицы* для $\gamma \to M = \|M_{ij}\|$ с возможными иными индексациями: $M = \|M^{ij}\|, \|M^i{}_j\|, \|M_i{}^j\|$. Именно, для обратной соответствующей матрицы $M^{-1} = \|M^{ij}\|, \|M_{ij}\|, \|M_i{}^j\|, \|M^i{}_j\|$ с *положительной* внутренней чётностью $(-1)^M = 1$ следует всегда писать

$$M^{-1} \cdot M = 1_\gamma,\ M \cdot M^{-1} = 1_\gamma^{\mathrm{T}}, \tag{18a}$$

или полнее,

$$M^{-1} \cdot M = M \cdot M^{-1} = \gamma,\ (-1)^M = 1. \tag{18}$$

(Знак $(-1)^M = -1$ не совместим с обращением.) Запись (18) получается из (18a) путём поднятия или опускания одного индекса с помощью $\gamma$.

Согласно (1) легко получить результат о градуированной симметричности метрики:

$$C(e_i, e_k) \equiv e_i \cdot e_k = (-1)^{\forall j}\gamma_{ij}e^j \cdot e_k = \gamma_{ik} = (-1)^{ik}e_k \cdot e_i = (\gamma^{\mathrm{T}})_{ik}, \tag{19a}$$

$$C(e^i, e^k) \equiv e^i \cdot e^k = (-1)^{(\forall+1)j}\gamma^{ij}e_j \cdot e^k = \gamma^{ik} = (-1)^{ik}e^k \cdot e^i = ((\gamma^{-1})^{\mathrm{T}})^{ik}. \tag{19b}$$

В случае свёртки тензора по равно-высотным индексам действуем следующим образом. Умножим два тензора с *верхними* индексами компонент согласно правилу

$$V \otimes U = (-1)^{(\forall+1+V)(j_1+\cdots+j_r)+(\forall+1)(i_1+\cdots+i_s)+UV}U^{j_1\ldots j_r}V^{i_1\ldots i_s}e_{i_s} \otimes \cdots \otimes e_{i_1} \otimes e_{j_r} \otimes \cdots \otimes e_{j_1}. \tag{20}$$

С учётом (19a) мы выполним здесь свёртку базисных векторов $e_{i_v}$ и $e_{j_u}$ $v = \overline{1,s};\ u = \overline{1,r}$). Тогда мы получаем аналог формулы (8) с компонентами

$$T^{j_1\ldots\hat{j}_u\ldots j_r i_1\ldots\hat{i}_v\ldots i_s} = (-1)^{V(j_1+\cdots\hat{j}_u\cdots+j_r)+UV}\sum_k\sum_m(-1)^{(\forall+1)(k+m)} \times$$

$$\times\,(-1)^{k(V+j_{u+1}+\cdots+j_r+i_1+\cdots\hat{i}_v\cdots+i_s)+m(i_{v+1}+\cdots+i_s)}U^{j_1\ldots j_{u-1}kj_{u+1}\ldots j_r}V^{i_1\ldots i_{v-1}mi_{v+1}\ldots i_s}\gamma_{mk}. \tag{21}$$

С нижними индексами компонент мы поступаем аналогично, используя (19b).

**5.Ряд канонических (ковариантных) определений.** Для двух векторов из $V^{m|n}$,

$$u = (-1)^{\forall i}u_ie^i = (-1)^{(\forall+1+u)i}e^iu_i = (-1)^{(\forall+1)i}u^ie_i \tag{22}$$

и $v$ с аналогичными разложениями, находим их скалярное произведение:

$$C(u,v) \equiv C(u \otimes v) \equiv u \cdot v \equiv (-1)^{uv}C(v,u) \equiv (-1)^{uv}v \cdot u = (-1)^{(\forall+v)k}u_kv^k =$$

$$= (-1)^{(\forall+1+v)k}u^kv_k = (-1)^{\forall(i+k)+vi}u_iv_k\gamma^{ki} = (-1)^{(\forall+1)(i+k)+vi}u^iv^k\gamma_{ki}. \tag{23}$$

*Умножение градуированных матриц.* Пусть $U$ и $V$ --- тензоры ранга 2, $C_{2,3}(U \otimes V)$ означает свёртку тензорного произведения по двум внутренним базисным векторам из четырёх. Пусть одна и та же буква обозначает как тензор ранга 2, так и матрицу его компонент. Тогда, по определению, компоненты только что описанной свёртки, без множителя $(-1)^{UV}$, принимаются в качестве элементов *произведения* $U \cdot V$ градуированных матриц $U$ и $V$. Это определение автоматически совместимо с каноническими правилами весовых знаков **(R1) – (R3)**, так что, например,

$$(U \cdot V)^i{}_j = (-1)^{(\forall+1)k+V(i+k)}U^{ik}V_{kj} = (-1)^{\forall k+V(i+k)}U^i{}_kV^k{}_j, \tag{24}$$

$$(U \cdot V)^{ij} = (-1)^{(\forall+1)(k+m)+V(i+k)+j(k+m)}U^{ik}V^{mj}\gamma_{mk} = (-1)^{(\forall+1)k+V(i+k)}U^{ik}V_k{}^j \tag{25}$$

и т. д. Эти или подобные равенства можно продолжать: если необходимо, используются метрические подъёмы и опускания матричных индексов. Например,

$$V_k{}^j = (-1)^{(\forall+1)m+j(k+m)}V^{mj}\gamma_{mk} = (-1)^{\forall m+V(k+m)}\gamma_{km}V^{mj}, \tag{26}$$

$$V^k{}_j = (-1)^{\forall m+j(k+m)}V_{mj}\gamma^{mk} = (-1)^{(\forall+1)m+V(k+m)}\gamma^{km}V_{mj}. \tag{27}$$

*След градуированных матриц.* Отображение $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}^{m|n} \to \mathbf{AG}$ вида

$$\mathrm{Tr}M = (-1)^{(\forall+1)(i+j)}M^{ij}C(e_j \otimes e_i) = (-1)^{\forall(i+j)}M_{ij}C(e^j \otimes e^i) = \cdots$$
$$= (-1)^{(\forall+1)(i+j)}M^{ij}\gamma_{ji} = \cdots = (-1)^{(\forall+1)i}M^i{}_i = (-1)^{\forall i}M_i{}^i \qquad (28)$$

или $\mathrm{Tr}M = C(M)$ называется *градуированным следом*, заданным на пространстве $\mathrm{T}^{m|n}(2)$ инвариантных тензоров второго ранга или, что равносильно, на пространстве $\mathrm{Mat}^{m|n}$ квадратных матриц $M$, ассоциированных с векторным пространством $V^{m|n}$. Легко доказывается формула $\mathrm{Tr}M^{\mathrm{T}}=\mathrm{Tr}M$. Для метрики $\gamma$ имеем

$$\mathrm{Tr}\gamma=\mathrm{Tr}\gamma^{-1}=\mathrm{Tr}1_\gamma=\mathrm{Tr}1_\gamma^{\mathrm{T}} = (-1)^{\forall i}\delta_i{}^i = (-1)^{(\forall+1)i}\delta^i{}_i = m + (-1)^{\forall+1}n, \qquad (29)$$

как и должно быть, ибо матрицы $\gamma, \gamma^{-1}, 1_\gamma$ и $1_\gamma^{\mathrm{T}}$ относятся к одному и тому же тензору

$$\gamma = (-1)^{(\forall+1)(i+j)}\gamma^{ij}(e_j \otimes e_i) = (-1)^{\forall(i+j)}\gamma_{ij}(e^j \otimes e^i) =$$
$$= (-1)^{(\forall+1)i+\forall j}\gamma^i{}_j(e^j \otimes e_i) = (-1)^{(\forall+1)j+\forall i}\gamma_i{}^j(e_j \otimes e^i) \qquad (30)$$

ранга 2, называемому *инвариантным метрическим тензором*. Известные формулы

$$\mathrm{Tr}(M \cdot N)=(-1)^{MN}\mathrm{Tr}(N \cdot M), \qquad (31)$$

доказываются с учётом требуемых вариантов типа (24) – (27).

*Изменение базиса в* $V^{m|n}$. Предположим, что заданы два стандартных базиса $\{e_i\}$ и $\{\tilde{\tilde{e}}_i\}$ $\mathbf{Z}_2$-градуированного векторного пространства $V^{m|n}$ и соответствующие двойственные (дуальные) базисы $\{e^i\}$ и $\{\tilde{\tilde{e}}^i\}$ того же $V^{m|n}$ (сопряжённые пространства как множества всегда можно отождествить, или склеить, по линейности с помощью (1)). Пусть первая пара связана линейными соотношениями

$$e_i = (-1)^{\forall j}\tilde{\tilde{e}}_j K^j{}_i = (-1)^{(\forall+1)j}K_i{}^j\tilde{\tilde{e}}_j \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\tilde{e}}_j = (-1)^{\forall i}e_i(K^{-1})^i{}_j = (-1)^{(\forall+1)i}(K^{-1})_j{}^i e_i, \qquad (32)$$

где $K_i{}^j \equiv (K^{\mathrm{T}})_i{}^j$, $(K^{-1})_j{}^i \equiv ((K^{-1})^{\mathrm{T}})_j{}^i$. Тогда выполняются следующие импликации:

$$(1) \Rightarrow e^i = (-1)^{(\forall+1)j}\tilde{\tilde{e}}^j(K^{-1})_j{}^i = (-1)^{\forall j}(K^{-1})^i{}_j\tilde{\tilde{e}}^j \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\tilde{e}}^j = (-1)^{(\forall+1)i}e^i K_i{}^j = (-1)^{\forall i}K^j{}_i e^i. \qquad (33)$$

В (32) и (33) знаки внутренних чётностей всех матриц положительны, операции транспонирования и выполнимого обращения матриц коммутативны. Произвольный вектор $x \in V^{m|n}$ может быть разложен разными способами:

$$(-1)^{(\forall+x)j}\tilde{\tilde{e}}_j\tilde{\tilde{x}}^j = x = (-1)^{(\forall+x)i}e_i x^i = (-1)^{\forall j+(\forall+x)i}\tilde{\tilde{e}}_j K^j{}_i x^i. \qquad (34)$$

Следовательно, закон преобразования компонент имеет вид

$$\tilde{\tilde{x}}^j = (-1)^{\forall i+x(i+j)}K^j{}_i x^i = (-1)^{(\forall+1)i}x^i K_i{}^j. \qquad (35)$$

Для всякого вектора $\omega \in V^{m|n}$ возможно также разложение в дуальных базисах:

$$(-1)^{(\forall+1+\omega)j}\tilde{\tilde{e}}^j\tilde{\tilde{\omega}}_j = \omega = (-1)^{(\forall+1+\omega)i}e^i\omega_i = (-1)^{(\forall+1)(i+j)+i\omega}\tilde{\tilde{e}}^j(K^{-1})_j{}^i\omega_i. \qquad (36)$$

Отсюда следует другой закон преобразования для ковариантных векторных компонент:

$$\tilde{\tilde{\omega}}_j = (-1)^{(\forall+1)i+\omega(i+j)}(K^{-1})_j{}^i\omega_i = (-1)^{\forall i}\omega_i(K^{-1})^i{}_j. \qquad (37)$$

Поэтому на основании (35),

$$(-1)^{(\forall+x)j}\tilde{\tilde{\omega}}_j\tilde{\tilde{x}}^j = (-1)^{(\forall+x)i}\omega_i x^i = \mathrm{inv}. \qquad (38)$$

Сравнивая этот результат с формулой (23), заключаем, что скалярное произведение векторов инвариантно относительно преобразований базисов с сохранением стандартной градуировки (2), т.е. определено корректно.

Пусть $K = M \cdot N$, где $M$ и $N$ --- обратимые матрицы, имеющие, следовательно, положительные знаки внутренней чётности. Ясно, что $(K^{-1})^{\mathrm{T}} = (M^{-1})^{\mathrm{T}} \cdot (N^{-1})^{\mathrm{T}}$. Отсюда следует, что если матрицы $M$, $N$, $K$ и т.д. реализуют *фундаментальное представление* $D$ в $V^{m|n}$ группы $G$ преобразований базисов

$\{e_i\}_A$, $A \in \tau$ то матрицы $(M^{-1})^{\mathrm{T}}, (N^{-1})^{\mathrm{T}}, (K^{-1})^{\mathrm{T}}$ и т.д. реализуют *сопряжённое* представление $(D^{-1})^{\mathrm{T}}$ (часто называемое также *контрагредиентным*) группы $G$, действующее в том же пространстве $V^{m|n}$, но теперь уже преобразующее дуальные базисы $\{e^j\}_A$.

Правила преобразований (35) и (37) легко обобщаются для тензоров. Например,

$$\gamma_{ij} \to \overset{=}{\gamma}_{ij} = \overset{=}{e}_i \cdot \overset{=}{e}_j = (-1)^{(\forall+1)r+\forall s}(K^{-1})_i{}^r \gamma_{rs}(K^{-1})^s{}_j =$$

$$= (-1)^{\forall(r+s)+is}\gamma_{sr}(K^{-1})^r{}_i(K^{-1})^s{}_j = (-1)^{(\forall+1)(r+s)+jr}(K^{-1})_i{}^r(K^{-1})_j{}^s\gamma_{sr}, \tag{39}$$

$$\gamma^{ij} \to \overset{=ij}{\gamma} = \overset{=i}{e} \cdot \overset{=j}{e} = (-1)^{\forall r+(\forall+1)s}K^i{}_r\gamma^{rs}K_s{}^j =$$

$$= (-1)^{\forall(r+s)+jr}K^i{}_rK^j{}_s\gamma^{sr} = (-1)^{(\forall+1)(r+s)+is}\gamma^{sr}K_r{}^iK_s{}^j. \tag{40}$$

*Градуированный детерминант.* Для обратимой матрицы $M$ скаляр, обозначаемый $\mathrm{Det}\,M$ (прописная буква D в отличие от обычного $\det M$, — ср. T и t, Tr и tr), определим как интеграл вариационного уравнения

$$\delta(\ln \mathrm{Det}\,M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{M}^{-1} \cdot \delta\mathrm{M}),$$

удовлетворяющий граничному условию (с любыми блоками $X$ и $Y$, $k \in \mathbf{R}$)

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ X & k\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1_m & Y \\ 0 & k\mathrm{I}_n \end{pmatrix} = k^{-n}, \text{ при } M = \begin{pmatrix} P & C \\ D & N \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Последнее равенство в (41) есть блочное представление матрицы $M$ с произвольной индексацией и с положительной внутренней чётностью. Блок $P$, как и единичный блок $1_m$, всегда есть $(m \times m)$-матрица, индексы которой положительно четны, а блок $N$, как и нечётный единичный блок $\mathrm{I}_n$ есть $(n \times n)$-матрица, индексы которой отрицательно четны. Тогда индексация блоков $C, D, X, Y$ следует из стандартного выбора базиса линейного пространства $V^{m|n}$. Можно доказать теорему, что

$$\mathrm{Det}\left\|M_{ij}\right\| = (-1)^n \det((P + CN^{-1}D)\cdot(\det N)^{-1} = (-1)^n \mathrm{DET}(M), \tag{42a}$$

$$\mathrm{Det}\left\|M^{ij}\right\| = (-1)^n \det(P - CN^{-1}D)\cdot(\det N)^{-1} = (-1)^n \mathrm{DET}(M), \tag{42b}$$

$$\mathrm{Det}\left\|M^i{}_j\right\| = \det(P - CN^{-1}D)\cdot(\det N)^{-1} = \mathrm{DET}(M), \tag{42c}$$

$$\mathrm{Det}\left\|M_i{}^j\right\| = \det(P + CN^{-1}D)\cdot(\det N)^{-1} = \mathrm{DET}(M), \tag{42d}$$

$$\mathrm{DET}(M) = \det P \cdot (\det(N - DP^{-1}C))^{-1}, \tag{42e}$$

где det — символ обычного определителя. Иногда мы достигаем согласия с авторами хорошо известных работ, например, [3-5]. В остальном получаем важные уточнения.

**6. Комплексное сопряжение.** В алгебре Грассмана **AG** операция комплексного сопряжения (*), обладающая свойствами $(A^*)^* \equiv A^{**} \equiv A$ и $(A+B)^* = A^* + B^*$ для любых градуированных чисел $A$ и $B$, может быть задана двумя способами:

(I)требуется, чтобы произведение AA* было вещественным градуированным числом, т.е. $(AA^*)^* = AA^*$ $[\Leftrightarrow (AB)^* = B^*A^*]$;

(II) требуется, чтобы произведение двух вещественных градуированных чисел ($A = A^*$ и $B = B^*$) было вещественным градуированным числом, т.е. $(AB)^* = AB = A^*B^*$.

Как видим, комплексное сопряжение первого рода изменяет порядок сомножителей: $(A_1A_2\cdots A_n)^* = A_n{}^*\cdots A_2{}^*A_1{}^*$ (* первого рода), тогда как сопряжение второго рода этот порядок сохраняет: $(A_1A_2\cdots A_n)^* = A_1{}^*A_2{}^*\cdots A_n{}^*$ (* второго рода). В частности, для нечётных вещественных чисел $\theta_1$ и $\theta_2 \in$ **AG** имеем $(\theta_1\theta_2)^* = \theta_2\theta_1 = -\theta_1\theta_2$ (* I рода) и $(\theta_1\theta_2)^* = \theta_1\theta_2$ (* II рода). По отношению к мнимой единице $i = \sqrt{-1}$ операция * ведёт себя обычным образом: $i^* = -i$. В комплексном сопряжении второго рода операция * всегда действует только на $i$ и потому более "практична" в вычислениях.

**РЕЗЮМЕ**

Градуйоване числення базується на зовнішній алгебрі (кільці) Грассмана, включаючи, частково, градуйований тензорний аналіз над цим кільцем, та не припускає використання будь-яких груп суперсиметрії або супергравітації. Для розв'язання проблем об'єднання елементарних частинок та фундаментальних взаємодій (*B*-модель, що розроблюється автором) є важливим грассманове градуювання як простору значень функцій, так і простору значень аргументів. Останнє виконує роль розширеного градуйованого 9-вимірного простору-часу у структурі розшарувань. Саме, воно включає один скалярний вимір, чотири векторних виміри Мінковського та чотири спінорних виміри – усі відносно групи Лоренца.

Але до цього часу не було природного критерію щодо вибору градуйованих (вагових) знаків у різних сумах лінійної алгебри над кільцем Грассмана. У роботі що подається знайдено природний, або канонічний, принцип побудування коваріантних сум з ваговими знаками. Сформульовано канонічні правила вагових знаків, як такі, що їх ніколи не можна порушити. Згідно з цими правилами модифіковано практично усі основні поняття градуйованої лінійної алгебри. Поряд із теоретичним матеріалом наведено багато важливих прикладів.

**SUMMARY**

Graded calculus is based on the Grassmann's external algebra (ring), includes, in particularly, the graded tensor analysis over this ring, and unnecessarily uses a supersymmetry or supergravitation groups always acting in spaces of function values. To solve the problems of union of both the elementary particles and the fundamental interactions (*B*-model developed by the author), it is important that the Grassmannian grading is taken into account just of both the spaces of function values and the space of argument values. The latter serves as enlarged graded 9-dimensional space-time in bundle structures. To be exact, it includes one scalar dimension, four Minkowski's vector dimensions and four spinor ones --- all with respect to Lorentz group.

However so far there was no natural criterion for the choice of graded (weight) signs in various sums of linear algebra over the Grassmann's ring. In the work reviewed, the natural, or canonical, principle of covariant sum construction with the weight signs is found. The canonical rules of weight signs never can be broken. In accordance with the canonical rules, almost all the basic notions of graded linear algebra are modified. The variety of important examples are given besides the theoretical material.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Березин В.Т. Геометрическая структура базы и скрученность градуированных расслоений, используемых в моделировании гравитации и элементарных частиц. // ТМФ. – 1996. – Т.108, №1. – С.16-35.
2. Berezin V.T. Mathematical and Physical Principles of the B-Model Union of Elementary Particles and Fundamental Interactions: Free Fields. // УФЖ. – 1999. – Т.44, №10. – С.1185-1197.
3. Devitt B.S. Relativity, Groups and Topology II. Amsterdam: Elsevier, 1984. – P.482-738.
4. Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. – М: Изд-во МГУ, 1983. – 295 с.
5. Манин Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. – М: Наука, 1984. – 352 с.

*Надійшла до редакції 21.03.2002 р.*

# М Е Х А Н І К А *

УДК 531.38

## О РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЯХ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

*А.П.Михайлов, Е.К.Узбек*

Регулярные прецессии гиростата имеют наглядную механическую интерпретацию и находят широкое применение в теории гироскопических систем [1–3, 7]. Систематическое изучение условий существования регулярных прецессий твёрдого тела с неподвижной точкой провели Г.Г.Аппельрот [1], Д.Гриоли [7] и Г.В.Горр [2, 3]. Г.Г.Аппельрот рассматривал прецессии относительно оси симметрии силового поля гироскопов, эллипсоид инерции которых является эллипсоидом вращения, а центр тяжести находится в экваториальной плоскости этого эллипсоида (гироскопы класса Ковалевской и Горячева-Чаплыгина). Д. Гриоли открыл новый случай интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона, описывающий регулярную прецессию тяжёлого твердого тела относительно оси, не совпадающей с осью симметрии силового поля. Г.В.Горр разработал общий метод исследования прецессий гиростата в классической задаче и её обобщениях [4–6, 8, 10]. Им, в частности, получены и условия существования регулярных прецессий в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа [5, 6, 8, 10]. В данной статье проведено исследование этих условий, рассмотрены случаи, когда произвольными могут быть либо угол нутации, либо скорость прецессии гиростата, либо скорость собственного вращения. Указана связь между решением, характеризующим регулярную прецессию гиростата, и решением В.А.Стеклова [5].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, описывающуюся уравнениями класса Кирхгофа [4–6, 8, 10]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} - B\mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{s} - C\mathbf{v}) \times \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

где введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени.

Уравнения (1.1) имеют три первые интеграла

$$(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) + (C\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2E, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}(B\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = k. \tag{1.2}$$

Здесь $E$ и $k$ – произвольные постоянные.

Рассмотрим регулярные прецессии гиростата, то есть движения для которых постоянен угол $\theta_0$ между вектором $\mathbf{a}$, фиксированным в гиростате, и вектором $\mathbf{v}$. Следуя работам [2, 3], свойство регулярных прецессий запишем в виде двух инвариантных соотношений

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = n\mathbf{a} + m\mathbf{v}, \tag{1.3}$$

где $n$ и $m$ – постоянные, $a_0 = \cos\theta_0$. Тогда второе уравнение системы (1.1) таково

$$\dot{\mathbf{v}} = n(\mathbf{v} \times \mathbf{a}). \tag{1.4}$$

По аналогии с подходом, принятым в [2], геометрическому интегралу из (1.2), первому соотношению из (1.3) и уравнению (1.4) удовлетворим, положив

$$\mathbf{a} = (0,0,1), \quad \nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \quad (\varphi = nt), \tag{1.5}$$

---

* В этом выпуске журнала заканчиваем публикацию материалов Международной научной конференции "Актуальные проблемы механики сплошных сред" (г. Донецк, 10–13 июня 2002 г)



©Михайлов А.П., Узбек Е.К.

здесь $a_0' = \sin\theta_0$. Исследование условий существования регулярных прецессий (1.3), (1.5) в задаче (1.1), (1.2) сведены к анализу трёх скалярных уравнений [2]

$$m^2(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + (C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + 2mn(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) - 2(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}) + n^2(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) - 2E = 0, \tag{1.6}$$

$$2m(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - (B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + 2n(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) + 2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}) - k = 0, \tag{1.7}$$

$$nm\left[Sp(A)a_0'^2 - 2(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + 2a_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\right] - n^2\left[(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) - a_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\right] -$$

$$-m^2\left[a_0(A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) - (A\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\right] + n\left[a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a}) - (\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}) - a_0(B\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) + (B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\right] + m\left[(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{a}) -\right.$$

$$\left.-a_0(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}) - (B\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) + a_0(B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\right] + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}) - a_0(\mathbf{s}\cdot\mathbf{v}) - (C\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) + a_0(C\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 0, \tag{1.8}$$

где $Sp(A)$ – след матрицы $A$.

На основании соотношений (1.5) из уравнений (1.6) – (1.8) получено [2]

$$A_{12} = 0,\ B_{12} = 0,\ C_{12} = 0,\ 2m(A_{22} - A_{11}) = B_{22} - B_{11},\ m^2(A_{22} - A_{11}) = C_{11} - C_{22},$$

$$C_{13} = m^2 A_{13} - mB_{13},\ C_{23} = m^2 A_{23} - mB_{23},\ \lambda_1 = a_0 B_{13} - A_{13}(2ma_0 + n),$$

$$\lambda_2 = a_0 B_{23} - A_{23}(2ma_0 + n),\ s_1 = -m\lambda_1,\ s_2 = -m\lambda_2,$$

$$A_{33}mn + m\lambda_3 + s_3 + B_{11}(n + ma_0) - B_{33}ma_0 -$$

$$-a_0 m^2(A_{11} - A_{33}) - a_0(C_{11} - C_{33}) = 0. \tag{1.9}$$

Равенства (1.9) являются необходимыми условиями существования регулярных прецессий в задаче (1.1) для случая, когда вектор **a** занимает фиксированное положение в гиростате. В работе [2] отсутствует анализ соотношений (1.9).

**2. Величины m и $\theta_0$ – произвольны.** Потребуем, чтобы соотношения (1.9) выполнялись для любого значения $m$. Тогда из (1.9) имеем

$$A_{ij} = 0,\ B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0\ \ (i \neq j);\ \ A_{22} = A_{11},\ B_{22} = B_{11},\ C_{22} = C_{11},$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 = 0,\ s_2 = s_1 = 0,$$

$$mn(A_{22} + A_{33} - A_{11}) + m\lambda_3 + s_3 + B_{11}(n + ma_0) - B_{33}ma_0 -$$

$$a_0 m^2(A_{11} - A_{33}) - a_0(C_{11} - C_{33}) = 0. \tag{2.1}$$

При этих условиях регулярная прецессия гиростата описывается уравнениями

$$\omega_1 = ma_0' \sin\varphi,\ \ \omega_2 = ma_0' \cos\varphi,\ \ \omega_3 = n + ma_0, \tag{2.2}$$

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi,\ \ \nu_2 = a_0' \cos\varphi,\ \ \nu_3 = a_0,\ \ (\varphi = nt).$$

Анализ равенств (2.1) показывает, что они, исключая последнее соотношение, характеризуют условия существования линейного первого интеграла Кирхгофа-Харламова [6, 8] для уравнений (1.1). Задавая $m$ и $\theta_0$ произвольными, из последнего соотношения (2.1) определим значение скорости собственного вращения $n$. Очевидно в вырожденном случае, когда $m = -B_{11}A_{33}^{-1}$, величина $n$ не зависит от $m$. Решение (2.2) содержит две произвольные постоянные $m$ и $\theta_0$ и является частным вариантом случая Кирхгофа-Харламова [6, 8]. Отметим, что при произвольном значении $m$ и фиксированном значении одного из параметров $\theta_0$ и $n$ условия существования прецессий остаются прежними, то есть условиями (2.1).

**3. Величина $\theta_0$ – произвольна.** Потребуем, чтобы соотношения (1.9) выполнялись для любых значений $\theta_0$. Тогда имеем равенства

$$A_{12} = 0,\ B_{12} = 0,\ C_{12} = 0,\ B_{13} = 2A_{13}m,\ B_{23} = 2A_{23}m,\ C_{13} = -m^2 A_{13},$$

$$C_{23} = -m^2 A_{23},\ 2m(A_{22} - A_{11}) = B_{22} - B_{11},\ m^2(A_{22} - A_{11}) = C_{11} - C_{22},$$

$$m^2(A_{33} - A_{11}) - m(B_{33} - B_{11}) = C_{33} - C_{11},\ n\left[B_{11} + m(A_{22} + A_{33} - A_{11})\right] + m\lambda_3 + s_3 = 0,$$

$$\lambda_1 = -A_{13}n,\ \lambda_2 = -A_{23}n,\ s_1 = A_{13}nm,\ s_2 = A_{23}mn. \tag{3.1}$$

Для исследования связи между условиями (3.1) и условиями существования дополнительных первых интегралов уравнений (1.1), указанных А.Клебшем, В.А.Стекловым, А.М.Ляпуновым, П.В.Харламовым (см. обзор в [6]) восьмое, девятое и десятое соотношения системы (3.1) параметризуем следующим образом

$$B_{11} = p_0 + 2mA_{11},\quad B_{22} = p_0 + 2mA_{22},\quad C_{11} = -m^2 A_{11}, \tag{3.2}$$
$$C_{22} = -m^2 A_{22},\quad C_{33} + m^2 A_{33} = m\left(p_0 + 2mA_{33} - B_{33}\right),$$

где $p_0$ – новый параметр. В частном случае, если параметр $p_0$ имеет значение $-m\left(A_{11} + A_{22} + A_{33}\right)$, равенствам (3.1), (3.2) удовлетворим, положив

$$B = -m(Sp(A)\delta - 2A),\quad C = -m^2 A,\quad s_i = -m\lambda_i \quad (i = 1,2,3), \tag{3.3}$$

здесь $\delta$ – единичная матрица третьего порядка. Равенства (3.3) являются частными условиями существования дополнительного первого интеграла уравнений (1.1), указанного В. А. Стекловым [5]. Поэтому при данном значении параметра $p_0$ решение (2.2) является частным вариантом случая В. А. Стеклова. Если же $p_0 \neq -m\left(A_{11} + A_{22} + A_{33}\right)$, то равенства (3.2) не служат условиями В. А. Стеклова. Поэтому они являются условиями существования нового решения (2.2) дифференциальных уравнений (1.1). Наиболее компактную запись соотношения (3.2) принимают в следующем варианте: $p_0 = B_{33} - 2mA_{33}$. В матричном виде из (3.2) имеем

$$B = p_0\delta + 2mA,\quad C = -m^2 A. \tag{3.4}$$

Тогда последние пять равенств системы (3.1) таковы

$$s_3 + m\lambda_3 + n\left(p_0 + Sp(A)m\right) = 0,\quad \lambda_1 A_{23} - \lambda_2 A_{13} = 0, \tag{3.5}$$
$$n = -\frac{\lambda_1}{A_{13}},\quad s_1 = A_{13}mn,\quad s_2 = A_{23}mn.$$

Поэтому даже при ограничениях (3.4), (3.5) получим условия существования прецессий, которые не совпадают с условиями (3.3).

Отметим некоторые свойства условий (3.1). Во-первых, вторая координатная ось является главной осью эллипсоида инерции, а вектор **a** находится в главной плоскости эллипсоида инерции. Во-вторых, векторы **s** и **λ** не коллинеарны, как в случае В. А. Стеклова [5]. В-третьих, ось, образующая неизменный в течение времени движения угол с вертикалью **v**, не направлена по главной оси. В-четвёртых, поскольку параметр $\theta_0$ произволен, то решение (2.2) зависит от одной существенной произвольной постоянной $\theta_0$.

**4. Величины $a_0$ и n – произвольны.** Считаем, что в равенствах (1.9) величины $a_0$ и $n$ принимают произвольные независимые значения. Тогда из системы (1.9) получим

$$A_{ij} = 0,\quad B_{ij} = 0,\quad C_{ij} = 0 \quad (i \neq j);\quad \lambda_2 = \lambda_1 = 0,\quad s_2 = s_1 = 0,$$
$$s_3 = -m\lambda_3,\quad B_{11} = m\left(A_{11} - A_{22} - A_{33}\right),\quad B_{22} = m\left(A_{22} - A_{11} - A_{33}\right),$$
$$C_{11} = -m^2 A_{11},\quad C_{22} = -m^2 A_{11},\quad C_{33} = -m\left[B_{33} + m\left(A_{11} + A_{22}\right)\right]. \tag{4.1}$$

Если в системе (4.1) положим $B_{33} = m\left(A_{33} - A_{22} - A_{11}\right)$, то придём к условиям В. А. Стеклова (3.3). Но при значении $B_{33}$, отличном от указанного выше, из (4.1) имеем условия, которые не совпадают с (3.3). Таким образом, равенства (4.1) являются условиями существования регулярных прецессий (2.2), которые описывают новый случай интегрируемости уравнений (2.1). Решение (2.2) зависит от двух произвольных постоянных $\theta_0$ и $n$. Следовательно, движение гиростата вокруг неподвижной точки является суперпозицией двух вращений: первое вращение происходит вокруг вектора **a** с произвольной скоростью $n$, второе вращение происходит вокруг вектора **v** с фиксированной скоростью $m$. При таком движении угол между векторами **a** и **v** может принимать произвольные значения. Характерной особенностью условий (4.1) является свойство, что векторы **a**, **s** и **λ** коллинеарны и направлены по главной оси эллипсоида инерции. Условия (4.1) для наглядности записаны в виде соотношений, в которых не исключён параметр $m$.

**5. Величина n – произвольна.** Будем считать, что в соотношениях (1.9) произвольной является только величина $n$. Тогда условия существования регулярных прецессий таковы:

$$A_{ij}=0,\ (i\neq j),\ C_{13}=-mB_{13},\ C_{23}=-mB_{23},\ C_{12}=0,\ B_{12}=0,$$

$$\lambda_1=a_0B_{13},\ \lambda_2=a_0B_{23},\ s_1=-m\lambda_1,\ s_2=-m\lambda_2,\ B_{11}=m\left(A_{11}-A_{22}-A_{33}\right),$$

$$B_{22}=m\left(A_{22}-A_{11}-A_{33}\right),\ C_{11}=-m^2A_{11},\ C_{22}=-m^2A_{22},$$

$$m\lambda_3+s_3+a_0\left[mB_{33}+m^2\left(A_{11}+A_{22}\right)-C_{33}\right]=0. \tag{5.1}$$

Соотношения (5.1), как и в рассмотренных ранее случаях, могут привести к условиям (3.3). Для того, чтобы это показать, достаточно положить, что выполнены равенства $C_{33}=-m^2A_{33}$, $B_{33}=m\left(A_{33}-A_{11}-A_{22}\right)$. Очевидно, что в общем случае условия (5.1) не эквивалентны условиям В. А. Стеклова. Поэтому они определяют новое решение (2.2) уравнений (1.1). Характерными свойствами равенств (5.1) являются следующие утверждения: вектор $\mathbf{a}$ направлен по главной оси эллипсоида инерции; векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{s}$ не являются коллинеарными и расположены не в главной плоскости. Решение (2.2) зависит от одной произвольной постоянной $n$, то есть вращение гиростата вокруг оси, содержащей вектор $\mathbf{a}$, происходит с произвольной скоростью. Скорости прецессии и угол нутации зависят от параметров задачи (1.1) и поэтому принимают фиксированные значения.

**6. Новый класс регулярных прецессий гиростата.** Все полученные выше результаты относятся к случаю, когда вектор $\mathbf{a}$ занимает фиксированное положение в гиростате. При этом показано, что возможны различные варианты прецессий, для которых произвольными могут быть либо каждая из величин $\theta_0$, $n$, $m$, либо часть из них. Представляет большой интерес проведение исследований регулярных прецессий, характеризующихся тем свойством, что вектор $\mathbf{a}$ может принадлежать некоторой конической поверхности. Очевидно, метод, предложенный в работе [2], необходимо видоизменить.

Свяжем с гиростатом главную систему координат с началом в неподвижной точке. Вектор $\mathbf{a}$ в этой системе зададим так

$$\mathbf{a}=\left(\sin\mu_0\cos\sigma_0,\sin\mu_0\sin\sigma_0,\cos\mu_0\right), \tag{6.1}$$

где $\mu_0,\sigma_0$ – параметры.

Пусть, как и прежде, $\theta_0$ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$. Тогда с помощью формулы (6.1) геометрический интеграл из (1.2) и первое соотношение из (1.3) параметризуем следующим образом

$$\nu_1=\cos\theta_0\sin\mu_0\cos\sigma_0-\left(\sin\sigma_0\cos u+\cos\sigma_0\cos\mu_0\sin u\right)\sin\theta_0,$$

$$\nu_2=\cos\theta_0\sin\mu_0\cos\sigma_0+\left(\cos\sigma_0\cos u-\sin\sigma_0\cos\mu_0\sin u\right)\sin\theta_0,$$

$$\nu_3=\cos\theta_0\cos\mu_0+\sin\sigma_0\sin\mu_0\sin u, \tag{6.2}$$

где $u$ – вспомогательная переменная. Зависимость этой переменной от времени найдём, подставив (6.1), (6.2) в уравнение (1.4): $u=-nt$. Начальное значение переменной принято равным нулю. Компоненты вектора угловой скорости получим из второго соотношения (1.3) с помощью (6.1)

$$\omega_1=n\sin\mu_0\cos\sigma_0+m\nu_1,\ \ \omega_2=n\sin\mu_0\sin\sigma_0+m\nu_2,\ \ \omega_3=n\cos\mu_0+m\nu_3, \tag{6.3}$$

где $\nu_i$ определены формулами (6.2).

Исследование условий существования решений (6.2), (6.3) для (1.1) проведём в случае (3.4).

На основании соотношений (1.3), (1.4) первое уравнение из (1.1) может быть преобразовано к виду

$$nm\left(A_{11}+A_{22}+A_{33}\right)\left(\mathbf{a}\times\mathbf{v}\right)+np_0\left(\mathbf{a}\times\mathbf{v}\right)+n^2\left(A\mathbf{a}\times\mathbf{a}\right)+n\left(\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{a}\right)+\left(m\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{s}\right)\times\mathbf{v}=0. \tag{6.4}$$

Умножим левую часть уравнения (6.4) скалярно на вектор $\mathbf{a}$

$$\left(m\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{s}\right)\cdot\left(\mathbf{v}\times\mathbf{a}\right)=0. \tag{6.5}$$

Подставим в уравнение (6.5) выражение (6.1) и потребуем, чтобы полученное соотношение выполнялось для любых значений переменной $u$ и параметра $\sigma_0$. Тогда получим векторное равенство

$$\mathbf{s}=-m\boldsymbol{\lambda}. \tag{6.6}$$

При выполнении условия (6.6) соотношение (6.4) может выполняться для любых значений $u$ только при дополнительном ограничении: $p_0=-m\left(A_{11}+A_{22}+A_{33}\right)$. Следовательно, матрицы $B$ и $C$ и векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{s}$ удовлетворяют условиям В. А. Стеклова (3.3). Множество осей, содержащих вектор $\mathbf{a}$, и

значение скорости собственного вращения определяют уравнения

$$n(A_2 - A_3)a_2a_3 + \lambda_2a_3 - \lambda_3a_2 = 0, \quad n(A_3 - A_1)a_3a_1 + \lambda_3a_1 - \lambda_1a_3 = 0,$$
$$n(A_1 - A_2)a_1a_2 + \lambda_1a_2 - \lambda_2a_1 = 0, \tag{6.7}$$

где $a_1, a_2, a_3$ – компоненты вектора **a** из формулы (6.1), $A_i$ $(i = 1,2,3)$ – главные моменты инерции гиростата. Из системы (6.7) в силу (6.6) устанавливаем, что множеством осей, содержащих вектор **a**, является конус Штауде [9]:

$$s_1a_2a_3(A_2 - A_3) + s_2a_3a_1(A_3 - A_1) + s_3a_1a_2(A_1 - A_2) = 0. \tag{6.8}$$

Таким образом, в частном случае (3.3) решения В.А.Стеклова [5] в гиростате существует целое семейство осей, описываемых конусом (6.8), которое характеризуется тем свойством, что в течение всего времени движения угол между этой осью и вектором **v** остаётся постоянным. При таком движении скорость прецессии и скорость собственного вращения гиростата задаются соотношениями

$$m = \frac{B_{33}}{A_1 - A_2 - A_3}, \quad n = \frac{\lambda_3a_2 - \lambda_2a_3}{a_2a_3(A_2 - A_3)}.$$

Приведенный в данном пункте пример регулярных прецессий показывает важность исследования таких движений в том случае, когда вектор **a** занимает не фиксированное положение в гиростате, а принадлежит некоторой конической поверхности.

**РЕЗЮМЕ**

В статті вивчені властивості регулярних прецесій гіростату під дією потенційних і гіроскопічних сил у випадку, коли вісь, яка утворює незмінний кут з вертикаллю, займає фіксоване положення в гіростаті і кут нутації, швидкості прецесій і власного обертання приймають довільні значення.

**SUMMARY**

In article the properties of gyrostats regular precessions under influence of potential and gyroscopic forces are investigated in a case when the axis forming a constant angle with a vertical, sets the fixed position in gyrostat, and the notation angle, speeds of precession and own rotation get any values.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аппельрот Г.Г. Определение классов кинетически симметричных тяжёлых гироскопов, способных допускать упрощённые движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощённому движению гироскопа Лагранжа // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1938. – Вып.3. – С.385-411.
2. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твёрдого тела и в динамике систем связанных твёрдых тел: Препринт №89.03. – Донецк: АН УССР ИПММ, 1989. – 66 с.
3. Нелинейный анализ поведения механических систем / Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалёв А.М., Савченко А.Я. – К.: Наук. думка, 1984. – 228 с.
4. Орешкина Л.Н. Математические аналогии некоторых задач динамики твёрдого тела // Механика твёрдого тела. – 1986. – Вып.18. – С.103-110.
5. Стеклов В.А. О некоторых возможных движениях твёрдого тела в жидкости // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1895. – Т.7. – Вып.2. – С.10-21.
6. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – №4. – С.17-21.
7. Grioli. G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimetrico // Ann. mat. Pura ed appl. – 1947. – S.4, 26, f.3 – 4. – P.271-281.
8. Kirchhoff G. R. Über Bewegung eines Rötation Korpers in einer Flüssigkeit // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – B.71. – S.237-262.
9. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. reine und angew. Math. – 1894. – B.113. – H.4. – S.318-334.
10. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equation of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. –1986. –Vol.5, №5. – P.747-754.

*Надійшла до редакції 03.06.2003 р.*

УДК 539.3

# ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

*С.А.Калоеров, А.И.Баева*

В работе [1] предложены модели и методы исследования линейного деформирования упругих тел с сильным пьезоэффектом, решен ряд задач. В статьях [2, 3] разработаны методы решения двумерных задач электроупругости с использованием обобщенных комплексных потенциалов, получены основные соотношения для потенциалов в случае многосвязных тел, решен ряд задач, когда на границе заданы внешние усилия и электростатическая индукция. В данной статье с использованием комплексных потенциалов приведено решение двумерной задачи для тела с пьезоэлектрическими включениями, описаны полученные результаты численных исследований для пластинки с одним включением.

**Постановка задачи.** Рассмотрим прямолинейно анизотропное пьезоэлектрическое тело, ослабленное эллиптическими цилиндрическими полостями с образующими, параллельными друг другу. Отнесем тело к прямоугольной системе координат $Oxyz$, направив ось $Oz$ по направлению осей полостей. В полости без предварительного натяжения впаяны включения из другого пьезоэлектрического материала, находящиеся в условиях идеального электроупругого контакта с телом-матрицей так, что на поверхностях контакта

$$\left(X_{nl},\ Y_{nl},\ D_{nl},\ Z_{nl}\right)=\left(-X_n^l,\ -Y_n^l,\ -D_n^l,\ -Z_n^l\right),$$
$$\left(u,\ v,\ w,\ \varphi\right)=\left(u^l,\ v^l,\ w^l,\ \varphi^l\right), \tag{1}$$

где $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ и $D_n$ – компоненты внешних механических усилий и нормальная составляющая вектора электростатической индукции; $u$, $v$, $w$ и $\varphi$ – проекции перемещений и потенциал поля. Величины без значка вверху относятся к матрице, со значком $l$ вверху – к $l$-му включению.

Будем считать, что под действием внешних силовых или электрических полей рассматриваемое кусочно-однородное тело находится в условиях двумерного электроупругого состояния, не меняющегося вдоль направления оси $Oz$.

В поперечном сечении телу-матрице будет соответствовать бесконечная многосвязная область $S$, ограниченная контурами эллиптических отверстий $L_l$ $(l=\overline{1,\ L})$, упругим включениям – области $S^l$, ограниченные теми же контурами.

Если для исследований использовать комплексные потенциалы электроупругости [3], то определение электроупругого состояния рассматриваемой среды сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ $\left(k=\overline{1,\ 4}\right)$ для тела-матрицы и потенциалов $\Phi_k^l(z_k^l)$ $\left(k=\overline{1,\ 4}\right)$ для каждого из включений $S^l$ из граничных условий

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left\{g_{ki}^{0}\Phi_k(t_k)-g_{ki}^{0l}\Phi_k^l(t_k^l)\right\}=\varphi_{il}\quad\left(i=\overline{1,\ 8},\ \ l=\overline{1,\ L}\right). \tag{2}$$

Здесь $g_{ki}^{0}$, $g_{ki}^{0l}$ – постоянные, зависящие от анизотропии материала тела и включений; $\varphi_{il}$ – функции, зависящие от способа загружения.

Функции $\Phi_k(z_k)$ определены и голоморфны в областях $S_k$, получаемых из области $S$ аффинными преобразованиями $z_k=x+\mu_k y$ [4], где $\mu_k$ – корни известного характеристического уравнения восьмого порядка [2]. В этих областях контурам $L_l$ соответствуют эллипсы $L_{kl}$. Используя конформные отображения [5]

$$z_k=z_{0kl}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+m_{kl}/\zeta_{kl}\right), \tag{3}$$

для этих потенциалов получаем [3]

$$\Phi_k(z_k)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}/\zeta_{kl}^{n}(z_k). \tag{4}$$

©Калоеров С.А., Баева А.И.

Каждая из функций $\Phi_k^l(z_k^l)$ определена и голоморфна в эллипсе $S_k^l$, получаемом из $S^l$ аффинным преобразованием $z_k^l = x + \mu_k^l y$, где $\mu_k^l$ – корни характеристических уравнений для включений. Поэтому она может быть представлена рядами по полиномам Фабера, а следовательно, и степенным рядом вида

$$\Phi_k^l(z_k^l) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn}^l \left(z_k^l - z_{0k}^l\right)^n, \tag{5}$$

где $z_{0k}^l = x_{0l} + \mu_k^l y_{0l}$; $x_{0l}$, $y_{0l}$ – координаты центра $l$-го включения.

В функции (4), (5) входят неизвестные постоянные $a_{k\ln}$, $b_{kn}^l$, которые определяются из граничных условий (2). После этого комплексные потенциалы станут известными и по ним, используя известные формулы, можно найти напряжения, перемещения, индукцию и потенциал электрического поля в любой точке матрицы и включений [3].

Если тело содержит только одно пьезоэлектрическое эллиптическое включение, то, используя метод рядов, из граничных условий на контуре спая получаем точное решение вида

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k1}}{\zeta_k}, \quad \Phi_k^1(z_k^1) = b_{k1}^1 z_k^1, \tag{6}$$

где $a_{k1}$, $b_{k1}^1$ – коэффициенты, определяемые из системы

$$\sum_{k=1}^{4}\left(g_{ki}^0 a_{k1} - g_{ki}^{01} R_k^1 m_k^1 b_{k1}^1 - \bar{g}_{ki}^{01} \bar{R}_k^1 \bar{b}_{k1}^1\right) = -\sum_{k=1}^{4} \bar{g}_{ki}^0 \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k \quad \left(i = \overline{1, 8}\right), \tag{7}$$

где $R_k^1$, $m_k^1$ – величины, зависящие от анизотропии материала включения [5].

**Пластинка с эллиптическим пьезоэлектрическим включением.** Рассмотрим прямоугольную пластинку $2c \times 2d$ с центральным эллиптическим включением (рис. 1) с полуосями $a_1$ и $b_1$. Стороны $x = \pm c$ свободны от усилий и неэлектродированы. На сторонах $y = \pm d$ заданы равномерно распределенные растягивающие усилия интенсивности $p$, когда они неэлектродированы, или потенциал $\pm V_0$ (с разностью на сторонах $2V_0$) в противном случае.

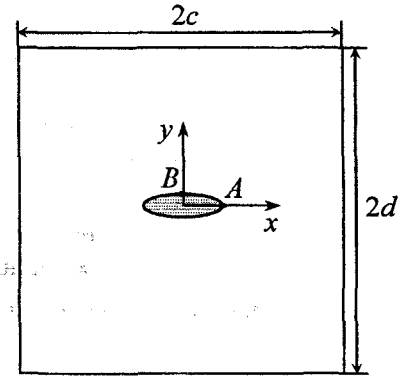


Рис. 1

Следуя [1], в случае заданного на сторонах пластинки потенциала с разностью $2V_0$ функцию $\varphi$ будем искать в виде $\varphi(y) = \varepsilon y + \varphi_0$, где $\varepsilon$ – неизвестная постоянная, $\varphi_0$ – нулевой уровень потенциала электростатического поля. Из граничных условий на сторонах $y = \pm d$ находим $\varepsilon = V_0 / d$. Заметим, что при таком подходе получаем, что в пластинке возникает поле с постоянной напряженностью $E_y = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\varepsilon = -V_0 / d$. Следовательно, случай задания на сторонах пластинки разности потенциалов можно трактовать как задание поля с постоянной напряженностью.

Будем считать, что в рассматриваемой пластинке включение находится вдали от ее края и его влиянием на электроупругое состояние около края можно пренебречь и считать пластинку бесконечной. Тогда решение для нее задачи электроупругости сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi_k^1(z_k^1)$ $\left(k = 1, 2, 3\right)$, заданных формулой (6), причем их коэффициенты определяются из системы

$$\sum_{k=1}^{3}\left(g_{ki}^0 a_{k1} - g_{ki}^{01} R_k^1 m_k^1 b_{k1}^1 - \bar{g}_{ki}^{01} \bar{R}_k^1 \bar{b}_{k1}^1\right) = -\sum_{k=1}^{3} \bar{g}_{ki}^0 \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k \quad \left(i = \overline{1, 6}\right), \tag{8}$$

следующей из (7) для данного случая.

Для пластинки из бифталата калия [6] с включением были проведены численные исследования с целью выявления условий, при которых проницаемостью включения можно пренебречь, когда включение можно считать абсолютно гибким (отверстием) или абсолютно жестким, когда эллиптическое включение можно считать линейным, в том числе и трещиной. При проведении исследований коэффициенты де-

формаций $S_{ij}^{E1}$, пьезомодули $D_{ki}^{1}$ и коэффициенты диэлектрической проницаемости $\mathrm{E}_{lk}^{t1}$ включения связывались с соответствующими величинами $S_{ij}^{E}$, $D_{ki}$, $\mathrm{E}_{lk}^{t}$ для пластинки [7] соотношениями

$$S_{ij}^{E1}=s^{1}S_{ij}^{E},\quad D_{ki}^{1}=d^{1}D_{ki},\quad \mathrm{E}_{lk}^{t1}=\varepsilon^{1}\mathrm{E}_{lk}^{t}, \tag{9}$$

где $s^1$, $d^1$, $\varepsilon^1$ – постоянные, которые будем называть соответственно параметрами коэффициентов деформаций, пьезомодулей и диэлектрической проницаемости включения. Ниже описаны некоторые из полученных результатов. Значения основных характеристик состояния даны с точностью до интенсивности приложенных воздействий, а плотности внутренней энергии – с точностью да квадрата интенсивности. Заметим, что как следует из приведенного решения, во включении для рассматриваемых нагрузок устанавливается однородное электроупругое поле, и значения основных характеристик будут одинаковыми во всех точках включения, в том числе и на контуре спая. Поэтому ниже эти значения для включения не приведены, некоторые из них легко установить по значениям основных характеристик в точках спая пластинки.

В табл. 1 приведены значения напряжений и внутренней энергии в точках А и В (см. рис. 1) пластинки с круговым включением единичного радиуса в зависимости от параметров материала включения $s^1$, $d^1$ и $\varepsilon^1$, когда пластинка растягивалась усилиями интенсивности $p$, параллельными оси $Oy$, причем основные электрические характеристики ($D_x$, $D_y$, $E_x$, $E_y$) в силу их относительной малости не приведены. В табл. 2 даны значения основных характеристик (напряжений, индукции и напряженности электростатического поля) и внутренней энергии в тех же точках в зависимости от тех же параметров для случая, когда $E_y=\varepsilon$. Для точки А не приведены равные нулю для данной нагрузки значения $E_x$, $D_x$.

Таблица 1.

| $s^1$ | $d^1$ | $\varepsilon^1$ | Точка А | | | Точка В | | | $s^1$ | $d^1$ | $\varepsilon^1$ | Точка А | | | Точка В | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\frac{U}{10^{10}}$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\frac{U}{10^{10}}$ | | | | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\frac{U}{10^{10}}$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\frac{U}{10^{10}}$ |
| $10^{8}$ | $10^{8}$ | $10^{8}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | $10^{-2}$ | $10^{2}$ | $10^{-2}$ | -0,02 | -0,96 | 0,42 | 2,48 | -0,06 | 3,06 |
| | | $10^{2}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | | | $10^{-8}$ | -0,02 | -0,96 | 0,42 | 2,48 | -0,06 | 3,06 |
| | | $10^{-2}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | | $10^{-1}$ | $10^{8}$ | 1,61 | 0,86 | 0,91 | -0,06 | -0,15 | 0,01 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | | | $10^{2}$ | 1,61 | 0,86 | 0,91 | -0,06 | -0,15 | 0,01 |
| | $10^{-8}$ | $10^{8}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | | | $10^{-2}$ | 1,60 | 0,89 | 0,90 | -0,08 | -0,18 | 0,01 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | | | $10^{-8}$ | -0,02 | -0,97 | 0,42 | 2,48 | -0,06 | 3,06 |
| $10^{2}$ | $10^{8}$ | $10^{8}$ | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,96 | 0,03 | 0,46 | | $10^{-2}$ | $10^{8}$ | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | 2,55 | 2,98 | -0,97 | 0,00 | 0,46 | | | $10^{2}$ | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | $10^{2}$ | $10^{8}$ | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,95 | 0,03 | 0,45 | | | 10 | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | | $10^{2}$ | 0,00 | 2,51 | 2,89 | -0,95 | 0,03 | 0,45 | | | 0,1 | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | | 10 | -0,01 | 2,50 | 2,88 | -0,94 | 0,03 | 0,44 | | | $10^{-2}$ | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | | 0,1 | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,96 | 0,03 | 0,46 | | | $10^{-8}$ | 0,56 | 0,73 | 0,19 | -0,31 | 1,54 | 1,38 |
| | | $10^{-2}$ | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,96 | 0,03 | 0,46 | | $10^{-8}$ | $10^{8}$ | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | | $10^{-8}$ | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,96 | 0,03 | 0,46 | | | $10^{-8}$ | -0,16 | -0,07 | 0,01 | 0,80 | 1,59 | 0,83 |
| | $10^{-8}$ | $10^{8}$ | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,95 | 0,03 | 0,46 | $10^{-8}$ | $10^{-8}$ | $10^{8}$ | 1,62 | 0,88 | 0,92 | -0,08 | -0,16 | 0,01 |
| | | $10^{-8}$ | 0,01 | 2,51 | 2,89 | -0,95 | 0,03 | 0,45 | | | $10^{2}$ | 1,62 | 0,88 | 0,92 | -0,08 | -0,16 | 0,01 |
| $10^{-2}$ | $10^{2}$ | $10^{8}$ | 1,61 | 0,86 | 0,91 | -0,06 | -0,15 | 0,01 | | | $10^{-2}$ | 1,62 | 0,88 | 0,92 | -0,08 | -0,16 | 0,01 |
| | | $10^{2}$ | -0,49 | -1,49 | 0,78 | 3,22 | -0,03 | 5,08 | | | $10^{-8}$ | 1,62 | 0,88 | 0,92 | -0,08 | -0,16 | 0,01 |

Таблица 2.

| $s^1$ | $d^1$ | $\varepsilon^1$ | Точка А | | | | | Точка В | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $D_y$ | $E_y$ | $U$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $D_y$ | $E_y$ | $U$ |
| $10^8$ | $10^8$ | $10^8$ | 0,00 | 0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,13 | 0,00 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | -0,09 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 10 | $10^8$ | $10^8$ | 0,00 | 0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,13 | 0,00 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | -0,09 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| | 10 | $10^8$ | -0,03 | 0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,17 | -0,01 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^2$ | -0,02 | 0,09 | 0,09 | 0,02 | 0,00 | 0,16 | -0,01 | 8,88 | 2,18 | 9,70 |
| | | 2 | 0,14 | 0,14 | 2,80 | 0,69 | 0,96 | -0,15 | 0,02 | 5,60 | 1,38 | 3,86 |
| | | 0,5 | 0,97 | 0,73 | 5,26 | 1,29 | 3,40 | -1,32 | 0,16 | 2,63 | 0,65 | 0,85 |
| | | $10^{-2}$ | -0,01 | -0,09 | 7,37 | 1,81 | 6,67 | -0,10 | 0,00 | 0,07 | 0,02 | 0,00 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | -0,09 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| | $10^{-8}$ | $10^8$ | -0,03 | 0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,17 | -0,01 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^{-8}$ | -0,01 | -0,10 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | -0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| $10^{-1}$ | $10^8$ | $10^8$ | 0,00 | 0,12 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,13 | -0,01 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | -0,09 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| | $10^1$ | $10^8$ | -0,19 | -0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,42 | 0,00 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^2$ | -0,17 | -0,07 | 0,09 | 0,02 | 0,00 | 0,38 | 0,00 | 8,88 | 2,18 | 9,70 |
| | | $10^{-2}$ | 0,00 | -0,10 | 7,37 | 1,81 | 6,67 | -0,10 | 0,00 | 0,07 | 0,02 | 0,00 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | -0,10 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| | $10^{-1}$ | $10^8$ | -0,19 | -0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,42 | 0,00 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^2$ | -0,19 | -0,09 | 0,09 | 0,02 | 0,00 | 0,41 | 0,00 | 8,88 | 2,18 | 9,70 |
| | | 2 | -0,13 | -0,11 | 2,80 | 0,69 | 0,96 | 0,25 | 0,01 | 5,60 | 1,38 | 3,86 |
| | | 0,5 | -0,09 | -0,13 | 5,26 | 1,29 | 3,40 | 0,10 | 0,01 | 2,63 | 0,65 | 0,85 |
| | | $10^{-2}$ | -0,05 | -0,15 | 7,37 | 1,81 | 6,67 | -0,03 | 0,01 | 0,07 | 0,02 | 0,00 |
| | | $10^{-8}$ | 0,00 | -0,10 | 7,43 | 1,83 | 6,79 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| | $10^{-8}$ | $10^8$ | -0,19 | -0,09 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,42 | 0,00 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^{-8}$ | -0,06 | -0,17 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| $10^{-8}$ | $10^{-8}$ | $10^8$ | -0,20 | -0,11 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,44 | 0,01 | 8,99 | 2,21 | 9,93 |
| | | $10^{-8}$ | -0,07 | -0,17 | 7,43 | 1,83 | 6,78 | 0,01 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

Из данных табл. 1, 2 и других полученных результатов следует, что в случае растяжения пластинки возникающие в ней электрические характеристики ($E_x$, $E_y$, $D_x$, $D_y$) малы по сравнению с напряжениями. В этом случае на значения напряжений и внутренней энергии мала и роль параметра диэлектрической проницаемости включения $\varepsilon^1$. Если к пластинке приложена разность потенциалов при постоянной напряженности $\varepsilon$, то в ней возникают значительные электрические характеристики и меньшие по сравнению с ними (но не пренебрежимо малые) напряжения. В случае заданной разности потенциалов роль параметра проницаемости включения $\varepsilon^1$ на значения электрических характеристик весьма значительна. При этом с уменьшением значения $\varepsilon^1$, пока $10^2 < \varepsilon^1 < 10^{-2}$, в точке А значения $D_y$, $E_y$, $U$ возрастают, а в точке В убывают. Вне указанного интервала на значения электрических характеристик изменение $\varepsilon^1$ влияет незначительно: при $\varepsilon^1 > 10^2$ проницаемость достигает высокого уровня и ее дальнейшее увеличение не приводит к изменениям электроупругого состояния; при $\varepsilon^1 < 10^{-2}$ включение является практически диэлектрически непроницаемым и поэтому дальнейшее снижение проницаемости не приводит к

изменению электроупругого состояния. Это согласуется с результатами, полученными в работе [1]. Следовательно, включение можно считать диэлектрически непроницаемым, начиная с $\varepsilon^1 = 10^{-2}$. Заметим, что при решении задач многие авторы считают включение диэлектрически непроницаемым, если его проницаемость на порядок меньше проницаемости пластинки. Из табл. 2 также следует, что напряжения $\sigma_y\big|_A$, $\sigma_x\big|_B$ с уменьшением $\varepsilon^1$ незначительно убывают. Возникающие во включении индукция, напряженность и внутренняя энергия выражаются через их значения в пластинке и параметр $\varepsilon^1$ таким образом: $D_y^1 = \varepsilon^1 D_y\big|_A$, $E_y^1 = E_y\big|_B / \varepsilon^1$, $U^1 = \varepsilon^1 U\big|_A$. Роль параметров $s^1$ и $d^1$ на значения основных характеристик незначительна. Из табл. 1, 2 также следует, что при фиксированном $s^1$ изменение параметра $d^1$ не оказывает существенного влияния на значения напряжений, но этот параметр не должен превосходить значение $s^1$. В дальнейших исследованиях они считаются равными.

Исследованиями также установлено, при каких значениях малой полуоси эллипса $b_1$ возникает сингулярность в концах включения. Из полученных данных следует, что сингулярность в концах включения возникает, если полуось $b_1 \le 10^{-5}$ (для мягких включений даже при $b_1 \le 10^{-4}$). В дальнейшем под линейным включением будем понимать именно такое эллиптическое включение, т.е. когда его полуось (в данном случае $b_1$) равна $10^{-5}$.

В табл. 3 для пластинки с линейным включением единичной полудлины для разных значений коэффициента жесткости $s^1$ даны значения КИН $k_1$ ($d^1 = s^1$, $\varepsilon^1 = 10^{-2}$), а на рис. 2, 3 изображены графики изменения напряжений $\sigma_y$ в концах концентратора и указанного КИН соответственно. Как следует из табл. 3 и рис. 2, 3 особенность напряжений в концах линейного пьезоэлектрического концентратора возникает при $s^1 < 0,05$ и $s^1 > 10$. Если же $0,05 < s^1 < 10$, то в концах включения напряжения не имеют особенностей и КИН равняется нулю. При этом, если $10^1 \le s^1 \le 10^2$ и $10^{-1} \le s^1 \le 0,05$, то КИН невелик. Как следует из описанных результатов, подкрепление трещины даже очень мягким материалом ($s^1 \approx 10^2$, что можно трактовать как уменьшение жесткости включения по сравнению с пластинкой в сотни раз) резко снижает значения напряжений вблизи трещины и КИН для ее вершин.

Таблица 3.

| $s^1$ | Точка А | | | | Точка В | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_1$ | $\sigma_x = \sigma_x^1$ | $\sigma_y$ | $\frac{U}{10^8}$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\frac{U}{10^{10}}$ |
| $\infty$ | 1,0000 | – | – | – | – | – | – |
| $10^8$ | 1,0000 | – | – | – | -0,9698 | 0,0021 | 0,4584 |
| $10^5$ | 0,3263 | – | – | – | -0,3163 | 0,6746 | 0,3640 |
| $10^4$ | 0,0465 | – | – | – | -0,0447 | 0,9540 | 0,4402 |
| 1000 | 0,0050 | – | – | – | -0,0047 | 0,9952 | 0,4572 |
| 100 | 0,0006 | – | – | – | -0,0005 | 0,9995 | 0,4591 |
| 10 | 0,0001 | 0,3571 | 7,86 | 0,27 | -0,0001 | 1,0000 | 0,4593 |
| 5 | 0,00 | 0,3571 | 4,12 | 0,07 | 0,00 | 1,0000 | 0,4593 |
| 0,1 | 0,00 | -12,2240 | -6,16 | 0,53 | 0,0002 | 1,0000 | 0,4592 |
| 0,05 | 0,00 | -13,4481 | -6,95 | 0,64 | 0,0002 | 1,0000 | 0,4592 |
| 0,01 | 0,0002 | -50,6772 | -27,22 | 9,01 | 0,0006 | 1,0000 | 0,4589 |
| 0,001 | 0,0014 | – | – | – | 0,0057 | 0,9985 | 0,4551 |
| $10^{-4}$ | 0,0134 | – | – | – | 0,0511 | 0,9866 | 0,4232 |
| $10^{-5}$ | 0,0667 | – | – | – | 0,2532 | 0,9337 | 0,3137 |
| $10^{-6}$ | 0,1110 | – | – | – | 0,4190 | 0,8903 | 0,2634 |
| 0 | 0,1184 | – | – | – | – | – | – |

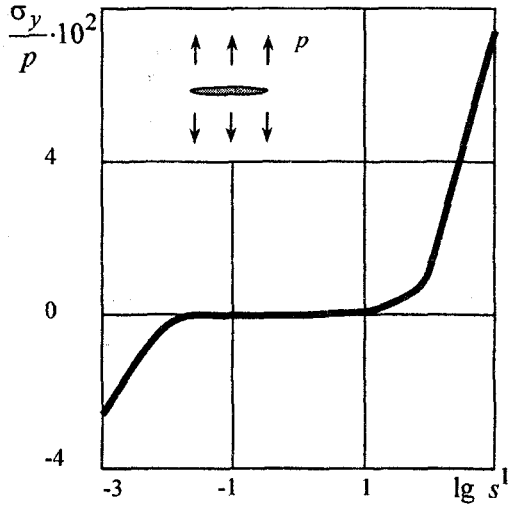



Рис. 2

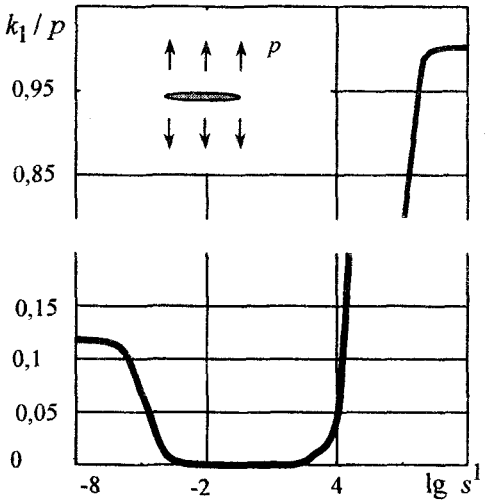



Рис. 3

В табл. 4 приведены значения КИНИН в пластинке с линейным включением единичной полудлины

Таблица 4.

| $s^1$ | ∞ | | | $10^3$ | | $10^1$ | | $10^{-1}$ | | $10^{-3}$ | | | $10^{-6}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon^1$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{-8}$ |
| $k_1$ | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0183 | 0,0002 | 0,0184 | 0,0023 | 0,0184 | 0,0005 | 0,0020 | 0,0184 | 0,0007 | 0,0042 | 0,0186 |
| $k_E$ | 0,0013 | 0,0124 | 1,0000 | 0,0124 | 1,0000 | 0,0124 | 1,0000 | 0,0124 | 1,0000 | 0,0013 | 0,0124 | 1,0000 | 0,0013 | 0,0124 | 1,0000 |
| $k_D$ | 0,0054 | 0,0504 | 4,0636 | 0,0504 | 4,0636 | 0,0504 | 4,0636 | 0,0504 | 4,0636 | 0,0054 | 0,0504 | 4,0636 | 0,0054 | 0,0504 | 4,0636 |

в зависимости от коэффициентов жесткости $s^1$ и проницаемости $\varepsilon^1$ ($d^1 = s^1$) при действии $E_y = \varepsilon$. Как следует из табл. 4, значения коэффициентов интенсивности $k_E$, $k_D$ существенно зависят от параметра $\varepsilon^1$ и не зависят от жесткости включения (параметра $s^1$), но этот коэффициент существенно влияет на $k_1$: с уменьшением $s^1$ значения $k_1$ увеличивается. Наибольшего значения $k_1$ достигает для жесткого непроницаемого включения.

**РЕЗЮМЕ**

З використанням узагальнених комплексних потенціалів отриманий розв'язок задачі електропружності для тіла з п'єзоелектричними включеннями при дії механічного та електричного полів. Наведений точний розв'язок задачі для тіла з однім включенням. Для анізотропної платівки з включенням при впливі зовнішніх зусиль або різниці потенціалів проведені дослідження щодо виявлення умов, при яких діелектричною проникністю включення можна знехтувати, при яких включення можна вважати абсолютно гнучким (отвором) або абсолютно жорстким, коли еліптичне включення можна вважати лінійним, в тому числі й тріщиною.

**SUMMARY**

Using the generalize complex potentials the solution of electroelastic problem for a body with piezoelectric inclusions under action of mechanical and electric fields is received. The exact solution of the problem for a body with one inclusion is given. The numerical researches for an anisotropic plate with an inclusion under action of external efforts or electric potential's difference were carried out. The aim of the researches was to discover the influence of electroelastic characters of material of plate and inclusion and geometric parameters of inclusion.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость / Механика связных полей в элементах конструкций. – К., 1989. – Т.5. – 280 с.
2. Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела с полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып.32. – С.64-79.

3. Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела // Прикладная механика. – 2003. – Т.39, №1. – С.84-91.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
5. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – Вып.25. – С.45-56.
6. Выращивание кристаллов бифталата калия и их оптические, пьезоэлектрические и упругие свойства / Беляев Л.М., Беликова Г.С., Гильварг А.Б. и др. // Кристаллография. – 1969. – Т.14, №4. – С.645-651
7. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков. – М., 1968. – 463 с.

*Надійшла до редакції 31.03.2003*

УДК 539.3

# ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

*С.А.Калоеров, Ю.А.Глущенко*

В работах [1, 2] получены основные соотношения линейной теории деформирования пьезокерамических пластин и оболочек, сформулированы краевые задачи, на случай пьезоэлектрических материалов обобщены методы механики разрушения. В статьях [3, 4] разработаны методы решения двумерных задач электроупругости для анизотропного пространства и полупространства с полостями и трещинами, причем поверхности последних в случае полупространства не пересекали плоскую границу. В данной статье предлагается приближенный метод решения задач электроупругости для многосвязного анизотропного полупространства, когда ослабляющие его полости и трещины могут выходить на плоскую границу.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим находящееся в двумерном электроупругом состоянии многосвязное анизотропное нижнее полупространство из пьезоэлектрического монокристалла, ослабленное эллиптическими цилиндрическими полостями, образующие которых параллельны друг другу и плоской границе. Поверхности полостей могут касаться, пересекаться, образовывать плоские трещины или полости любой формы, а также пересекать плоскую границу полупространства. Отнесем полупространство к прямоугольной системе координат $Oxy$, направив ось $z$ по направлению образующих цилиндрических поверхностей так, что в поперечном сечении полупространства плоскостью $Oxy$ будем иметь многосвязную полуплоскость $S^-$, ограниченную прямолинейной границей $L^+$ и эллиптическими контурами $L_l$ с полуосями $a_l$ и $b_l$ $\left(l=\overline{1,\ L}\right)$ (рис. 1). Обозначим расстояние от начала координат до прямолинейной границы через $h^+$. На бесконечности действуют растягивающие усилия $\sigma_x^\infty = p$.

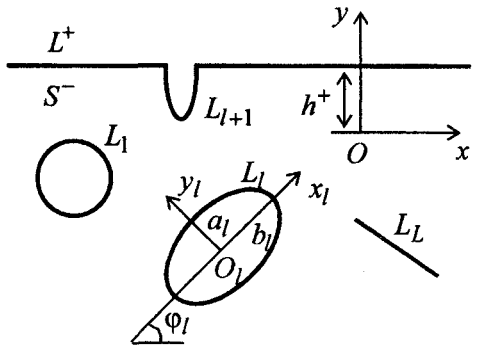


Рис. 1

Определение электроупругого состояния рассматриваемого полупространства сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $\Phi'_k(z_k)$ $\left(k=\overline{1,\ 4}\right)$ из граничных условий на плоской границе и на поверхностях полостей [4]

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ki}^{0}\,\delta_k \Phi'_k(t_k)=0 \quad \left(i=\overline{1,\ 4}\right). \tag{1.1}$$

Здесь

$$g_{k1}^{0}=\lambda_{2k},\quad g_{k2}^{0}=\lambda_{6k},\quad g_{k3}^{0}=\lambda_{4k},\quad g_{k4}^{0}=\lambda_{8k};$$

$$\delta_k=\frac{dx}{ds}+\mu_k\frac{dy}{ds}=\frac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}; \tag{1.2}$$

$\lambda_{ik}$ – постоянные, зависящие от материала полупространства; $\mu_k$ – корни известного характеристического уравнения; $x'$, $y'$ – производные по параметру параметрического задания контура.

**2. Определение комплексных потенциалов.** Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях $S_k^-$, получаемых из $S^-$ аффинными преобразованиями $z_k = x+\mu_k y$. При этом границе $L^+$ и контурам отверстий $L_l$ в $S_k^-$ будут соответствовать прямолинейные границы $L_k^+$ и контуры $L_{kl}$.

Граничные условия (1.1) для плоской границы можно также записать в виде [3]



©Калоеров С.А., Глущенко Ю.А.

$$\Phi'_k(z_k)+\overline{r_k}\,\overline{\Phi'_k(z_k)}+\overline{s_{k+1}}\,\overline{\Phi'_{k+1}(z_{k+1})}+\overline{e_{k+2}}\,\overline{\Phi'_{k+2}(z_{k+2})}+\overline{n_{k+3}}\,\overline{\Phi'_{k+3}(z_{k+3})}=0, \quad (2.1)$$

где $\overline{r_k}$, $\overline{s_{k+1}}$, $\overline{e_{k+2}}$, $\overline{n_{k+3}}$ – известные постоянные; $k$ – индекс, принимающий значения 1 – 4, причем значение индекса $k+j$, когда он больше 4, формально полагается равным $k+j-4$. При этом для точек прямолинейной границы $z_k=t_k=x+\mu_k h^+$, $z_{k+j}=t_k+(\overline{\mu_{k+j}}-\mu_k)h^+$ $(j=\overline{0,3})$.

Если контуры $L_l$ не пересекают линию $L^+$ и не касаются ее, то из (2.1), учитывая общие представления комплексных потенциалов для многосвязной области [4], методом интегралов типа Коши находим

$$\Phi'_k(z_k)=\Gamma_k+\Phi'_{k1}(z_k)-\overline{r_k}\,\overline{\Phi'_{k1}}(z_k+(\overline{\mu_k}-\mu_k)h^+)-\overline{s_{k+1}}\,\overline{\Phi'_{k+1,1}}(z_k+(\overline{\mu_{k+1}}-\mu_k)h^+)-$$
$$-\overline{e_{k+2}}\,\overline{\Phi'_{k+2,1}}(z_k+(\overline{\mu_{k+2}}-\mu_k)h^+)-\overline{n_{k+3}}\,\overline{\Phi'_{k+3,1}}(z_k+(\overline{\mu_{k+3}}-\mu_k)h^+). \quad (2.2)$$

При этом $\Gamma_k$ – постоянные, определяемые из условий на бесконечности; $\Phi'_{k1}(z_k)$ – функции, голоморфные вне эллипсов $L_{kl}$.

Отобразим внешность единичного круга $|\zeta_{kl}|>1$ на внешность контуров $L_{kl}$. В отображенных областях функции $\Phi'_{k1}(z_k)$ можно представить в виде следующих рядов [5]:

$$\Phi'_{k1}(z_k)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}\varphi'_{kln}(z_k), \quad (2.3)$$

где

$$\varphi'_{kln}(z_k)=-\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}\left(\zeta_{kl}^2-m_{kl}\right)}. \quad (2.4)$$

С учетом этих разложений легко получить, что

$$\overline{\Phi'}_{k+j,ln}(z_k+(\overline{\mu_{k+j}}-\mu_k)h^+)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a}_{k+j,ln}\,\overline{\varphi'}^{+}_{k+j,ln}(z_k)\quad\left(j=\overline{0,3}\right). \quad (2.5)$$

Здесь

$$\overline{\varphi'}^{+}_{k+j,ln}(z_k)=-\frac{n}{\overline{\zeta}_{k+j,l}^{n-1}\overline{R}_{k+j,l}\left(\overline{\zeta}_{k+j,l}^{2}-\overline{m}_{k+j,l}\right)}; \quad (2.6)$$

$\overline{\zeta}_{k+j,l}$ – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k=\overline{z}_{0,k+j,l}+\left(\mu_k-\overline{\mu}_{k+j}\right)h^+ +\overline{R}_{k+j,l}\left(\overline{\zeta}_{k+j,l}+\frac{\overline{m}_{k+j,l}}{\overline{\zeta}_{k+j,l}}\right). \quad (2.7)$$

Тогда функции (2.2) примут вид

$$\Phi'_k(z_k)=\Gamma_k+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{kln}\varphi'_{kln}(z_k)-\overline{r_k}\,\overline{a_{kln}}\,\overline{\varphi'}^{+}_{kln}(z_k)-\overline{s_{k+1}}\,\overline{a_{k+1,ln}}\,\overline{\varphi'}^{+}_{k+1,ln}(z_k)-$$
$$-\overline{e_{k+2}}\,\overline{a_{k+2,ln}}\,\overline{\varphi'}^{+}_{k+2,ln}(z_k)-\overline{n_{k+3}}\,\overline{a_{k+3,ln}}\,\overline{\varphi'}^{+}_{k+3,ln}(z_k), \quad (2.8)$$

где $a_{kln}$ – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах отверстий, например, методом наименьших квадратов.

Если же хотя бы один из контуров отверстий или трещин пересекает прямолинейную границу, то применять метод интегралов типа Коши невозможно. Но вид комплексных потенциалов (2.8) можно сохранить и в этом случае, выбирая постоянные, входящие в (2.5), независимыми от коэффициентов $a_{kln}$.

Обозначая эти постоянные для функций (2.5) через $\overline{b}_{kln}$, будем иметь

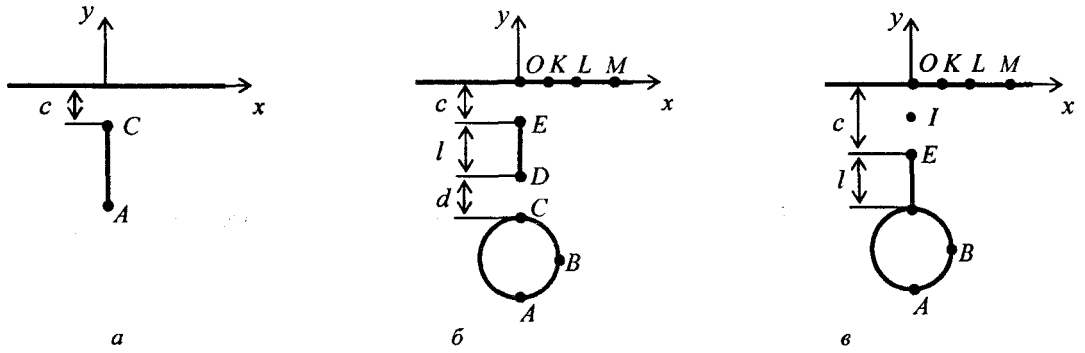
$$\Phi'_k(z_k)=\Gamma_k(z_k)+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\{a_{kln}\varphi'_{kln}(z_k)-\overline{r}_k\overline{b}_{kln}\overline{\varphi'}^{+}_{kln}(z_k)-\overline{s}_{k+1}\overline{b}_{k+1,ln}\overline{\varphi'}^{+}_{k+1,ln}(z_k)-$$
$$-\overline{e}_{k+2}\overline{b}_{k+2,ln}\overline{\varphi'}^{+}_{k+2,ln}(z_k)-\overline{n}_{k+3}\overline{b}_{k+3,ln}\overline{\varphi'}^{+}_{k+3,ln}(z_k)\}. \qquad (2.9)$$

При этом постоянные $b_{kln}$, как и $a_{kln}$, являются независимыми. Но в отличие от предыдущего случая их нужно определять, удовлетворяя граничным условиям как на контурах отверстий $L_l$, так и на прямолинейной границе $L^+$. И здесь наиболее удобным является метод наименьших квадратов. Составляя функционал

$$J=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\left\{\left|\sum_{k=1}^{4}g^0_{ki}\Phi'_k(t_k)+\overline{g^0_{ki}\Phi'_k(t_k)}\right|^2\right\}, \qquad (2.10)$$

где система точек $t_m\ \left(m=\overline{1,M}\right)$ на $L_l$ и $L^+$, и минимизируя его, для определения $a_{kln}$ и $b_{kln}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы комплексные потенциалы станут известными, и можно вычислять основные характеристики электроупругого состояния, а также коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности электрического поля (КИНИН) [4].

Были проведены численные исследования распределения напряжений и изменения КИН для обобщенного плоского электроупругого состояния полуплоскости из пьезоэлектрических монокристаллов бифталата калия (материал М1) или бифталата рубидия (материал М2) [6]. Ниже приведены некото-




*а* *б* *в*

Рис. 2

рые из полученных результатов с точностью до множителя $p$, равного $\sigma_x^{\infty}$.

В табл. 1 для полуплоскости с одной вертикальной к границе трещиной единичной длины приведены значения КИН $k_1^-$ и $k_1^+$ для вершин $A$ и $C$ (рис. 2, *а*). При этом данные для $c=0$ соответствуют краевой трещине, выходящей на границу полуплоскости. На рис. 3 в зависимости от длины перемычки $c$ приведены графики изменения КИН для вершин внутренней трещины в полуплоскости из материала М1, а на рис. 4 в зависимости от длины $l$ краевой трещины даны графики изменения $k_1^-$. Из табл. 1, рис. 3 и 4 следует, что при сближении трещин с границей полуплоскости концентрация напряжений в точках перемычки и КИН для вершин трещины увеличиваются. Для данной нагрузки значения КИН от анизотропии материала зависят незначительно. Увеличение длины краевой трещины

Таблица 1

| $c$ | Материал | | | |
|---|---|---|---|---|
| | М1 | | М2 | |
| | $k_1^-$ | $k_1^+$ | $k_1^-$ | $k_1^+$ |
| 1,00 | 0,7302 | 0,7394 | 0,7326 | 0,7427 |
| 0,50 | 0,7564 | 0,7896 | 0,7609 | 0,7968 |
| 0,10 | 0,8460 | 1,0859 | 0,8551 | 1,1044 |
| 0,01 | 0,9528 | 2,1466 | 0,9651 | 2,1858 |
| 0 | 1,0863 | – | 1,0920 | – |

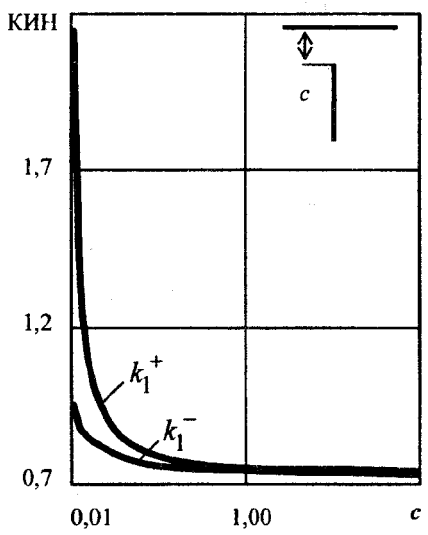



Рис. 3

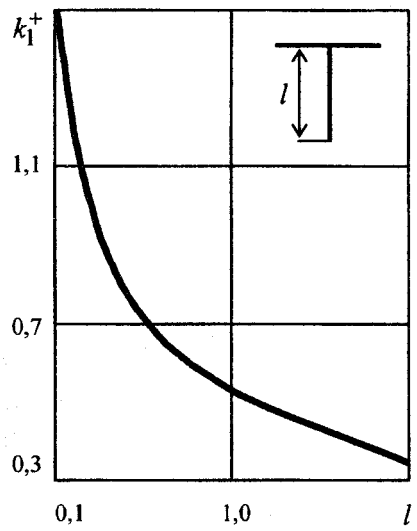



Рис. 4

приводит к увеличению КИН. Для полуплоскости с внутренней трещиной приведенные результаты совпадают с данными работы [7]. При этом для обеспечения сопоставимости результатов наши данные необходимо необходимо умножить на $\sqrt{2}$ (в связи с тем, что длина трещины в нашей работе в два раза меньше) и сравнивать результаты для случаев, когда одинаковы отношения $c/l_1$, где $l_1$ – длина трещины.

В табл. 2 даны значения КИН и напряжений в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием и вертикальной трещиной в перемычке между отверстием и границей полуплоскости (рис. 2, *б*). При этом расстояние между трещиной и контуром $d = 0,5$; длина трещины и радиус отверстия равны единице. Здесь характерными принимались точки $A(0; -c-3,5)$, $B(-1; -c-2,5)$, $C(0; -c-1,5)$, $D(0; -c-1)$, $E(0; -c)$, $O(0; 0)$, $K(0,5; 0)$, $L(1; 0)$, $M(1,5; 0)$. Для этого же случая и материала М1 на рис. 5 приведены графики изменения КИН в зависимости от длины перемычки $c$. Как видно, приближение системы трещина–отверстие к границе полуплоскости приводит к росту КИН и концентрации напряжений вблизи контура отверстия и точек перемычек. Выход трещины на границу полуплоскости значительно снижает концентрацию напряжений вблизи прямолинейной границы и около концов горизонтального диаметра отверстия. При этом значения КИН увеличиваются.

Таблица 2

| Материал | $c$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $O$ | $K$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_x$ | $k_1^-$ | $k_1^+$ | $\sigma_x$ | $\sigma_x$ | $\sigma_x$ | $\sigma_x$ |
| М1 | 2,00 | 2,638 | -1,098 | 2,671 | 1,0523 | 0,8776 | 0,929 | 0,955 | 1,024 | 1,100 |
| | 1,00 | 2,667 | -1,096 | 2,756 | 1,0819 | 0,8984 | 0,890 | 1,057 | 1,251 | 1,220 |
| | 0,50 | 2,686 | -1,078 | 2,813 | 1,1186 | 0,9365 | 0,865 | 1,529 | 1,275 | 1,151 |
| | 0,25 | 2,698 | -1,051 | 2,824 | 1,1631 | 1,0199 | 0,861 | 1,757 | 1,085 | 1,096 |
| | 0 | 2,708 | -0,834 | 2,376 | 1,6379 | – | – | -0,222 | 0,038 | 0,534 |
| М2 | 2,00 | 2,557 | -1,020 | 2,591 | 1,0575 | 0,8773 | 0,936 | 0,957 | 1,016 | 1,090 |
| | 1,00 | 2,585 | -1,016 | 2,671 | 1,0878 | 0,8980 | 0,900 | 1,043 | 1,253 | 1,215 |
| | 0,50 | 2,604 | -0,999 | 2,724 | 1,1255 | 0,9382 | 0,875 | 1,528 | 1,272 | 1,122 |
| | 0,25 | 2,615 | -0,976 | 2,731 | 1,1712 | 1,0253 | 0,868 | 1,773 | 1,057 | 1,066 |

В табл. 3 приведены значения КИН и напряжений в точках полуплоскости с круговым отверстием и трещиной, выходящей на контур отверстия (рис. 2, *в*). При этом радиус отверстия и длина трещины равны единице; случай $c = 0$ соответствует полуплоскости с круговым отверстием и узкой щелью, со-

единяющей контур отверстия с границей полуплоскости. Указанными в табл. 3 точками были $A(0;-c-3)$, $B(-1;-c-2)$, $E(0;-c)$, $I(0;-c/2)$, $O(0;0)$, $K(0{,}5;0)$, $L(1;0)$, $M(1{,}5;0)$.

На рис. 6 для такой же полуплоскости из материала М1 представлены графики КИН $k_1^+$ в зависимости от длины перемычки $c$.

Таблица 3

| Материал | $c$ | $A$ | $B$ | $E$ | $I$ | | $O$ | $K$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $k_1^+$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\sigma_x$ | $\sigma_x$ | $\sigma_x$ | $\sigma_x$ |
| М1 | 2,00 | 2,971 | -1,235 | 1,4372 | 1,277 | 0,254 | 0,827 | 0,890 | 1,062 | 1,261 |
| | 1,00 | 3,076 | -1,227 | 1,5582 | 1,575 | 0,442 | 0,645 | 1,069 | 1,686 | 1,760 |
| | 0,50 | 3,181 | -1,155 | 1,7266 | 2,118 | 0,719 | 0,423 | 2,158 | 2,190 | 1,820 |
| | 0,25 | 3,269 | -1,044 | 1,9514 | 3,122 | 1,159 | 0,241 | 3,078 | 2,163 | 1,688 |
| | 0 | 3,879 | 0,079 | – | – | – | – | -0,693 | -0,268 | -0,207 |
| М2 | 2,00 | 2,879 | -1,140 | 1,4409 | 1,266 | 0,222 | 0,848 | 0,898 | 1,042 | 1,233 |
| | 1,00 | 2,980 | -1,122 | 1,5645 | 1,555 | 0,391 | 0,690 | 1,042 | 1,664 | 1,755 |
| | 0,50 | 3,080 | -1,052 | 1,7370 | 2,085 | 0,643 | 0,496 | 2,138 | 2,173 | 1,795 |
| | 0,25 | 3,164 | -0,950 | 1,9712 | 3,070 | 1,047 | 0,336 | 3,088 | 2,118 | 1,656 |

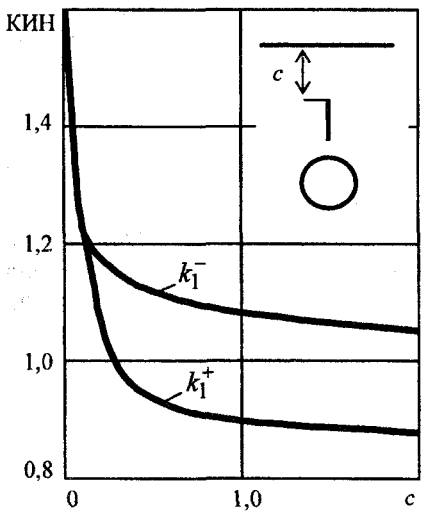



Рис. 5

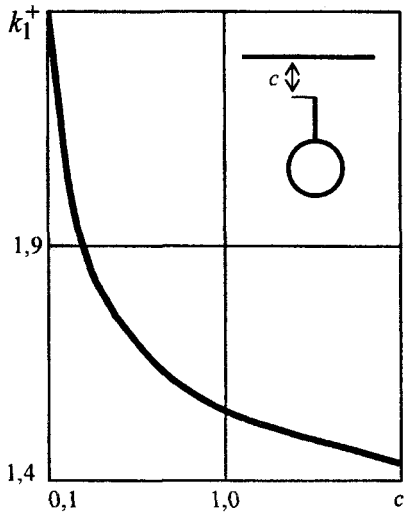



Рис. 6

Из табл. 3 и рис. 6 следует, что закономерности изменения значений КИН и напряжений для данного случая такие же, как и для полуплоскости с круговым отверстием и внутренней трещиной в перемычке, не выходящей на контур отверстия. Отличие от предыдущего случая заключается в том, что для полуплоскости с краевой трещиной значения КИН и напряжений вблизи контура отверстия и максимальных напряжений вблизи прямолинейной границе значительно выше.

**РЕЗЮМЕ**

Запропоновано наближений метод визначення електропружного стану анізотропного півпростору з еліптичними порожнинами та плоскими тріщинами, що виходять на плоску границю або (та) на поверхню порожнин. Описано отримані результати чисельних досліджень розподілу напружень і зміни КІН для півплощини з матеріалів ромбічного класу з круговим отвором, з тріщиною, комбінацією кругового отвору та тріщини. Розглянуто випадки крайових тріщин, а також вузької щілини між границею півплощини та контуром отвору.

**SUMMARY**

The approached method of definition of an electro-elastic state of anisotropic half-space with elliptic cavities and plane cracks which can leave on plane boundary or on a surface of cavities is proposed. The received results of numerical researches stresses distribution and stress intensity factors changes, manufactured from materials of rhombic class with a circular hole, with a crack, a combination a circular hole and a crack are given Cases of regional cracks, and also a narrow crack between boundary border of half-plane and a contour of an hole are considered.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т.; Т.5).
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. Калоеров С.А., Глущенко Ю.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного полупространства // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып. – 33. – С.83-90.
4. Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного тела // Прикладная механика. – 2003. – Т.39. – №1. – С.84-91.
5. Kaloerov S.A., Goryanskaya E.S. The two-dimensional stressed state of a multiconnected anisotropic body with cavities or cracks // J. of Math. – Scien. – 1997. – Vol.84, №6. – P.1497-1504.
6. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 640 с.
7. Калоеров С.А., Глущенко Ю.А. Электроупугое состояние многосвязной пьезоэлектрической полуплоскости с отверстиями и трещинами // Динамические системы. – 2000. – Вып.16. – С.107-116.

*Надійшла до редакції 12.06.2002 р.*

УДК 539.375

# ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ ЗСУВІ ПЕРІОДИЧНИХ СИСТЕМ ЖОРСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

*В.А.Кривень, Г.Т.Сулим, М.І.Яворська*
*Тернопільський державний технічний університет*
*Львівський національний університет*

Дослідження напружено-деформованого стану тіл з періодичними системами включень представляють значний інтерес для теорії міцності композитів і армованих матеріалів та прогнозування і оптимізації їх деформаційних характеристик. Для лінійно-пружних тіл ця проблема вивчалася у багатьох працях [1, 2]. Для пружно-пластичних тіл ці питання з'ясовано набагато слабше. Слід відзначити, що побудова найбільш бажаних для наукових досліджень аналітичних розв'язків таких задач якраз і є дуже складною, особливо для тіл скінченних розмірів. Одним із способів наближеного аналізу механічних полів для тіл скінченних розмірів є зведення проблеми до вивчення двоперіодичної задачі, у якій тіло скінченних розмірів формує (якщо це можливо) одну комірку відповідної періодичної задачі. Хоча такий підхід знайшов широке застосування [3], сьогодні по суті залишається відкритим питання точності наближеного опису двоперіодичним розв'язком поля напружень та деформацій у тілі скінченних розмірів.

**Загальний випадок двоперіодичної задачі.** В межах задачі антиплоскої деформацій розглянемо двоперіодичну задачу про пластичне відшаровування тонких жорстких плоских включень, що в ідеально пружно-пластичному тілі утворюють прямокутну гратку $x=2na,\ |y+2mh|\le l\ \ (n,m\in Z)$, де $2a$, $2h$ – відстані між центрами включень по горизонталі і вертикалі відповідно (рис. 1).

Вважаємо, що до прикладання навантаження на межі включень виконуються умови ідеального спаю з матрицею, а пластичні зони, які виникнуть внаслідок навантажування, мають форму дуже тонких шарів, що прилягають до включення і починаються від точок максимальної концентрації напружень. Тобто припускаємо, що пластичні зони облямовують тонкими шарами прикінцеві ділянки включень: $x=2na\pm 0$, $L\le|y+2mh\le l|$, де $l-L$ – довжина пластичних смуг, яку треба визначити.

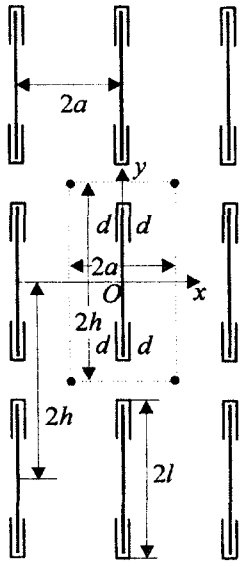



**Рис. 1.**

Позначимо напруження $\tau_{yz}$ у вершинах прямокутника періодів $((2n-1)a;(2m-1)h)$ як $\tau_0$ і визначатимемо напружено-деформований стан композиту, вважаючи $\tau_0$ заданим. Переміщення $w(x,y)$ вважаємо симетричним відносно ліній проведених вздовж включень і антисиметричним стосовно прямих , проведених через центри включень перпендикулярно до них.

У пружній частині тіла компоненти тензора напружень $\tau_{xz}$, $\tau_{yz}$ формують аналітичну функцію $\tau(\zeta)=\tau_{yz}+i\tau_{xz}$ комплексної змінної $\zeta=x+iy$, яку внаслідок періодичності задачі досить визначити у прямокутнику $-a\le x\le a$, $-h\le y\le h$. Функція $\tau(\zeta)$ аналітична у названому прямокутнику з розрізом уздовж відрізка $x=0$, $|y|\le l$. На берегах розрізу повинні виконуватися такі умови:

$$|\tau(\zeta)|=k,\ (\zeta=iy,\ L\le y\le l;\qquad \mathrm{Re}\,\tau(\zeta)=0,\ (\zeta=iy,\ -l\le y\le l) \tag{1}$$

перша з яких є умовою пластичності ($k$ - межа текучості матеріалу тіла при зсуві), друга є умовою ідеального спаю на невідшарованій частині поверхні включень.

Разом із умовою

$$\tau(a,h)=\tau_0, \tag{2}$$

яка задає навантаження, рівність (1) виражає крайову задачу для шуканої функції $\tau(\zeta)$.

Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) у вигляді композиції функцій



©Кривень В.А., Сулим Г.Т., Яворська М.І.

$$\tau(\zeta) = \tau_1\left[-i\,\mathrm{sn}(iK\zeta/h, c)\right], \tag{3}$$

де sn – функція Якобі – обернена до заданої інтегральною рівністю

$$\zeta = \frac{h}{K}\int_0^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{\left(1+t^2\right)\left(1+c^2t^2\right)}}, \tag{4}$$

$K = \int_0^1 \left(\left(t^2-1\right)\left(1-c^2t^2\right)\right)^{-1/2} dt$ - повний еліптичний інтеграл першого роду; $c$ – модуль еліптичного інтегралу – розв'язок рівняння $aK = hK'$; $K' = \int_1^{1/c} \left(\left(t^2-1\right)\left(1-c^2t^2\right)\right)^{-1/2} dt$ - повний еліптичний інтеграл другого роду.

Функція $\zeta(\eta)$ конформно відображає праву півплощину $\mathrm{Re}\,\eta > 0$ у прямокутник $0 < \mathrm{Re}\,\zeta < a$, $-h < \mathrm{Im}\,\zeta < h$ у, переводячи точки $-i$, $-i/c$, $i/c$, $i$ послідовно у вершини $-ih$, $a-ih$, $a+ih$, $ih$ прямокутника. Точка $\zeta = a$ відображається у нескінченно віддалену точку. Легко переконатися, що функція $\tau_1(\eta)$ задовольняє такі крайові умови у півплощині $\mathrm{Re}\,\eta \geq 0$

$$\begin{aligned}
&|\tau_1(\eta)| = k \quad \left(\mathrm{Re}\,\eta = 0,\ \mathrm{sn}\left(iKL/h\right) \leq |\mathrm{Im}\,\eta| \leq \mathrm{sn}\left(iKl/h\right)\right),\\
&\mathrm{Re}\,\tau_1(\eta) = 0 \quad \left(\mathrm{Re}\,\eta = 0,\ |\mathrm{Im}\,\eta| \leq \mathrm{sn}\left(iKL/h\right)\right),\\
&\mathrm{Im}\,\tau_1(\eta) = 0 \quad \left(\mathrm{Re}\,\eta = 0,\ |\mathrm{Im}\,\eta| > \mathrm{sn}\left(iKl/h\right)\right),\quad \tau_1(i/c) = \tau_0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Тут і далі для спрощення запису пропускатимемо модуль $c$ еліптичного інтеграла у позначенні аргументів функції Якобі sn .

Розв'язок крайової задачі (5) одержимо способом викладеним у праці [4]. Підставивши функцію $\tau_1(\eta)$ у (3), знаходимо функцію $\tau(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
\tau(\zeta) = k\Bigg(&\mathrm{sn}\frac{Kl}{h}\sqrt{\mathrm{sn}^2\frac{iK\zeta}{h} + \mathrm{sn}^2\frac{KL}{h}} - \mathrm{sn}\frac{KL}{h}\sqrt{\mathrm{sn}^2\frac{iK\zeta}{h} + \mathrm{sn}^2\frac{Kl}{h}}\Bigg)\times\\
&\times \mathrm{sn}^{-1}\frac{iK\zeta}{h}\left(\mathrm{sn}^2\frac{Kl}{h} - \mathrm{sn}^2\frac{KL}{h}\right)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Знайдемо довжину пластичних смуг, врахувавши третю із умов (5). Перейшовши у (6) до границі при $\zeta \to a + ih$, після деяких перетворень одержуємо

$$\mathrm{sn}\frac{KL}{h} = \frac{k^2 - \tau_{01}^2}{k^2 + \tau_{01}^2}\mathrm{sn}\frac{Kl}{h},$$

де

$$\begin{aligned}
&\tau_{01} = \left(\sqrt{p + k^2q} - \sqrt{p - k^2q}\right)\Big/\sqrt{2q},\ p = k^4 - 2k^2c^2\tau_0^2\,\mathrm{sn}^2(Kl/h) + \tau_0^4,\\
&q = 2\tau_0^2\left(1 - c^2\,\mathrm{sn}^2\left(Kl/h\right)\right).
\end{aligned}$$

Величина $\tau_{01}$ характеризує компоненту напруження $\tau_{yz}$ у точці $(a, 0)$ границі прямокутника.

Виразимо інтегралом (4) обернену до $sn$ функцію і одержимо $L$, а, отже, й довжину пластичних смуг $d = l - L$.

Максимальний розрив зміщення $g$ досягається у вершинах включень і виражається формулою

$$g = \frac{k}{\mu}\int_L^l \tau_{yz}(+0, y)\,dy, \tag{7}$$

де $\mu$ - модуль зсуву матеріалу тіла. Компоненту $\tau_{yz}$ знайдемо з формули (6):

$$\tau_{yz}(0,y)=k\left[\operatorname{sn}\frac{Kl}{h}\sqrt{\operatorname{sn}^2\frac{Ky}{h}-\operatorname{sn}^2\frac{KL}{h}}\Big/\left(\operatorname{sn}\frac{Ky}{h}\sqrt{\operatorname{sn}^2\frac{Kl}{h}-\operatorname{sn}^2\frac{KL}{h}}\right)\right]\quad (L<|y|<l).$$

Після заміни змінної $\operatorname{sn}^2(Ky/h)=t$ в інтегралі (7) отримаємо

$$g=\frac{kh}{2\mu K}\frac{\operatorname{sn}(Kl/h)}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(Kl/h)-\operatorname{sn}^2(KL/h)}}\int_{\operatorname{sn}^2(KL/h)}^{\operatorname{sn}^2(Kl/h)}\sqrt{\frac{t-\operatorname{sn}^2(Kl/h)}{t(1-t)\left(1-c^2t^2\right)}}dt. \tag{8}$$

Із формули (6) випливає, що компонента напруження $\tau_{yz}$ монотонно зростає при обході проти годинникової стрілки границі прямокутника-періоду від точки $(a,0)$ до точки $(0,h)$, друга компонента напружень залишається при цьому весь час нульовою. Максимальне значення компоненти напруження $\tau_{yz}$ на границі прямокутника досягається у точці $(0,h)$ і дорівнює $\tau_{02}$, а мінімальне $\tau_{01}$ у точці $(a,0)$,

$$\tau_{02}=k\frac{\operatorname{sn}(Kl/h)\operatorname{cn}(KL/h)-\operatorname{sn}(KL/h)\operatorname{cn}(Kl/h)}{\sqrt{\operatorname{sn}^2(Kl/h)-\operatorname{sn}^2(KL/h)}}.$$

У випадку одного включення $x=0,\ |y|\le l\ (l<a)$ у необмеженому тілі, здеформованого діючим на нескінченності навантаженням $\tau_{yz}=\tau_0,\ \tau_{xz}=0$ напруження $\tau_{yz}$ є сталим і дорівнює $\tau_0$ на довільній лінії, усі точки якої безмежно віддалені від включення. На сторонах прямокутника-періода виконуються тільки умови $\tau_{yz}\approx\tau_0,\ \tau_{xz}=0$, причому тим точніше, що більші його сторони проти включення. Тому відповідь на питання, які розміри прямокутника-періоду можна вважати майже безмежними з огляду на відсутність виливу його меж на розподіл напружень, а отже й розвиток пластичного відшаровування, зводиться до питання, чи можна вважати неістотною зміну напруження $\tau_{yz}$ уздовж контуру прямокутника. Відносну міру цієї зміни визначає відношення $(\tau_{02}-\tau_{01})/\tau_{01}$, яке залежить також і від навантаження. Тому як оцінку міри взаємовпливу включень двоперіодичної системи приймемо величину

$$\Theta=\max_{\tau_0\in(0,k)}\frac{\tau_{02}-\tau_{01}}{\tau_{01}}=\max_{L\in(0,l)}\frac{\tau_{02}-\tau_{01}}{\tau_{01}}. \tag{9}$$

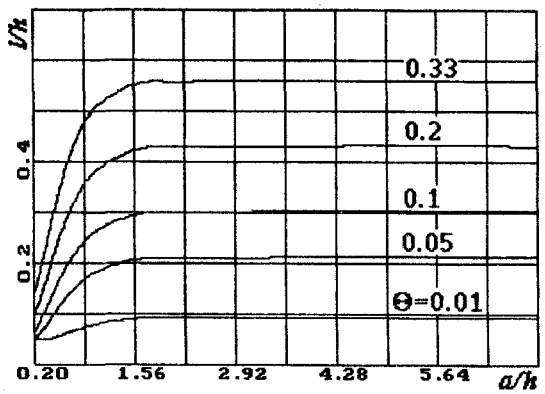



Рис. 2.

На рис. 2 зображені області (між поданими лініями та віссю $l/h=0$) у просторі геометричних параметрів, у яких оцінка рівня взаємодії включень для двоперіодичної їх системи не перевищує величини $\Theta$. Зі збільшенням відстані між включеннями у перпендикулярному до них напрямку, знижується неоднорідність напружень на межі прямутника-періода, причому це зниження є особливо великим до $a=1.5h$. Подальше збільшення цієї віддалі вже мало впливає на зниження неоднорідності напружень на межі прямутника-періода.

Розглянемо тепер часткові випадки задачі про пластичне відшаровування одноперіодичних систем включень.

**Випадок колінеарної системи жорстких тонких рівновіддалених включень у одній площині.** Колінеарна система включень є наслідком двоперіодичної, коли відстань між центрами включень у горизонтальному напрямі $a\to\infty$. Для цього випадку

$$\operatorname{sn}\frac{iK\zeta}{h}\to\operatorname{sh}\frac{\pi\zeta}{2h},\ \operatorname{sn}\frac{Kl}{h}\to\sin\frac{\pi l}{2h},\ \operatorname{sn}\frac{KL}{h}\to\sin\frac{\pi L}{2h}.$$

Тому із формули (6) при $a\to\infty$ одержуємо

$$\tau(\zeta)=k\left(\sin\frac{\pi l}{2a}\sqrt{\mathrm{sh}^2\frac{\pi\zeta}{2h}-\sin^2\frac{\pi L}{2h}}-\sin\frac{\pi L}{2a}\sqrt{\mathrm{sh}^2\frac{\pi\zeta}{2h}-\sin^2\frac{\pi l}{2h}}\right)\times$$

$$\times\mathrm{sh}^{-1}\frac{\pi\zeta}{2h}\left(\sin^2\frac{\pi l}{2h}-\sin^2\frac{\pi L}{2h}\right)^{-1/2}.$$

Вимагаючи у безмежно віддаленій точці умови $\tau_{yz}^{\infty}=\tau_0$, $\tau_{xz}^{\infty}=0$, маємо

$$\tau_0=k\left(\sin\frac{\pi l}{2h}-\sin\frac{\pi L}{2a}\right)\left(\sin^2\frac{\pi l}{2h}-\sin^2\frac{\pi L}{2h}\right)^{-1/2}.$$

Залежність довжин пластичних смуг від навантаження у цьому випадку є такою:

$$d=l-\frac{2h}{\pi}\arcsin\left(\frac{k^2-\tau_0^2}{k^2+\tau_0^2}\sin\frac{\pi l}{2h}\right).$$

Також у замкнутому вигляді виражається розрив зміщення у вершинах включення як функція навантаження

$$g=\frac{2kh}{\pi\mu}\sin\frac{\pi l}{2h}\left(\sin^2\frac{\pi l}{2h}-\sin^2\frac{\pi L}{2h}\right)^{-1/2}\left[f_2(l)-f_2(L)\right],$$

$$f_2(y)=\sin\frac{\pi L}{2h}\,\mathrm{arctg}\left\{\sin\frac{\pi L}{2h}\,\mathrm{tg}\left[\arcsin\left(\frac{\cos(\pi y/2h)}{\cos(\pi L/2h)}\right)\right]\right\}-\arcsin\left(\frac{\cos(\pi y/2h)}{\cos(\pi L/2h)}\right).$$

Залежності довжини пластичних смуг і розривів зміщення від навантаження відображені на рис. 3 (лінії *1-3*). Зі збільшенням відстані $h$ між включеннями довжини пластичних смуг зменшуються. Аналогічним способом змінюються з навантаженням також і величини розривів $g$ зміщення у вершинах включень.

У випадку, коли $h\to\infty$, отримуємо випадок одного включення [5], для якого

$$d=\frac{2\tau_0 l}{k^2+\tau_0^2},\quad g=\frac{kl}{\mu}\left(1-\frac{k^2-\tau_0^2}{k^2+\tau_0^2}\arccos\frac{k^2-\tau_0^2}{k^2+\tau_0^2}\right). \tag{10}$$

Виявляється, що для одного включення залежність $d$ від $\tau_0$ практично не відрізняється від зображеної на лінії 3 рис. 3. Це означає, що у випадку періодичного розташування включень у одній площині розв'язок при $l/h\le 0{,}2$ практично вже не відрізняється від розв'язку для одного включення.

**Випадок компланарної системи жорстких тонких рівновіддалених включень.** Періодична система паралельних включень є наслідком двоперіодичної коли відстань між центрами включень у вертикальному напрямі $h\to\infty$. Для цього випадку $\mathrm{sn}\frac{iK\zeta}{h}\to\mathrm{tg}\frac{\pi\zeta}{2a}$, $\mathrm{sn}\frac{Kl}{h}\to\mathrm{th}\frac{\pi l}{2a}$, $\mathrm{sn}\frac{KL}{h}\to\mathrm{th}\frac{\pi L}{2a.}$. Таким чином із формули (6) знаходимо:

$$\tau(\zeta)=k\left(\mathrm{th}\frac{\pi l}{2a}\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi\zeta}{2a}+\mathrm{th}^2\frac{\pi l}{2a}}-\mathrm{th}\frac{\pi L}{2a}\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{\pi\zeta}{2a}+\mathrm{th}^2\frac{\pi l}{2a}}\right)\mathrm{tg}^{-1}\frac{\pi\zeta}{2a}\left(\mathrm{th}^2\frac{\pi l}{2a}-\mathrm{th}^2\frac{\pi L}{2a}\right)^{-1/2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\tau(\zeta)=\tau_0$, $\lim\limits_{y\to\infty}tg\left[i\pi y/(2a)\right]=i$ з останньої формули знаходимо

$$\tau_0=k\left(\mathrm{th}\frac{\pi l}{2a}\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{\pi L}{2a}}-\mathrm{th}\frac{\pi L}{2a}\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{\pi l}{2a}}\right)\left(\mathrm{th}^2\frac{\pi l}{2a}-\mathrm{th}^2\frac{\pi L}{2a}\right)^{-1/2}\quad\left(\tau_{yz}^{\infty}=\tau_0,\ \tau_{xz}^{\infty}=0\right),$$

а також довжини пластичних смуг

$$d=l-\frac{2a}{\pi}\mathrm{Arsh}\left(\frac{k^2-\tau_0^2}{k^2+\tau_0^2}\mathrm{sh}\frac{\pi l}{2a}\right).$$

Розрив зміщення у вершинах включення можна виразити в замкнутій формі, оскільки інтеграл (8) для цього випадку можна обчислити аналогічно:

$$g=\frac{ka}{\mu\pi}\,\mathrm{th}\frac{\pi l}{2a}\,\mathrm{th}\frac{\pi L}{2a}\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{\pi L}{2a}\left(\mathrm{th}^2\frac{\pi l}{2a}-\mathrm{th}^2\frac{\pi L}{2a}\right)^{-1/2}\left[f_1(l)-f_1(L)\right],$$

$$f_1(y)=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi L}{2a}}\ln\left|\frac{1-\mathrm{ch}\dfrac{\pi L}{2a}\sqrt{\mathrm{th}^2\dfrac{\pi y}{2a}-\mathrm{th}^2\dfrac{\pi L}{2a}}}{1+\mathrm{ch}\dfrac{\pi L}{2a}\sqrt{\mathrm{th}^2\dfrac{\pi y}{2a}-\mathrm{th}^2\dfrac{\pi L}{2a}}}\right|-\arcsin\frac{\mathrm{th}\dfrac{\pi L}{2a}}{\mathrm{th}\dfrac{\pi y}{2a}}.$$

Залежності довжини пластичних смуг від навантаження на нескінченності $\tau_{yz}^{\infty}=\tau_0$ $\left(\tau_{xz}^{\infty}=0\right)$ відображені на рис. 3 (лінії *3-7*). На відміну від випадку розташування включень у одній площині у системі компланарних включень зі зменшенням відстані між включеннями довжини пластичних смуг (так само і стрибків переміщень $g$) зменшуються. Це є виявом ефекту екранування. У випадку, коли $a\to\infty$, теж отримуємо вираз (10) для одного включення. При цьому вже коли $l/a\le 0{,}1$ результати обчислень для компланарної системи включень практично не відрізняються від результатів обчислень за формулою (10) для одного включення.

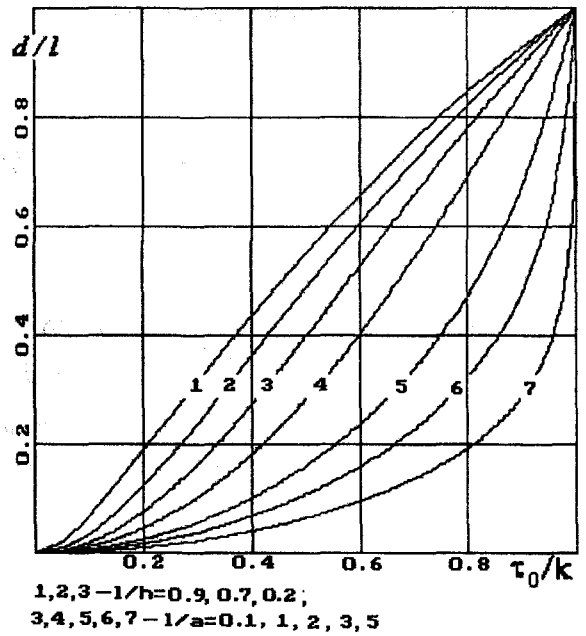



Рис. 3.

Знайдені замкнуті розв'язки розглянутих задач дають можливість обчислити ефективні модулі зсуву для композита армованого жорсткими стрічками, аналогічно до того, як це для пружного випадку зроблено у працях [6-8], а також сформулювати умови руйнування композита на основі відомих деформаційних або енергетичних критеріїв.

**РЕЗЮМЕ**

Исследовано пластическое отслоение при сдвиге двоякопериодической системы тонких жестких включений в упругопластической среде. Считается, что пластические деформации локализованы в тонких слоях на границе включение-среда на околоконечных участках включения. Определены длины пластических слоев и величины разрывов смещений около вершин включений, порожденные их пластическим отслоением. Подробно проанализированы частные случаи однопериодических компланарных либо коллинеарных систем включений.

**SUMMARY**

Plastic sliding at the longitudinal shear of the double periodic systems of the thin rigid inclusions in the elasto-plastic solids is investigated. Plastic deformations are considered to be localized in the thin layers on the inclusion-matrix boundary at the inclusion tip areas. Lengths of plastic layers and rupture displacement values at the inclusion tips caused by their plastic sliding are determined. Partial cases of uniperiodical parallel or collinear inclusion systems are analyzed in detail.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – К: Наук. думка, 1983. – 288 с.
2. Делявський М.В., Онищко Л.Й., Онишко О.Є. Аналітична механіка руйнування волоконних композиційних матеріалів. Огляд // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1998. – №6. – С.45-55.
3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
4. Кривень В.А. Антиплоская деформация упругопластического тела, ослабленного двоякопериодической системой щелей // Физ.-хим. механіка материалов. – 1979. – №1. – С.31-33.

5. Витвицкий П.М., Кривень В.А. Антиплоская упругопластическая деформация тела с жестким тонким включением // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1979. – №2. – С.104-108.
6. Ju J. W., Chen Tsung-Muh. Effective elastic modul of two dimensional brittle solids with interacting microcracks. Part 1. Basic formulations // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1994. – Vol.61, №2. – P.349-357.
7. Ju J. W., Chen Tsung-Muh. Effective elastic modul of two dimensional brittle solids with interacting microcracks. Part 2. Evolutionary damage models // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1994. – Vol.61, №2. – P.358-366.
8. Пороховський В.В., Опанасович В.К., Делявський М.В. Ефективні пружні характерристики тіла з системою прямолінійних тонких включень в умовах поздовжнього зсуву // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №3. – С.109-116.

*Надійшла до редакції 03.06.2003 р.*

УДК 539.3

# СТАЦИОНАРНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС В УПРУГОМ СЛОЕ С ПОЛОСТЬЮ

*Л.А.Фильштинский, А.Ибеда*
*Сумский государственный университет*

Исследованию динамической напряженности массивных тел, толстых пластин и оболочек посвящены работы [1-10], в которых для решения соответствующих граничных задач применяются методы однородных решений, собственных векторных функций или численные методы. В данной работе предлагается новый более простой подход к рассмотрению данного класса задач, основанный на построенной ниже матрице фундаментальных решений для слоя с последующим сведением соответствующих граничных проблем к системам интегральных уравнений. Решена задача о колебаниях упругого слоя со сквозной полостью достаточно произвольного поперечного сечения.

**1. Постановка задачи.** В системе координат $0x_1x_2x_3$ рассмотрим упругий изотропный слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $|x_3| \le h$, ослабленный сквозной цилиндрической полостью $D \times [-h, h]$, где $D$ – конечная область (поперечное сечение полости), ограниченная контуром $\Gamma$. Будем полагать, что на поверхности полости задан гармонически изменяющийся во времени вектор напряжения $X_{kn} = \mathrm{Re}\left[ e^{-i\omega t} Y_k(x_1, x_2, x_3) \right]$, на основаниях слоя $x_3 = \pm h$ имеют место граничные условия смешанного типа $\sigma_{13} = \sigma_{23} = u_3 = 0$, где $\omega$ – круговая частота; $t$ – время; $u_k$ и $\sigma_{ij}$ – компоненты вектора упругого перемещения и тензора напряжения соответственно.

Задача построения аналитических и численных процедур определения волновых полей перемещений и напряжений в таком слое приводится к решению уравнения движения относительно амплитуд $U_j$ вектора перемещения $u_j$

$$\Delta U_j + \sigma \partial_j (\partial_k U_k) + \gamma_2^2 U_j + \frac{P_j}{\mu} = 0 \quad (j = 1,2,3), \tag{1}$$

где $\Delta = \nabla^2 + \partial_3^2$, $\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_j = \partial / \partial x_j$, $\sigma = (1-2\nu)^{-1}$, $\gamma_2 = \omega / c_2$; $\mu$ и $\nu$ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона; $P_j$ – амплитуды объемных сил $X_j (j = 1, 2, 3)$; $c_2$ – скорость распространения сдвиговой волны.

**2. Однородные решения системы при граничных условиях смешанного типа.** На этом шаге полагаем $P_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. С использованием результатов работы [3] можно получить следующую систему однородных решений для симметричного относительно срединного слоя состояния

$$\gamma_1^2 U_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \partial_1 (\Psi_n - \Phi_n) + \partial_2 \Psi_n^* \right\} \cos \lambda_n x_3 - \partial_1 \Phi_0 + \partial_2 \Psi_0^*,$$

$$\gamma_1^2 U_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \partial_2 (\Psi_n - \Phi_n) - \partial_1 \Psi_n^* \right\} \cos \lambda_n x_3 - \partial_2 \Phi_0 - \partial_1 \Psi_0^*,$$

$$\gamma_1^2 U_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda_n \Phi_n + \frac{\mu_{2n}^2}{\lambda_n} \Psi_n \right\} \sin \lambda_n x_3, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{h} \quad (n = 1,2,\ldots),$$

$$\theta = \partial_k U_k = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \cos \lambda_n x_3, \quad \mu_{2n}^2 = \gamma_2^2 - \lambda_n^2, \quad \gamma_2^2 = (\sigma + 1) \gamma_1^2. \tag{2}$$

Здесь $(\Phi_n, \Psi_n, \Psi_n^*)(x_1, x_2)$ – метагармонические функции, удовлетворяющие уравнениям



©Фильштинский Л.А., Ибеда А.

$$\left(\nabla^2+\mu_{1n}^2\right)\Phi_n=0,\ \left(\nabla^2+\mu_{2n}^2\right)\left\{\Psi_n,\Psi_n^*\right\}=0,\ \mu_{1n}^2=\gamma_1^2-\lambda_n^2\ \ (n=0,1,...).$$

Функции $\Psi_n^*$ и $\Psi_n,\Phi_n$ определяют вихревую и потенциальную части однородных решений, причем $\Phi_0$ и $\Psi_0^*$ соответствуют бигармоническому решению. Отметим, что однородные решения (2) совпадают после несущественных переобозначений с результатами [8].

**3. Фундаментальные решения для слоя.** Пусть теперь вдоль шнура $x_1=x_{10},\ x_2=x_{20},\ |x_3|\le h$ распределены усилия погонной интенсивности $(P_1,\ P_2,\ P_3)$. Исходя из структуры однородных решений (2), положим

$$\{P_1,P_2\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{p_{1n},p_{2n}\}\cos\lambda_n x_3\,\delta(x),\ \ P_3=\sum_{n=1}^{\infty}p_{3n}\sin\lambda_n x_3\,\delta(x),$$

$$\{U_1,U_2\}=\sum_{n=0}^{\infty}\{U_{1n},U_{2n}\}\cos\lambda_n x_3,\ \ U_3=\sum_{n=1}^{\infty}U_{3n}\sin\lambda_n x_3,\ \ U_{kn}=U_{kn}(x_1,x_2),$$

$$x=(x_1,x_2)\in R^2,\ \ \lambda_n=\frac{\pi n}{h},\ \ \partial_k U_k=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n\cos\lambda_n x_3\ , \tag{3}$$

где $\delta(x)$ – дельта функция Дирака.

Исключив из системы (1) при помощи разложений (3) толщинную координату $x_3$, получим три дифференциальных уравнения относительно коэффициентов Фурье $U_{km}$ вектора перемещения $U=(U_1,\ U_2,\ U_3)$, из которых находим соотношения

$$\left(\nabla^2+\mu_{1n}^2\right)\theta_n=-\frac{1}{\mu(\sigma+1)}\sum_{k=1}^{3}p_{kn}\,\partial_k\,\delta(x-x_0),\ \ \partial_3=\lambda_n, \tag{4}$$

в которых $\theta_n=\partial_1U_{1n}+\partial_2U_{2n}+\lambda_nU_{3n},\ x=(x_1,x_2),\ x_0=(x_{10},x_{20})$.

Интегрируя уравнения (4) в пространстве обобщенных функций $D'$ [11], имеем

$$\theta_n=\theta_n^{(1)}+\theta_n^{(2)}+\theta_n^{(3)}=\frac{i}{4\mu(\sigma+1)}\sum_{k=1}^{3}p_{kn}\partial_k H_0^{(1)}(\mu_{1n}r),\ \ r=|z-z_0|, \tag{5}$$

где $z_0=x_{10}+ix_{20}$ – точка приложения сосредоточенного функционала, $z=x_1+ix_2$ – точка наблюдения; $H_p^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля первого рода порядка $p$, $\operatorname{Im}\mu_{1n}>0\ \ (n=0,1,...)$.

С учетом выражения (5), приходим к несвязанной системе уравнений относительно функций $U_{kn}\ \ (k=1,\ 2,\ 3)$. Например, для случая $P_1\ne0,\ P_2=P_3=0$ она имеет вид

$$\left(\nabla^2+\mu_{2n}^2\right)U_{kn}=-\frac{\sigma i\,p_{1n}}{4\mu(\sigma+1)}\partial_1\partial_k H_0^{(1)}(\mu_{1n}r)\ \ (k=1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Интегрирование системы (6) в пространстве $D'$ приводит к выражениям

$$U_{kn}^{(1)}=\frac{p_{1n}}{4i\mu}g_{kn}^{(1)}\ \ (k=1,\ 2,\ 3), \tag{7}$$

в которых

$$g_{1n}^{(1)}=\frac{1}{\gamma_2^2}\partial_1^2H(r)-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r),\ \ H(r)=H_0^{(1)}(\mu_{1n}r)-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r),$$

$$g_{2n}^{(1)}=\frac{1}{\gamma_2^2}\partial_1\partial_2H(r),\ \ g_{3n}^{(1)}=-\frac{\lambda_n}{\gamma_2^2}\partial_1H(r),\ \ \operatorname{Im}\mu_{2n}>0\ \ (n=0,\ 1,\ ...).$$

Для двух остальных случаев возбуждения получаем аналогичные формулы:

$$1)\ P_2 \neq 0,\ P_1 = P_3 = 0;\ U_{kn}^{(2)} = \frac{p_{2n}}{4i\mu} g_{kn}^{(2)},\ g_{1n}^{(2)} = \frac{1}{\gamma_2^2}\partial_1\partial_2 H(r) = g_{2n}^{(1)},$$

$$g_{2n}^{(2)} = \frac{1}{\gamma_2^2}\partial_2^2 H(r) - H_0^{(1)}(\mu_{2n} r),\ g_{3n}^{(2)} = -\frac{\lambda_n}{\gamma_2^2}\partial_2 H(r); \tag{8}$$

$$2)\ P_3 \neq 0,\ P_1 = P_2 = 0;\ U_{kn}^{(3)} = \frac{p_{3n}}{4i\mu} g_{kn}^{(3)},\ g_{1n}^{(3)} = \frac{\lambda_n}{\gamma_2^2}\partial_1 H(r),$$

$$g_{2n}^{(3)} = \frac{\lambda_n}{\gamma_2^2}\partial_2 H(r),\ g_{3n}^{(3)} = -\frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} H(r) - H_0^{(1)}(\mu_{2n} r). \tag{9}$$

Матрицы $\left\| g_{kn}^{(p)} \right\|$ $(k,\ p = 1, 2, 3;\ n = 0, 1, ...)$ определяют $2h$-периодическое по $x_3$ фундаментальное решение (функцию Грина) системы (1) для данного типа граничных условий на основаниях слоя.

Учитывая поведение функции Ганкеля при малых $r$ и формулы (7) выпишем асимптотику волновых полей перемещений напряжений в окрестности носителя сосредоточенного функционала для случая $P_1 \neq 0,\ P_2 = P_3 = 0$. Имеем

$$U_{1n}^{(1)} = -\frac{p_{1n}\kappa}{8\pi\mu(1-\nu)}\ln \mathbf{r},\ U_{2n}^{(1)} \approx 0,\ U_{3n}^{(1)} \approx 0,\ \kappa = 3 - 4\nu,$$

$$S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)} \approx -\frac{p_{1n}\cos\alpha}{2\pi(1-\nu)r},\ S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} + 2iS_{12}^{(n)} \approx \frac{p_{1n}\left(\kappa e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha}\right)}{4\pi(1-\nu)r},$$

$$S_{13}^{(n)} - iS_{23}^{(n)} \approx 0(\ln r),\ S_{33}^{(n)} \approx -\frac{\nu p_{1n}\cos\alpha}{2\pi(1-\nu)r}.$$

Очевидно, эти соотношения совпадают с соответствующей асимптотикой для статического нагружения $(\omega = 0)$.

В качестве примера рассмотрим случай $P_1 = P\cos\frac{\pi x_3}{h}\delta(x),\ P_2 = P_3 = 0$. Из (3), (7) имеем

$$U_1 = \frac{iP}{4\mu}\left\{ H_0^{(1)}(\mu_{21} r) + \frac{1}{2\gamma_2^2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^k \mu_{k1}^2 \left[ H_2^{(1)}(\mu_{k1} r)\cos 2\alpha - H_0^{(1)}(\mu_{k1} r) \right] \right\}\cos\frac{\pi x_3}{h},$$

$$U_2 = \frac{iP}{8\mu\gamma_2^2}\left\{ \sum_{k=1}^{2}(-1)^k \mu_{k1}^2 H_2^{(1)}(\mu_{k1} r)\sin 2\alpha \right\}\cos\frac{\pi x_3}{h},\ \mu_{k1}^2 = \gamma_k^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2\ (k = 1, 2),$$

$$U_3 = \frac{iP\pi}{4\mu\gamma_2^2 h}\left\{ \sum_{k=1}^{2}(-1)^k \mu_{k1} H_1^{(1)}(\mu_{k1} r)\cos\alpha \right\}\sin\frac{\pi x_3}{h},\ z - z_0 = re^{i\alpha},\ \operatorname{Im}\mu_{k1} > 0\ (k = 1, 2).$$

Из анализа этих соотношений следует, что при $\gamma_1 h > \pi$ имеем распространяющиеся в слое (волноводе) продольные и поперечные волны. При $\gamma_2 h < \pi$ $\left( h\mu_{k1} = i\sqrt{\pi^2 - (\gamma_k h)^2} \right)$ получаем неоднородные волны, экспоненциально затухающие на бесконечности. Наконец, при $\gamma_1 h < \pi$ $\left( h\mu_{11} = i\sqrt{\pi^2 - (\gamma_1 h)^2} \right)$ и $\gamma_2 h > \pi$ $\left( h\mu_{21} = \sqrt{(\gamma_2 h)^2 - \pi^2} \right)$ имеем неоднородные, экспоненциально убывающие продольные и распространяющиеся по волноводу поперечные волны.

**4. Волновые поля в слое с полостью.** Пусть амплитуды нагрузки на поверхности полости разла-

гаются в ряды Фурье по толщинной координате вида

$$\{Y_1, Y_2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)} \right\}(x_1, x_2)\cos\lambda_n x_3, \quad Y_3 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_3^{(n)}(x_1, x_2)\sin\lambda_n x_3.$$

Компоненты тензора напряжения $\sigma_{ij} = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} S_{ij}\right)$ после исключения времени раскладываем в ряды того же вида

$$S_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{ij}^{(n)}(x_1, x_2)\cos\lambda_n x_3, \quad S_{i3} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{i3}^{(n)}(x_1, x_2)\sin\lambda_n x_3 \quad (i = 1, 2).$$

Тогда граничные условия в напряжениях на цилиндрической поверхности полости трансформируются в следующие равенства на контуре $\Gamma$ ее поперечного сечения:

$$S_1^{(n)} - e^{2i\psi} S_2^{(n)} = 2e^{i\psi}\left(Y_1^{(n)} - iY_2^{(n)}\right) = 2\left(N^{(n)} - iT^{(n)}\right),$$

$$S_1^{(n)} - e^{-2i\psi} \tilde{S}_2^{(n)} = 2e^{i\psi}\left(Y_1^{(n)} + iY_2^{(n)}\right) = 2\left(N^{(n)} + iT^{(n)}\right) \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$S_3^{(n)} e^{i\psi} + \tilde{S}_3^{(n)} e^{-i\psi} = 2Y_3^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Здесь

$$S_1^{(n)} = S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)}, \quad S_2^{(n)} = S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} + 2iS_{12}^{(n)}, \quad S_3^{(n)} = S_{13}^{(n)} - iS_{23}^{(n)},$$

$$\tilde{S}_2^{(n)} = S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} - 2iS_{12}^{(n)}, \quad \tilde{S}_3^{(n)} = S_{13}^{(n)} + iS_{23}^{(n)},$$

$\psi$ – угол между нормалью к контуру $\Gamma$ и осью $0x_1$; $N^{(n)}$ и $T^{(n)}$ – коэффициенты Фурье нормального и касательного усилия на поверхности полости.

Для решения граничной задачи (10) запишем интегральные представления волнового поля перемещений. При этом будем исходить из фундаментального решения $g_{kn}^{(n)}$, определяемого соотношениями (7) – (9). Вводя на $\Gamma$ распределения

$$\frac{ip_{mn}}{4\mu} \to Z_m^{(n)}(\zeta)ds, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma,$$

где $ds$ - элемент контура $\Gamma$, представим поле перемещения в виде

$$U_{kn}(z) = \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^{3} Z_m^{(n)}(\zeta) g_{kn}^{(m)}(\zeta, z)ds \quad (k, m = 1, 2, 3; \; n = 0, 1, \ldots). \tag{11}$$

Для определения тензора напряжения воспользуемся комплексными представлениями

$$S_1^{(n)} = 2\mu(\sigma\theta_n - \lambda_n U_{3n}), \quad S_2^{(n)} = -4\mu\frac{\partial}{\partial z}(U_{1n} - iU_{2n}),$$

$$\tilde{S}_2^{(n)} = -4\mu\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(U_{1n} + iU_{2n}), \quad S_3^{(n)} = \mu\left\{2\frac{\partial}{\partial z}U_{3n} - \lambda_n(U_{1n} - iU_{2n})\right\},$$

$$\tilde{S}_3^{(n)} = \mu\left\{2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}U_{3n} - \lambda_n(U_{1n} + iU_{2n})\right\}, \tag{12}$$

в которых

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2).$$

Выполняя предписанные в (12) операции над ядрами в представлениях (11), получаем выражения для комбинаций напряжений, фигурирующих в граничных условиях (10). После подстановки предельных значений этих комбинаций в условия (10), приходим к системе из трех интегральных уравнений (для каждого $n = 0,1,\ldots$) вида

$$iy_{mn}(\zeta_0)+\frac{1}{4}\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}y_{jn}(\zeta)K_{jm}^{(n)}(\zeta,\zeta_0)ds=\frac{1}{\mu}F_m^{(n)}(\zeta_0)\quad (m=1,2,3;\ n=0,1,\ldots),$$

где

$$F_1^{(n)}=\frac{1}{4}\left(N^{(n)}+iT^{(n)}\right),\quad F_2^{(n)}=\frac{1}{4}\left(N^{(n)}-iT^{(n)}\right),\quad F_3^{(n)}=\frac{1}{2}Y_3^{(n)},\quad \zeta_0\in\Gamma,$$

$$y_{1n}=\frac{1}{2}\left(Z_1^{(n)}+iZ_2^{(n)}\right)e^{-i\psi},\quad y_{2n}=\frac{1}{2}\left(Z_1^{(n)}-iZ_2^{(n)}\right)e^{i\psi},\quad y_{3n}=Z_3^{(n)},$$

$$K_{11}^{(n)}=\left\{\lambda_n h_n^{(1,1)}(r_0)+\frac{\mu_{1n}}{2(1-\nu)}H_1^{(1)}(\mu_{1n}r_0)+\left[2\mu_{2n}H_1^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-h_n^{(3,1)}(r_0)\right]\times\right.$$
$$\left.\times e^{2i(\alpha_0-\psi_0)}\right\}e^{i(\psi-\alpha_0)},$$

$$K_{21}^{(n)}=\left\{\lambda_n h_n^{(1,1)}(r_0)+\frac{\mu_{1n}}{2(1-\nu)}H_1^{(1)}(\mu_{1n}r_0)+e^{2i(\alpha_0-\psi_0)}h_n^{(3,3)}(r_0)\right\}e^{i(\alpha_0-\psi)},$$

$$K_{31}^{(n)}=\frac{H_0^{(1)}(\mu_{1n}r_0)}{2(1-\nu)}-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-\frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2}h_n^{(0,0)}(r_0)+h_n^{(2,2)}(r_0)e^{2i(\alpha_0-\psi_0)},$$

$$K_{12}^{(n)}=\left\{\lambda_n h_n^{(1,1)}(r_0)+\frac{\mu_{1n}}{2(1-\nu)}H_1^{(1)}(\mu_{1n}r_0)+h_n^{(3,3)}(r_0)e^{2i(\psi_0-\alpha_0)}\right\}e^{i(\psi-\alpha_0)},$$

$$K_{22}^{(n)}=\left\{\lambda_n h_n^{(1,1)}(r_0)+\frac{\mu_{1n}}{2(1-\nu)}H_1^{(1)}(\mu_{1n}r_0)+\left[2\mu_{2n}H_1^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-h_n^{(3,1)}(r_0)\right]\times\right.$$
$$\left.\times e^{2i(\psi_0-\alpha_0)}\right\}e^{i(\alpha_0-\psi)},$$

$$K_{32}^{(n)}=\frac{H_0^{(1)}(\mu_{1n}r_0)}{2(1-\nu)}-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-\frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2}h_n^{(0,0)}(r_0)+h_n^{(2,2)}(r_0)e^{2i(\psi_0-\alpha_0)},$$

$$K_{13}^{(n)}=2\left\{h_n^{(2,0)}(r_0)-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-h_n^{(2,2)}(r_0)e^{2i(\psi_0-\alpha_0)}\right\}e^{i(\psi-\psi_0)},\quad r_0=|\zeta-\zeta_0|,$$

$$K_{23}^{(n)}=2\left\{h_n^{(2,0)}(r_0)-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-h_n^{(2,2)}(r_0)e^{2i(\alpha_0-\psi_0)}\right\}e^{i(\psi_0-\psi)},\quad \alpha_0=\arg(\zeta-\zeta_0),$$

$$K_{33}^{(n)}=2\left\{\frac{\mu_{2n}}{\lambda_n}H_1^{(1)}(\mu_{2n}r_0)-2h_n^{(1,1)}(r_0)\right\}\cos(\alpha_0-\psi_0);$$

$$h_n^{(1,1)}(r)=\frac{\lambda_n}{\gamma_2^2}\left[\mu_{2n}H_1^{(1)}(\mu_{2n}r)-\mu_{1n}H_1^{(1)}(\mu_{1n}r)\right],$$

$$h_n^{(0,0)}(r)=H_0^{(1)}(\mu_{1n}r)-H_0^{(1)}(\mu_{2n}r)=H(r),$$

$$h_n^{(2,2)}(r)=\frac{1}{\gamma_2^2}\left[\mu_{2n}^2H_2^{(1)}(\mu_{2n}r)-\mu_{1n}^2H_2^{(1)}(\mu_{1n}r)\right],$$

$$h_n^{(2,0)}(r)=\frac{1}{\gamma_2^2}\left[\mu_{2n}^2H_0^{(1)}(\mu_{2n}r)-\mu_{1n}^2H_0^{(1)}(\mu_{1n}r)\right],$$

$$h_n^{(3,3)}(r)=\frac{1}{\gamma_2^2}\left[\mu_{2n}^3H_3^{(1)}(\mu_{2n}r)-\mu_{1n}^3H_3^{(1)}(\mu_{1n}r)\right],$$

$$h_n^{(3,1)}(r)=\frac{1}{\gamma_2^2}\left[\mu_{2n}^3H_1^{(1)}(\mu_{2n}r)-\mu_{1n}^3H_1^{(1)}(\mu_{1n}r)\right],$$

$\psi, \psi_0$ – угол между внешней нормалью и осью $0x_1$ в точках $\zeta$ и $\zeta_0$ соответственно.

Порядок определения волновых полей перемещений и напряжений в слое с полостью таков. Сперва система (13) методом механических квадратур [12] сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений плотностей $y_{mn}$ в узловых точках контура. Затем производится сплайн-аппроксимация плотностей и подстановка их в интегральные представления перемещений (11) и аналогичных им представлений для напряжений. После чего вычисляются волновые поля в любой области слоя. Выпишем здесь лишь формулы для определения амплитуд нормальных напряжений $S_{\theta\theta}$ и $S_{33}$ на поверхности полости. Имеем

$$S_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{\theta\theta}^{(n)} \cos\lambda_n x_3 , \quad S_{33} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{33}^{(n)} \cos\lambda_n x_3 ,$$

где

$$S_{\theta\theta}^{(n)}(\zeta_0) = 2\mu\left\{\frac{i}{1-\nu}\left(y_{1n}(\zeta_0) + y_{2n}(\zeta_0)\right) + \int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3} y_{jn}(\zeta) R_j^{(n)}(\zeta,\zeta_0)\, ds\right\} - N^{(n)},$$

$$S_{33}^{(n)}(\zeta_0) = 2\mu\left\{\frac{i\nu}{1-\nu}\left(y_{1n}(\zeta_0) + y_{2n}(\zeta_0)\right) + \int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{3} y_{jn}(\zeta) G_j^{(n)}(\zeta,\zeta_0)\, ds\right\},$$

$$R_1^{(n)} = d_{1n}(r_0) e^{i(\psi-\alpha_0)},$$

$$R_2^{(n)} = d_{1n} e^{i(\alpha_0-\psi)}, \quad d_{1n} = \lambda_n h_n^{(1,1)}(r_0) + \frac{\mu_{1n}}{2(1-\nu)} H_1^{(1)}(\mu_{1n} r_0),$$

$$R_3^{(n)} = \lambda_n\left[\frac{H_0^{(1)}(\mu_{1n} r_0)}{2(1-\nu)} - H_0^{(1)}(\mu_{2n} r_0) - \frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} H(r_0)\right],$$

$$G_1^{(n)} = d_{3n} e^{i(\psi-\alpha_0)}, \quad G_2^{(n)} = d_{3n} e^{i(\alpha_0-\psi)}, \quad d_{3n}(r_0) = \frac{\nu\mu_{1n}}{2(1-\nu)} H_1^{(1)}(\mu_{1n} r_0) - \lambda_n h_n^{(1,1)}(r_0),$$

$$G_3^{(n)} = \lambda_n\left[\frac{\nu}{2(1-\nu)} H_0^{(1)}(\mu_{1n} r_0) + H_0^{(1)}(\mu_{2n} r_0) + \frac{\lambda_n^2}{\gamma_2^2} H(r_0)\right].$$

**5. Результаты численных исследований.** На рис. 1, 2 представлены амплитудно-частотные характеристики величин $\alpha = |S_{\theta\theta}|$ и $\beta = |S_{33}|$ для цилиндрической полости, на поверхности которой действует

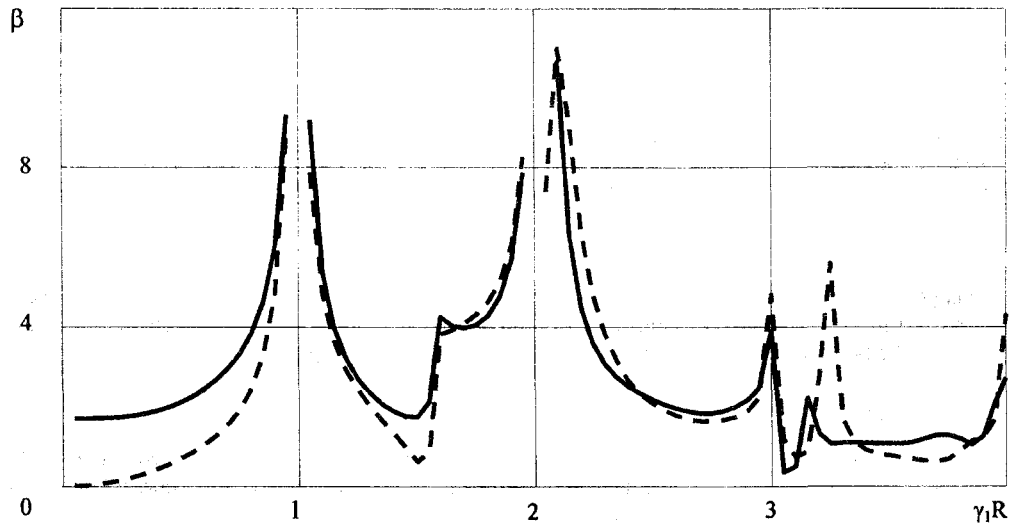



Рис. 1

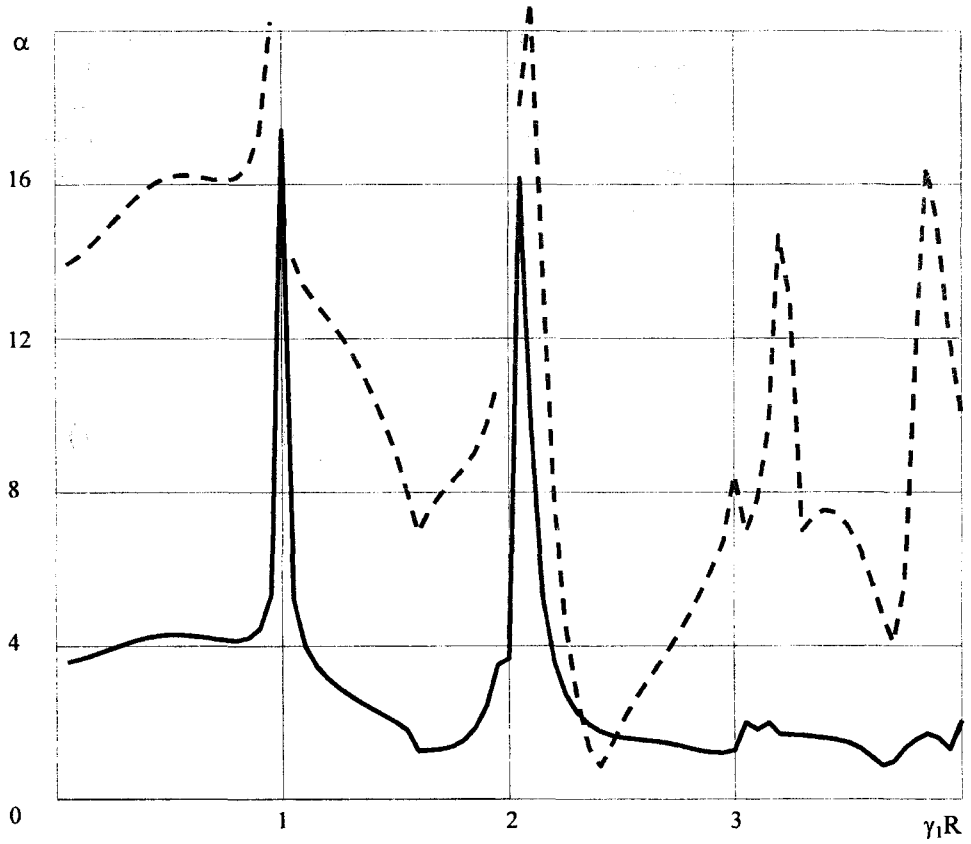



Рис. 2

нормальное давление с амплитудой $N = N_0\left(h^2 - x_3^2\right)$ при $N_0 = 1\text{Н/м}^4$, $x_3 = 0$. Сплошные линии соответствуют полости кругового поперечного сечения радиуса $R = 1$, пунктирные – полости с поперечным сечением в форме квадрата с закругленными углами $\left(x_1 = R\cos\theta + C_3 R\cos 3\theta,\right.$ $\left.x_2 = R\sin\theta - C_3 R\sin 3\theta\right)$ при $R = 1$, $C_3 = 0{,}14036$. Остальные параметры принимали следующие значения: $\nu = 0{,}15$, толщина слоя $2h = 4$, полярный угол расчетной точки $\theta = 0$.

Таким образом, построенные аналитические и численные процедуры дают возможность эффективно исследовать динамическую напряженность толстых пластин с отверстиями и в частности определять характер толщинных резонансов в таких телах.

**РЕЗЮМЕ**

Пропонується нова аналітична процедура побудови розрішаючої системи інтегральних рівнянь у задачі про гармонійні коливання шару з порожниною. Отриманий алгоритм реалізований чисельно. Приведено результати розрахунків концентрації напружень для шару з порожниною кругового, а також квадратного поперечного перерізу.

**SUMMARY**

New analytical procedure for permitting system of integral equations constructing is considered in the case of simple harmonic motions for the layer with cavity. Obtained algorithm has been realized numerically. Outcomes of stress concentration calculations for the layer with a circular and cross section cavity have been reduced in the paper.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. Аксентян О.К., Селезнева Т.Н. Определение частот собственных колебаний круглых плит // Прикладная математика и механика. – 1976. – Вып.40. – №1. – С.112-119.
3. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные плиты. – К.: Наук. думка, 1978. – 239 с.

4. Однородные решения задачи о связанных термоупругих колебаниях толстых изотропных пластин / Буглак В.А., Мысовская Р.М., Мысовкий Ю.В., Сторожев В.И. // Теорет. и прикладная механика. – 1979. – Вып.10. – С.79-84.
5. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
6. Григоренко А.Я., Дыяк И.И., Макар В.М. Влияние анизотропии на динамические характеристики свободных колебаний конечных цилиндров // Прикладная механика. – 2001. – Т.37. – №5. – С.74-83.
7. Сторожев В.И., Мысовский Ю.В., Соколова О.Д. Особенности спектра собственных колебаний трансторопной дисковидной пластины в окрестности краевого резонанса // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып.37. – С.184-189.
8. Фильштинский Л.А. Периодические решения теории упругости для цилиндра в $R^3$ // Теорет. и прикладная механика. – 1990. – Вып.21. – С.13-20.
9. Алтухов Е.В., Мысовский Ю.В., Панченко Ю.В. Трехмерные задачи установившихся колебаний изотропных пластин // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып.26. – С.13-19.
10. Сторожев В., Бай А. Толщинные резонансы связанных электроупругих колебаний пластин произвольного среза пьезокристалла $\alpha$ – кварца // "Математические проблемы механики неоднородных структур". Тр. VII Междунар. науч. конференции. – Львов, 2003. – С.377-379.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1967. – 435 с.
12. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 253 с.

*Надійшла до редакції 20.05.2003 р.*

УДК 539.3

# К ПРОБЛЕМЕ ДИНАМИКИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ПОЛЕ СИЛ ИНЕРЦИИ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК

*А.Г.Демьяненко*
*Днепропетровский государственный аграрный университет*

Современное развитие техники, увеличение скоростей и интенсивности движения транспорта, интенсификация производственных процессов продолжают ставить перед исследователями новые задачи, требующие использования уточненных механических и математических моделей, более полно отражающих сущность явления, что, в свою очередь, приводит к необходимости совершенствования, модификации традиционных и поиску новых методов исследования. В работе [1] рассмотрена задача динамики подкрепленных прямоугольных пластинок в поле сил инерции подвижных нагрузок. В настоящей статье, являющейся продолжением исследований [1 – 3], рассматривается задача о колебаниях и устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек, находящихся в поле сил инерции подвижных распределенных нагрузок.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях тонкой цилиндрической оболочки, сжатой осевой силой $N$ и подкрепленной в продольном направлении регулярным набором ребер жесткости несимметрично относительно срединной поверхности обшивки. Вдоль ребер одинаковой геометрии, расположенных с малым шагом, движутся распределенные по некоторому закону потоки одинаковой интенсивности. Будем считать, что для оболочки применима линейная теория Доннела – Муштари, ребра жесткости можно рассматривать как стержни Кирхгоффа–Клебша. Считая, что ребра расположены со стороны внешней нормали, крутильная жесткость равна сумме крутильных жестокостей обшивки и ребер, сдвиг передается только обшивкой, силовые факторы, приведенные к срединной поверхности подкрепленной оболочки, представим в виде [3, 4]

$$N_1 = B(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + (EA/l)\varepsilon_1 - (ES/l)\kappa_1,$$

$$N_2 = B(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad N_{12} = 0{,}5(1-\mu)B\varepsilon_{12}; \tag{1}$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \mu\kappa_2) + (EI/l)\kappa_1 - (ES/l)\varepsilon_1,$$

$$M_2 = D(\kappa_2 + \mu\kappa_1), \quad M_{12} = [(1-\mu)D + GI_p/2l]\kappa_{12}. \tag{2}$$

Здесь $I$, $S$, $I_p$ – соответственно осевой момент инерции, статический момент площади поперечного сечения ребра относительно срединной поверхности обшивки, полярный момент инерции поперечного сечения ребра; $A$, $l$ – площадь поперечного сечения ребер и их шаг.

С учетом формул (1) – (2) и известных уравнений равновесия и совместности деформаций пологой оболочки для малых прогибов [4], рассматриваемая задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений конструктивно–ортотропной оболочки

$$L_1(W) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{a_3 S}{hl}\left[\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} - \mu\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right] - N\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{Z}{h}; \tag{3}$$

$$L_2(\Phi) = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{a_3 S}{hl}\left(\mu\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}\right), \tag{4}$$

где

$$L_1 = \frac{D}{h}\left[b_1\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2b_2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + b_3\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right],$$

$$L_2 = \frac{1}{E}\left[a_1\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2a_2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + a_3\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right]; \tag{5}$$



©Демьяненко А. Г.

$$a_1 = [1 + (1-\mu^2)\,A/h\,l\,]a_3; \quad a_2 = 1 + \mu(1-a_3);$$

$$a_3 = 1/(1 + A/hl); \quad b_1 = 1 + 12(1-\mu^2)[\,I/h^3\,l - (S/h^2 l)^2\,a_3\,];$$

$$b_2 = 1 + 3(1-\mu)\,I_p/h^3 l; \quad b_3 = 1;$$

$W$, $\Phi$ – функции прогиба и напряжений.

После применения оператора $L_2$ к уравнению (3) с учетом того, что внешней нагрузкой являются силы инерции оболочки, ребер и потоков движущейся нагрузки, уравнение движения подкрепленной оболочки относительно функции прогиба $W$ запишем в виде

$$L_2\,L_1(W) = \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}L_2(\Phi) - \frac{a_3 S}{hl}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right]L_2(\Phi) - N\frac{\partial^2 L_2(W)}{\partial x^2} - \frac{1}{h}L_2\,L_3(W). \qquad (6)$$

Здесь

$$L_3(W) = Z = \frac{q}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{q_1}{g}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2V\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + V^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) - \qquad (7)$$

инерционный оператор; $q$, $q_1$ – приведенный вес оболочки и потоков подвижной нагрузки на единицу площади; $V$ – скорость потоков. Если потоки нагрузки, движущиеся вдоль ребер, неравномерно распределены, либо с дискретными включениями, то в первом приближении можно осреднять (размазывать) их и рассматривать как равномерно распределенные с осредненными параметрами[1]. В случае, если осевая сжимающая сила близка к критическому значению [3], значение критической скорости потоков, при которой возможно потеря устойчивости подкрепленной оболочки, оказывается невысоким.

**2. Метод решения.** Частные решения уравнения (6) ввиду невозможности разделения переменных по классической схеме из-за наличия смешанных нечетных по времени производных, выражающих силы инерции Кориолиса, будем отыскивать в виде [1, 2]

$$W(x,\,y,\,t) = \varphi(x,\,y)\cos\omega t + \psi(x,\,y)\sin\omega t. \qquad (8)$$

После введения функции комплексного переменного

$$\Phi_1(x,\,y) = \varphi(x,\,y) + i\,\psi(x,\,y) \qquad (9)$$

и ее представления с учетом условия периодичности по круговой координате в виде

$$\Phi_1(x,\,y) = \sum F_m(x)\cos(my/R) \qquad (10)$$

для определения функции $F_m(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение восьмого порядка, решение которого представляется в виде

$$F_m(x) = \sum_{i=1}^{8} C_i\,\ell^{k_i x}, \qquad (11)$$

где $k_i$ – корни соответствующего характеристического уравнения с комплексными коэффициентами при нечетных степенях

$$C_0 k^8 + C_1 k^7 + C_2 k^6 + iC_3 k^5 + C_4 k^4 + iC_5 k^3 + C_6 k^2 + iC_7 k + C_8 = 0, \qquad (12)$$

причем $C_i$ – коэффициенты, зависящие от параметров исследуемой системы. Корни этого уравнения определяются с использованием метода В.В. Воеводина. В общем случае их можно записать в виде

$$k_{1,2} = \pm\gamma_1 + i\alpha_1, \quad k_{3,4} = \pm\beta_1 - i\alpha_1,$$

$$k_{5,6} = \pm\gamma_2 + i\alpha_2, \quad k_{7,8} = \pm\beta_2 - i\alpha_2. \qquad (13)$$

Установлено, что для некоторых значений параметров исследуемой системы корни уравнения (12) можно разбить на два типа, удовлетворяющие условиям

$$|k_1| \ge |k_2| \ge |k_3| \ge |k_4| \ge |k_5| \ge |k_6| \ge |k_7| \ge |k_8|, \qquad (14)$$

что позволяет сводить задачу о нахождении корней характеристического уравнения восьмого порядка (12) к решению двух уравнений четвертого порядка.

В случае шарнирно опертой по краям оболочки граничные условия для функций $F_m(x)$ имеют вид

$$F(x)=F^{11}(x)=F^{1Y}(x)=F^{Y1}(x)=0,\quad x=0,\,1, \tag{15}$$

из которого получаем следующий частотный определитель с комплексными элементами:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 & k_5^2 & k_6^2 & k_7^2 & k_8^2 \\
k_1^4 & k_2^4 & k_3^4 & k_4^4 & k_5^4 & k_6^4 & k_7^4 & k_8^4 \\
k_1^6 & k_2^6 & k_3^6 & k_4^6 & k_5^6 & k_6^6 & k_7^6 & k_8^6 \\
e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4} & e^{k_5} & e^{k_6} & e^{k_7} & e^{k_8} \\
k_1^2 e^{k_1} & k_2^2 e^{k_2} & k_3^2 e^{k_3} & k_4^2 e^{k_4} & k_5^2 e^{k_5} & k_6^2 e^{k_6} & k_7^2 e^{k_7} & k_8^2 e^{k_8} \\
k_1^4 e^{k_1} & k_2^4 e^{k_2} & k_3^4 e^{k_3} & k_4^4 e^{k_4} & k_5^4 e^{k_5} & k_6^4 e^{k_6} & k_7^4 e^{k_7} & k_8^4 e^{k_8} \\
k_1^6 e^{k_1} & k_2^6 e^{k_2} & k_3^6 e^{k_3} & k_4^6 e^{k_4} & k_5^6 e^{k_5} & k_6^6 e^{k_6} & k_7^6 e^{k_7} & k_8^6 e^{k_8}
\end{vmatrix} = 0.$$

Окончательно общее решение уравнения движения оболочки (6) с учетом (7) и (15) в рамках исходных предпосылок записывается в виде

$$W(x,\,y,\,t)=\sum_{nm} a_{nm}\left\{\mathrm{Re}[\Phi_1(x,\,y)]\cos(\omega_{nm}\,t+\alpha_{nm})+\mathrm{Im}[\Phi_1(x,\,y)]\sin(\omega_{nm}\,t+\alpha_{nm})\right\},$$

в котором $a_{nm}$ и $\alpha_{nm}$ – неизвестные постоянные, определяемые из начальных условий.

**3. Анализ решения и результатов численных исследований.** Из решения видно, что колебания рассматриваемой оболочки осуществляются в виде двух форм колебаний на одинаковых частотах $\omega_{nm}$, но сдвинутых по фазе на прямой угол: собственные колебания $\varphi_{nm}(x,\,y)=\mathrm{Re}[\Phi_1(x,\,y)]$ и сопровождающие колебания $\psi_{nm}(x,\,y)=\mathrm{Im}[\Phi_1(x,\,y)]$, причем сопровождающие колебания обусловлены подвижной инерционной нагрузкой, формы собственных колебаний при отсутствии подвижной нагрузки переходят в собственные формы колебаний оболочки.

Были проведены численные исследования для оболочки, у которой $L=0{,}5\,m$, $L/h=2500$ в случае различных значений параметров $L/R$ и $k$. Ребра выбирались в виде трубок, для которых $d_1=0{,}98\cdot10^{-2}\,m$, $d_2=0{,}01\,m$. Удельный вес материалов потоков и оболочки были равны соответственно $\gamma_1=10\,kN/m^3$, $\gamma_2=45\,kN/m^3$.

Как показали численные исследования, кориолисовы силы инерции подвижной нагрузки существенно влияют на основную частоту колебаний оболочки. Уже при средних скоростях движения потоков значение основной частоты колебаний, определенное с учетом кориолисовых сил инерции на 20–25 % ниже значения, полученного без их учета. Анализ форм собственных и сопровождающих колебаний оболочки показывает их существенную зависимость от скорости движения потоков, соотношения подвижной и неподвижной масс системы, причем, при средних скоростях движения нагрузки, основная форма собственных колебаний переходит из безузловой в узловую, узел которой с ростом скорости смещается. Роль сопровождающих колебаний с ростом скорости и соотношения подвижной и неподвижной масс системы существенно возрастает. Если этим пренебрегать, то можно получить достаточно искаженную картину движения оболочки не только с количественной, но и с качественной стороны.

Интерес представляет и исследование влияния геометрии оболочки, ребер, их количества и расположения относительно срединной поверхности обшивки, на частоты и критические скорости движения потоков. Это следует из данных рис. 1, 2, где для оболочки с параметрами $L/R=3{,}5$, $R/h=300$ приведены зависимости низшей частоты колебаний оболочки от количества ребер $k$ (рис. 1) и зависимость частот колебаний оболочки при внутреннем и внешнем расположении ребер от числа окружных волн для $k=10$ (рис. 2).

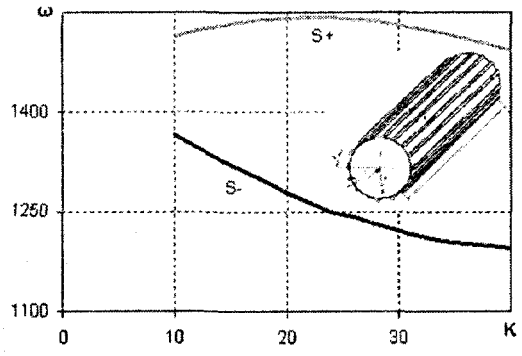



Рис. 1

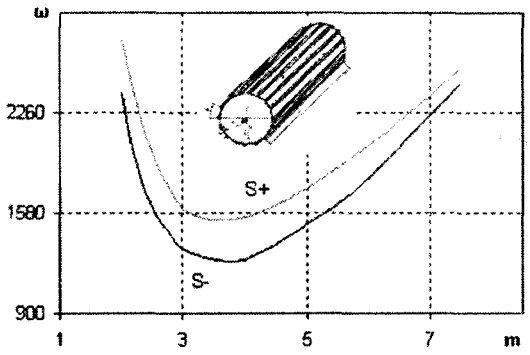



Рис. 2

Из рис. 1, 2 следует, что с увеличением количества внешних ребер $S^+$ с потоками основная частота колебаний оболочки вначале возрастает, затем убывает; при внутреннем расположении ребер с потоками $S^-$ значения частоты уменьшается с увеличением количества ребер. С увеличением числа ребер от 10 до 40 основная частота уменьшается на 35 %, критическая скорость движения потоков, при которой происходит потеря устойчивости оболочки – на 43 %. Перенос ребер с внутренней поверхности оболочки на внешнюю для оболочек с приведенными выше параметрами повышает частоты и критические скорости движения потоков на 10 – 25 % в зависимости от параметров системы.

**РЕЗЮМЕ**

*Розглянуто коливання і стійкість стиснутої осьовими силами підсиленої в поздовжньому напрямку циліндричної оболонки, вздовж ребер якої рухаються потоки розподіленого інерційного навантаження. Потоки навантаження можуть бути як однорідними так і с дискретними включеннями. На основі двохвильового подання коливань в рамках вихідних гіпотез побудовано точні розв'язки задачі, на основі яких визначаються частоти і форми коливань оболонки, значення критичних швидкостей руху потоків розподіленого навантаження, при досягненні яких можлива втрата стійкості системи. Досліджено вплив геометріко – жорсткостних і інших параметрів системи на її динаміку. В подальшому отримані результати можуть використовуватися при дослідженні більш складних задач теорії циліндричних оболонок та оболонкових систем.*

**SUMMARY**

The problem of oscillations and stability of thin cylindrical envelope with regular stringer set and pressed on longitudinal direction is being considered under assumption that along slats of the envelope that situated with small step from one to another, there is unsymmetrical stream of mobile inertia load. The linear theory of structural–orthotropical envelopes with equilibrium equations and geometrical Donnel–Mushtary relations are being used to obtain of equations. The slat of envelope is considered as Kirchhoff–Klebsh bar. The problem solution is obtained by using of two–waves appearance for motion. This approach allows to obtain the accurate solution. The investigation of influence of geometrical, elasticity and structural parameters on oscillation and stability properties of the envelope carry out by using the accurate solution.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Демьяненко А.Г.* О некоторых особенностях задач динамики подкрепленных пластинок в поле сил инерции подвижных нагрузок // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А: Природн. науки. – 2002. – Вип.2. – С.648-651.
2. *Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П.* Двохвильові процеси в механічних системах. – К.: Наук думка, 1991. – 188 с.
3. *Маневич А.И.* Об устойчивости эксцентрично подкрепленной цилиндрической оболочки // Тр. YII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Днепропетровск. 1969 г. – М.: Наука, 1970. – С.403-407.
4. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

*Надійшла до редакції 10.02.2003 р.*

УДК 531.011

# НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

*Я.Ф.Каюк, М.К.Шекера*
*Институт механики НАН Украины, г. Киев*

С использованием численного метода Рунге-Кутта решена задача о колебаниях в цилиндрическом резервуаре под действием внешнего гармонического возбуждения при непрерывном изменении массы.

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую модель тела переменной массы: емкость в форме жесткой оболочки вращения (несущее тело) заполнена жидкостью или какой-либо сыпучей средой (несомое тело). Изменение массы происходит за счет вытекания через имеющиеся на поверхности несущего тела отверстия непрерывного потока частиц несомого тела (жидкости) с определенной скоростью. Предполагается, что несущее тело с помощью специальных приспособлений (амортизаторов в виде пружин) прикреплено к неподвижным объектам [1]. Пусть на систему, кроме реактивных сил, действуют внешние силы типа гармонического возбуждения. Будем считать, что дополнительные динамические эффекты, которые могут возникать в несомых телах, пренебрежимо малы (путем введения определенных ограничительных устройств).

Введем следующие системы отсчета. Пусть $C_0\xi_1\xi_2\xi_3$ – инерциальная система с центром в $C_0$ (центре масс) и ортами $\vec{e}_j\left(j=\overline{1,3}\right)$, направленными по главным осям тела при $t=0$. При $t>0$ положение центра масс будет изменяться (ему соответствует точка $C_t$). Поступательное движение тела опишем системой отсчета $C_t\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ с осями, параллельными $C_0\xi_1\xi_2\xi_3$, вращательное – системой $C_tx_1x_2x_3$ с ортами $\vec{i}_k\left(k=\overline{1,3}\right)$, получаемой вращением относительно системы $C_t\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ (рис. 1). Обозначим через $\xi_{1C_t}$, $\xi_{2C_t}$, $\xi_{3C_t}$ координаты точки $C_t$ в системе отсчета $C_0\xi_1\xi_2\xi_3$; $\xi_{i1}^t$, $\xi_{i2}^t$, $\xi_{i3}^t$ – координаты произвольной точки тела переменной массы при $t>0$ в той же системе; $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ – координаты этой же точки в системе $C_tx_1x_2x_3$.

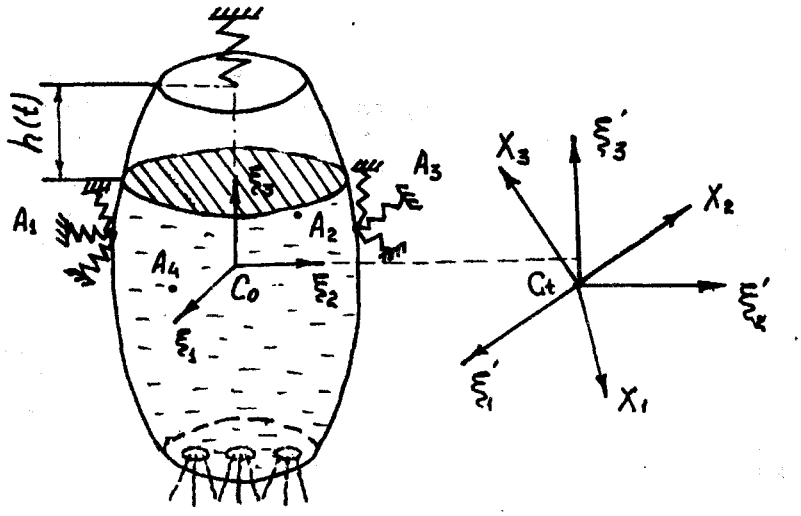



Рис. 1

Имеют место формулы перехода

$$\xi_{ik}^t=\xi_{kC_t}+\sum_{l=1}^{3}\alpha_{kl}x_l^{(i)}\quad\left(k=\overline{1,3}\right),\tag{1}$$

где $\alpha_{kl}$ – направляющие косинусы, равные



©Каюк Я.Ф., Шекера М.К.

$$\alpha_{11}=\cos\varphi\cos\phi+\sin\varphi\sin\phi\sin\theta,\quad \alpha_{12}=-\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\phi\sin\theta,$$
$$\alpha_{13}=\sin\phi\cos\theta,\ \alpha_{21}=\sin\varphi\cos\theta,\quad \alpha_{22}=\cos\varphi\cos\theta,$$
$$\alpha_{23}=-\sin\theta,\quad \alpha_{31}=-\cos\varphi\sin\phi+\sin\varphi\cos\phi\sin\theta,$$
$$\alpha_{32}=\sin\varphi\sin\phi+\cos\varphi\cos\phi\sin\theta,\quad \alpha_{33}=\cos\phi\cos\theta; \qquad (2)$$

$\theta$, $\phi$, $\varphi$ – углы Эйлера-Крылова. Следовательно, пространственные движения тела переменной массы определяются величинами $\xi_{1C_t}$, $\xi_{2C_t}$, $\xi_{3C_t}$, $\theta$, $\phi$, $\varphi$.

Для вывода разрешающей системы уравнений движения, описывающей динамические процессы в рассматриваемом теле, используются основные теоремы динамики тела переменной массы об изменении количества движения и кинетического момента [4]:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{F}^{(e)}+\vec{R},\quad \frac{d\vec{L}_{C_t}}{dt}=\vec{M}^{(e)}_{C_t}+\sum_{(\nu)}\vec{r}_\nu\times\left(\pm\mu_\nu\vec{V}_\nu\right). \qquad (3)$$

Здесь $\vec{F}^{(e)}$ – главный вектор внешних сил, равный $\vec{F}^{(e)}=\vec{F}_Q+\vec{F}_{упр}+\vec{F}_{вн}$; $\vec{F}_Q$ – сила веса; $\vec{F}_{упр}$ – главный вектор сил упругости амортизаторов; $\vec{F}_{вн}$ – заданная внешняя сила; $\vec{R}$ – главный вектор реактивных сил; $\vec{L}_{C_t}$, $\vec{M}^{(e)}_{C_t}$ – соответственно кинетический момент и главный момент внешних сил относительно точки $C_t$; $\vec{r}_\nu$ – радиус-вектор центра $\nu$-го отверстия в несущем теле, через которое вытекает жидкость массой $\mu_\nu$ со скоростью $\vec{V}_\nu$. При формулировке теорем (3) использовано представление об адекватном теле [2, 3].

Пусть при $t=0$ система находится в положении статического равновесия. При $t>0$ ее движение обусловлено изменением массы, действием внешних сил, упругих сил со стороны амортизаторов. Вычислив все величины, входящие в (3), получим скалярные уравнения поступательного движения центра масс и вращательного движения тела вокруг него

$$\frac{d}{dt}\left(M_t\dot{\xi}_{kC_t}\right)=\vec{F}^{(3)}_{\xi_k}+\frac{d}{dt}\left(M_tV^{(\xi_k)}_{C_tr}\right)+\sum_{(i,j)}F^{\xi_k}_{ij}+\sum_{(\nu)}\pm\mu_\nu\left(\sum_{l=1}^{3}V_{\nu l}\alpha_{kl}\right)\ \left(k=\overline{1,3}\right); \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{11}\omega_1\right)+\left(J_{33}-J_{22}\right)\omega_2\omega_3=M^{(3)}_{x_1}+\sum_{(i,j)}M^{x_1}_{ij}+\sum_{(\nu)}M^{x_1}_{\nu}\ \ (curl),$$

в которых $M_t=M_0+\sum_{(\nu)}\left(\pm\int_0^t\mu_\nu(t_1)dt_1\right)$ – закон изменения массы тела; в системе $C_0\xi_1\xi_2\xi_3$; $F^{(3)}_{\xi_k}$ – проекции вектора $\vec{F}^{(3)}$; $V^{(\xi_k)}_{C_tr}$ – проекция составляющей $\vec{V}_{C_tr}$ абсолютной скорости центра масс; $F^{\xi_k}_{ij}$ –проекции сил упругости пружин; $V_{\nu l}$ – проекции вектора скорости $\vec{V}_\nu$ истечения струи через $\nu$-е отверстие; в системе $C_tx_1x_2x_3$: $J_{kk}$ – главные моменты инерции; $\omega_k$ – проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ системы; ${}^kM^x_{ij}$ – проекции момента сил упругости; $M^{x_k}_\nu$ – проекции момента $\nu$-ой реактивной силы; $M^{(3)}_{x_k}$ – моменты заданных сил относительно осей $C_tx_k$ $\left(k=\overline{1,3}\right)$. К уравнениям (4) необходимо присоединить кинематические соотношения Эйлера-Крылова

$$\omega_1=\dot{\phi}\sin\varphi\cos\theta,\quad \omega_2=\dot{\phi}\cos\varphi\cos\theta-\dot{\theta}\sin\varphi,\quad \omega_3=\dot{\varphi}-\dot{\phi}\sin\theta. \qquad (5)$$

Таким образом, система уравнений (4) и (5)составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений движения тела переменной массы под действием внешней силы $\vec{F}^{(3)}$.

**Метод решения.** Решена конкретная задача о нелинейных колебаниях тела переменной массы в форме жесткой цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, находящейся под действием гармонического нагружения. Пусть $H$, $R$ – соответственно высота и радиус основания цилиндра, $h(t)$ – высота не заполненного жидкостью его объема. Изменение массы тела происходит путем вытекания жидкости через круглое отверстие, расположенное на нижнем основании, центр которого находится на вертикальной оси симметрии всего тела, $r_1$ – радиус отверстия, $\vec{V}_1(t)$ – скорость истечения жидкости, $\rho_{ж}$ – ее плотность, $M_0$ – масса цилиндра. Параметр $V_1(t)$ задаем в виде $V_1(t)=\sqrt{2g(H-h(t))}$ ($g$ – ускорение свободного падения). Тогда расход массы жидкости через отверстие равен

$$\mu_1(t)=\pi r_1^2\rho_{ж}\sqrt{2g(H-h(t))}, \tag{6}$$

а масса жидкости в цилиндре в этот же момент времени $t$

$$M_t^{ж}=\pi R_z^2\rho_{ж}(H-h(t)). \tag{7}$$

Закон изменения массы всей системы имеет вид:

$$M_t=M_0+\pi\rho_{ж}R^2\left[H-h(0)+\left(\frac{r_1}{R}\right)^2V_{10}t+\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{R}\right)^4gt^2\right]. \tag{8}$$

Пусть $\vec{F}_{вп}=\vec{F}_{вн}^{(3)}$ – заданная внешняя сила, действующая вдоль оси $C_0\xi_3$ и приложенная по направлению этой оси. Разрешающая система уравнений движения (4) сводится к следующему нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}\left(M_t\dot{\xi}_{3C_t}\right)+C_1\xi_{3Ct}=\vec{F}_{\xi_3}^{(3)}(t)+\alpha\mu_1(t)V_1(t)-\beta\mu_1(t)\dot{x}'_{3C_t}+M\ddot{x}'_{3C_t}+\gamma_1\xi_{3Ct}^2+\gamma_2\xi_{3Ct}^3, \tag{9}$$

где

$$x'_{3C_t}=-\frac{H}{2}+\frac{1}{2M_t}\left[M_1H+M_t^{ж}(H-h(t))\right],\quad C_1=\frac{4ct_0^2}{M_0},$$

$$\alpha=\frac{\mu_{10}V_{10}t_0^2}{M_0\xi_0},\quad \beta=\frac{\mu_{10}t_0}{M_0},\quad \gamma_1=\frac{6c(\xi_0t_0^2)}{M_0l},\quad \gamma_2=-\frac{6c\xi_0^2t_0^2}{M_0l^2}.$$

Для интегрирования уравнения (9) был использован метод Рунге-Кутта. Принимались следующие значения параметров: материал цилиндра – дюралюминий ($\rho_{цил}=2970\,кг/м^3$); жидкость – вода ($\rho_{ж}=1000\,кг/м^3$); параметры пружин: $l=0{,}22\,м$, $C=16252\,Н/м$ ($C$, $l$ – жесткость и длина); геометрические параметры: $r_1=0{,}02\,м$, $\frac{r_1}{R}=0{,}06734$, $\frac{l}{R}=0{,}733$, $\frac{H}{R}=3$; $h(t)|_{t=0}=h(0)=0$, $M_0=265{,}7\,кг$; остальные массовые параметры: $\frac{M_0}{M_1}=18{,}817$, $\frac{M_1}{M_2}=6{,}112$, $\frac{M_0}{M_1+M_2}=1$ ($M_1$ – масса цилиндра без дна); $t_0=0{,}4$ (период собственных вертикальных колебаний наполненного цилиндра); $\xi_0=0{,}04$ (статическое удлинение пружины); $V_{10}=V(0)=4{,}2\,м/с$; $\mu_{10}=\mu_1(0)=5{,}28\,кг/с$.

При истечении жидкости из несущего тела центр масс системы перемещается относительно цилиндра со скоростью, равной относительной скорости центра масс системы. Тогда проекция скорости центра масс системы на ось $C_0\xi_3$ равна $\dot{\xi}_{3C_t}(0)=-0{,}09$.

Начальными условиями для уравнения (9) принимались такие:

$$\dot{\xi}_{3C_t}(0)=0{,}09,\quad \xi_{3C_t}(0)=0.$$

В качестве внешнего нагружения принималось $F_{\xi_3}^{(3)}(t) = A\sin\omega_0 t$, т.е. периодическое воздействие в вертикальном направлении. Параметры $A$ и $\omega_0$ подбирались из условия, чтобы частота внешнего возмущения соответствовала частоте собственных колебаний тела, в котором за определенный промежуток времени вытекло определенное количество жидкости, т.е. полагалось $F_{\xi_3}^{(3)}(t) = 5\sin 8t$. Результаты выполненных вычислений представлены на рис. 2.

На основе данных рис. 2 и других полученных результатов установлено, что под действием внешнего вертикального периодического нагружения имеют место различные колебательные режимы (перио-

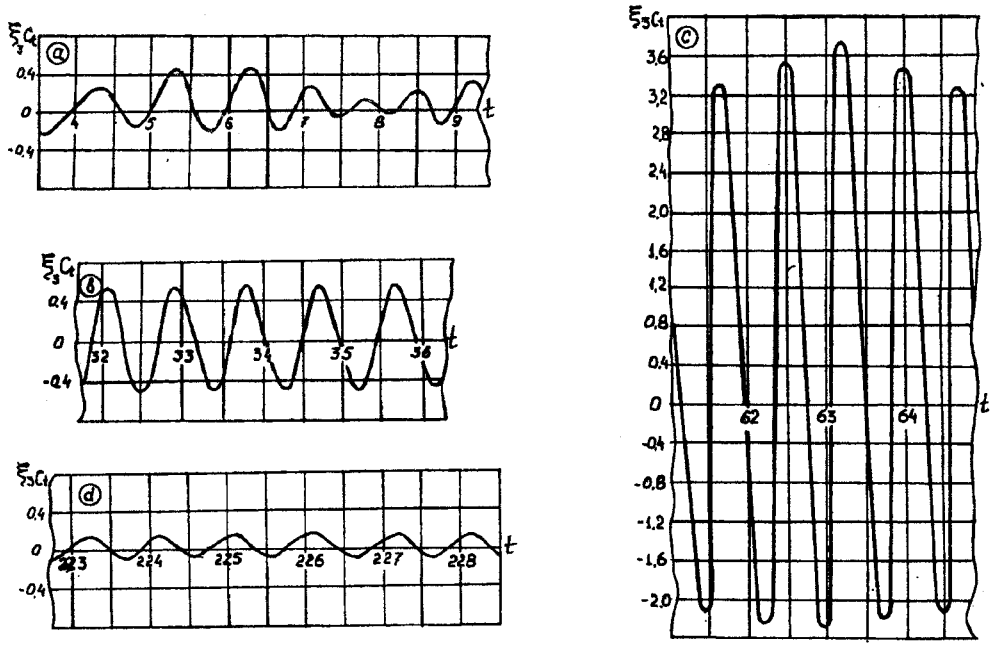



Рис. 2

дические, квазипериодические, типа биений, резонансные). На начальном этапе движения наблюдаются колебания типа биений, затем наблюдается постепенный переход к квазипериодическим режимам. При прохождении через резонанс амплитуды существенно возрастают по сравнению с амплитудами биений; предрезонансная и послерезонансные зоны почти симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через максимальное значение амплитуды при резонансе. Резонансный режим сменяется режимами типа биений, но с большими амплитудами по сравнению с колебаниями на начальном этапе; затем имеет место последовательность гармонических колебаний с уменьшающимися амплитудами. И, наконец, по истечению всей жидкости устанавливается периодический режим, совпадающий по частоте и амплитуде с внешним возбуждением, при этом амплитуда стационарных колебаний в 26–27 раз меньше амплитуды в случае резонанса.

**РЕЗЮМЕ**

Розглядається задача про коливання тіла змінної маси у формі жорсткої оболонки обертання (несуче тіло), яка частково наповнена рідиною або іншим сипучим середовищем (тіло, яке несуть). Несуче тіло певним чином прикріплено до нерухомих об'єктів. Зміна маси системи відбувається завдяки витіканню сипучої маси крізь отвори, які розташовані на поверхні несучого тіла. Система перебуває під дією зовнішнього гармонічного навантаження. Наведено нелінійні рівняння руху (з урахуванням кубічної нелінійності). Розв'язано задачу про нелінійні коливання циліндричного тіла змінної маси під дією періодичного збудження.

**SUMMARY**

The problem on the vibrations of the variable mass body approaching to the stiff shell of revolution (carring body) in its shape and containing a liquid is considered. The system is fixed by some elastic strings to immovable objects. The body's mass is changed due to the holes which are on the surface of carring body and through which liquid flows out. Nonlinear mo-

tion equations are given, they contain the terms of the third degree non-linearity. The problem on the nonlinear vibrations of the variable mass cylindrical body under the action of the periodic external loading is solved.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, 1976. – 431 с.
2. Каюк Я.Ф., Тилавов А. Движение твердого тела переменной массы на упругих амортизаторах // Прикладная механика. – 1987. – Т.23. – №5. – С.102-109.
3. Каюк Я.Ф., Ахмедов А. Пространственные движения цилиндрического тела переменной массы на упругом подвесе // Прикладная механика. – 1992. – Т.28. – №7. – С.62-69.
4. Космодемьянский А.А. Лекции по механике тел переменной массы // Учен. записки МГУ. – 1951. – Т.4. – Вып.154. – С.73-181.

*Надійшла до редакції 17.04.2002*

УДК 539.3

# ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПІДКРІПЛЕНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

*М.О.Шульга, С.Ю.Богданов*
*Інститут механіки НАН України, м. Київ*

Коливання підкріплених оболонок досліджуються в роботах [2, 3, 6 – 9]. В цій статті розглянуто два підходи до побудови чисельних алгоритмів розв'язання задач по визначенню напруженодеформованого стану підкріпленої конічної оболонки при дії на неї нестаціонарного навантаження. Перший підхід базується на використанні апарату узагальнених функцій і представлення рівнянь руху в єдиній формі для всієї розрахункової області, в тому числі і для місць розташування підкріплюючих елементів. За допомогою інтегро-інтерполяційного методу будується однорідна різницева схема наскрізного рахунку, що дозволяє вести розрахунки за однаковими формулам для всієї розрахункової області. За іншим підходом диференціальні рівняння руху записуються в однорідній частині оболонки, а в місцях розташування підкріплюючих ребер записуються умови спряження ребра та оболонки. В однорідній частині оболонки різницева схема будується звичайним чином, тому що функції переміщень серединної поверхні оболонки мають гладкість будь-якого порядку. В місцях спряження ребер та оболонки записуються умови контакту в різницевій формі.

**Постановка задачі** Розглядається підкріплена конічна оболонка довжини $L$ – просторова змінна належить відрізку $[0, L]$. Часова змінна належить відрізку $[0, T]$, де $T < +\infty$. В точках $x_r$, $r = 1,...,l$ розміщені ребра, що підкріплюють оболонку. Умови контакту ребра з оболонкою записуються в інтегральному вигляді [1]:

$$u_r = \int_0^L [u(x) + h_r\varphi(x)]\delta(x - x_r)dx, \quad w_r = \int_0^L w(x)\delta(x - x_r)dx,$$

$$\varphi_r = \int_0^L \varphi(x)\delta(x - x_r)dx, \tag{1}$$

де $u$, $w$, $\varphi$ – переміщення серединної поверхні оболонки. З принципу Гамільтона-Остроградського, одержимо рівняння руху

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}(R_x Q_{xz}) - \frac{1}{R_x}T_{yy}\frac{\partial R_x}{\partial x} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^{l}\rho_r A_r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h_r\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\delta(x - x_r),$$

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}(R_x Q_{xz}) - \frac{T_{yy}}{R_x\cos\alpha_0} + \frac{1}{R_x}\sum_{r=1}^{l}\frac{T_r}{R_r}\delta(x - x_r) +$$

$$+\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}\left(R_x T_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + P(x,t) = \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{r=1}^{l}\rho_r A_r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta(x - x_r),$$

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}(R_x M_{xx}) - \frac{1}{R_x}M_{yy}\frac{\partial R_x}{\partial x} - Q_{xz} - \frac{1}{R_x}\sum_{r=1}^{l}\frac{M_r}{R_r}\delta(x - x_r) = \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} +$$

$$+\sum_{r=1}^{l}\rho_r A_r\left[h_r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h_r\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) + \frac{J_r}{A_r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]\delta(x - x_r). \tag{2}$$

Тангенціальні зусилля $T_{xx}$, $T_{yy}$, $T_r$ згинальні моменти $M_{xx}$, $M_{yy}$, $M_r$ в оболонці і ребрах, перерізуючи зусилля $Q_{xz}$ в оболонці пов'язані з деформаціями серединної поверхні оболонки залежностями:

$$T_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}), \quad T_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}),$$

©Шульга М.О., Богданов С.Ю.

$$Q_{xz} = G_{xz} h \varepsilon_{xz}, \quad M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\kappa_{xx} + \nu\kappa_{yy}\right),$$

$$M_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\kappa_{yy} + \nu\kappa_{xx}\right), \quad T_r = E_r A_r \varepsilon_r, \quad M_r = E_r J_r \kappa_r. \tag{3}$$

Деформації серединної поверхні оболонки і ребер пов'язані з переміщеннями серединної поверхні співвідношеннями

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\sin\alpha_0}{R_x} u + \frac{\cos\alpha_0}{R_x} w, \quad \kappa_{xx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\kappa_{yy} = \frac{\sin\alpha_0}{R_x}\varphi, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi, \quad \varepsilon_r = \frac{w_r}{R_r}, \quad \kappa_r = \frac{\varphi_r}{R_r}. \tag{4}$$

В співвідношеннях (1) – (4) прийняті загальновідомі позначення теорії підкріплених оболонок [2, 3], а $R_x = R_0 + x\sin\alpha_0$, де $\frac{\alpha_0}{2}$ – кут конусності, $R_0$ – радіус меншої основи конуса.

**Побудова різницевих схем**. Різницева схема будувалась за допомогою інтегро-інтерполяційного методу, що обумовлено присутністю в рівняннях руху розривних коефіцієнтів. В області змінювання змінних $(x,t): Q_T = \Omega \times [0,T]$ запроваджуємо різницеву сітку $P_{\Delta\tau} = \{(x_i, t_j);\ x_i = i\Delta x,\ t_j = j\tau,$ $i = 0,1,...,N;\ j = 0,1,...,k;\ N\Delta x = L;\ k\tau = T\}$ таким чином, щоб точки встановлення ребер співпадали з вузлами сітки по просторовій змінній. В області $\Omega$ вводимо ще одну сітку з напівцілими індексами $x_{i+1/2} = \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x$. Проінтегруємо співвідношення (3) на елементарному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$, апроксимуючи при цьому інтеграли по формулі трапецій [4], силові характеристики оболонки співвідносимо до точок з напівцілими індексами. Рівняння руху (1) записані в зусиллях, тому їх інтегруємо на елементарному відрізку $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Після інтегрування рівнянь руху і проведення відповідних перетворень одержуємо різницеву схему:

$$\frac{1}{R_{x,i}}\left(R_x T_{xx}\right)^-_{x,i+1/2} + \frac{\sin\alpha_0}{2}\left(T_{yy,i-1/2} + T_{yy,i+1/2}\right) =$$

$$= \rho h u^-_{tt,i} + \frac{1}{\Delta x}\sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r \left(u^-_{tt,i} + h_r \varphi^-_{tt,i}\right)\frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4},$$

$$\frac{1}{R_{x,i}}\left(R_x Q_{xz}\right)^-_{x,i+1/2} + \frac{1}{2\cos\alpha_0}\left(\frac{T_{yy,i-1/2}}{R_{x,i-1/2}} + \frac{T_{yy,i+1/2}}{R_{x,i+1/2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R_{x,i}}\left(R_x T_{xx} w_x\right)_{x,i+1/2} = \rho h w^-_{tt,i} + \frac{1}{\Delta x}\sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r \frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4},$$

$$\frac{1}{R_{x,i}}\left(R_x M_{xx}\right)^-_{x,i+1/2} - \frac{\sin\alpha_0}{2}\left(M_{yy,i-1/2} + M_{yy,i+1/2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[(Q_{xz})_{i-1/2} + (Q_{xz})_{i+1/2}\right] = \frac{\rho h^3}{12}\varphi^-_{tt,i} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta x}\sum_{r=1}^{l} \rho_r A_r \left[h_r\left(u^-_{tt,i} + h_r \varphi^-_{tt,i}\right) + \frac{J_r}{A_r}\varphi^-_{tt,i}\right]\frac{\delta_{i-1r} + 2\delta_{ir} + \delta_{i+1r}}{4}. \tag{5}$$

Співвідношення пружності в різницевій формі:

$$T_{xx,i-1/2}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(u^-_{x,i}+\frac{1}{2}(w^-_{x,i})^2+\nu\left[\frac{\sin\alpha_0}{2}\left(\frac{u_i}{R_{x,i}}+\frac{u_{i-1}}{R_{x,i-1}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos\alpha_0}{2}\left(\frac{w_{i-1}}{R_{x,i-1}}+\frac{w_i}{R_{x,i}}\right)\right]\right),$$

$$T_{xx,i+1/2}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(u^-_{x,i+1}+\frac{1}{2}(w^-_{x,i+1})^2+\nu\left[\frac{\sin\alpha_0}{2}\left(\frac{u_i}{R_{x,i}}+\frac{u_{i+1}}{R_{x,i+1}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\cos\alpha_0}{2}\left(\frac{w_{i+1}}{R_{x,i+1}}+\frac{w_i}{R_{x,i}}\right)\right]\right),$$

$$T_{yy,i-1/2}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu u^-_{x,i}+\nu\frac{1}{2}(w^-_{x,i})^2+\frac{\sin\alpha_0}{2}\left(\frac{u_i}{R_{x,i}}+\frac{u_{i-1}}{R_{x,i-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\alpha_0}{2}\left(\frac{w_{i-1}}{R_{x,i-1}}+\frac{w_i}{R_{x,i}}\right)\right),$$

$$T_{yy,i+1/2}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\nu u^-_{x,i+1}+\nu\frac{1}{2}(w^-_{x,i+1})^2+\frac{\sin\alpha_0}{2}\left(\frac{u_i}{R_{x,i}}+\frac{u_{i+1}}{R_{x,i+1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\alpha_0}{2}\left(\frac{w_{i+1}}{R_{x,i+1}}+\frac{w_i}{R_{x,i}}\right)\right),$$

$$M_{xx,i-1/2}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\varphi^-_{x,i}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\sin\alpha_0}{R_{x,i}}\varphi_i+\frac{\sin\alpha_0}{R_{x,i+1}}\varphi_{i+1}\right)\right),$$

$$M_{yy,i+1/2}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\varphi^-_{x,i+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha_0}{R_{x,i}}\varphi_i+\frac{\sin\alpha_0}{R_{x,i+1}}\varphi_{i+1}\right)\right),$$

$$M_{yy,i-1/2}=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\nu\varphi^-_{x,i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha_0}{R_{x,i}}\varphi_i+\frac{\sin\alpha_0}{R_{x,i-1}}\varphi_{i-1}\right)\right),$$

$$Q_{xz,i-1/2}=G_{xz}h\left(w^-_{x,i}+\frac{1}{2}(\varphi_i+\varphi_{i-1})\right),$$

$$Q_{xz,i+1/2}=G_{xz}h\left(w^-_{x,i+1}+\frac{1}{2}(\varphi_i+\varphi_{i+1})\right). \qquad (6)$$

Ця схема є однорідною і дозволяє розрахувати силові і кінематичні характеристики оболонки за однаковими формулами для всій розрахунковій області. За побудовою схема має другий порядок точності по часовій змінній і перший порядок – по просторовій змінній.

При другому підході, записуються рівняння руху для гладких частин оболонки:

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}(R_xQ_{xz})-T_{yy}\frac{\partial R_x}{\partial x}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad x\in\Omega',$$

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}(R_xQ_{xz})-\frac{T_{yy}}{R_x\cos\alpha_0}+\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}\left(R_xT_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+P(x,t)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad x\in\Omega',$$

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial}{\partial x}(R_xM_{xx})-M_{yy}\frac{\partial R_x}{\partial x}-R_xQ_{xz}=\frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\quad x\in\Omega'. \qquad (7)$$

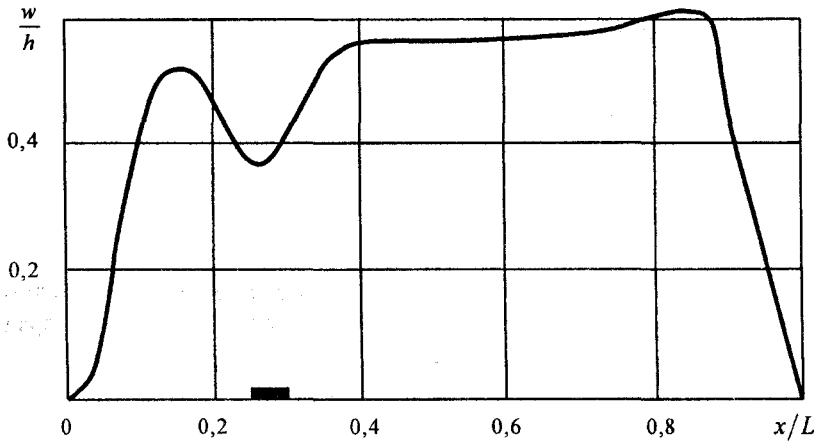
Залежності між деформаціями – переміщеннями і співвідношення пружності мають вид (4), (3). На лініях розриву повинні виконуватись кінематичні і динамічні умови спряження оболонки з ребрами жорсткості. При жорсткому контакті кінематичні умови можна записати [1] у вигляді $[u]_{x=x_r}=[w]_{x=x_r}=[\varphi]_{x=x_r}=0$, де $[u]_{x=x_r}=u_{x_r-0}-u_{x_r+0}$ і т.д. – "стрибок" функції в точці $x=x_r$ (різниця значень функції зліва і справа від точки $x_r$). З варіаційного принципу одержимо динамічні умови спряження

$$[T_{xx}]_{x=x_r}=\rho_r A_r\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+h_r\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right),\quad [Q_{xz}]_{x=x_r}=T_r k_r+\rho_r A_r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$[M_{xx}]_{x=x_r}=k_r M_{xr}+\rho_r A_r\left[\pm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(h_r^2+\frac{J_r}{A_r}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]. \qquad (8)$$

В однорідній частині оболонки різницева схема будується або інтегро-інтерполяційним методом або іншим способом [4], тому що в гладкій частині функцій в рівняннях руху мають диференційовані похідні будь-якого порядку. В області встановлення ребер співвідношення (8) замінюються різницевими. Побудована таким чином схема має другий порядок точності в гладкій частині оболонки і перший порядок – в місцях встановлення ребер [5].

**Чисельні результати**. Використовуючи розроблену чисельну методику, було досліджено пружну реакцію підкріпленої конічної оболонки на дію імпульсного навантаження. Розрахунки проводились за допомогою однорідної різницевої схеми. Співвідношення між кроками інтегрування вибирались таким чином, щоб забезпечувалась практична збіжність побудованого різницевого алгоритму. Вивчалась реакція підкріпленої конічної оболонки на дію розподіленого навантаження при умовах жорсткого закріплення торців оболонки. Задача розв'язувалась для оболонок і ребер з параметрами $\frac{h}{L}=\frac{1}{80}$, $\frac{h_r}{L}=\frac{1}{80}$, $\frac{R_0}{L}=\frac{5}{16}$, $\nu=0{,}3$; $\alpha_0=\frac{\pi}{12}$. Навантаження, що діє на оболонку, задавалось [3, 6] у вигляді $P(t)=\frac{P_0}{E}\sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\left[\eta(t)-\eta(t-t_0)\right]$, де $\eta(t)$ – функція Хевісайда. Початкові умови нульові. Ребро встановлене в точці $x=0{,}3L$. Залежність прогину оболонки повздовжньої координати в момент часу $t_1=t^*$, де $t^*$ – час пробігу пружної хвилі вздовж довжини оболонки, представлено на рисунку. З нього




видно наскільки впливає ребро жорсткості на зменшення прогину оболонки в зоні його розташування. При $\alpha=0$ чисельні результати співпадають з розрахунками для циліндричної оболонки.

Як показує кількісний аналіз для циліндричних оболонок [7, 8, 9] при розподіленому навантаженні обидва підходи дають практично однакові результати. При навантаженнях типу повздовжнього або поперечного удару по краю оболонки більш придатним виявляється другий підхід, що дозволяє дослідити особливості дискретного розміщення ребер на напружено-деформований стан оболонки.

**РЕЗЮМЕ**

Рассмотрены два похода численного анализа вынужденных колебаний подкрепленных конических оболочек: разностная схема сквозного счета и разностная схема с выделением особенностей. Показаны методы построения разностных схем в обоих случаях, рассмотрены преимущества каждого из них.

**SUMMARY**

Two approach for numerical simulation forced vibration stiffened conical shells are considered. There are homogeneous through finite-difference circuit and difference scheme with localization of non-homogeneous. Methods difference scheme construction are given.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка., 1980. – 368 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т., Т.2).
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мукоид В.П. Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках. – К.: Наук. думка, 1990. – 375 с.
3. Lugovoy P.Z. Dynamics of thin–walled structures under nonstationarity loads // Int. Appl. Mech. – 2001. – Vol.37. – №5. – P.602-607.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
5. Богданов С.Ю. О конечно-разностном методе нахождения численного решения нелинейных уравнений движения подкрепленной конической оболочки. Дифферен-циальные и интегральные уравнения математической физики и их приложение // Ин-т математики НАН Украины. – К., 1997. – С.30-33.
6. M.I. Mikhailova. Problems on nonstationary interation of structural elements with shock waves // Int. Appl. Mech. – 2001. – Vol.37. – №10. – P.1237-1254.
7. Шульга Н.А., Мейш В.Ф., Богданов С.Ю. К исследованию нестационарных колебаний оболочек конечно-разностными методами. // Соврем. пробл. концентрации напряжений: Тр. Междунар. науч. конф., Донецк, 21-25 июня 1998 г. – Донецк, 1998. – С.269-273.
8. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Богданов С.Ю. Численное решение задач динамики ребристых оболочек // Вычисл. и прикладная математика. – 1994. – Вып.74. – С.45-48.
9. Богданов С.Ю., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Шульга Н.А. О численном решении задач нелинейной теории подкрепленных оболочек // Прикладная механика. – 1996. – Т.32. – №7. – С.46-51.

*Надійшла до редакції 03.06.2003 р.*

УДК 539.3

# ЧИСЕЛЬНИЙ СПОСІБ АНАЛІЗУ ДИСПЕРСІЇ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ХВИЛЬ В ОРТОТРОПНОМУ ЦИЛІНДРІ З РІДИНОЮ

*В.М.Шульга, О.М.Шульга*
*Інститут механіки НАН України, м.Київ*

Поширення хвиль в порожнистих циліндрах з рідиною розглядалося в роботах [1-3, 5 та інш.]. В цій статті розвинуто чисельний спосіб розв'язання спектральної задачі про поширення осесиметричних хвиль в криволінійно-ортотропному циліндрі, наповненому стисливою ідеальною рідиною. Умови досконалого контакту твердого тіла з рідиною записані в імпедансній формі. В частинному випадку нульової кривизни при граничному значенні імпедансу одержано розв'язок задачі про поверхневі хвилі в шарі на півпросторі рідини.

**Постановка задачі.** При осесиметричній деформації динамічний напружений стан в ортотропному циліндрі $r_0 < r < r_N$ з композитного матеріалу в кругових циліндричних координатах $(r, \theta, z)$ описується [3, 4] системою диференціальних рівнянь коливань

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}, \quad \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \tag{1}$$

і матеріальних співвідношень

$$\sigma_{rr} = c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12}\frac{u_r}{r} + c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{12}\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{22}\frac{u_r}{r} + c_{23}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{23}\frac{u_r}{r} + c_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = c_{44}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \tag{2}$$

в яких враховані формули Коші для деформацій. Пружні модулі $c_{ij}$ і густина $\rho$ можуть бути кусково-неперервними функціями координати $r$ з розривами першого роду. В такому разі на внутрішніх циліндричних поверхнях $r = r_{\text{int}}$, $r_0 < r_{\text{int}} < r_N$, при досконалому механічному контакті повинні виконуватися умови неперервності напружень $\sigma_{rr}$, $\sigma_{zr}$ і переміщень $u_r$, $u_z$.

В акустичному наближенні для коливань внутрішньої субстанції в середині циліндру справедливі [1, 2, 5] рівняння

$$\rho_a\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_a c_a \nabla\cdot\mathbf{v}. \tag{3}$$

Тут $p$ – тиск, $\mathbf{v}$ – швидкість, $\rho_a$ і $c_a$ – густина і швидкість звуку, $\nabla$ – оператор Гамільтона.

На зовнішній поверхні циліндру $r = r_N$ приймемо імпедансні граничні умови у вигляді

$$a_r\sigma_{rr}(r_N,...) + b_r u_r(r_N,...) = 0, \quad a_z\sigma_{zr}(r_N,...) + b_z u_z(r_N,...) = 0. \tag{4}$$

На внутрішній поверхні циліндру $r = r_0$ повинні виконуватися умови досконального механічного контакту пружного тіла з рідиною. Ці умови також запишемо в імпедансній формі

$$\sigma_{rr}(r_0,...) + \frac{p(r_0,...)}{v_r(r_0,...)}\frac{\partial u_r(r_0,...)}{\partial t} = 0, \quad \sigma_{zr}(r_0,...) = 0. \tag{5}$$

Зауважимо, що контактні умови при $r = r_0$ можна записати в формі (5), якщо збурений стан в рідині визначений з точністю до сталого множника.

**Спосіб розв'язку.** Будемо шукати розв'язок рівнянь (1), (2) та (3) у вигляді біжучих хвиль

$$[\sigma_{rr}, u_z, u_r, \sigma_{zr}] = \text{Re}[ic_{00}y_1(\xi)/(1+\varepsilon\xi), hy_2(\xi), -ihy_3(\xi),$$

$$c_{00}y_4(\xi)/(1+\varepsilon\xi)]\exp i(kz - \omega t); \tag{6}$$

$$p(r,z,t) = \text{Re}\, ic_{00}A_0 Z_0(\alpha_a r)\exp i(kz - \omega t) \tag{7}$$

В формулах (6), (7) і далі використані позначення: безрозмірна координата $\xi h = r - R$, $2h = r_N - r_0$,



©Шульга В.М., Шульга О.М.

$2R = r_N + r_0$, $\varepsilon R = h$, $\omega$ – циклічна частота, $k$ – постійна поширення, $c_{00}$ і $\rho_{00}$ – нормуючі параметри з розмірністю Па і кг/м$^3$, $Z_0(\alpha_a r) \equiv J_0(\alpha_a r)$ і $\alpha_a = \sqrt{k_a^2 - k^2}$ при $k_a > k$, $Z_0(\alpha_a r) \equiv I_0(\alpha_a r)$ і $\alpha_a = \sqrt{k_a^2 - k^2}$, $J_0(\cdot)$, $I_0(\cdot)$ – циліндричні функції нульового порядку, $A_0$ – невідома стала інтегрування.

Після підстановки (6) в (1), (2) і ряду перетворень для визначення безрозмірних амплітудних функцій $y_j(\xi)$ одержимо [4] гамільтонову систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{bmatrix} y_1'(\xi) \\ y_2'(\xi) \\ y_3'(\xi) \\ y_4'(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\xi) & A_{12}(\xi) & A_{13}(\xi) & A_{14}(\xi) \\ 0 & 0 & A_{14}(\xi) & A_{24}(\xi) \\ -A_{31}(\xi) & -A_{32}(\xi) & -A_{11}(\xi) & 0 \\ -A_{32}(\xi) & -A_{42}(\xi) & -A_{12}(\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\xi) \\ y_2(\xi) \\ y_3(\xi) \\ y_4(\xi) \end{bmatrix} \tag{8}$$

з функцією Гамільтона

$$H = A_{11}y_1y_3 + A_{12}y_2y_3 + \frac{1}{2}A_{13}y_3y_3 + A_{14}y_4y_3 +$$
$$+ \frac{1}{2}A_{24}y_4y_4 + \frac{1}{2}A_{31}y_1y_1 + A_{32}y_1y_2 + \frac{1}{2}A_{42}y_2y_2. \tag{9}$$

Ненульові елементи матриці $A_{ij}(\xi)$ визначаються формулами:

$$A_{11} = \frac{\varepsilon\bar{c}_{12}}{(1+\varepsilon\xi)\bar{c}_{11}}, \quad A_{12} = \varepsilon\left(\bar{c}_{23} - \frac{\bar{c}_{12}\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{11}}\right)\bar{k},$$
$$A_{13} = (1+\varepsilon\xi)\left[\bar{\rho}\bar{\omega}^2 - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\xi)^2}\left(\bar{c}_{22} - \frac{\bar{c}_{12}^2}{\bar{c}_{11}}\right)\right],$$
$$A_{14} = -\bar{k}, \quad A_{24} = \frac{1}{(1+\varepsilon\xi)\bar{c}_{55}}, \quad -A_{31} = -\frac{1}{(1+\varepsilon\xi)\bar{c}_{11}},$$
$$-A_{32} = \frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{11}}\bar{k}, \quad -A_{42} = (1+\varepsilon\xi)\left[\left(\bar{c}_{33} - \frac{\bar{c}_{13}^2}{\bar{c}_{11}}\right)\bar{k}^2 - \bar{\rho}\bar{\omega}^2\right]. \tag{10}$$

У формулах (8)-(10) використані безрозмірні величини $\bar{c}_{ij}c_{00} = c_{ij}$, $\bar{\rho}\rho_{00} = \rho$, $\bar{k} = kh$, $\bar{\omega} = \omega h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$.

Граничні (4) та контактні (5) умови для нових невідомих функцій набирають вигляду

$$\frac{\bar{a}_r}{1+\varepsilon}y_1(+1) - \bar{b}_r y_3(+1) = 0, \quad \bar{b}_z y_2(+1) + \frac{\bar{a}_z}{1+\varepsilon}y_4(+1) = 0 \tag{11}$$

в яких $\bar{a}_\alpha = a_\alpha c_{00}$, $\bar{b}_\alpha = b_\alpha h$, $(\alpha \sim r, z)$, та

$$y_1(-1) - \frac{(1-\varepsilon)\bar{\rho}_a\bar{\omega}^2 Z_0(\alpha_a r_0)}{\bar{\alpha}_a Z_0'(\alpha_a r_0)}y_3(-1) = 0, \quad y_4(-1) = 0, \tag{12}$$

в яких $\bar{\rho}_a\rho_{00} = \rho_a$, $\bar{\alpha}_a = \alpha_a h$; "штрих" означає похідну від циліндричної функції по аргументу.

Розв'язок спектральної задачі (8), (11), (12) будемо шукати шляхом редукції для двох задач Коші для рівнянь (8) з лінійно-незалежними початковими умовами при $\xi = -1$, які не суперечать умовам (12):

$$\mathbf{y}^{(1)T}(-1) = [0,1,0,0], \quad \mathbf{y}^{(2)T}(-1) = \left[\frac{(1-\varepsilon)\bar{\rho}_a\bar{\omega}^2 Z_0(\alpha_a r_0)}{\bar{\alpha}_a Z_0'(\alpha_a r_0)}, 0, 1, 0\right]. \tag{13}$$

Лінійна комбінація розв'язків цих двох задач Коші дозволяє виконати граничні умови при $\xi = +1$, внаслідок чого одержимо систему двох однорідних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\bar{a}_r}{1+\varepsilon}y_1^{(i)}(+1)-\bar{b}_r y_3^{(i)}(+1)\right)X_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\bar{b}_z y_2^{(i)}(+1)+\frac{\bar{a}_z}{1+\varepsilon}y_4^{(i)}(+1)\right)X_i=0. \qquad (14)$$

Умова існування нетривіального розв'язку системи (14), тобто рівність нулеві її визначника

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\bar{a}_r}{1+\varepsilon}y_1^{(1)}(+1)-\bar{b}_r y_3^{(1)}(+1); & \frac{\bar{a}_r}{1+\varepsilon}y_1^{(2)}(+1)-\bar{b}_r y_3^{(2)}(+1)\\ \bar{b}_z y_2^{(1)}(+1)+\frac{\bar{a}_z}{1+\varepsilon}y_4^{(1)}(+1); & \bar{b}_z y_2^{(2)}(+1)+\frac{\bar{a}_z}{1+\varepsilon}y_4^{(2)}(+1)\end{bmatrix}=0 \qquad (15)$$

є дисперсійним рівнянням. При заданих $\bar{\omega}$ корені $\bar{k}$ знаходяться методом бісекції. Для довільної пари $(\bar{\omega}_i,\bar{k}_i)$ на дисперсійних кривих по відповідному нетривіальному розв'язку однорідної системи (14) знаходимо форму хвилі по радіальній координаті. Фазову і групову швидкості хвилі визначаємо за відомими формулами $\bar{c}_f=\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ і $\bar{c}_g=\frac{d\bar{\omega}}{d\bar{k}}$.

В частинному випадку $\varepsilon=0$ дисперсійне рівняння для "сухого" циліндру (при $\sigma_{rr}(r_0-0,...)=0\Rightarrow y_1(-1)=0$, $\sigma_{rz}(r_0-0,...)=0\Rightarrow y_4(-1)=0$) переходить [4] в дисперсійне рівняння для хвиль Релея-Лемба в плоскому шарі $-h<x<+h\Rightarrow -1<\xi<+1$. В випадку циліндру з рідиною дисперсійне рівняння (15) при $\varepsilon=0$ переходить в дисперсійне рівняння для поверхневих хвиль в структурі "пружний шар $-h<x<+h$ на півпросторі $x<-h$ рідини" при $k>k_a$ і граничному переході

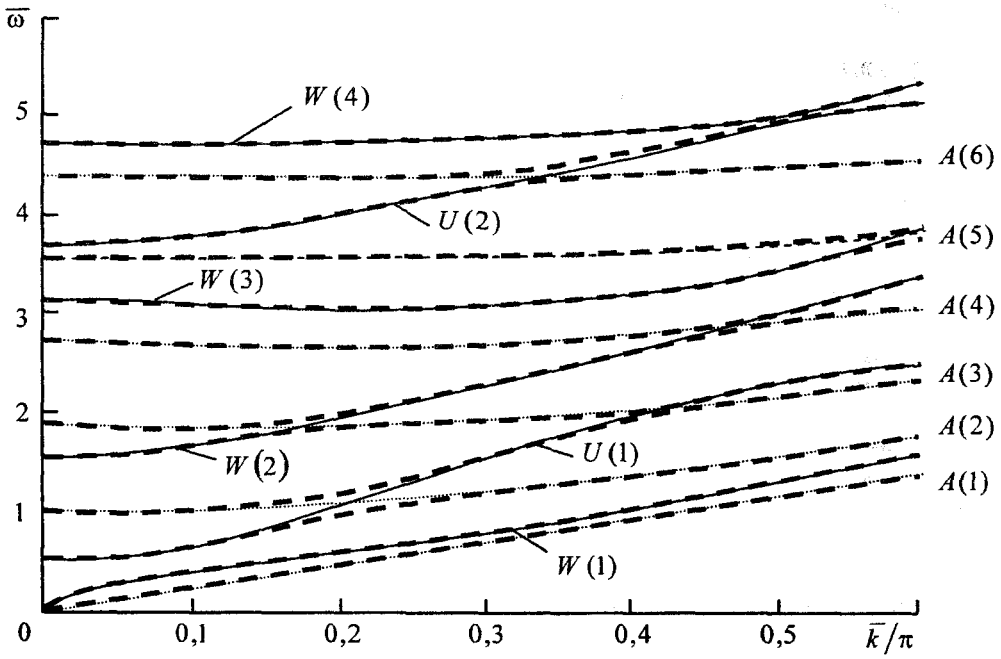
$$\frac{Z_0(\alpha_a r_0)}{Z_0'(\alpha_a r_0)}=\frac{I_0(\alpha_a r_0)}{I_0'(\alpha_a r_0)}=\frac{I_0\left(\alpha_a h\left(\varepsilon^{-1}-1\right)\right)}{I_0'\left(\alpha_a h\left(\varepsilon^{-1}-1\right)\right)}\to 1 \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Іншими словами одиничний вектор $\mathbf{y}^{(2)T}$ в формулах (13) треба брати таким

$$\mathbf{y}^{(2)T}(-1)=\left[\frac{\bar{\rho}_a\bar{\omega}^2}{\sqrt{\bar{k}^2-\bar{k}_a^2}},0,1,0\right]. \qquad (16)$$

**Чисельні результати.** Для розв'язку спектральної задачі (8), (13) застосовувався метод Рунге-Кутта четвертого порядку, корені дисперсійного рівняння (15) визначалися методом бісекції. Пружні модулі матеріалу циліндру приймалися рівними $(c_{11}=c_{22}, c_{12}, c_{13}=c_{23}, c_{33}, c_{55})=(1{,}39; 0{,}778; 0{,}743; 1{,}15; 0{,}256)\cdot 10^5$ МПа, густина $\rho=7500$ кг/м$^3$. Всередині циліндру знаходилася вода з механічними властивостями $c_a=1500$ м/с, $\rho_a=1000$ кг/м$^3$. Геометричний параметр $\varepsilon=0{,}25$. Нормуючі параметри $c_{00}=c_{55}$, $\rho_{00}=\rho$.

На рисунку показані дисперсійні криві для пружного циліндру з рідиною (штрихові криві), для пружного циліндру без рідини (тонкі суцільні криві), для рідини в жорсткому циліндрі (пунктирні криві). Парціальні дисперсійні криві для рідини в жорсткому циліндрі визначаються з дисперсійного рівняння $J_1\left(r_0\sqrt{k_a^2-k^2}\right)=0$ і являють собою параболи (за виключення першої бездисперсійної прямої $k_a=k$). З графіків видно, що частоти зародження для хвиль в циліндрі з рідиною групуються біля парціальних частот зародження хвиль в пружному циліндрі і частот зародження хвиль для рідини в жорсткому циліндрі. Перші з них при малих $\varepsilon$ визначаються [4] з формул $\bar{\omega}=0$, $\varepsilon\sqrt{\left(\bar{c}_{11}-\bar{c}_{12}^2/\bar{c}_{11}\right)/\bar{\rho}}$, $0{,}5n\pi\sqrt{\bar{c}_{55}/\bar{\rho}}$, $0{,}5n\pi\sqrt{\bar{c}_{11}/\bar{\rho}}$, $n=1,2,...$. Другі легко знайти з дисперсійного рівняння




$J_1\left(r_0\sqrt{k_a^2-k^2}\right)=0$ при $k=0$. При зростанні хвильового числа $\bar{k}$ дисперсійні криві для циліндру з рідиною "слідкують" за парціальними дисперсійними кривими, тісно наближаючись до них. Особливості поведінки дисперсійних кривих в циліндрі з рідиною проявляються в околі точок перетину парціальних дисперсійних кривих, де вони різко перебудовуються. Таке явище є характерним для складених коливних систем взагалі.

**РЕЗЮМЕ**

Развит численный способ решения спектральной задачи о распространении осесиметричних волн в криволинейно-ортотропном цилиндре, наполненном сжимаемой идеальной жидкостью. Условия совершенного контакта твердого тела с жидкостью записанны в импедансной форме. В частном случае нулевой кривизны при предельном значении импеданса получено решение задачи о поверхностных волнах.

**SUMMARY**

It is developed the numerical method of the solution of a spectral problem on wave propagation in axisymmetric orthotrophic elastic cylinder filled with a compressible perfect liquid. The conditions of ideal contact of a solid body with a liquid written down in the impedance form. The solution of the problem on surface waves is obtained in the special case of zero curvature at limit value of impedance.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикладная механика. – 1984. – Т.20. – №1. – С.22-26.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М. Мир, 1975. – 872 с.
4. Shulga V.M. Elastic wave propagation in ortotropic cylinders // Int. Appl. Mech. – 1998. – Vol.34. – №7. – P.635-641.
5. Thurston R.N. Elastic wave in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Amer. – 1978. – Vol.64. – №1. – P.1-37.

*Надійшла до редакції 03.06.2003 р.*

УДК 621.3.084: 534.1

# ЕЛЕКТРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ Й УТОЧНЕНА ФОРМУЛА КОЕФІЦІЄНТА ПЕРЕДАЧІ ПЛОСКОГО ПЛАСТИНКОВОГО П'ЄЗОТРАНСФОРМАТОРА

*В.Л.Карлаш*
*Інститут механіки НАН України, м.Київ*

П'єзоелектричні трансформатори електричних напруг і струмів становлять особливу групу електромеханічних перетворювачів, які широко використовуються насамперед у джерелах вторинного електроживлення (ДВЕЖ), де сталі електричні напруги перетворюються з одного (низького) рівня до іншого (високого). Основними експлуатаційними параметрами п'єзоелектричних трансформаторів можна вважати: коефіцієнти передачі електричних напруг і струмів, робочі частоти, рівні вихідних напруг або струмів, коефіцієнт корисної дії, потужність, міцність, довговічність. Останні два показники значною мірою залежать од характеру деформування та напруженого стану, проте цей бік справи практично не розглянутий у літературі.

Проблемам конструювання й виготовлення п'єзотрансформаторів та аналізу їхньої роботи присвячено багато робіт, детальний огляд яких проведено в [1]. Аналіз наявних публікацій показує, що формули для коефіцієнтів передачі виведені, головним чином, методом еквівалентних схем і справедливі переважно для першого резонансу. Залишаються недостатньо вивченими частотні властивості п'єзотрансформаторів та їх деформовано-напружений стан. В [2] розроблено методику аналітичного вивчення напруженого стану і частотних властивостей поперечно-поздовжнього п'єзотрансформатора стержневого типу. Одержано уточнені формули коефіцієнта передачі електричної напруги в режимі холостого ходу й оцінено вплив неоднорідності електропружних параметрів секцій на частотні властивості. Проведено експериментальні дослідження напруженого стану макетів п'єзотрансформатора методом п'єзотрансформаторного датчика на кількох модах коливань.

**1. Вимушені поздовжні коливання плоского п'єзотрансформатора.** В роботах [2, 3] розглянуто макет пластинкового п'єзотрансформатора котрий складається з двох секцій. Вхідна секція має довжину $l_1$, покрита тонкими електродами й поляризована до насичення по товщині. Вихідна секція має довжину $l_2$, електродне покриття на торці і також поляризована до насичення, але не по товщині, а по довжині. Це основна відмінність між секціями – вони мають різні електрофізичні параметри. На практиці товщина $2h$ і ширина $2b$ по всій довжині пластини робляться однаковими.

До вхідної секції, яку називають також секцією збудження, підводиться від зовнішнього генератора змінна напруга $V_1$, під впливом якої виникають електромеханічні коливання й протікає струм $I_1$. Внаслідок коливань пластини відбувається її деформування, на електроді вихідної секції, яку називають ще генераторною, виділяється п'єзозаряд $Q_2$, котрий заряджає вихідний електрод до різниці потенціалів $V_2$, так що між спільним для обох секцій нижнім електродом вхідної секції і виходом протікає струм $I_2$. В роботі [2] для компонент механічних зміщень та напружень одержані такі вирази (всі позначення тут і далі збігаються з вказаною роботою)

$$U_{y1} = \frac{(d_{31} E_{x1} \Delta - A k_1 \sin k_1 l_1) \sin k_1 y + A k_1 \cos k_1 l_1 \cos k_1 y}{k_1 \Delta \cos k_1 l_1}; \tag{1.1}$$

$$\sigma_{y1} = \frac{d_{31} E_{x1} \Delta \cos k_1 y - A k_1 \sin k_1 l_1 \cos k_1 y}{\Delta s_{11}^E \cos k_1 l_1} - \frac{A k_1 \sin k_1 y + d_{31} E_{x1} \Delta}{s_{11}^E \Delta}; \tag{1.2}$$

$$U_{y2} = \frac{(g_{33} D_{y2} \Delta + A k_2 \sin k_2 l_2) \sin k_2 y + A k_2 \cos k_2 l_2 \cos k_2 y}{k_2 \Delta \cos k_2 l_2}; \tag{1.3}$$

$$\sigma_{y2} = \frac{g_{33} D_{y2} \Delta \cos k_2 y + A k_2 \sin k_2 l_2 \cos k_2 y}{s_{33}^D \Delta \cos k_2 l_2} - \frac{A k_2 \sin k_2 y + g_{33} D_{y2} \Delta}{s_{33}^D \Delta}. \tag{1.4}$$



©Карлаш В.Л.

Похідна в часі від повного п'єзозаряду $Q_1$ визначає величину струму $I_1$, або

$$I_1 = j\omega \int_{s1} D_{x1}\, ds = 2j\omega b \varepsilon_{33}^T \int_{-l1}^{0} \left( E_{x1} + \frac{d_{31}\sigma_{y1}}{\varepsilon_{33}^T} \right) dy = j\omega C_{01}^T V_1 (1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \tan k_1 l_1}{k_1 l_1}) +$$

$$= j\omega \frac{C_{01}^T V_1 k_{31}^2 s_{33}^D \cos k_2 l_2}{l_1 \Delta \cos k_1 l_1} (1 - \cos k_1 l_1)^2 - j\omega \frac{2bd_{31} d_{33} D_{y2}}{\varepsilon_{33}^T \Delta} (1 - \cos k_1 l_1)(1 - \cos k_2 l_2), \quad (1.5)$$

де

$$C_{01}^T = \frac{2bl_1 \varepsilon_{33}^T}{2h}, \quad C_{01}^S = (1 - k_{31}^2) C_{01}^T, \quad k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}, \quad V_1 = -2E_{x1} h,$$

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T}, \quad k_D^2 = \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D \beta_{33}^T}, \quad g_{33} = \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}^T}, \quad \beta_{33}^T = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T}. \quad (1.6)$$

На виході генераторної секції виникає різниця потенціалів [4]

$$V_2 = -\int_0^{l2} E_{y2}\, dy = -\beta_{33}^T D_{y2} l_2 \left( 1 + k_D^2 - \frac{k_D^2 \tan \gamma\kappa}{\gamma\kappa} \right) +$$

$$+ \frac{g_{33}^2 s_{11}^E D_{y2} \alpha_2^2 \cos\kappa}{s_{33}^D \Delta \cos\gamma\kappa} + \frac{g_{33} d_{31} V_1 \alpha_1 \alpha_2}{2h\Delta}, \quad (1.7)$$

а у вхідній секції протікає струм

$$I_1 = -j\omega C_{01}^T V_1 (1 - k_{31}^2 + k_{31}^2 \frac{\tan\kappa}{\kappa}) + j\omega k_{31}^2 s_{33}^D \alpha_1^2 \times$$

$$\times \cos\gamma\kappa / l_1 \Delta \cos\kappa + j\omega \frac{2bd_{31} d_{33} D_{y2} \alpha_1 \alpha_2}{\Delta \varepsilon_{33}^T}.$$

$$(\kappa = k_1 l_1, \ \kappa_2 = k_2 l_2, \ \kappa_2 / \kappa = \gamma, \ \alpha_1 = 1 - \cos\kappa, \ \alpha_2 = 1 - \cos\gamma\kappa) \quad (1.8)$$

Варто зауважити, що вирази в дужках цих співвідношень збігаються з формулами (2.26) та (2.9) роботи [4]. Жодних обмежень відносно електричного режиму п'єзотрансформатора досі не було, тому формули (1.14), (1.15) характеризують як прямий вплив вхідної секції на вихідну, так і навпаки.

**2. Коефіцієнт передачі плоского п'єзотрансформатора.** В режимі холостого ходу, котрий характе ризує потенційні можливості п'єзокераміки, електростатичну індукцію в генераторній секції прийнято вва жати рівною нулю [4]. Вираз для $V_2$ в такому режимі значно спрощується:

$$V_2 = \frac{g_{33} d_{31} V_1 \alpha_1 \alpha_2}{2h\Delta}. \quad (2.1)$$

Відношення $K_{12} = V_2 / V_1$ є коефіцієнтом передачі (трансформації ) п'єзотрансформатора в режимі холостого ходу й дорівнює

$$K_{12} = \frac{g_{33} d_{31} \alpha_1 \alpha_2}{2h\Delta}. \quad (2.2)$$

Цей показник тим більший, чим вищі п'єзомодулі обох секцій, тонша пластина й більше відношення $\alpha_1 \alpha_2 / \Delta$. Знаменник цього дробу на резонансних частотах обертається в нуль, так що $K_{12}$ прямує до нескінченності. Уникнути цього можна введенням в аналіз механічних втрат енергії, як це зроблено в роботах [4, 5], поклавши

$$\kappa = \kappa' - j\kappa'' = \kappa'(1 - j/2Q_m). \quad (2.3)$$

Врахування лише механічних втрат через механічну добротність $Q_m$ тут допустиме тому, що робочим режимом п'єзотрансформатора є резонансний, коли вплив електромеханічних і діелектричних втрат малий. Після відповідних перетворень тригонометричних функцій уявного аргументу через гіперболічні, а також при умові $sh\kappa'' \approx \kappa''$, $ch\kappa'' \approx 1$ ($Q_M$ п'єзотрансформаторних керамік не менше 200, так що в інтервалі : $\pi/2 \le \kappa' \le 2\pi$: $\kappa'' = \kappa'/2Q_m \le 0{,}02$) маємо

$$\Delta_1 = \cos\kappa'\sin\gamma\kappa' + \gamma\delta\sin\kappa'\cos\gamma\kappa',$$

$$\Delta_2 = (1+\gamma^2\delta)\kappa''\sin\kappa'\sin\gamma\kappa' - (1+\delta)\gamma\kappa''\cos\kappa'\cos\gamma\kappa',$$

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha'_1\alpha'_2 - 2j\kappa''\beta, \quad \alpha'_1 = 1-\cos\kappa', \quad \alpha'_2 = 1-\cos\gamma\kappa'$$

$$\beta = \gamma\alpha'_1\beta_1 + \alpha'_2\beta_2, \quad \beta_1 = \sin\frac{\gamma\kappa'}{2}\cos\frac{\gamma\kappa'}{2}, \quad \beta_2 = \sin\frac{\kappa'}{2}\cos\frac{\kappa'}{2},$$

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\Delta_*} = \frac{\alpha'_1\alpha'_2\Delta_1 - j(\alpha'_1\alpha'_2\Delta_2 + 2\kappa''\beta\Delta_1)}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}. \tag{2.4}$$

З урахуванням (2.4) вираз (2.2) приймає вигляд:

$$K_{12} = \frac{l_1 d_{33} d_{31}\left[\alpha'_1\alpha'_2\Delta_1 - j\left(\alpha'_1\alpha'_2\Delta_2 + 2\kappa''\beta\Delta_1\right)\right]}{2hs_{11}^E\varepsilon_{33}^T\delta\gamma\kappa'\left(\Delta_1^2 + \Delta_2^2\right)}, \tag{2.5}$$

тобто складається з дійсної й уявної частин. На резонансних частотах $\Delta_1 \equiv 0$, тому

$$K_{12res} = -j\frac{l_1}{2h}\frac{d_{33}d_{31}}{s_{11}^E\varepsilon_{33}^T}\frac{2Q_m}{\delta\kappa'\gamma\kappa'}\frac{(1-\cos\kappa')(1-\cos\gamma\kappa')}{(1+\gamma^2\delta)\sin\kappa'\sin\gamma\kappa' - (1+\delta)\gamma\cos\kappa'\cos\gamma\kappa'}. \tag{2.6}$$

Фізичний смисл має лише модуль цього виразу $|K_{12}|$, оскільки реактивність пов'язана з впливом вхідної й вихідної ємностей трансформатора.

$$|K_{12}| = \frac{l_1}{2h}\frac{d_{33}|d_{31}|}{s_{11}^E\varepsilon_{33}^T}\frac{2Q_m}{\delta\kappa'\gamma\kappa'}\frac{(1-\cos\kappa')(1-\cos\gamma\kappa')}{(1+\gamma^2\delta)\sin\kappa'\sin\gamma\kappa' - \gamma(1+\delta)\cos\kappa'\cos\gamma\kappa'}. \tag{2.7}$$

Такий вигляд має уточнена формула коефіцієнта трансформації поперечно-поздовжнього п'єзотрансформатора, справедлива для будь-якого поздовжнього резонансу. Якщо покласти, як це зроблено в роботі [5], $\gamma = \delta = 1$, $\kappa' = \pi/2$, $\sin\kappa' = 1$, $\cos\kappa' = \cos\gamma\kappa' = 0$ то отримаємо формулу

$$|K_{12}|_1 = \frac{4Q_m}{\pi^2}\frac{d_{33}|d_{31}|}{s_{11}^E\varepsilon_{33}^T}\frac{l_1}{2h}. \tag{2.8}$$

В роботі [5] для режиму холостого ходу й першого поздовжнього резонансу одержано такий вираз:

$$K_{u0} = \frac{4Q_m}{\pi^2}\frac{d_{33}d_{31}Y_3^E}{\varepsilon_{33}^E(1-k_{33}^2)}\frac{L}{a}. \tag{2.9}$$

Оскільки

$$\frac{Y_3^E}{1-k_{33}^2} = \frac{1}{s_{33}^D}, \tag{2.10}$$

а різниця між $s_{33}^D$ і $s_{11}^E$ при виведенні (2.9) не враховувалась, то формули (2.8) і (2.9) збігаються. Формулою (2.9) широко користуються як розробники п'єзокерамік, так і конструктори п'єзотрансформаторів [1, 2]. При цьому допускається помилка не тільки у визначенні резонансної частоти як $\pi/2$, а й у величині коефіцієнта трансформації, особливо на обертонах поздовжніх коливань. Похибка у визначенні частоти основного резонансу як $\pi/2$ складає для титанату барію 3,4 %, тоді як для інших керамік може перевищувати 10%.

**3. Напружений стан прямокутного п'єзотрансформатора.** Перепишемо вираз для напружень $\sigma_{y1}$ вхідної секції, поклавши $\lambda = y/l_1$ і звівши члени з однаковими знаменниками

$$\sigma_{y1} = \frac{d_{31}E_{x1}}{s_{11}^{E}\Delta_* \cos\kappa}\left\{\Delta_*\left(\cos\lambda\kappa - \cos\kappa\right) - \gamma\delta\alpha_1\cos\gamma\kappa\sin\left[(1+\lambda)\kappa\right]\right\} + \\ + \frac{\gamma\chi g_{33}D_{y2}\alpha_2\sin[(1+\lambda)\kappa]}{s_{33}^{D}\Delta_*}. \qquad (3.1)$$

Перші дві складові цього виразу прямо пропорційні діючому в секції збудження полю $E_{x1}$ і обернено пропорційні добутку $\Delta_* \cos\kappa$ .Вони визначають ту частину механічних напружень, яка виникає у вхідній секції під впливом прикладеної до неї електричної напруги $V_1$. Третя складова характеризує можливий вплив генераторної (вихідної) секції на вхідну через індукцію $D_{y2}$.

В роботі [3] проаналізовані графіки функцій $\cos(\kappa)$, $\Delta_*(\kappa)$, $\Delta_*(\kappa)\cos(\kappa)$, $\cos\gamma\kappa$ при $\gamma = 0{,}85$ (що відповідає п'єзокераміці ЦТСтБС-2) в інтервалі частот $0 \le \kappa \le 2{,}2\pi$ і показано, що перша крива перетинає вісь частоти лише у двох точках $\pi/2$ і $3\pi/2$, тоді як чотири точки перетину функції $\Delta_*(\kappa)$ відповідають іншим частотам. Якщо спрямувати $\gamma \to 1$, як у роботі [5], то

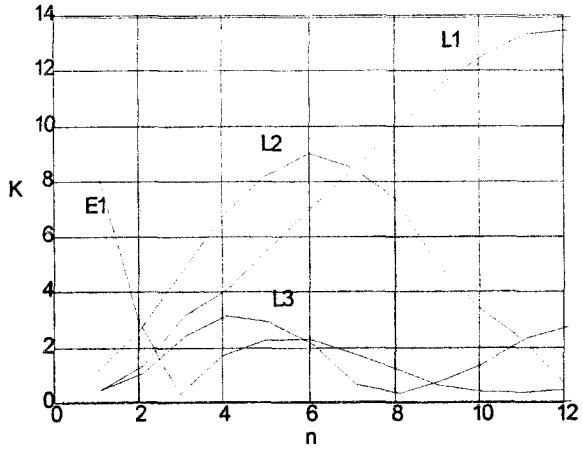
$$\Delta_*\big|_{\gamma=1} = \cos\kappa\sin\kappa + \sin\kappa\cos\kappa = \sin 2\kappa \qquad (3.2)$$

і "нулі" функції $\sin 2\kappa$ сумістяться з $n\pi/2$. Амплітуди другої й третьої складових динамічних напружень пропорційні функції $\sin(1+\lambda)\kappa$, тоді як першою складовою на резонансних частотах, де $\Delta_* \equiv 0$ можна знехтувати. Графіки $\sin(1+\lambda)\kappa$, роботи [3] для $\kappa = \pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$, $2\pi$ показують, що на першій моді вздовж секції збудження від центру до краю пластини вміщується $1/4$ хвилі напружень $\sigma_{y1}$. На другій моді тій же довжині відповідає півхвиля, а третя й четверта моди мають по три чверті й дві півхвилі напружень. Для четвертої моди графік складається з двох однакових по площі половин різного знака. Наведений п'єзозаряд пропорційний до інтегралу по площі від механічних напружень, а протилежні за знаком і рівні по величині п'єзозаряди тут нівелюються суцільними електродами, тому четверта стержнева мода в експерименті не спостерігається.

Для вихідної секції можна одержати такий вираз

$$\sigma_{y2} = \frac{d_{31Б}E_{x1}\alpha_1\sin[(1-\lambda)\gamma\kappa]}{s_{11}^{E}\Delta_*} + \frac{g_{33}D_{y2}}{s_{33}^{D}\Delta_*\cos\gamma\kappa} \times \\ \times\{(\cos\lambda\gamma\kappa - \cos\gamma\kappa)\Delta_* - \alpha_2\cos\kappa\sin[(1-\lambda)\gamma\kappa]\}. \qquad (3.3)$$

Визначальним для розподілу динамічних напружень вздовж осі $Oy$ є множник $\sin(1-\lambda)\gamma\kappa$, графіки якого доповнюють собою побудовані там же графіки $\sin(1+\lambda)\kappa$. Симетричний характер розподілу осьових напружень в обох секціях п'єзотрансформатора та їхня рівність на границі ведуть до важливого висновку – рівні механічних напружень в поперечно-поздовжньому п'єзотрансформаторі симетричні відносно границі розділу його секцій. Сказане повністю підтверджується графіками рисунку, на якому подані розподіли вздовж осі секції збудження коефіцієнтів передачі п'єзотрансформаторних датчиків [6] на макеті $80\times18\times2$мм, розподіл потенціалів датчиків повторює розподіл механічних напружень під ними. Хід перших трьох ліній повністю відповідає описаним вище кривим, тоді як



четверта мода має незвичне зростання динамічних напружень до торця пластини. Цю своєрідну моду можна ототожнити з крайовим резонансом прямокутника, детально дослідженим у роботі [7]. Ця загалом слабенька мода відзначається різким зростанням амплітуди зміщень до кутів, а напружень – до торців. Стержневі моди позначені на графіках символами $L1-L3$, крайова – $E1$. На вихідному електроді п'єзотрансформатора ця мода не реєструється, тобто вихідної напруги на її частоті немає.

**РЕЗЮМЕ**

На основе разработанной автором ранее методики аналитического изучения основных свойств поперечно-продольного пьезотрансформатора стержневого типа получены уточненные формулы для коэффициента передачи электрического напряжения в режиме холостого хода и оценено влияние неоднородности электроупругих параметров секций на частотные свойства. Проведены экспериментальные исследования напряженного состояния макетов пьезотрансформатора методом пьезотрансформаторного датчика на нескольких модах колебаний.

**SUMMARY**

On the base of analytic investigation of the main properties of the rod-type transverse-longitudinal piezotransformer the refined formulae for transform ratio were derived and an influence of non uniformity of the electroelastic section parameters upon frequency properties was estimated. The experimental study of the piezotransformer stress state was provided by piezotransformer transducer method for several modes of vibrations.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Ерофеев А.А., Данов Г.А., Фролов В.Н. Пьезокерамические трансформаторы и их применение в радиоэлектронике. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
2. Karlash V.L. The Forced Electroelastics Vibrations of a Planar Piezoelectric Transformer of Longitudinal-Transverse Type // Int. Appl. Mech. – 2000. – Vol.36. – №7. – P.923-930.
3. Karlash V.L. The Stress State of a Rectangular Piezoceramic Plate with Transverse - Longitudinal Polarization // Int. Appl. Mech. – 2001. – Vol.37. – №3. – P.386-392.
4. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
5. Магнитные и диэлектрические приборы: Пер. с англ. / Под ред. Г.В.Катца. – М.: Энергия, 1964. – Ч.1. – 616°с.
6. Карлаш В.Л., Улітко А.Т. Про один спосіб дослідження радіальних коливань тонкої п'єзокерамічної пластинки // ДАН УРСР, сер.А. – 1974. – №9 – С.804-807.
7. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин / Гринченко В.Т., Карлаш°В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. // Прикладная механика. – 1976. – Т.12. – №5. – С.71-78.

*Надійшла до редакції 03.03.2002 р.*

УДК 539.3

# МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

*А.Г.Зеленский*
*Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, г. Днепропетровск*

С использованием методов возмущения упругих свойств материала [1], сведения трехмерной задачи к двумерной на основе вариационного принципа Рейсснера [2] и разложения напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки в ряды по поперечной координате с помощью полиномов Лежандра, получены разрешающие уравнения изгиба пологих анизотропных оболочек произвольной постоянной толщины. Метод разложения НДС по толщине с использованием полиномов Лежандра применялся ранее в [3–5], а затем получил дальнейшее развитие в [6–8]. При этом, в отличие от других вышеуказанных работ, в [6, 8] использовался вариационный принцип Рейсснера. В монографии [7] изложена теория расчета ортотропных и трансверсально-изотропных пластин и оболочек с учетом точных зависимостей между напряжениями и деформациями. Решение получаемых при этом уравнений в некоторых случаях было сопряжено с преодолением больших математических трудностей.

**Постановка задачи.** Рассмотрим пологую анизотропную оболочку произвольной постоянной толщины $h$ и главными кривизнами срединной поверхности $k_1$ и $k_2$. Будем считать, что на ее лицевых поверхностях

$$\sigma_z(z=\pm h/2)=(\mp q(x;y)-p(x;y))/2,\quad \sigma_{xz}(z=\pm h/2)=\sigma_{yz}(z=\pm h/2)=0; \tag{1}$$

Не уменьшая общности, материал оболочки будем считать ортотропным. Тогда напряжения и деформации будут связаны уравнениями закона Гука вида

$$\varepsilon_x=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z,\quad \varepsilon_y=a_{21}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{23}\sigma_z,$$
$$\varepsilon_z=a_{31}\sigma_x+a_{32}\sigma_y+a_{33}\sigma_z,\quad \gamma_{yz}=a_{44}\sigma_{yz},\quad \gamma_{xz}=a_{55}\sigma_{xz},\ \gamma_{xy}=a_{66}\sigma_{xy}, \tag{2}$$

**Построение решения.** Запишем коэффициенты $a_{ij}$ в виде

$$a_{11}=a_{110}(1+\alpha_{11}\varepsilon),\quad a_{22}=a_{110}(1+\alpha_{22}\varepsilon),\quad a_{33}=a_{110}(1+\alpha_{33}\varepsilon),$$
$$a_{12}=a_{120}(1+\alpha_{12}\varepsilon),\quad a_{13}=a_{120}(1+\alpha_{13}\varepsilon),\quad a_{23}=a_{120}(1+\alpha_{23}\varepsilon),$$
$$a_{44}=a_{440}(1+\alpha_{44}\varepsilon),\quad a_{55}=a_{440}(1+\alpha_{55}\varepsilon),\quad a_{66}=a_{440}(1+\alpha_{66}\varepsilon), \tag{3}$$

где $a_{110}$, $a_{120}$, $a_{440}$ – упругие постоянные некоторого изотропного тела с усредненными свойствами

$$a_{110}=(a_{11}+a_{22}+a_{33})/3,\quad a_{120}=(a_{12}+a_{13}+a_{23})/3,\quad a_{440}=2(a_{110}-a_{120});$$

$\varepsilon$ – малый параметр, равный наименьшему из отношений $(a_{11}-a_{110})/a_{110}$, $(a_{22}-a_{110})/a_{110}$,..., $(a_{66}-a_{440})/a_{440}$.

Будем считать, что внутри оболочки $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\sigma_{xy}$ произвольны. Тогда из вариационного уравнения Рейсснера [2] получим точные выражения для $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_{xy}$. Раскладывая искомые функции в ряды по малому параметру $\varepsilon$, находим

$$(\sigma_x,\sigma_y)=\sum_{k=0}(\sigma_x^{(k)},\sigma_y^{(k)})\varepsilon^k,\quad \sigma_{xy}=\sum_{k=0}\sigma_{xy}^{(k)}\varepsilon^k. \tag{4}$$

Здесь

$$\sigma_x^{(k)}=b_{110}\varepsilon_x^{(k)}+b_{120}\varepsilon_y^{(k)}+D_1\sigma_z^{(k)}-\Phi_{\sigma x}^{(k-1)},$$
$$\sigma_y^{(k)}=b_{120}\varepsilon_x^{(k)}+b_{110}\varepsilon_y^{(k)}+D_1\sigma_z^{(k)}-\Phi_{\sigma y}^{(k-1)},\quad \sigma_{xy}^{(k)}=G\gamma_{xy}^{(k)}-\Phi_{\sigma xy}^{(k-1)}; \tag{5}$$

$G$, $b_{110}$, $b_{120}$ – постоянные материала; $\Phi_{\sigma x}^{(k-1)}$, $\Phi_{\sigma y}^{(k-1)}$, $\Phi_{\sigma xy}^{(k-1)}$ – функции, зависящие от ($k$-1)-го при-

©Зеленский А.Г.

ближения, причем для $k$=0 указанные величины равны нулю.

С помощью полиномов Лежандра разложим перемещения в ряды по поперечной координате $z$. Ограничиваясь первыми 4-мя членами ряда, будем иметь

$$(u,\ v) = \sum_{m=0}^{3} P_m(u_m,\ v_m), \quad w = \sum_{m=0}^{2} P_m w_{m+1}. \tag{6}$$

где $P_m(z)$ – полиномы Лежандра, $u_m = u_m(x;\ y)$, $v_m = v_m(x;\ y)$, $w_m = w_m(x;\ y)$.

Разложим перемещения и деформации в ряды по малому параметру $\varepsilon$

$$(u,\ v) = \sum_{k=0}\sum_{m=0}^{3} P_m(u_m^{(k)},\ v_m^{(k)})\varepsilon^k, \quad w = \sum_{k=0}\sum_{m=0}^{2} P_m w_{m+1}^{(k)}\varepsilon^k,$$

$$\varepsilon_x = \sum_{k=0}\varepsilon_x^{(k)}\varepsilon^k,\ldots, \quad \gamma_{yz} = \sum_{k=0}\gamma_{yz}^{(k)}\varepsilon^k. \tag{7}$$

Здесь

$$\varepsilon_x^{(k)} = \sum_{m=0}^{3} P_m(u_{m,x}^{(k)} + k_1 w_{m+1}^{(k)}), \quad \varepsilon_z^{(k)} = \sum_{m=1}^{2} P_m' w_{m+1}^{(k)}, \quad \gamma_{xy}^{(k)} = \sum_{m=0}^{3} P_m(u_{m,y}^{(k)} + v_{m,x}^{(k)}),$$

$$\gamma_{xz}^{(k)} = \sum_{m=0}^{3}(P_m w_{m+1,x}^{(k)} + P_m' u_m^{(k)} - k_1' P_m u_m^{(k)}), \quad k_1' = k_1, \quad k_2' = k_2, \quad w_4^{(k)} \equiv 0. \tag{8}$$

Напряжения с индексом $z$ также представим через полиномы Лежандра так, чтобы удовлетворялись граничные условия (1):

$$\sigma_z = -p(x,\ y)/2 - (3P_1/5 - P_3/10)q(x,\ y) + (P_0/15 - 2P_2/21 + P_4/35)\omega_2(x,\ y) +$$
$$+3(P_1/35 - 2P_3/45 + P_5/63)\omega_3(x;\ y)/2,$$

$$\sigma_{xz} = \frac{(P_0 - P_2)}{h}Q_{1x}(x,\ y) + \frac{(P_1 - P_3)}{h}Q_{2x}(x,\ y) + \frac{3}{7h}(P_2 - P_4)Q_{3x}(x,\ y) \tag{9}$$

Разложим напряжения $\sigma_z$, $\sigma_{xz}$, $\sigma_{yz}$, функции $\omega_2(x,\ y),\ldots,\ Q_{3y}(x,\ y)$, а также $p(x,\ y)$, $q(x,y)$ в ряды по параметру $\varepsilon$.

$$\sigma_z = \sum_{k=0}\sigma_z^{(k)}\varepsilon^k,\ldots,\ Q_{3y} = \sum_{k=0}Q_{3y}^{(k)}\varepsilon^k,$$

$$p(x,\ y) = \sum_{k=0}p^{(k)}\varepsilon^k, \quad p^{(0)} = p(x,\ y), \quad p^{(k)} = 0 \quad (k=1,2\ldots);$$

$$q(x,\ y) = \sum_{k=0}q^{(k)}\varepsilon^k, \quad q^{(0)} = q(x,\ y), \quad q^{(k)} = 0 \quad (k=1,\ 2\ldots). \tag{10}$$

Здесь

$$\sigma_z^{(k)} = \sum_{m=0}^{5} P_m z_m^{(k)}, \quad \sigma_{xz}^{(k)} = \sum_{m=0}^{4} P_m s_{mx}^{(k)},$$

$$z_0^{(k)} = -p/2 + \omega_2^{(k)}/15, \quad z_1^{(k)} = -3q^{(k)}/5 + 3\omega_3^{(k)}/70,$$

$$z_2^{(k)} = -2\omega_2^{(k)}/21, \quad z_3^{(k)} = q_1^{(k)}/10 - \omega_3^{(k)}/15, \quad z_4^{(k)} = \omega_2^{(k)}/35,$$

$$z_5^{(k)} = \omega_3^{(k)}/42, \quad s_{0x}^{(k)} = Q_{1x}^{(k)}/h, \quad s_{1x}^{(k)} = Q_{2x}^{(k)}/h,$$

$$s_{2x}^{(k)} = -Q_{1x}^{(k)}/h + 3Q_{3x}^{(k)}/(7h), \quad s_{3x}^{(k)} = -Q_{2x}^{(k)}/h, \quad s_{4x}^{(k)} = -3Q_{3x}^{(k)}/(7h) \tag{11}$$

С учетом (5), (8) и (11) имеем

$$\sigma_x^{(k)} = \sum_{m=0}^{5} P_m x_m^{(k)} - \Phi_{\sigma x}^{(k-1)}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = \sum_{m=0}^{3} P_m s_m^{(k)} - \Phi_{\sigma xy}^{(k-1)}, \tag{12}$$

где

$$x_m^{(k)} = b_{110}(u_{m,x}^{(k)} + k_1 w_{m+1}^{(k)}) + b_{120}(v_{m,y}^{(k)} + k_2 w_{m+1}^{(k)}) + D_1 z_m^{(k)},$$

$$y_m^{(k)} = b_{120}(u_{m,x}^{(k)} + k_1 w_{m+1}^{(k)}) + b_{110}(v_{m,y}^{(k)} + k_2 w_{m+1}^{(k)}) + D_1 z_m^{(k)}, \quad m = 0, 1, 2, 3;$$

$$w_4^{(k)} \equiv 0, \quad x_5^{(k)} = y_5^{(k)} = D_1 z_5^{(k)}, \quad s_m^{(k)} = G(u_{m,y}^{(k)} + v_{m,x}^{(k)}).$$

Из вариационного уравнения Рейсснера получаем выражения для $\omega_2^{(k)}$, $\omega_3^{(k)}$, зависящие от НДС оболочки ($k$-2)-го, ($k$-1)-го и $k$-го приближений, а также выражения для $Q_{1x}^{(k)}$, $Q_{3x}^{(k)}$, $Q_{1y}^{(k)}$, $Q_{3y}^{(k)}$, зависящие от НДС ($k$-1)-го и $k$-го приближений. Аналогично получаем дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия в $k$-м приближении.

Если ввести потенциальные и вихревые функции $\varphi_i = u_{i,x} + v_{i,y}$, $\psi_i = u_{i,y} - v_{i,x}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, то дифференциальные уравнения в $k$-м приближении примут вид

$$D_{24}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + G\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + D_{25}k\frac{\partial w_1}{\partial x} + D_{26}\frac{\partial w_2}{\partial x} - D_{27}k\frac{\partial w_3}{\partial x} - D_{28}(k_1')^2 u_0 + D_{29}k_1' u_1 +$$

$$+ D_{30}(k_1')^2 u_2 + D_{31}k_1' u_3 - D_{32}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = D_{33}\frac{\partial p^{(k)}}{\partial x} + \Phi_{u01}^{(k-1)} - \Phi_{u02}^{(k-2)},$$

$$D_{35}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} - G\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + D_{36}k\frac{\partial w_1}{\partial y} + D_{37}\frac{\partial w_2}{\partial y} - D_{38}k\frac{\partial w_3}{\partial y} - D_{39}(k_2')^2 v_0 + D_{40}k_2' v_1 +$$

$$+ D_{41}(k_2')^2 v_2 + D_{42}k_2' v_3 - D_{43}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = D_{44}\frac{\partial p^{(k)}}{\partial y} + \Phi_{v01}^{(k-1)} - \Phi_{v02}^{(k-2)};$$

$$D_{46}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - D_{47}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + G\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - D_{48}\frac{\partial w_1}{\partial x} + D_{49}k\frac{\partial w_2}{\partial x} + D_{50}\frac{\partial w_3}{\partial x} + D_{51}k_1' u_0 -$$

$$- D_{52}u_1 + D_{53}k_1' u_2 - D_{54}u_3 = D_{55}\frac{\partial q^{(k)}}{\partial x} + \Phi_{u11}^{(k-1)} - \Phi_{u12}^{(k-2)},$$

$$D_{46}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - D_{47}\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - G\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - D_{48}\frac{\partial w_1}{\partial y} + D_{57}k\frac{\partial w_2}{\partial y} + D_{50}\frac{\partial w_3}{\partial y} + D_{51}k_2' v_0 -$$

$$- D_{58}v_1 + D_{53}k_2' v_2 - D_{59}v_3 = D_{55}\frac{\partial q^{(k)}}{\partial y} + \Phi_{v11}^{(k-1)} - \Phi_{v12}^{(k-2)};$$

$$- D_{60}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{61}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + G\frac{\partial \psi_2}{\partial y} - D_{62}k\frac{\partial w_1}{\partial x} - D_{63}\frac{\partial w_2}{\partial x} + D_{64}k\frac{\partial w_3}{\partial x} + D_{65}(k_1')^2 u_0 +$$

$$+ D_{66}k_1' u_1 - D_{67}u_2 + D_{68}k_1' u_3 = D_{69}\frac{\partial p^{(k)}}{\partial x} + \Phi_{u21}^{(k-1)} - \Phi_{u22}^{(k-2)},$$

$$- D_{60}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + D_{61}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - G\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - D_{70}k\frac{\partial w_1}{\partial y} - D_{63}\frac{\partial w_2}{\partial y} + D_{71}k\frac{\partial w_3}{\partial y} + D_{65}(k_1')^2 v_0 +$$

$$+ D_{66}k_1' v_1 - D_{71}v_2 + D_{68}k_2' v_3 = D_{69}\frac{\partial p^{(k)}}{\partial y} + \Phi_{v21}^{(k-1)} - \Phi_{v22}^{(k-2)};$$

$$- D_{72}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + D_{73}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + G\frac{\partial \psi_3}{\partial y} - D_{74}\frac{\partial w_1}{\partial x} - D_{75}k\frac{\partial w_2}{\partial x} - D_{76}\frac{\partial w_3}{\partial x} + D_{77}k_1' u_0 -$$

$$- D_{78}u_1 + D_{79}k_1' u_2 - D_{80}u_3 = D_{81}\frac{\partial q^{(k)}}{\partial x} + \Phi_{u31}^{(k-1)} - \Phi_{u32}^{(k-2)},$$

$$-D_{72}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+D_{73}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}-G\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-D_{74}\frac{\partial w_1}{\partial y}-D_{82}k\frac{\partial w_2}{\partial y}-D_{76}\frac{\partial w_3}{\partial y}+D_{77}k_2'v_0-$$

$$-D_{83}v_1+D_{84}k_2'v_2-D_{85}v_3=D_{81}\frac{\partial q^{(k)}}{\partial y}+\Phi_{v31}^{(k-1)}-\Phi_{v32}^{(k-2)};$$

$$-D_{86}k\varphi_0+D_{19}\varphi_1+D_{87}k\varphi_2+D_{20}\varphi_3+D_{17}\nabla^2w_1-D_{18}\nabla^2w_3-D_{88}k\frac{\partial u_0}{\partial x}-$$

$$-D_{89}k\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{D_{21}k_1'}{7}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{D_{21}k_2'}{7}\frac{\partial v_2}{\partial y}-D_{90}k^2w_1-D_{91}kw_2+D_{92}kw_3=$$

$$=D_{93}k^2p^{(k)}+q^{(k)}-\Phi_{w11}^{(k-1)}+\Phi_{w12}^{(k-2)},$$

$$-D_{94}\varphi_0+D_{95}k\varphi_1+D_{96}\varphi_2+D_{97}k\varphi_3+D_{14}\nabla^2w_2-D_{98}k\frac{\partial u_1}{\partial x}-D_{99}k\frac{\partial v_1}{\partial y}+$$

$$+\frac{D_{16}k_1'}{7}\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{D_{16}k_2'}{7}\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{2D_7k}{5}w_1-D_{100}w_2-D_{101}kw_3=-D_{101}kq^{(k)}+$$

$$+\frac{2D_8p^{(k)}}{5}-\Phi_{w21}^{(k-1)}+\Phi_{w22}^{(k-2)},$$

$$D_{102}k\varphi_0+D_{103}\varphi_1-D_{104}k\varphi_2+D_{105}\varphi_3-D_{106}\nabla^2w_1+D_{107}\nabla^2w_3+$$

$$+D_{108}k_1'\frac{\partial u_0}{\partial x}+D_{109}k_2'\frac{\partial v_0}{\partial y}-D_{110}\frac{\partial u_2}{\partial x}-D_{111}\frac{\partial v_2}{\partial y}+D_{112}k^2w_1+D_{113}kw_2-$$

$$-D_{114}w_3=-D_{115}q^{(k)}-D_{116}kp^{(k)}+\Phi_{w31}^{(k-1)}+\Phi_{w32}^{(k-2)}. \qquad (13)$$

Здесь и в дальнейшем в функциях опущены индексы "$k$" вверху. Коэффициенты $D$ с индексами внизу зависят от толщины оболочки и физических постоянных материала, а величины в правых частях уравнений с индексами ($k$-1) и ($k$-2) вверху – от НДС ($k$-1)-го и ($k$-2) приближений.

Граничные условия в $k$-м приближении примут вид:

$$\int_s\Big\{(N_{0u}^{(k)}-\tilde N_{0u}^{(k)})\delta u_0+(N_{0v}^{(k)}-\tilde N_{0v}^{(k)})\delta v_0+\sum_{i=1}^{3}((M_{iu}^{(k)}-\tilde M_{iu}^{(k)})\delta u_i+$$

$$+(M_{iv}^{(k)}-\tilde M_{iv}^{(k)})\delta v_i+(Q_{iw}^{(k)}-\tilde Q_{iw}^{(k)})\delta w_i)\Big\}ds=0, \qquad (14)$$

где $N_{0u}^{(k)},\dots,Q_{3w}^{(k)}$ зависят от ($k$-1)-го и $k$-го НДС оболочки; $\tilde N_{0u}^{(k)},\dots,\tilde Q_{3w}^{(k)}$ зависят от интенсивности внешней нагрузки на боковой поверхности оболочки в $k$-м приближении.

Анализируя уравнения (13), приходим к выводу, что из этой системы не удается выделить две независимые группы уравнений, описывающих, с одной стороны, вихревое НДС (функции $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$), с другой, потенциальное НДС (функции $u_0$, $v_0$, $w_1$, $w_2$, $w_3$).

**Действие изгибающих усилий.** Рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях оболочки действует только изгибная нагрузка ($p\equiv 0$; $q\neq 0$):

$$\sigma_z(\pm h/2)=\mp q/2,\quad \sigma_{xz}(\pm h/2)=\sigma_{yz}(\pm h/2)=0. \qquad (15)$$

Тогда с достаточной степенью точности можно положить

$$u_2=v_2=w_2=Q_{2x}=Q_{2y}=\omega_2=k_1'=k_2'\equiv 0. \qquad (16)$$

После некоторых преобразований системы (14) можно выделить уравнения, описывающие вихревой краевой эффект, внутреннее НДС и потенциальный погранслой. Имеем

$$(G\nabla^2-D_{52})\psi_1-D_{54}\psi_3=\Phi_{yx11}^{(k-1)}-\Phi_{yx12}^{(k-2)},$$

$$-D_{78}\psi_1+(G\nabla^2-D_{80})\psi_3=\Phi_{yx31}^{(k-1)}+\Phi_{yx32}^{(k-2)}; \qquad (17)$$

$$D_{24}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+G\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+D_{25}k\frac{\partial w_1}{\partial x}=A_{u0}^{(k-1)},$$
$$D_{24}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-G\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+D_{36}k\frac{\partial w_1}{\partial y}=A_{v0}^{(k-1)}; \qquad (18)$$

$$D_{46}\nabla^2\varphi_1-D_{47}\nabla^2\varphi_3-D_{52}\varphi_1-D_{54}\varphi_3-D_{48}\nabla^2w_1+$$
$$+D_{50}\nabla^2w_3=D_{55}\nabla^2q^{(k)}+\Phi_{xy11}^{(k-1)}-\Phi_{xy12}^{(k-2)},$$
$$D_{72}\nabla^2\varphi_1-D_{73}\nabla^2\varphi_3+D_{78}\varphi_1+D_{80}\varphi_3+D_{74}\nabla^2w_1+$$
$$+D_{76}\nabla^2w_3=-D_{81}\nabla^2q^{(k)}-\Phi_{xy31}^{(k-1)}-\Phi_{xy32}^{(k-2)}; \qquad (19)$$

$$D_{19}\varphi_1+D_{20}\varphi_3+D_{17}\nabla^2w_1-D_{18}\nabla^2w_3-$$
$$-D_{88}k\frac{\partial u_0}{\partial x}-D_{89}k\frac{\partial v_0}{\partial y}-D_{90}k^2w_1=q^{(k)}-\Phi_{w11}^{(k-1)},$$
$$D_{103}\varphi_1+D_{105}\varphi_3-D_{106}\nabla^2w_1+D_{107}\nabla^2w_3-$$
$$-D_{114}w_3=D_{115}q^{(k)}+\Phi_{w31}^{(k-1)}+\Phi_{w32}^{(k-2)}. \qquad (20)$$

Выражая из равенств (20) $\varphi_1$ и $\varphi_3$ и подставляя их в (19), с учетом (18) получаем следующую систему:

$$L_{j1}u_0+L_{j2}v_0+L_{j3}w_1+L_{j4}w_3=L_j^{(k-1)}\quad(j=1;2),$$
$$L_{j1}u_0+L_{j2}v_0+L_{j3}w_1+L_{j4}w_3=L_j^{(k-1,k-2)}\quad(j=3;4), \qquad (21)$$

где $L_{ji}$ – дифференциальные операторы. Правые части в уравнениях (21) линейно зависят от НДС предыдущих приближений. Граничные условия (14) для рассматриваемого случая с учетом (15) и (16) также упрощаются. Система неоднородных дифференциальных уравнений (17), (21) имеет 16-й порядок. Решение соответствующих однородных систем уравнений (17), (21) может быть найдено операторным методом.

Последовательность решения задач изгиба нетонких оболочек при изгибной нагрузке заключается в следующем.

Для $k$-го приближения из системы (21) находятся $u_0$, $v_0$, $w_1$, $w_3$ и общее решение для $\psi_1$ и $\psi_3$ из системы (17). Из уравнений (20) определяются $\varphi_1$ и $\varphi_3$ через $u_0$, $v_0$, $w_1$, $w_3$. Затем из третьего, четвертого, седьмого и восьмого уравнений системы (13), принимая во внимание (15) и (16), находятся $u_1$, $v_1$, $u_3$, $v_3$ через $\varphi_1$, $\varphi_3$, $\psi_1$, $\psi_3$, $u_0$, $v_0$, $w_1$, $w_3$. Таким образом, в $k$-м приближении будут найдены компоненты перемещений $u_0$, $v_0$,..., $w_3$ и вихревые функции $\psi_1$, $\psi_3$. Далее из уравнений (11), (12) находятся напряжения, а из (8) – деформации в $k$-м приближении. При этом должны выполняться соответствующие рассматриваемому случаю граничные условия (14). После этого, из уравнений (7) находятся перемещения и деформации, из (4) и (10) – напряжения, возникающие в оболочке, которые учитывают первые $k$ приближений по параметру $\varepsilon$.

**РЕЗЮМЕ**

Дається побудова однієї теорії згинання пологих анізотропних оболонок довільної товщини з позицій тривимірної теорії пружності на основі методу збурень пружних властивостей матеріалу. Використовується варіаційний принцип Рейснера. Одержано розв'язувальні рівняння в довільному наближенні, проведено їх аналіз. Розглянуто частинний випадок побудованого варіанта теорії згинання.

**SUMMARY**

The construction of the theory of bending of slanting non-isotropic envelopes of arbitrary thickness from positions of the three-dimensional theory of an elasticity is considered on the basis of a method of perturbations of elastic properties of a material. The variational principle Reissner is used. The solving equations in an arbitrary approximation are obtained, their analysis is carried out. Let's consider special cases of the constructed variant of the theory of curving.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. – К.: Вища шк., 1982. – 352 с.
2. Рейсснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С.328-337.
3. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. мат. ин-та. – 1965. – Т.30. – С.3-103.
4. Кильчевский И.А. Основы аналитической механики оболочек. – К.: Изд-во АН УССР, 1963. – 354 с.
5. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т.28. – №6. – С.1033-1039.
6. Плеханов А.В., Прусаков А.П. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – №3. – С.84-90.
7. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
8. Зеленский А., Прусаков О., Вовченко М. Варіант зведення тривимірної задачі згину оболонок до двовимірної // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – 2000. – Vol.8. – P.426-430.

*Надійшла до редакції 17.04.2002*

УДК 539.3

# ЛАЗЕРНЫЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

*Г.Н.Чернышев, А.Л.Попов, В.М.Козинцев, А.А.Антонов, И.И.Пономарев*
*Институт проблем механики РАН, г. Москва*

Для регистрации перемещений, возникающих при измерении технологических остаточных напряжений методом сверления отверстия, успешно применены разные интерферометрические методы. Первый метод – голографический, заключающийся в том, что голограммы исследуемого участка объекта до и после сверления отверстия записываются на одну и ту же фотопластинку. Вызванное зондирующим отверстием поле перемещений поверхности напряженного участка тела выявляется в виде системы полос – интерферограммы. Далее перемещения по разработанной методике пересчитываются в напряжения. Метод является нетрудоемким, надежным, наглядным и информативным, с очень малой, по сравнению с другими методами, подготовкой места исследования. Второй метод – электронная спекл-интерферометрия, суть которой – цифровая регистрация спекл-фотографий с опорным лучом. Она проводится для разных стадий сверления с помощью видеокамеры и компьютера, а затем выполняется компьютерное попарное сравнение таких фотографий. Результатом является представление поля перемещений в виде интерферограммы.

Применение этих методик рассматривается на примере измерения технологических напряжений в перфорированной конструкции – коллекторе парогенератора. Эти напряжения возникают во время изготовления коллектора и существенно влияют на его надежность.

Информация о напряженном состоянии элементов оборудования во многих случаях важна для прогнозирования остаточного ресурса, профилактики отказов и выявления их причин, а также для диагностики качества ремонтных работ и поставляемой техники. Известно достаточно большое количество аварий, в том числе с катастрофическими последствиями, в промышленности и транспорте, связанных с недостаточно полным определением напряженного состояния объектов.

Напряжения в конструкциях разделяются на активные и остаточные. Активные напряжения возникают во время приложения внешней нагрузки. К остаточным, или внутренним, собственным, относят напряжения, существующие в конструкции и при отсутствии внешних воздействий. Они возникают во время технологических процессов изготовления изделия и также во время его эксплуатации [1].

Остаточные напряжения образуются практически всегда в технологических процессах изготовления и обработки материалов, таких, например, как литье, сварка, ковка, прокатка, штамповка, механическая обработка, термообработка. Также эти напряжения возникают в композитных материалах вследствие различия коэффициентов теплового расширения или усадки компонентов.

Методы измерения активных напряжений разработаны достаточно глубоко, что нельзя сказать об остаточных напряжениях. На практике они часто замаскированы, и это при том, что их величина бывает близка к пределу упругости материала. Теоретические методы оценки остаточных напряжений сложны, способы их моделирования далеки от совершенства. Поэтому важны экспериментальные методы определения этих напряжений на натурных объектах и, соответственно, необходимо разрабатывать надежные, удобные и быстрые методы и средства их измерений. Экспериментальные методы определения остаточных напряжений разделяются на физические и механические. Физические методы основываются на изменении под влиянием напряжений физических характеристик материала: параметров кристаллической решетки, скорости распространения акустических волн, магнитной и электрической проницаемости. В основном применяют рентгеновские, ультразвуковые, магнитные и электромагнитные методы.

Это неразрушающие испытания, если не учитывать подготовку поверхности объекта для размещения датчиков или удаление верхних слоев для определения подповерхностных напряжений. Но у этих методов есть существенные ограничения, так как при измерении физических характеристик необходимо учитывать большое количество параметров, относящихся к структуре, составу и предшествующей технологической истории образца, что затрудняет понимание результатов измерений. Например, для магнитных методов такой учет настолько сложен, что необходимо проводить калибровку прибора на образце, не имеющем напряжений, но по всем другим параметрам полностью совпадающим с изучаемым. Образец–эталон должен быть из той же партии материала и должен пройти точно такую же технологическую цепочку, как и измеряемый, вплоть до полного совпадения состояния поверхности. Следовательно, такой метод применим только при относительном контроле серийных изделий, но не на уникальных объектах.

Механические методы определения остаточных напряжений связаны с полным либо частичным,

©Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Антонов А.А., Пономарев И.И. 

малым, разрушением объекта исследования. В этой группе наиболее распространен метод отверстия, или зондирующей лунки. В результате сверления лунки возникают перемещения поверхности в ее окрестности, зависящие от величины напряжений, действующих в этой области, от упругих свойств материала и от геометрии и величины лунки. Лунки радиусом 1 – 1,5 мм и такой же глубиной достаточно, чтобы создать перемещения, доступные для измерения различными методами.

Среди методов измерения механических напряжений, в том числе и остаточных, метод зондирующей лунки – один из самых признанных. Накоплен опыт сочетания этого метода с электротензометрическим способом регистрации перемещений, вызываемых зондирующей лункой. Данное сочетание методов отражено в единственном действующем для определения остаточных напряжений стандарте ASTM E837 [2]. Но в методе тензометрии существует ряд особенностей, связанных с подготовкой поверхности, креплением тензорозетки, прецизионной технологией сверления лунки и обработкой результатов измерений, что затрудняет его широкое применение. Существенно также усреднение перемещений на базе каждого датчика тензорозетки, что вносит погрешности при измерении неоднородных напряжений.

Интересны интерферометрические методы, позволяющие бесконтактно регистрировать небольшие изменения в геометрии поверхности, возникающие в результате различных воздействий. Основой интерферометрических методов является сравнение когерентных волновых фронтов двух состояний поверхности объекта. Результатом такого сравнения является система полос – интерферограмма. Она позволяет отобразить поле перемещений, величина которых, выражаемая в единицах длин волн, определяется числом интерференционных полос. Размеры наблюдаемого поля могут варьировать от десятков микрон до нескольких метров.

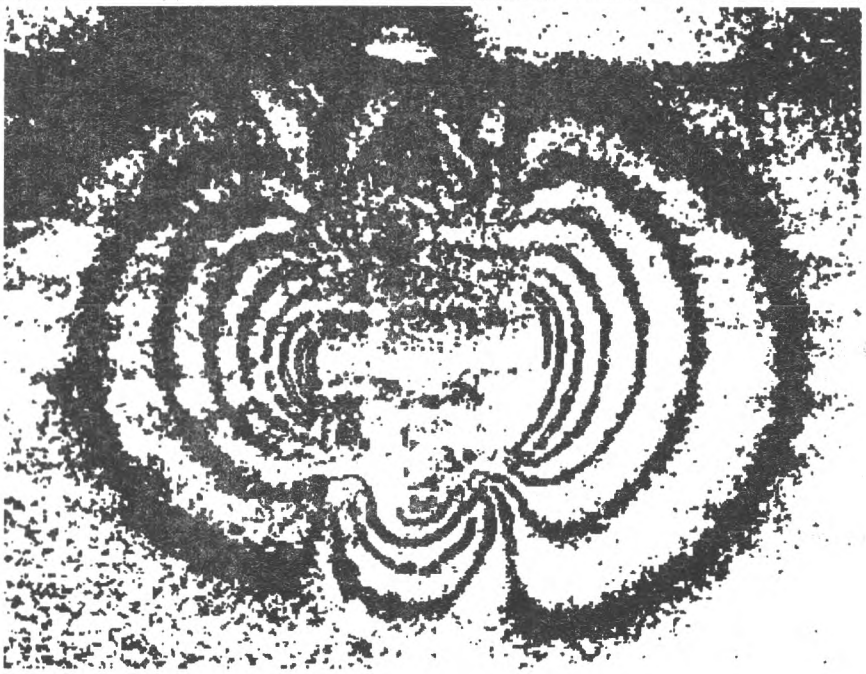
Но классическая интерферометрия требует специально подготовленной поверхности регулярной формы, что ограничивает ее применение. Более универсальна, например, лазерная голографическая интерферометрия, не ограниченная микро и макро-геометрией объекта. Лазерные способы измерения перемещений [3, 4] в окрестности зондирующей лунки имеют ряд преимуществ перед тензометрией: качественно иной уровень наглядности результатов и их достоверности, высокая надежность и возможность оптимизации обработки получаемых данных, низкие требования к качеству поверхности объекта, к отклонениям в положении и форме зондирующей лунки, более высокая производительность и на порядок более низкая стоимость одного измерения [5]. Ведь одна интерферограмма эквивалентна, по меньшей мере, десяткам единичных сигналов тензорозетки.

Авторы применяют в исследованиях два лазерных метода – голографическую интерферометрию и спекл-интерферометрию. Эти методы дают возможность бесконтактного, без крепления каких-либо датчиков, измерения перемещения поверхности объекта произвольной формы на достаточно больших площадях при различных видах нагружения: статическом, динамическом, тепловом. При этом возможна регистрация компонент вектора перемещения как лежащих в плоскости, касательной поверхности, т.е. U,V, так и направленных по нормали к ней W. Перемещения измеряются в любой выбранной точке, записанной на голограмме. Чувствительность метода оценивается долями длины лазерного излучения 0,55 – 0,8 мкм. Пределы измеряемых перемещений составляют 0,3 – 10 мкм и соответствуют диапазону упругих деформаций. Результаты измерений представляются наглядно в виде системы полос – интерферограммы

Оптическая голография – способ записи и восстановления световых волн, рассеянных объектом и несущих информацию об его форме. Голографическая интерферометрия – сравнение голограмм объекта, записанных в различное время при разных состояниях объекта. Восстановленные волны, складываясь, создают интерферограмму, содержащую данные об изменении формы объекта.

Сущность способа определения остаточных напряжений методом зондирующей лунки в сочетании с голографической интерферометрией заключается в следующем. Во время первой экспозиции записывается голограмма окрестности будущей лунки на поверхности объекта в исходном состоянии. Затем высверливается лунка, которая локально разгружает объект и вызывает перемещения поверхности в окрестности лунки. Далее голограмма объекта после высверливания лунки записывается на ту же фото-пластинку. В результате наложения и сравнения голограмм перемещение поверхности в окрестности лунки выявляется в виде интерферограммы, наглядной и очень простой для расшифровки: в случае регистрации нормальной компоненты перемещений оси симметрии интерференционной картины совпадают с осями главных остаточных напряжений, а полосы интерферограммы являются линиями равных перемещений (рисунок). Перемещения в разных точках окрестности отверстия определяются порядком полос интерферограммы.

Цена полосы зависит от упругих свойств материала, т.е. от модуля Юнга, и от диаметра и глубины лунки. Она определяется по графикам или таблицам, рассчитанным на основании решения трехмерной задачи теории упругости. Измеренное в числах полос перемещение через цену полосы пересчитывается в напряжение. Объем необходимых вычислений при этом настолько мал, что они могут быть выполнены оператором непосредственно при наблюдении интерференционной картины. В случае регистрации каса-



тельных перемещений интерферограмма имеет более сложные вид и расшифровку, но также однозначно интерпретируется.

Голографическая интерферометрия дает большой объем информации о перемещениях исследуемой поверхности и изменениях ее геометрии. Возможно наблюдение изменения формы, как больших поверхностей, так и положения и поведения под нагрузкой локализованных особенностей – трещин, отслоений тонких покрытий.

Но сам процесс записи и обработки голограмм довольно сложен и трудоемок: низкая чувствительность фотоматериалов требует экспозиций порядка секунд, мокрая обработка фотопластинок или обслуживание оборудования термопластической записи и визуальное считывание интерферограммы требует специальных навыков операторов. Следует хранить большие массивы информации на фотопластинках или делать с голограмм фотографии.

Современная вычислительная и видеотехника помогают решить некоторые задачи получения, хранения, считывания и обработки голографических интерферограмм.

Однако возможен и другой путь: замена фотографического детектора цифровой видеосистемой с регистрацией в ЭВМ оцифрованной видеоинформации о разных, практически неограниченных по количеству, экспозициях процесса измерения перемещений и дальнейшей обработкой этой информации. Этот метод, называемый электронной спекл-интерферометрией, во многом совпадает с голографической интерферометрией: обязательное использование монохроматичного когерентного лазерного излучения, близкие оптические схемы и по существу те же результаты измерений в виде интерферограмм. Разница в том, что голография фиксирует полную информацию о геометрии тела, в том числе и объем, а спекл-интерферометрия использует электронную фотографию особой тонкой «зернистой» структуры света, отраженного объектом при лазерном освещении – спекл. Эта спекл-структура зависит от формы поверхности и хорошо отражает ее изменения. Запись и сопоставление двух спекл-структур, легко проводимые на ЭВМ в цифровой форме, выявляют изменения в положении или геометрии тела в виде системы линий, т.е. интерферограммы. Уменьшение информативности спекл-интерферограммы по сравнению с голографической в рассматриваемом случае несущественно, а методически неоднородный процесс голографической интерферометрии заменяется единым, технологически связанным, циклом с более широкими возможностями автоматизации.

Сопоставляя методики голографической и спекл-интерферометрии, следует отметить следующее: стоимость голографического оборудования невысока, но процесс получения и обработки интерферограммы довольно трудоемок и требует высокой квалификации оператора. Стоимость оборудования для электронной спекл-интерферометрии на один-два порядка больше, но это компенсируется малой трудоемкостью процесса, большой скоростью разнообразной обработки интерферограммы, снижением нагрузки и квалификационных требований к объему навыков оператора, возможностью автоматизации и повышения точности измерений.

По описанной методике авторы проводили изучение остаточных напряжений в различных объек-

тах. Здесь приводится описание одной из экспертных работ.

Необходимым условием обеспечения безаварийной работы парогенератора, высоконагруженного элемента первого контура АЕС, является его обоснованный расчет на прочность с учетом особенностей влияния технологии изготовления на конечные параметры изделия. Авторы участвовали в установлении причин массового возникновения трещин в коллекторе парогенератора. Работа проводилась на заводе-изготовителе на серийных коллекторах.

Корпус коллектора, высотой 5,5 м, имеет цилиндрообразную форму с постоянным внутренним диаметром 0,85 м и переменным внешним диаметром: на концах корпус сужается и оканчивается фланцами. В середине имеется цилиндрическая часть внешним диаметром 1,2 м и длиной 3 м. Толщина стенки корпуса в районе цилиндра 170 мм. Корпус изготовлен из стали 20 со следующими механическими свойствами: предел текучести 250 МПа, предел прочности 430 МПа.

На этом цилиндре есть зона перфораций: пояс высотой 1,9 м. из 6200 отверстий, расположенных рядами в шахматном порядке. Ось каждого отверстия выходит на ось корпуса по нормали. Диаметр отверстий 16 мм, между центрами отверстий расстояние 32 мм на внешней поверхности корпуса и 23 мм на внутренней. В каждое отверстие вставляется и опрессовывается взрывом отрезок трубки. Затем к этому отрезку приваривается магистральная трубка. Через нее протекает теплоноситель первого контура, отдавая тепло во второй контур, элементом которого является корпус парогенератора. Вследствие особенностей конструкции парогенератора в коллекторе в зоне перфорации есть клинообразная область без отверстий.

В процессе исследования был измерен уровень остаточных напряжений в коллекторе на разных стадиях его изготовления: после перфорирования, после операции опрессовки взрывом, после вварки в корпус парогенератора.

Результаты измерений позволили сделать заключение: в коллекторе существуют значительные технологические остаточные напряжения. В области перфорации напряжения растяжения достигают величины +150МПа. Они возникли как вследствие операции сверления, так и в связи с особенностями конструкции. Операции опрессовки отверстий взрывом и сварки при размещении коллектора в корпусе парогенератора уровень напряжений существенно не уменьшили.

Растягивающие остаточные технологические напряжения +150МПа превышают половину предела текучести материала коллектора – стали 20 – 250 МПа. Такой уровень остаточных напряжений, с точки зрения надежности и запаса прочности, не может считаться малым и им нельзя пренебрегать при расчете конструкции. Но в расчетных схемах, которыми пользовались разработчики, эти напряжения не учитывались [6, 7]. Авторы считают, что они опасны, так как, сложившись с активными напряжениями при эксплуатации коллектора, могут привести к разрушению его корпуса. Другого убедительного объяснения причин разрушения коллекторов данной конструкции предложено не было.

Механизм возникновения напряжений и разрушения выглядит следующим образом. Во время сверления стенки отверстия наклепываются, в приповерхностном слое возникают напряжения. Известно, что механическая обработка стали – сверление, фрезерование, шлифование – всегда создает напряжения растяжения в обрабатываемом слое. Происходит накопление упругой энергии. Она несущественна для конструкции, если отверстий мало или они расположены далеко друг от друга. Но если их много и они достаточно близки друг к другу, остаточные напряжения и накопленная энергия могут быть значительны. Именно это имело место в перфорированном корпусе коллектора парогенератора. Область без отверстий в виде клина вносила дополнительные напряжения. Последующая запрессовка взрывом в отверстие вкладышей–трубок напряжений существенно не изменила.

Таким образом, неучтенные особенности технологии изготовления и конструкции коллектора создали в области перфорирования значительные остаточные напряжения, причем неравномерно распределенные из-за асимметричности конструкции. Анализ измерений и конструкции показал, что трещина возможна на границе клина, в области перепада напряжений. В аварийном коллекторе трещина именно там и была обнаружена, т.е. на границе "клин – перфорация".

Следует подчеркнуть, что коллектор был рассчитан на разные виды нагрузки с учетом его асимметричности и концентрации напряжений на отверстиях. Но существенные технологические остаточные напряжения, возникающие во время изготовления и особенно в процессе перфорирования, во внимание создателями парогенератора совсем не принимались. Технология изготовления, как фактор, создающий поле напряжений значительного уровня, традиционно не учитывается и другими разработчиками перфорированных конструкций [8].

Авторы считают необходимым представить более общие выводы из этого и аналогичных исследований, проведенных на ряде аварийных конструкций объектов повышенной опасности, таких, как высокоэнергетические и химические установки, оборудование атомных электростанций, элементы нефтяных и газовых магистралей и другие.

Роль остаточных напряжений в этой и аналогичных авариях несомненна. Важно определить ее вклад в процесс разрушения. Одна из причин этих происшествий – фактически в пренебрежении остаточными напряжениями. Типичны две ситуации. Первая: при разработке объекта они не учитывались в расчетной схеме. Вторая: технологическое требование снижения остаточных напряжений не обеспечивалось соответствующей аппаратурой и методикой, доступной и пригодной для условий заводской лаборатории, и тем более для полигонных и полевых условий.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №01–01–00093), Министерства высшего образования (проект НИР № 201.07.01.070) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (проект А0083).*

**РЕЗЮМЕ**

Для виміру технологічних залишкових напруг застосовано об'єднання методу свердління отвору з різними інтерферометричними методами. Використані голографічна інтерферометрія та електронна спекл-інтерферометрія. Викликане зондувальним отвором поле переміщень поверхні напруженої ділянки тіла виявлено у виді системи смуг – інтерферограмми. Далі переміщення за розробленою методикою перелічені в напруги. Виконано обмір технологічних напруг у перфорованій конструкції – колекторі парогенератора. Ці напруги виникають під час виготовлення колектора та істотно впливають на його надійність.

**SUMMARY**

For measurement of technological residual stresses the combination of a hole drilling method with different interferometric methods is applied. Holographic interferometry and electronic speckle pattern interferometry are used. The displacement field of stressed object surface, initiated by hole drilling, visualized as a system of bands – interferogram. Further these displacements are recalculated in stresses by the developed technique. The technological stresses in the punched construction – a collector of a steam generator – were measured. These stresses arised during manufacturing a collector and essentially influence its reliability.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах / Г.Н.Чернышев, А.Л.Попов, В.М.Козинцев, И.И.Пономарев. – М.: Наука, 1996. – 240 с.
2. Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole–Drilling Strain–Gage Method.– Annual Book of ASTM Standards, ASTM, Philadelphia, PA, V.03.01, E837–95, 1995, P.7.
3. Ю.И.Островский, М.М.Бутусов, Г.В.Островская Голографическая интерферометрия. – М.: Наука, 1977. – 339 с.
4. Vest Ct.M. Holographic interferometry. N.y. et al.: Wiley, 1979. – 478p. (Ч. Вест Голографическая интерферометрия. – М.: Мир, 1982. – 504 с.)
5. А.с. № 807038 СССР. Способ определения внутренних остаточных напряжений / А.А.Антонов, Г.Н.Чернышев, В.К.Морозов // Открытия. Изобретения. – 1981. – №7.
6. Л.В.Федоров, В.Ф.Титов, Н.Г.Рассохин. Парогенераторы атомных электростанций. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 414 с.
7. Оценка термоциклического нагружения в узле приварки «горячего» коллектора к патрубку парогенератора ПГВ–1000 / Г.В.Степанов, В.В.Харченко, А.И.Бабуцкий и др. // Проблемы прочности. – 2002. – №1. – С.146-148.
8. Э.И.Григолюк, Л.А.Фильштинский Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.

*Надійшла до редакції 12.05.2002 р.*

УДК 622.8:539.3

# ВЛИЯНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА НА ЕГО ПРОНИЦАЕМОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА*

*М.Л.Алтухова, В.В.Камышан, В.В.Конарев, С.Н.Федотов*
*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк*
*Корпорация «Индустриальный Союз Донбасса», г. Донецк*

В работах [1, 2] на основе экспериментальных исследований предложен критерий оценки способности углей к дегазации, из которого следует, что большая часть метана, поступающего в полости и трещины, выделяется из разгруженных областей массива, а в зонах концентрации напряжений проницаемость падает практически до нуля. В этих работах дана качественная картина формирования газопроницаемых зон в массиве. В данной статье на основе решения задачи теории упругости предложена количественная оценка влияния напряженно-деформированного состояния массива на его проницаемость в окрестности вертикальной трещины гидроразрыва.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим горный массив, в котором на расстоянии $H$ от дневной поверхности образована путем гидроразрыва вертикальная трещина высоты $2h$. Будем считать, что длина трещины велика и поэтому на достаточном удалении от ее концов напряженно-деформироанное состояние массива может быть определено из решения задачи о плоской деформации. В поперечном сечении массива будем иметь бесконечную область $S$ с прямоугольным отверстием со сторонами $2h$ и $2b$ $(b << h)$ (рис. 1). Указанный прямоугольник будем аппроксимировать эллипсом $L$ с полуосями $h$ и $b$. В плоскости $S$ введем систему координат $Oxy$ с началом в центре эллипса и осью $Ox$, перпендикулярной к дневной поверхности.

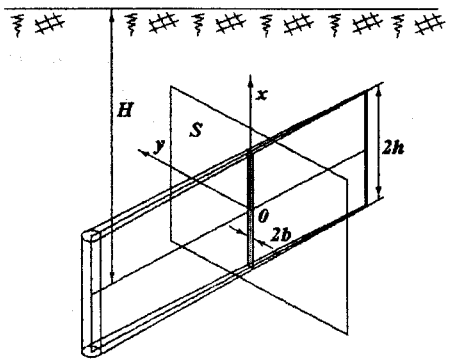


Рис. 1

Рассматриваемый горный массив будем моделировать изотропной упругой средой с исходным напряженным состоянием [3]

$$\sigma_y^0 = -\beta\gamma(H-x), \quad \sigma_x^0 = -\gamma(H-x), \quad \tau_{xy}^0 = 0, \tag{1.1}$$

где $\beta$ – коэффициент бокового распора, $\gamma$ – средний удельный вес пород. Полные напряжения в массиве будем искать в виде сумм

$$\sigma_y^e = \sigma_y^0 + \sigma_y, \quad \sigma_x^e = \sigma_x^0 + \sigma_x, \quad \tau_{xy}^e = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, \tag{1.2}$$

в которых $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ – дополнительные напряжения, возникающие за счет появления трещины. Они удовлетворяют однородным уравнениям равновесия и условию совместности деформаций в форме Бельтрами-Митчелла

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{1.3}$$

При отсутствии внешних нагрузок в точках границы $L$ трещины выполняются условия

$$\sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny = -\sigma_x^0 \cos nx,$$
$$\tau_{xy} \cos nx + \sigma_y \cos ny = -\sigma_y^0 \cos ny. \tag{1.4}$$

Здесь $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе.

**2. Построение решения.** В случае области с криволинейным отверстием решение задачи можно найти методом Колосова-Мусхелишвили с использованием конформных отображений [4]. Функция

$$z = \omega(\zeta) = R_э\left(\zeta + \frac{m_э}{\zeta}\right), \tag{2.1}$$


©Алтухова М.Л., Камышан В.В., Конарев В.В., Федотов С.Н.

где $R_э=(h+b)/2$, $m_э=(h-b)/(h+b)$, конформно отображает внешность единичного круга $|\zeta|\geq 1$ на внешность $L$. Тогда граничные условия [4] в отображенной области с учетом (1.4) и (2.1) примут вид

$$\varphi(\sigma)+\frac{\left(\sigma^2+m_э\right)}{\sigma\left(1-m_э\sigma^2\right)}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=\frac{\gamma HR_э}{2}\left(\left[(1+\beta)m_э-1+\beta\right]\sigma+\right.$$

$$\left.+\left[(1+\beta)-(1-\beta)m_э\right]\frac{1}{\sigma}\right). \qquad (2.2)$$

При этом $\sigma=e^{i\theta}$.

Применяя метод интегралов Коши к условию (2.2) и сопряженному соотношению, получаем следующие выражения для комплексных потенциалов

$$\varphi(\zeta)=\frac{\gamma HR_э}{2}\frac{(1+\beta)-(1-\beta)m_э}{\zeta},$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{\gamma HR_э}{2}\frac{(1+\beta)-(1-\beta)m_э}{\zeta}-\frac{\left(1+m_э\zeta^2\right)\zeta}{\left(\zeta^2-m_э\right)}\varphi'(\zeta). \qquad (2.3)$$

Зная комплексные потенциалы, можно вычислять напряжения [4]

$$\sigma_x+\sigma_y=4\,\mathrm{Re}\frac{\zeta^2}{R_э\left(\zeta^2-m_э\right)}\varphi'(\zeta),$$

$$\sigma_x-\sigma_y+2i\tau_{xy}=\frac{2\bar{\zeta}^2}{R_э\left(\bar{\zeta}^2-m_э\right)}\left[\frac{\zeta^2\left(\bar{\zeta}^2+m_э\right)}{\bar{\zeta}\left(\zeta^2-m_э\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\varphi''(\zeta)+\frac{2m_э}{\zeta\left(\zeta^2-m_э\right)}\varphi'(\zeta)\right)+\psi'(\zeta)\right], \qquad (2.4)$$

а затем и деформации

$$\varepsilon_x=\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right],\quad \varepsilon_x=\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right],\quad \gamma_{xy}=\frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}. \qquad (2.5)$$

При этом $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коэффициент Пуассона. По значениям деформаций легко находится проницаемость массива [5]

$$k=1\Big/\left(k_0^{-1}+\beta\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right)+2\alpha\varepsilon_x\right), \qquad (2.6)$$

где $k_0$ – постоянная природная проницаемость; $\alpha$, $\beta$ – экспериментальные постоянные, зависящие от свойств массива. Из формул (2.5), (2.6) видно, что проницаемость есть переменная величина, зависящая от координат точек массива.

**3. Анализ результатов исследований.** Из формул (2.4) следует, что в областях, прилегающих к стенкам трещины, наблюдаются зоны разгрузки нормальных напряжений $\sigma_y^e$, $\sigma_x^e$, причем для компоненты $\sigma_y^e$ зона разгрузки больше, чем для $\sigma_x^e$. В областях над и под трещиной возникают зоны концентрации напряжений, в которых значения сжимающих напряжений увеличиваются по мере приближения к трещине. Касательные напряжения $\tau_{xy}^e$ меняют знак при переходе из одного квадранта плоскости в другой.

Были проведены численные исследования распределения напряжений и деформаций, а также изменения природной проницаемости массива вблизи трещины для случая, когда $H=800$ м, $2h=11$ м,

$\gamma = 25$ кПа/м, $k_0 = 0,61 \cdot 10^{-12}$ м$^2$/Па·с, $\alpha = 1,8 \cdot 10^{13}$ Па·с/м$^2$, $\beta = 3,6 \cdot 10^{13}$ Па·с/м$^2$. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона при расчетах для пород полагались равными $E = 2 \cdot 10^4$ МПа и $\nu = 0,2$, для угля – $E = 2 \cdot 10^3$ МПа и $\nu = 0,35$.

На рис. 2, 3 показано распределение упругих деформаций вблизи трещин в породном и угольном массивах соответственно. Из сравнения изолиний $\varepsilon_x = const$, $\varepsilon_y = const$ для породы (рис. 2) и угля (рис. 3) видно, что деформации в породном массиве на порядок меньше, чем в угольном.

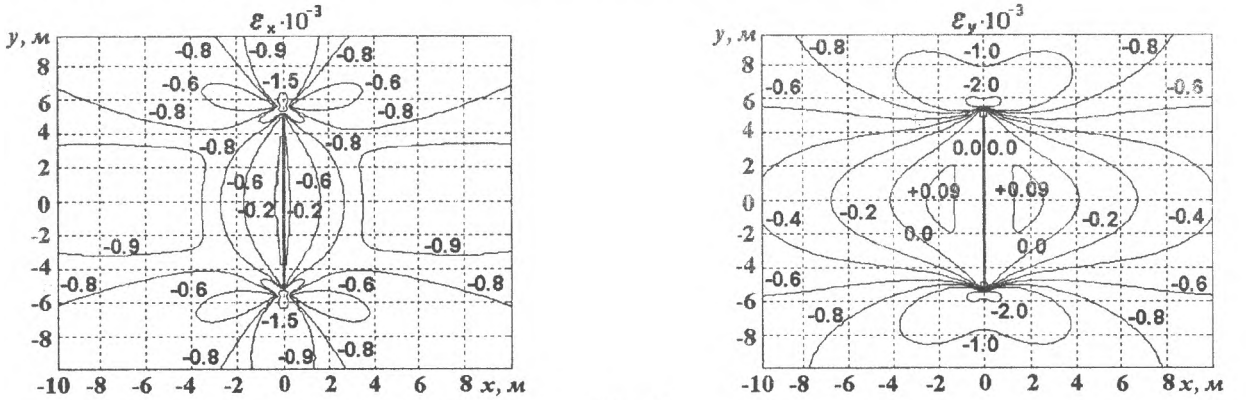



Рис. 2

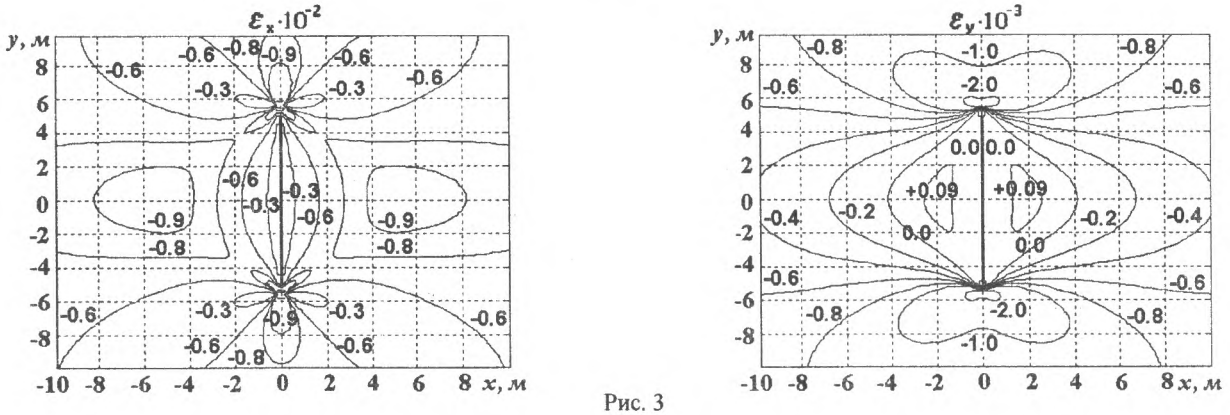



Рис. 3

На рис. 4 представлены результаты расчетов изменения природной проницаемости среды под дей-

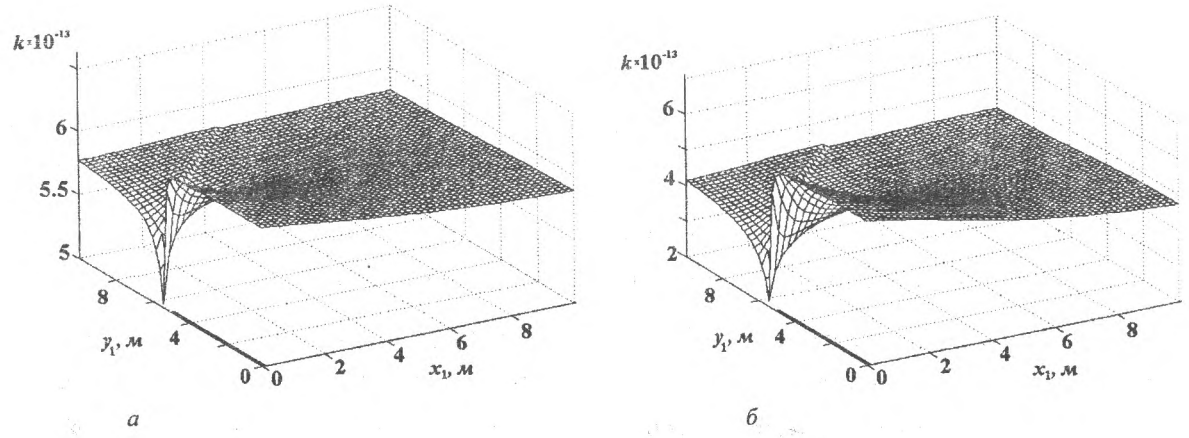



Рис.4

ствием деформаций массива в окрестности трещины. Из рис. 4 видно, что как в породах (рис. 4 *а*), так и в угле (рис. 4 *б*) наличие трещины приводит к увеличению проницаемости в зонах, прилегающих к стенкам трещины, а в областях над и под трещиной, наоборот, наблюдается резкое уменьшение проницаемости. По мере удаления от трещины в глубь массива проницаемость стремится к постоянной природной проницаемости.

Таким образом, наличие трещины приводит к изменению исходного напряженного состояния массива в окрестности трещины гидроразрыва. Перераспределение напряжений, в свою очередь, изменяет фильтрационные свойства массива, проницаемость которого зависит от компонент упругих деформаций.

**РЕЗЮМЕ**

На основі аналітичного розв`язку плоскої задачі теорії пружності для нескінченної області з еліптичним отвором досліджено розподіл напружень і деформацій в околі вертикальної тріщини гідроразриву. Вивчено залежність фільтраційних властивостей масиву від його напружено-деформованого стану.

**SUMMARY**

On the basis of the analytical solution of a plane problem of a theory of elasticity for infinite area with an elliptic hole the distribution of stresses and deformations in neighborhood of a vertical crack of a hydrofracturing is investigated. The dependence between filtration properties of a massif and its stressed-strained state is studied.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Булат А.Ф., Репка В.В., Фичев В.В. О механизме газовыделения из угольного пласта в трещину гидроразрыва // Доп. НАН України. – 2001. – №11. – С.36-39.
2. Cristescu N.D. New Trends in Rock Mechanics // Прикладная механика. – 2002. – Т.38. – №1. – С.5-34.
3. Хапилова Н.С. Теория внезапного отжима угольного пласта. – К: Наукова думка, 1992. – 232 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. Левшин А.А., Егоров С.И., Бондаренко Н.В. Исследование перераспределение горного давления при разработке пологого угольного пласта и его гидрообработке / Центр. бюро науч.-тех. информации угольной промышленности. – Донецк, 1993. – 95 с.

*Надійшла до редакції 14.03.2002 р.*

УДК 622.4:539.3

# ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА МЕТАНА, ВЫДЕЛЯЮЩЕГОСЯ В ВЕРТИКАЛЬНУЮ ТРЕЩИНУ ГИДРОРАЗРЫВА

*В.В.Залетов, В.В.Камышан, В.В.Конарев, Р.И.Мануйленко, Н.С.Хапилова*
*Корпорация "Индустриальный Союз Донбасса", г. Донецк.*
*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк;*

В настоящее время эффективным способом извлечения метана из углепородного массива является бурение скважин с последующим гидроразрывом пород [1]. Однако скорости газовыделения из угольного пласта в трещину не могут быть получены в результате расчетов на основе одномерной диффузионной модели движения метана в углепородном массиве [2]. В данной работе для решения указанной задачи используется двумерная модель фильтрации газа в массиве с трещиной гидроразрыва.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим массив горных пород с горизонтальным угольным пластом мощности $2h_1$, находящимся на расстоянии $H$ от дневной поверхности (рис. 1). С дневной поверхности пробурена скважина радиуса $r_c$, из стенки которой путем гидроразрыва массива образована протяженная вертикальная трещина (параллелепипед малой ширины $b$, длины $L$, высоты $2h_2$). Пусть трещина симметрична относительно срединной плоскости угольного пласта и ее высота больше мощности пласта, т.е., $2h_2 > 2h_1$. Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре поперечного сечения трещины, направив ось $Oz$ вдоль ее оси, ось $Oy$ – перпендикулярно к дневной поверхности. Будем считать, что длина трещины (по оси $Oz$) велика, и поэтому на достаточном удалении от ее концов движение газа не зависит от координаты $z$. При этом в силу наличия геометрической симметрии достаточно найти решение задачи фильтрации газа вблизи трещины для первой четверти сечения рассматриваемой

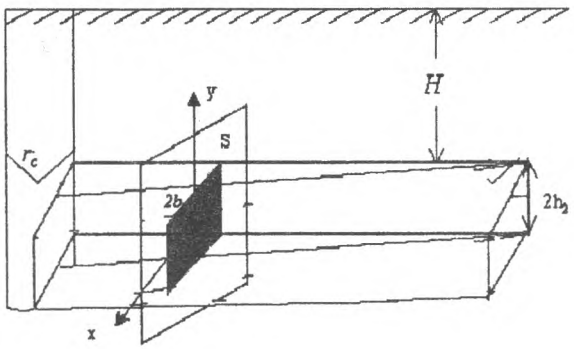



Рис. 1

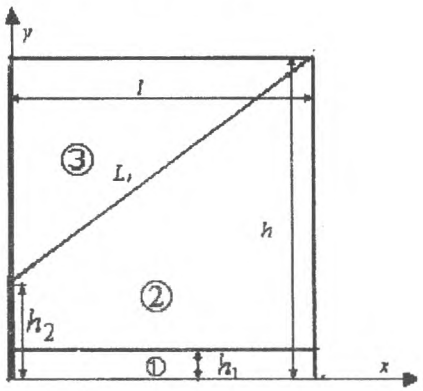



Рис. 2

среды (рис. 2).

Система соотношений, математически описывающая фильтрацию газа в массиве, включает уравнение неразрывности, уравнение движения в форме закона Дарси и уравнение состояния газа [3]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0; \tag{1.1}$$

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} P; \tag{1.2}$$

$$P = \rho RT \tag{1.3}$$

Здесь $Q = m\rho$ – количество свободного газа в единице объёма среды; $m$ –пористость среды; $\rho$ – плотность газа; $\vec{v}$ – скорость фильтрации; $k$ – проницаемость среды; $P$, $\mu$, $T$ – давление, вязкость и температура газа; $R$ – газовая постоянная. В случае установившегося движения газа система (1.1) – (1.3) преобразуется к уравнению

$$\Delta P^2 = 0. \tag{1.4}$$


©Залетов В.В., Камышан В.В., Конарев В.В, Мануйленко Р.И., Хапилова Н.С.

Будем искать решение уравнения (1.4) при следующих граничных условиях: на границе области фильтрации давление равно пластовому давлению $P_n$

$$P = P_n \text{ при } x = l,\ 0 < y < h \text{ и при } 0 < x < l,\ y = h; \tag{1.5}$$

на стенках трещины давление равно $P_0$

$$P = P_0 \text{ при } x = 0,\ 0 < y < h_2; \tag{1.6}$$

в силу симметрии скорости при $x = 0$, $y = 0$ направлены по осям $y$ и $x$,т. е.,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ при } 0 < x < l,\ y = 0; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0,\ h_2 < y < h, \tag{1.8}$$

где $l$ и $h$ – неизвестные параметры, характеризующие размеры области фильтрации.

**2. Построение решения.** Разобьём область фильтрации газа на три зоны: угольный пласт (зона 1), породы вблизи и выше трещины (зоны 2 и 3). Обозначим $P_i$, $\vec{v}_i$ соответственно давление и скорость газа в $i$-й зоне. В силу непрерывности давления

$$P_1 = P_2 \text{ при } 0 < x < l,\ y = h_1; \tag{2.1}$$

$$P_2 = P_3 \text{ при } (x, y) \in L_1. \tag{2.2}$$

При этом $L_1$ – линия раздела зон 2 и 3.

Выбирая решение уравнения (1.4) в виде полинома второго порядка и удовлетворяя условиям (1.5) – (1.8), (2.1) – (2.2), получаем выражение для квадрата давления $P^2$ в различных зонах. Окончательно для давления находим

$$P_1 = P_2 = \sqrt{P_0^2 + \frac{P_n^2 - P_0^2}{l} x}, \quad P_3 = \sqrt{P_0^2 + \frac{P_n^2 - P_0^2}{h - h_2}(y - h_2)}. \tag{2.3}$$

Из условия (2.2) найдем уравнение прямой $L_1$

$$y = \frac{h - h_2}{l} x + h_2, \tag{2.4}$$

Для скоростей фильтрации газа в угольном пласте и зонах 2,3 будем иметь

$$\vec{v}_1 = -\frac{k_y}{2\mu l} \frac{P_n^2 - P_0^2}{\sqrt{P_0^2 + \frac{P_n^2 - P_0^2}{l} x}} \vec{i}, \quad \vec{v}_2 = -\frac{k_n}{2\mu l} \frac{P_n^2 - P_0^2}{\sqrt{P_0^2 + \frac{P_n^2 - P_0^2}{l} x}} \vec{i},$$

$$\vec{v}_3 = -\frac{k_n}{2\mu(h - h_2)} \frac{P_n^2 - P_0^2}{\sqrt{P_0^2 + \frac{P_n^2 - P_0^2}{h - h_2}(y - h_2)}} \vec{j}, \tag{2.5}$$

где $k_y$, $k_n$ –проницаемости угля и пород.

Используя соотношения(2.5), находим количество газа, выделяющегося в трещину

$$Q = \frac{2L}{\mu} \frac{P_n^2 - P_0^2}{P_0^2} \left[ \frac{k_y h_1 + k_n (h_2 - h_1)}{l} + \frac{k_n b}{h - h_2} \right] \tag{2.6}$$

Для вычисления давления, скорости газа и дебита трещины по формулам (2.3)–(2.6) необходимо оценить параметры $l$ и $h$. На границе раздела $L_1$ областей 2 и 3 должно выполняться условие непрерывности нормальных компонент скоростей

$$|v_2|_{L_1} \sin\alpha = |v_3|_{L_1} \cos\alpha . \tag{2.7}$$

Здесь

$$\sin\alpha = \frac{h-h_2}{\sqrt{l^2+(h-h_2)^2}}, \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+(h-h_2)^2}} . \tag{2.8}$$

Подставляя соотношение (2.7) и (2.8) в равенства (2.4), получаем

$$\frac{h-h_2}{l} = \frac{l}{h-h_2} , \tag{2.9}$$

или

$$l = h - h_2 . \tag{2.10}$$

С учетом (2.10) из формулы (2.6) для дебита трещины будем иметь выражение

$$Q = \frac{2\rho L}{\mu} \frac{P_n^2 - P_0^2}{P_0^2} \frac{k_y h_1 + k_n (h_2 - h_1 + b)}{l} . \tag{2.11}$$

Исходя из (2.5), для скорости газа $v_2$ в сечении $x = l$ найдем формулу

$$v_2|_{x=l} = -\frac{k_n}{2\mu l} \frac{P_n^2 - P_0^2}{P_n} , \tag{2.12}$$

из которой следует, что скорость $v_2$ в сечении $x = l$ обращается в нуль при $l \to \infty$.

Для тангенса угла наклона касательной к кривой $v_2(l)$, стремящегося к нулю при $l \to \infty$, для $l = l^*$ имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_n}{2\mu (l^*)^2} \frac{P_n^2 - P_0^2}{P_n} = \varepsilon \tag{2.13}$$

откуда для длины зоны движения газа будем иметь

$$l^* = \sqrt{\frac{k_n}{2\mu\varepsilon} \frac{P_n^2 - P_0^2}{P_n}} . \tag{2.14}$$

За пределами этой зоны скорость $v_2$ в сечении $x = l$, если $\varepsilon$ мало, будет практически равна нулю.

Так как выражения для скоростей в областях 1 и 2 отличаются только сомножителями $k_n$ и $k_y$, то длина $l^*$ в угольном пласте оценивается также по формуле (2.14) при замене в ней $k_n$ на $k_y$. При исследовании процесса фильтрации в окрестности трещины в качестве $l^*$ следует выбирать наибольшее значение величины $l^*$, определенной для угля и пород.

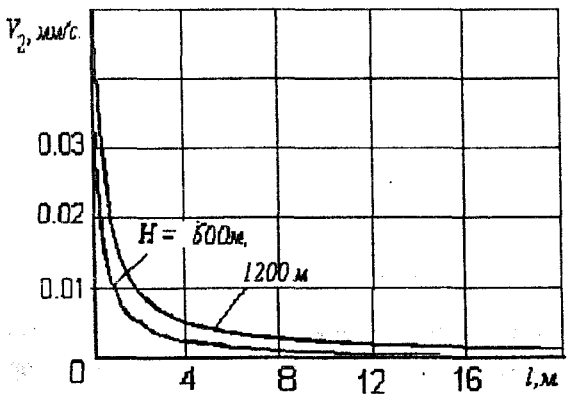
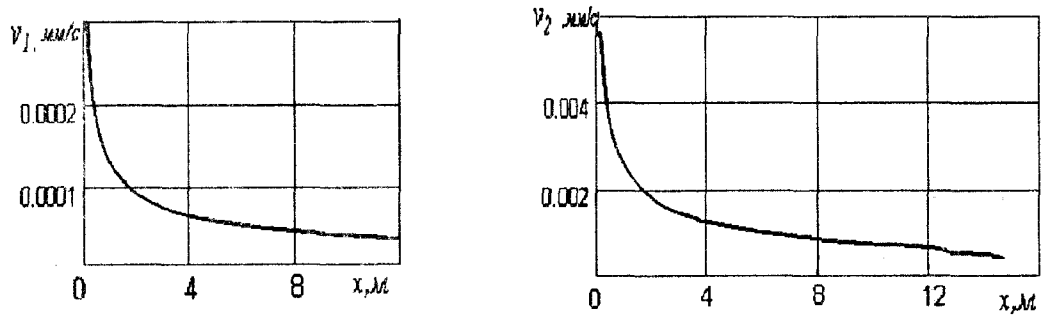


Рис. 3

**3. Анализ результатов численных исследований.** Были проведены численные исследования для различных значений геометрических параметров задачи, когда $P_0 = 0{,}1$ МПа, $k_y = 0{,}1 \cdot 10^{-16}$ м$^2$, $k_n = 0{,}2 \cdot 10^{-15}$ м$^2$, $\mu = 0{,}6 \cdot 10^{-10}$ МПа$\cdot$с, $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. На рис. 3 изображен график изменения скорости $v_2$ в зависимости от параметра $l$ для различных глубин. При этом для глубины 600 м пластовое давление полагалось равным 6 МПа, для глубины 1200 м – 12 МПа. Вычисленное по формуле (2.14) значение $l^*$ при $H = 600$ м равнялось 14 м и при $H = 1200$ м – 19 м. Из рис. 3 видно, как и следовало ожидать [4], что с ростом глубины

увеличивается перепад давления в зоне фильтрации газа. В результате увеличивается и протяженность области движения газа, характеризуемая параметром $l^*$.

На рис. 4 показано изменение скорости фильтрации газа в породах (рис. 4*а*) и в угольном пласте




*а* *б*

Рис. 4

(рис.4*б*) в зависимости от координаты $x$ для глубины, равной 600 м. Из рис.4 видно, что скорость фильтрации газа в породах больше, чем в угольном пласте.

В таблице для случая $L$=1200 *м*, $2h_1$=1 *м*, $2h_2$=10 *м*,$2b$=4 *мм* приведен дебит трещины, вычисленный по формуле (2.11), для различных значений пластового давления газа в массиве .Из таблицы видно, что количество газа, выделяющегося в трещину, с увеличением пластового давления возрастает.

| P, МПа | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $Q*10^3$ м$^3$/с | 13 | 23 | 36 | 52 |


## РЕЗЮМЕ

Наведено розв'язок задачі про сталу фільтрацію газу в околі вертикальної тріщини гідророзриву, утвореної зі стінки свердловини, пробуреної з денної поверхні. Отримано формули для розрахунку поля швидкостей, розподілу тиску газу в масиві. Дано оцінку розмірів області руху газу. Одержано формулу для розрахунку кількості газу, що виділяється в тріщину.

## SUMMARY

The solution of a problem on a steadied filtration of gas in neighborhood of a vertical crack of a fluid fracturing deviated from a wall of well, drilled with a daylight area is adduced. The formulas for calculation of a field of speeds, pressure profile of gas in a massif and estimation of quantity of methane excreting in a crack are established. Done an estimation of the sizes of area of flow of gas. The formula for account of quantity of gas allocated in a crack is received.


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Coal bed methane in Alabama // Geological Survey of Alabama, Bulletin 192, Tuscaloosa, Alabama, 1997. – 71 p.
2. Булат А.Ф., Репка В.В., Фичев В.В. О механизме газовыделения из угольного пласта в трещину гидроразрыва. // Доп. НАН України. – 2001. – №11. – С.36-39.
3. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М. Л.: Гостехиздат, 1947. – 244 с.
4. Малышев Ю.Н., Айруни А.Т. Комплексная дегазация угольных шахт. – М.: Изд-во Акад. горн. наук, 1999.–328 с.


*Надійшла до редакції 14.03.2002 р.*

УДК 539.3

# РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ФУНДАМЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Е.А.Макаренков, А.В.Сясев*
*Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепропетровск*
*Днепропетровский национальный университет*

Возросшие требования по обеспечению нормальной работы турбогенераторов служат основанием для значительного ограничения деформируемости фундаментов под энергетическое оборудование. Существующие методы расчета, базирующиеся на современном уровне знаний, недостаточно отражают действительные условия работы системы турбогенератор – фундамент и всего многообразия свойств материалов фундаментов. В настоящей работе предложен расчет термонапряженного состояния фундаментов под энергоблоки атомных электростанций, которые представляют собой сложную пространственную конструкцию большой протяженности, состоящую из набора гибких колонн, жестких поперечных балок и поперечных монолитных стен. Колонны и стены соединяют между собой верхние и нижние строения. Изучение термонапряженного состояния фундаментов имеет большое значение, потому что увеличение сезонных осадок фундамента на 1–2 мм может привести к расцентровке валопровода турбогенератора, а это, в свою очередь, может вызвать аварийную остановку блока.

**Постановка задачи.** Рассмотрим квазистатическую пространственную несвязанную задачу определения термонапряженного состояния конструкций из ортотропного материала. Будем считать независимыми тепловые и механические воздействия, а именно: отдельно будем решать задачу теплопроводности, затем для найденного поля температур в фиксированный момент времени определим термонапряженное состояние.

Определение температурного поля сводится к решению стационарного уравнения теплопроводности в декартовой системе координат [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x^t \frac{\partial t(x,y,z)}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y^t \frac{\partial t(x,y,z)}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z^t \frac{\partial t(x,y,z)}{\partial z}\right)+Q=0, \qquad (1)$$

где $t(x,y,z)$ – температура; $x,y,z$ – координатные оси; $\lambda_x^t$, $\lambda_y^t$, $\lambda_z^t$ – коэффициенты теплопроводности в направлении осей координат $x,y,z$; $Q$ – внутренний источник тепла или сток, обусловленный сложными физико-химическими процессами, происходящими при изменении агрегатного состояния бетона.

В качестве граничных условий будем задавать условия 1-го и 3-го рода:

$$t=\theta_n \text{ на } S_1,\quad \lambda_n^t(x,y,z)\frac{\partial t(x,y,z)}{\partial n}+\alpha\left[t(x,y)-\theta\right]=0 \text{ на } S_2. \qquad (2)$$

Здесь $\theta_n$ – температура на поверхности исследуемого объекта; $\alpha$, $\theta$ – коэффициент теплообмена и температура окружающей среды; $S_1$, $S_2$ – участки поверхности исследуемого объекта; $n$ – вектор нормали к поверхности $n=[n_1,n_2,n_3]$. Объединение поверхностей $S_1$, $S_2$ образует полную граничную поверхность рассматриваемой конструкции. Коэффициенты теплопроводности являются функциями координат и не зависят от времени.

Уравнение (1) с граничными условиями (2) применимо как к изотропным, так и к анизотропным материалам. В векторной форме дифференциальное уравнение (1) записывается следующим образом

$$div\left(\lambda^t grad\ t\right)+Q=0. \qquad (3)$$

**Метод решения.** В данной работе для решения уравнения (3) с граничными условиями (2) был использован метод конечных элементов (МКЭ) в сочетании с методом Галеркина [2].

$$\int_V N_\beta^{(e)}\left[div\left(\lambda^t grad\ t\right)+Q\right]dV-\int_S N_\beta^{(e)}\left(\lambda^t\frac{\partial t}{\partial n}\right)dS-\int_S N_\beta^{(e)}\left[\alpha(t-\theta)\right]dS=0, \qquad (4)$$



©Макаренков Е.А., Сясев А. В.

где $N_\beta^{(e)}$ – базисные функции (функции формы), определяющиеся видом и геометрическими размерами выбранных конечных элементов, $\beta = 1...m$, $m$ – количество узлов конечного элемента с индексом $(e)$, $V$ – объем конечного элемента, $S$ – поверхность элемента.

Для всей конструкции в целом, соотношение (4) записывается в виде

$$\sum_{e=1}^{E}\left\{\iint_V\left[N^{(e)}\right]^T\left[div\left(\lambda^t grad\ t\right)+Q\right]dV-\iint_S\left[N^{(e)}\right]^T\left(\lambda^t\frac{\partial t}{\partial n}\right)dS-\right.$$

$$\left.-\iint_S\left[N^{(e)}\right]^T\left[\alpha\left(t-\theta\right)\right]dS\right\}=0. \qquad (5)$$

Здесь $E$ – число элементов; $T$ – индекс транспонирования.

Прежде чем приступать к решению, необходимо выбрать функции формы $N^{(e)}$ и преобразовать интегралы в соотношении (5) таким образом, чтобы они содержали производные от неизвестной функции не выше первого порядка. Сократить порядок дифференциальных соотношений можно, используя теорему Гаусса [2]. В результате соответствующих преобразований уравнение (5) примет вид

$$\iint_V\left[N_{\beta,i}\left(\lambda^t grad\ t\right)\right]dV-\int_V N_\beta Q dV+\iint_S\left[N_\beta\alpha\left(t-\theta\right)\right]dS=0,$$

в котором $N_{\beta,i}$ – производные функций формы по координатам.

Дискретная модель для решения поставленной задачи МКЭ представляет собой кубический элемент, к которому привязывалась локальная система координат $x', y', z'$ с началом в центре тяжести элемента $O\left(x_{\text{цт}}, y_{\text{цт}}, z_{\text{цт}}\right)$. Определение температурных полей в элементах сводилось к решению системы алгебраических уравнений, которая в матричном виде записывается следующим образом

$$\left[K^{(e)}\right]\left\{t_i\right\}=\left\{f^{(e)}\right\}.$$

Здесь матрица жесткости $\left[K^{(e)}\right]$ имеет вид

$$\left[K^{(e)}\right]=\int_{V^{(e)}}\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]dV+\int_{S^{(e)}}\alpha\left[N^{(e)}\right]^T\left[N^{(e)}\right]dS \qquad (6)$$

и определяет матрицу теплопроводности.

Вектор правых частей для элемента

$$\left\{f^{(e)}\right\}=\int_{V^{(e)}}Q\left[N^{(e)}\right]^T dV+\int_{S^{(e)}}\alpha\theta\left[N^{(e)}\right]^T dS$$

определяет вектор тепловой нагрузки. Вектор узловых значений температур – $\left\{t_i\right\}$. В соотношении (6) $\left[N^{(e)}\right]$ представляет собой матрицу функций форм для элемента с номером $(e)$, $\left[B^{(e)}\right]$ – матрица, получаемая дифференцированием матрицы $\left[N^{(e)}\right]$, $\left[D^{(e)}\right]=\begin{vmatrix}\lambda_x^t & 0 & 0\\ 0 & \lambda_y^t & 0\\ 0 & 0 & \lambda_z^t\end{vmatrix}$.

Для решения задачи был выбран конечный элемент с размерами $2a$, $2b$, $2c$. Матрица функций формы для него записывается в виде [2]

$$N=\begin{vmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & N_8 \end{vmatrix},$$

где

$$N_1=\frac{1}{8abc}(b+x)(a-y)(c-z),\quad N_2=\frac{1}{8abc}(b+x)(a+y)(c-z),$$
$$N_3=\frac{1}{8abc}(b-x)(a+y)(c-z),\quad N_4=\frac{1}{8abc}(b-x)(a-y)(c-z),$$
$$N_5=\frac{1}{8abc}(b+x)(a-y)(c+z),\quad N_6=\frac{1}{8abc}(b+x)(a+y)(c+z),$$
$$N_7=\frac{1}{8abc}(b-x)(a+y)(c+z),\quad N_8=\frac{1}{8abc}(b-x)(a-y)(c+z).$$

Фактические значения элементов матриц $[N]$ и $[B]$ зависят от вида элемента и от типа задачи.

Термонапряженное состояние конструкции при коэффициентах Ляме $\lambda$, $\mu$ и линейного теплового расширения $\alpha_t$, зависящих от температуры и, следовательно, от координат, описывалось уравнением равновесия, которое в векторной форме имеет вид [1]

$$\mu\Delta\vec{u}+(\lambda+\mu)\,grad\ div\ \vec{u}+2grad\ \mu\Pi_\varepsilon+grad\ \lambda\ div\ \vec{u}-grad(3\lambda+2\mu)\alpha_t t=0.$$

Здесь $\vec{u}$ – вектор перемещений; $\lambda=\nu E/\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]$; $\mu=E/2(1+\nu)$; $E$ – модуль упругости; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $\Pi_\varepsilon$ – тензор деформаций.

Граничные условия на поверхности могут задаваться либо в перемещениях $u=\varphi_i(x,y,z)$, либо в напряжениях $\sigma_{ij}n_j=F_i(x,y,z)$, где $\sigma_{ij}$ $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ – компоненты тензора напряжений, $F_i$ – составляющие вектора поверхностных сил. Физические уравнения закона Гука записывались для ортотропных материалов в соответствии с [3].

Для определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пространственной конструкции был использован МКЭ, поэтому разрешающие уравнения были получены с помощью теоремы о потенциальной энергии [4]. После соответствующих преобразований [4] была получена система алгебраических уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$[K]\{U\}=\{F\}, \tag{7}$$

где $[K]=\sum_{e=1}^{E}\left[K^{(e)}\right]$, $\{F\}=-\sum_{e=1}^{E}\left\{f^{(e)}\right\}$, $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $\{F\}$ – вектор правых частей системы (7), $\left[K^{(e)}\right]=\int\limits_{V^{(e)}}\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right]dV$, $\left\{f^{(e)}\right\}=\int\limits_{V^{(e)}}\left\{\left[B^{(e)}\right]^T\left[D^{(e)}\right]\{\varepsilon_0\}-\right.$

$$\left.-[N]^T\begin{Bmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \\ z^{(e)} \end{Bmatrix}\right\}dV-\int\limits_S[N]^T\begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}dS,$$ $[B]$ – матрица, получаемая дифференцированием $[N]$,

$\{P_x,\ P_y,\ P_z\}$ – вектор поверхностных нагрузок. Элементами матрицы $[D]$ с размерностью $6\times 6$ являются упругие константы материала, определяемые из уравнений закона Гука

$$[D^*]\ \{\sigma\}=[D]\ \{\varepsilon\}\ [D^*]-[D]\ \{\varepsilon_0\}\ [D^*],$$

где $[D^*]$-обратная для $[D]$ матрица, $\{\varepsilon_0\}^T=[\alpha_{xx}\Delta t,\ \alpha_{yy}\Delta t,\ \alpha_{zz}\Delta t,\ 0,0,0]$, $\{\varepsilon\}=[D^*]\ [\sigma]\ \{\varepsilon_0\}$.

**Результаты исследований.** Экспериментальные исследования температурных полей проводились на одном из действующих энергоблоков Запорожской атомной электростанции в период его перехода от рабочего состояния к полной остановке. На основании экспериментальных исследований можно провести сравнительный анализ эффективности разработанной методики.

На рис. 1, 2 показано распределение расчетных и экспериментальных температурных полей по длине фундамента на отметках -2,6 м и 14,75 м соответственно в течение одного года в виде усредненных значений по сезонам, когда турбогенератор находился в рабочем режиме. Кривые *1, 2* соответствуют расчетному и экспериментальному результатам.

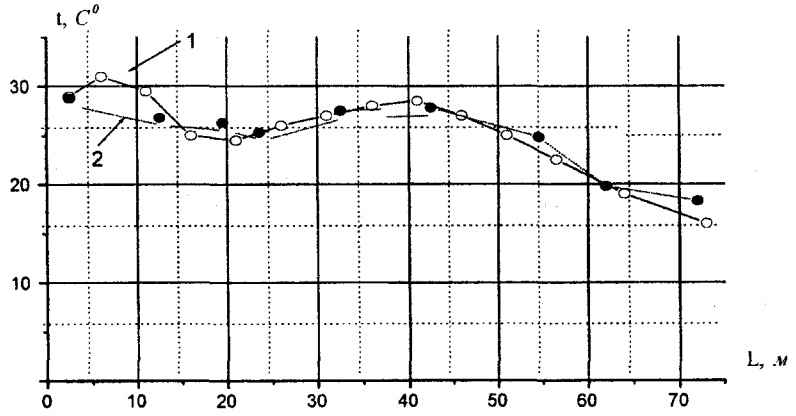



Рис. 1

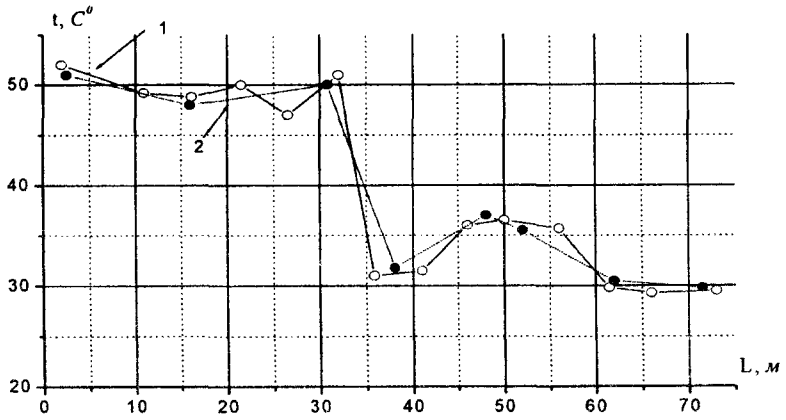



Рис. 2

На рис. 3 приведены усредненные значения вертикальных перемещений, возникающих вследствие перепада температур в течении года. Из рис. 3 видно перемещение средней части верхнего строения фундамента на отметке 14,75 м над уровнем моря от суммарного воздействия температуры и нагрузки, когда турбогенератор находится в рабочем режиме. Кривые *1, 2* относятся к расчетным и экспериментальным данным.

Как видно из описанных результатов, предлагаемый расчет позволяет решать задачи определения термонапряженного состояния фундаментов под турбоагрегаты большой мощности, что может быть ис-

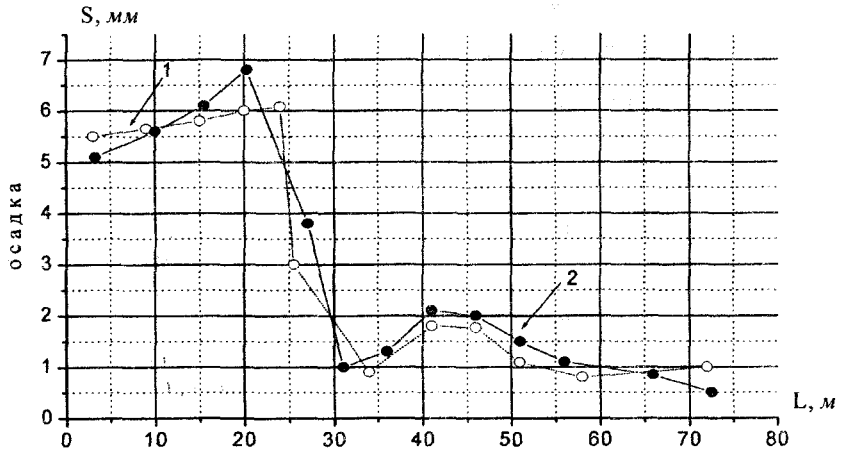



Рис. 3

пользовано для оптимизации проектных работ по разработке данных фундаментов и повышения надежности работы.

**РЕЗЮМЕ**

Предложен расчет, основанный на методе конечных элементов, для определения термонапряженного состояния фундаментных конструкций сложной формы при различных условиях промышленной эксплуатации.

**SUMMARY**

The calculation, bases on a finite element method, for definition of thermo-stresses state of three-dimensional ferro-concreting foundation constructions with complex form is offered under different conditions of industrial uses.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая шк., 1967. – 600 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Высшая шк., 1975. – 150 с.

*Надійшла до редакції 03.05.2002 р.*

УДК 539.3

# ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ, РАЗОГРЕВАЮЩИХСЯ ВСЛЕДСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

*В.Б.Веселовский, В.Ю.Клим*
*Днепропетровский национальный университет*

Многие современные конструкции работают в условиях интенсивных тепловых и силовых воздействий. Поэтому определение усталостной долговечности их элементов требует совместного решения задач теплопроводности, термоупругости и механики разрушения, так как высокие частоты нагружения могут стать причиной разрушения этих элементов из-за нагрева от вибраций [1–5]. В данной работе выбраны элементы конструкций, представимые гладкими, ступенчатыми сплошными или составными стержнями, имеющими на стыках идеальные или неидеальные тепловые контакты при различных условиях теплообмена с окружающей средой. Определение усталостной долговечности осуществлено последовательным решением задачи о колебаниях и нелинейной задачи нестационарной теплопроводности, позволяющим определять температурное и напряженно-деформированное состояние в циклически нагружаемых элементах [1–3].

Задача о колебаниях была представлена дифференциальным уравнением в частных производных с переменными коэффициентами и краевыми условиями. Для ее решения использован метод разделения переменных, позволяющий заменить дифференциальное уравнение колебаний двумя уравнениями. Первое зависит от координаты и является фундаментальной функцией задачи для определения $K$-ой формы собственных колебаний. Второе представляет собой $K$-ю временную функцию задачи, характеризующую закон изменения колебаний во времени. Элементы конструкции сложной конфигурации заменены кусочно-постоянным распределением жесткости и плотности материала по длине, а решение для фундаментальных функций осуществлялось применением сплайн-преобразования аргумента (координаты), операционного метода, основанного на интегральном преобразовании Карсона-Лапласа. Такой подход позволил получить аналитическое решение, имеющее одно выражение для всей области изменения аргумента. Решение для временных функций получено с использованием интеграла Дюамеля или операционного метода.

**Постановка задачи.** В качестве расчетной модели элемента конструкции при решении задачи нестационарной теплопроводности принят многоступенчатый стержень. Учитывая малые размеры поперечного сечения по сравнению с длиной исследуемого стержня, задача рассмотрена как одномерная. Предполагается, что теплообмен между боковой поверхностью ступеней стержня и окружающей средой происходит по закону Ньютона. В дифференциальном уравнении теплопроводности этот теплообмен представлен в виде отрицательного источника тепла. Тепловыделение в процессе циклического нагружения учтено введением в уравнение теплопроводности распределенных источников тепла. Наличие интенсивности внутренних источников тепла является результатом превращения части энергии деформирования в теплоту. В связи с тем, что интенсивность внутренних источников тепла определяется с помощью экспериментальных данных о характеристиках рассеяния энергии, явления, происходящие в материале при циклическом нагружении учитываются расчетным путем [4, 5]. Экспериментальных данные о характеристиках рассеяния энергии интенсивность внутренних источников тепла могут быть представлены выражениями

$$\nu q(x, \sigma_a, T, \tau) = \begin{cases} \nu \sigma_a^2 q(x, \tau)\, \psi(\sigma_a, T)/(2E^*(T)); \\ \nu \sigma_a^2 q(x, \tau)\, \delta(\sigma_a, T)/(4E^*(T)); \\ \nu\, D(\sigma_a, T); \\ \nu\, K_\phi\, \Delta\varepsilon(x, \tau)\, \sigma_a(x, \tau); \end{cases} \qquad (1)$$

где $\nu$ – частота нагружения; $\sigma_a(x, \tau)$ – амплитуда напряжений; $\psi(\sigma_a, T)$ – относительное рассеяние энергии, равное отношению площади петли гистерезиса $D(\sigma_a, T)$ к амплитудному значению потенциальной энергии упругой системы; $T$ – температура; $E^*(T)$ – секущий модуль упругости, равной модулю Юнга при упругих деформациях; $\delta(\sigma_a, T)$ – декремент колебаний; $\Delta\varepsilon(x, \tau)$, $K_\phi$ – ширина и коэффициент формы петли гистерезиса.

©Веселовский В.Б., Клим В.Ю.

В соответствии с принятыми допущениями задача нестационарной теплопроводности для многоступенчатого стержня представляется начально–краевой задачей вида

$$c_m(T_m)\rho_m(T_m)\frac{\partial T_m(x,\tau)}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda_m(T_m)\frac{\partial T_m(x,\tau)}{\partial x}\right]-$$

$$-\frac{\alpha_m(T_m)}{h_m}\left[T_m(x,\tau)-T_{m,c}\right]+\nu q_m(x,\sigma_a,T,\tau); \qquad (2)$$

$$T_m(x,0)\big| =\varphi_m(x); \qquad (3)$$

$$A_0\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=B_0\alpha_0^{*}(T_1)\left[f_0(\tau)-D_0T_1(x,\tau)\right]\Big|_{x'=0_1};$$

$$A_1\lambda_M(T_M)\frac{\partial T_M(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=l_m}=B_1\alpha_1^{*}(T_M)\left[f_1(\tau)-D_1T_M(x,\tau)\right]\Big|_{x'=l_M}. \qquad (4)$$

Здесь $m=1,2,...M$; $0_m\le x_m\le l_m$; $T_m(x,\tau)$ – температура $m$-ой гладкой части многоступенчатого стержня, зависящая от координаты $x$ и времени $\tau$; $T_{m,c}$ – температура окружающей $m$-ую часть стержня среды; $c_m(T_m)$, $\lambda_m(T_m)$ и $\rho_m(T_m)$ – коэффициенты удельной теплоемкости, теплопроводности и плотность материала $m$-ой части стержня; $\alpha_m(T_m)$, $\alpha_s^{*}(T_m)$ – коэффициенты теплоотдачи с боковой поверхности и торцов внешних (граничных) частей стержня; $A_s$, $B_s$, $D_s$ ($S=0$ или 1) – коэффициенты, принимающие значения $\pm1$ или 0. В зависимости от сочетания значений этих коэффициентов на внешних торцах системы стержней можно задавать граничные условия I, II или III рода, при этом граничные функции $f_s(\tau)$ принимают значения температуры поверхности стержня, теплового потока или температуры окружающей среды; $h_m$ – отношение площади $F_m$ поперечного сечения $m$-ой части стержня к его периметру. Предположено, что на стыках стержней имеют место условия неидеального теплового контакта

$$F_m\lambda_m(T_m)\frac{\partial T_m(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=l_m}=\frac{F_{m+1}}{R^{*}_{m,m+1}}\left[T_{m+1}(0_{m+1},\tau)-T_m(l_m,\tau)\right]-$$

$$-\alpha_{m,m+1}(T_m)\left[T_m(l_m,\tau)-T_{m,c}\right]\left(\left|F_m-F_{m+1}\right|\right),$$

$$F_m\lambda_m(T_m)\frac{\partial T_m(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=l_m}=F_{m+1}\lambda_{m+1}(T_{m+1})\frac{\partial T_{m+1}(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=0_{m+1}}-$$

$$-\alpha_{m,m+1}(T_m)\left[T_m(l_m,\tau)-T_{m,c}\right]\left(\left|F_m-F_{m+1}\right|\right), \qquad (5)$$

где $R^{*}_{m,m+1}$ – контактное термическое сопротивление на стыке $m$ и $m+1$-ой частей стержня; $\alpha_{m,m+1}(T_m)$ – коэффициент теплоотдачи со свободных торцов $m$ или $m+1$-ой части стержня. Необходимо отметить, что при $M=1$ задача (2)–(5) соответствует математической постановке нелинейной задачи теплопроводности для гладкого стержня, при $M=2$ – для одноступенчатого и т.д.

**Метод решения.** Нелинейная задача теплопроводности (2)–(4) с внутренними источниками тепла может быть решена приближенными численными или аналитическими методами [2, 3]. Использование численных методов (несмотря на ряд их существенных достоинств), особенно при оценке долговечности температурного поля проектируемых элементов конструкций, требует больших затрат времени ЭВМ при расчетах для выбора оптимальных параметров элементов. Поэтому целесообразной является разработка алгоритмов, основанных на приближенных аналитических решениях задачи теплопроводности. Одним из таких подходов получения аналитических решений является метод последовательных интервалов [1–3], заключающийся в разбиении всего времени нагружения на конечные временные интервалы, в каждом из которых характеристика материала, внутренние источники тепла и коэффициенты теплоотдачи являются постоянными. В такой постановке нелинейная задача нестационарной теплопроводности сводится к последовательности линейных задач с различными начальными и граничными условиями для каждого ин-

тервала времени, для решения которых можно использовать операционный метод, основанный на интегральном преобразовании Лапласа.

Подстановка

$$T_m(x,\tau)-\nu=\exp\left(-\frac{\alpha_m(T_m)\cdot\tau}{c_m(T_m)\cdot\rho_m(T_m)\cdot h_m}\right)\cdot U_m(x,\tau), \tag{6}$$

позволяет свести решение линейных задач теплопроводности для многоступенчатого стержня к решению задач теплопроводности для многослойных плоских тел [2]

$$U_{m,j}(x,\tau)=\sum_{i=1}^{2M}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{n,j}^{m}\left[\mu_{n,i}(x)\cdot\varphi_n\right]g_{j,i}^{(n)}(\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}E_{j,i}^{m}(x,p_k)\cdot\exp(p_k\cdot\tau)\right\}+\Gamma_{m,j}^{*}(x,\tau),\quad j=1,2,\ldots M, \tag{7}$$

где $M$ – количество интервалов разбиений; функции $g_{j,i}(\tau)$, $\mu_{n,i}(x)$, $\varphi_n$, $\Omega_{n,j}^{m}\left[\mu_{n,i}(x)\varphi_n\right]$ $E_{j,i}^{m}(x,\,p_k)$, $\Gamma_{m,j}^{*}(x,\,\tau)$ определяются по соотношениям, приведенным в работах [1–3].

Теплофизические характеристики, параметры неидеального теплового контакта, приведенный коэффициент теплообмена, изменяющиеся от интервала к интервалу ступенчатым образом, выбираются по значению некоторой определяющей температуры. Как показано в [1, 3], такую температуру следует выбирать в зависимости от конкретных законов изменения нелинейных параметров и цели исследования.

**Описание и анализ численных исследований.** Частные случаи решения (6) были использованы для исследования усталостной долговечности гладкого и ступенчатого стержней. Рассмотрен циклический чистый изгиб стержней из стали 45 прямоугольного поперечного сечения с различными частотами нагружения. Размеры симметричного ступенчатого стержня: $L=15$мм, $L_1=20$мм – половины длин первой и второй ступеней соответственно, $b_1=10$мм, $b_2=20$мм – высоты сечений $L$ и $L_1$ соответственно, $a=5$мм – ширина сечения стержня, одинаковая по длине. Размеры гладкого стержня: $L=35$мм, $b_1=10$мм, $a=5$мм. В расчетах учтены только напряжения в рабочей части стержня. Коэффициент теплоотдачи $\alpha_1$ через боковую поверхность в окружающую среду зависит от температуры, $\alpha_2$ через торцы стержня в окружающую среду равен $500\,\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{1}$. Зависимости физико-механических свойств материала стержня от температуры приняты в соответствии с данными работ [3, 5].

На рис. 1 представлены зависимости критерия Био $Bi_1$ от $Bi_2$ (теплообмен между окружающей средой и соответственно боковой поверхностью и торцами стержней). Зависимости соответствуют границам, разделяющим области изменения температуры в центре стержня с нарастающей скоростью и установления температуры в процессе нагружения. Область, ограниченная кривой и осями координат, является областью изменения температуры с нарастающей скоростью, что соответствует разрушению стержня по критерию потери его несущей способности (достижения предельного напряженного состояния). Сплошными линиями изображены зависимости $Bi_1$ от $Bi_2$, полученные для ступенчатого стержня при $\sigma_a=250$МПа и различных частотах нагружения, штрихпунктирной линией – при $\sigma_a=200$МПа и $\nu=5116$Гц. Штриховая кривая получена при циклическом нагружении гладкого стержня, нагружаемого с $\sigma_a=250$МПа. Из рис. 1 видно, что условия теплообмена между стержнем и окружающей средой, геометрические размеры и форма стержня могут оказать существенное влияние на

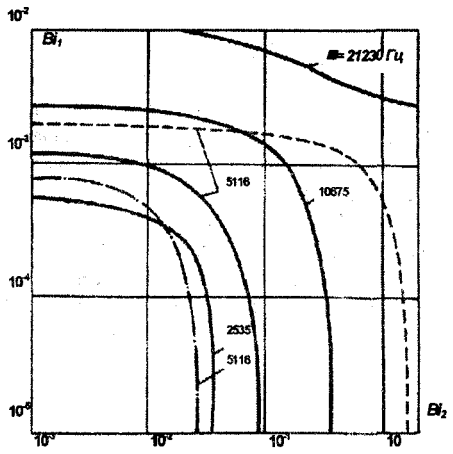



Рис. 1

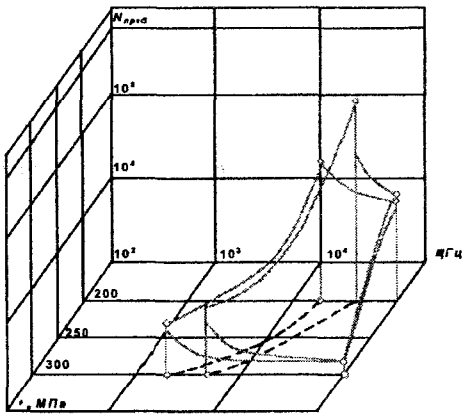



Рис. 2

разогрев и, естественно, усталостную долговечность исследуемых стержней. Так, например, при одних и тех же условиях нагружения и теплообмена ( $Bi_2 \geq 0,4$ ) гладкий стержень разрушается вследствие достижения в его центре предельного напряженного состояния, ступенчатый стержень при этом будет работать значительно дольше и разрушение может произойти вследствие накопления усталостных повреждений.

На рис. 2 в виде поверхностей представлено предельное число циклов нагружения в зависимости от амплитуды напряжений и частоты для гладкого (контур 1) и ступенчатого (контур 2) стержней. Как видно, чем больше $\sigma_a$, тем при меньшем значении частоты нагружения в опасном сечении стержня будет достигнуто предельное напряженное состояние.

Таким образом, разработанные алгоритмы приближенных аналитических решений нелинейных задач нестационарной теплопроводности для стержней различной конфигурации позволяют расширить область применения методов теории теплопроводности при изучении развития процесса усталостного разрушения элементов конструкций, разогревающихся вследствие высокочастотного циклического нагружения. С использованием алгоритмов возможно: учесть перераспределение напряженного состояния в стержне с температурой; учесть и оценить влияние амплитуды напряжений, частоты нагружения, условий теплообмена, геометрических размеров, формы стержня и других факторов.

**РЕЗЮМЕ**

Запропоновано метод розрахункового визначення довговічності елементів конструкцій, заснований на аналізі саморозігріву та його впливу на зміну резонансної частоти, амплітуди коливань елемента, його температури в небезпечному місці.

**SUMMARY**

The calculate method of definition the fatigue durability of elements of constructions which are warmed up owing to high frequency cyclic load and its influence on change of resistant frequency, amplitude of fluctuations of an element, its temperature in a dangerous place is offered.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Веселовский В. Б., Войцеховский Н. И. Расчет температурного поля циклически нагружаемого стержня // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1986. – №3. – С.51-53.
2. Веселовский В. Б. Тепловые режимы составных элементов конструкций летательных аппаратов // Тепломассообмен. Вычислительный эксперимент в задачах тепломассообмена и теплопередачи. – Минск, 1996. – С.37-41.
3. Веселовский В.Б. Сравнение методов решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности для стержня // Техническая механика. – 1999. – №1. – С.99-111.
4. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Б.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – К: Наук. думка, 1985. – 288с.
5. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. – К.: Наук. думка, 1971. – 375 с.

*Надійшла до редакції 20.05.2002 р.*

УДК 539.3

# ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

*В.Г.Ключникова, О.П.Проценко*
*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Украина.*

Трубчатые пространственно изогнутые цилиндрические оболочки, диаметр поперечного сечения которых значительно меньше их общей длины и радиусов кривизны осевой линии образуют класс трубопроводов, являющихся составными элементами многих конструкций. Поэтому важно разработать методы расчета таких конструкций. Ниже приведен численно-аналитический метод расчета динамических характеристик криволинейного трубопровода, описаны свойства и особенности спектров собственных частот и форм колебаний таких систем.

**1. Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим трубопровод пространственной конфигурации постоянного поперечного сечения, находящийся под действием внешних сил. Представим рассматриваемый трубопровод системой с переменными по длине параметрами, поскольку дополнительно к обычным параметрам (масса, жесткость, условия закрепления) он имеет характеристики формы. Внешние нагрузки, ориентированные по координатным осям, оказываются различно направленными относительно осевой линии составляющих элементов трубопровода, что неизбежно приводит к взаимосвязи изгибных и крутильных колебаний.

Для получения компактной системы разрешающих дифференциальных уравнений используем векторную форму записи как для условий динамического равновесия сил ($\vec{P}$) и моментов ($\vec{M}$), возникающих при действии возбуждающей нагрузки, так и для кинематических соотношений между векторами упругих деформаций ($\vec{\varepsilon}$), линейных ($\vec{U}$) и угловых ($\vec{\vartheta}$) перемещений [1, 2]. При выполнении принятых в приближенной теории стержней предположений (гипотеза Эйлера-Бернулли, нерастяжимость осевой линии) вектор упругих деформаций $\vec{\varepsilon}$ компонентами которого в связанной системе координат являются приращения кривизны и кручения деформированной оси, можно представить в виде

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{EI}[\vec{M} + \mu(\vec{M}\vec{\tau})\vec{\tau}], \tag{1}$$

де $\vec{\tau}$ – орт касательной к криволинейной оси; $E$ – модуль упругости; $I$ – полярный момент инерции; $\mu$ – коэффициент Пуассона. Возможность такого представления заимствована из работ [2, 3].

Исходная система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial s} = [\vec{\vartheta}\vec{\tau}], \quad \frac{\partial \vec{\vartheta}}{\partial s} = \vec{M} + \mu(\vec{M}\vec{\tau})\vec{\tau}, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = [\vec{V}\vec{\tau}], \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} = \frac{m_s L^4}{EI}\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad (0 \le s \le 1), \tag{2}$$

где

$$\bar{V} = \bar{U}/R, \quad \bar{\vartheta} = \bar{\theta}L/R, \quad \bar{M} = \vec{M}^* L^2/EIR, \quad \bar{P} = \vec{P}^* L^3/EIR, \quad s = S/L; \tag{3}$$

$R$ – радиус сечения; $L$ – общая длина; $m_s$ – погонная масса. Из структуры уравнений (2) видно, что колебания определяются формой оси и зависят от одного параметра $\mu$.

Для численного интегрирования уравнений (2) совместно с граничными условиями разработан алгоритм, основанный на сочетании метода пошагового поиска, обладающего высокой степенью точности, и практически точного метода дискретной ортогонализации. Оценкой точности алгоритма служит точность, с которой удовлетворяются граничные условия. При этом смещения и напряжения вычисляются с одинаковой точностью. Алгоритм обеспечивает автоматизацию расчета на всех этапах и является универсальным в отношении охвата классических вариантов граничных условий и геометрии пространственно изогнутой осевой линии. Численная реализация алгоритма выполнена для класса трубопроводов, осевая линия которых допускает аппроксимацию либо набором отрезков витка спиралей, либо состоит из прямолинейных и криволинейных отрезков, различно ориентированных в пространстве (рис. 1).

**2.Анализ численных результатов**. Систематизация и анализ результатов многочисленных расчетов дают возможность указать на некоторые общие особенности частотных спектров криволинейных трубопроводов.

Частотный спектр является неравномерным и обладает высокой (по сравнению с прямолинейным или плоским криволинейным трубопроводом такой же длины) плотностью. В частотном спектре содер-

© Ключникова В.Г., Проценко О.П.

жатся пары близких по величине частот. Сравнительный анализ собственных форм, отвечающих этим частотам, показывает, что одна из них соответствует преимущественно планарным колебаниям, а другая – преимущественно внеплоскостным. При этом число узлов собственной формы каждой из близких частот определяется порядковым номером пары, а не отдельной частоты, как это имеет место для прямолинейных трубопроводов. Возбуждение по одной координате вызывает колебания и по двум другим. Причем амплитуды этих колебаний сравнимы с амплитудой возбуждаемой компоненты, а на высокочастотных участках спектра нередко становятся доминирующими. Как известно, в случае прямолинейных трубопроводов такое явление может быть получено лишь при учете нелинейных эффектов. Частотный спектр плоских криволинейных трубопроводов распадается на два независимых подспектра: в плоскости осевой линии и по нормали к ней. Для плоских криволинейных трубопроводов при определенных условиях закрепления частот обнаружен эффект «пропущенных» частот, связанный с возможностью движения без деформации. Например, для плоского дважды изогнутого трубопровода с закреплением «шарнир – шарнир» отсутствует первая частота как при плоскостных, так и при внеплоскостных колебаниях; для единожды изогнутого с опорами «жесткая – шарнир» отсутствует первая частота при колебаниях из плоскости кривизны.

В качестве амплитудной характеристики поля напряжений, возникающих при вынужденных колебаниях, принята безразмерная величина интенсивности касательных напряжений

$$\sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 - \frac{1}{4}[l(s)M_x + m(s)M_y + n(s)M_z]^2}, \qquad (4)$$

где $l(s)$, $m(s)$, $n(s)$ – направляющие косинусы касательной к осевой линии.

Для иллюстрации на рис. 2 представлена резонансная кривая, отражающая характер изменения

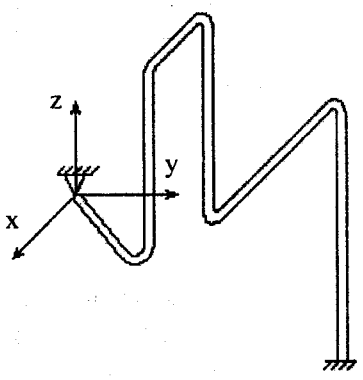



Рис. 1

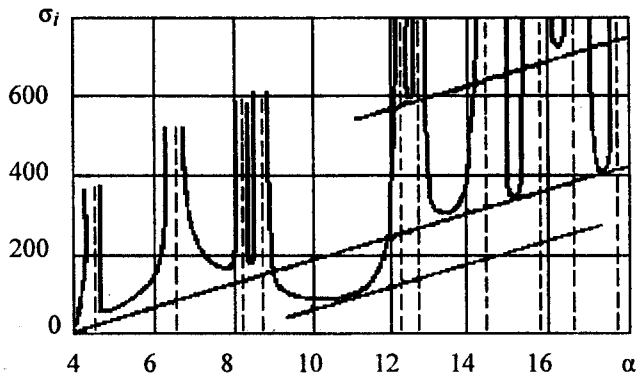



Рис. 2

максимального значения амплитуды интенсивности касательных напряжений $\sigma_{max}$ в зависимости от частоты возбуждения. $\alpha = \omega^2 m_s L^4 / EI$, где $\omega$ – размерная частота. Кривая построена для случая кинематического возбуждения криволинейного трубопровода пространственной конфигурации при жестком защемлении торцов. Как следует из рис. 2, ширина резонансных областей а также расположение их восходящих и нисходящих ветвей по отношению к резонансной частоте являются различными; низшей из пары близких собственных частот соответствует более узкая резонансная область; имеются чередующиеся узкие и широкие межрезонансные частотные диапазоны; существует несколько уровней локальных минимумов; с увеличением частоты возбуждения на интервалах из узких межрезонансных диапазонов амплитуда интенсивности касательных напряжений растет, а из широких уменьшается, оставаясь выше дорезонансных значений.

На конкретных примерах расчета криволинейных трубопроводов конфигурации с жестко закрепленными концами выявлены общие закономерности распределения вибронапряжений по длине при возбуждении на частотах из межрезонансных диапазонов и в окрестности низших резонансных частот.

В случае возбуждения на частотах из дорезонансных областей и в межрезонансных интервалах до третьей резонансной частоты наблюдается концентрация напряжений на участках длины, непосредственно примыкающих к сечению, где краевой эффект затухает (рис. 3, 4). С увеличением номера межрезонансной области максимальные пики напряжений сдвигаются к середине трубопровода. Возбуждение на частотах из широких межрезонансных областей приводит к выравниванию пиков волн напряжений по длине трубопровода, причем при этом их уровень остается ниже максимальных пиков интенсивности на-

пряжений для соседних узкополосых межрезонансных диапазонов (рис. 5, 6).

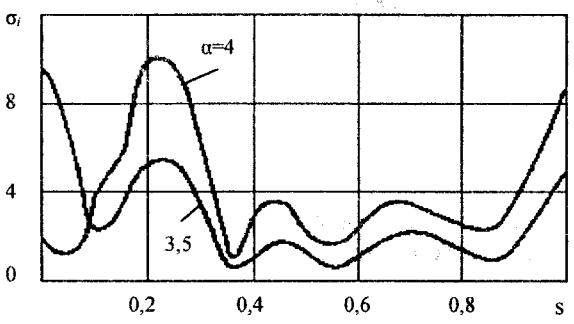


Рис.3

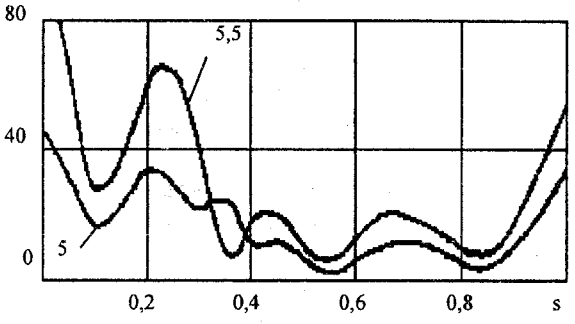


Рис.4

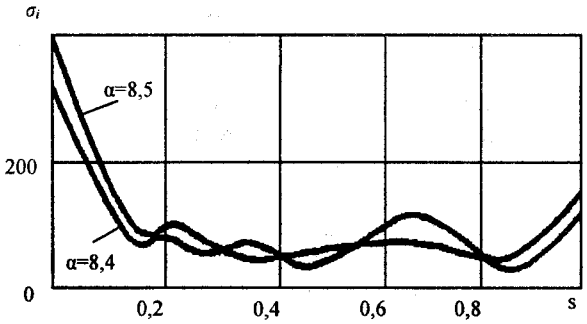


Рис.5

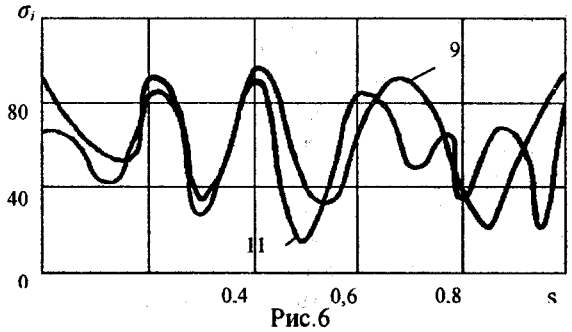


Рис.6

Для плоских криволинейных трубопроводов, находящихся под воздействием произвольно ориентированной нагрузки, наименьший уровень вибронапряжений достигается на тех частотах возбуждения, которые соответствуют точкам пересечения резонансных кривых для плоскостных и внеплоскостных колебаний

**РЕЗЮМЕ**

В рамках гіпотез класичної теорії стрижнів розроблено та реалізовано чисельно-аналітичний метод розрахунку динамічних характеристик оболонок криволінійних трубопроводів просторової конфігурації. Встановлено загальні властивості та специфічні особливості спектрів власних частот і форм. Виявлено закономірності змінювання вібронапружень в залежності від поступового зростання частоти прикладеного навантаження.

**SUMMARY**

Within the limits of hypotheses of classical theory of rods the numerically-analytical calculational technique for dynamic characteristics of curved pipelines shells in spatial configuration was developed and realized. The general properties and specific features spectra of eigenvalues and modes of vibrations were established. The regularities of the change of vibrational stresses were emerged according to frequency of applied load gradually increasing.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лурье А.И. О малых деформациях криволинейных стержней // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1941. – №3. – С.148-157.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. – М., Л: Гостехиздат, 1935. – 647 с.
3. Грудев И.Д. Колебания тонких криволинейных стержней // Вибрации в технике. – М.: Машиностроение, 1980. – Т.3. – С.18-36.
4. Ключникова В.Г., Проценко О.П. Исследование вибронапряжений, возникающих в криволинейных трубопроводах пространственной конфигурации при действии гармонических и нестационарных нагрузок. // Матер. Всесоюз. науч.-тех. совещания "Надежность трубопроводов электрических станций". – М., 1990. – С.37-39.

*Надійшла до редакції 07.05.2002 р.*

УДК 532.529

# ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ ДИСПЕРСНОЙ СМЕСИ

*Н.Е.Ткаченко, С.Е.Ткаченко*
*Институт механики НАН Украины, г. Киев*
*Национальний авиационный университет, г. Киев*

Строгой теории сред жидкость-частицы в настоящее время не существует. Используются различные модели, построенные на базе механики сплошной среды: модель двух сплошных сред, где силы взаимодействия между средами постулируются, или рассматривается движение одной частицы в жидкости [1–5]. В настоящей работе предлагается модель мелкодисперсной смеси жидкость-частицы, основанная на статистическом подходе для описания движения системы частиц и определения осредненных сил взаимодействия между фазами.

**Построение модели.** Рассматривается мелкодисперсная смесь – идеальная жидкость с частицами в жестком сосуде. Исследуется относительное движение мелкодисперсной смеси, вызванное импульсным воздействием на свободной поверхности жидкости.

Размеры частиц значительно меньше расстояний, на которых осредненные параметры фаз существенно изменяются. Силы вязкости жидкости учитываются лишь при ее взаимодействии с частицами. То есть, на отдельную частицу действуют сила тяготения, сила трения, сила Архимеда, сила, обусловленная ускоренным движением частиц относительно жидкости, сила Жуковского и случайная сила типа Ланжевеновского источника. Для описания движения частиц используется статистический подход, описанный в работах [6, 7]. Полагаем, что начальные условия для каждой частицы являются случайными величинами. Методами статистической механики [6, 7] строим кинетическое уравнение для описания движения частиц, а также систему уравнений переноса, характеризующих сплошную среду, которой заменяем систему частиц. Эти уравнения дают возможность в явном виде записать средние силы взаимодействия между фазами. Жидкость описывается системой уравнений гидродинамики идеальной жидкости с добавлением в правых частях уравнений осредненных сил взаимодействия между фазами.

Модели для описания движения системы частиц и жидкости строим на разных уровнях: систему частиц описываем на кинетическом уровне в фазовом пространстве одной частицы (средние величины, которые относятся к физическому пространству, определяются путем осреднения по фазовому пространству); жидкость описывается на гидродинамическом уровне в физическом пространстве. В нашем случае частицы занимают меньший объем чем жидкость. Средняя плотность $\rho$ сплошной среды, которой заменяем систему частиц, значительно меньше плотности жидкости без частиц $\rho_p$. Этот подход дает возможность описать переходные процессы, кроме того, для многих случаев невозможно задать начальные и граничные условия для каждой частицы, а их удобнее задавать для всей совокупности частиц на кинетическом уровне.

Отметим, что для частиц имеем два параметра релаксации: плотностной – $n_0 r_0^3$ и диссипативный – $\gamma$. Здесь $n_0 = \frac{N}{V}$, где $n_0$ – средняя плотность числа частиц при отсутствии внешних полей, $N$ общее число частичек, $V$ – весь объем, $r_0$ – приведенный радиус частиц. Параметр $\gamma$ определяет время релаксации по скоростям в диссипативной системе – время за которое устанавливается локальное равновесие системы по скоростям. (Для линейных сил трения $\gamma = \frac{k}{m}$, где $k$ – коэффициент сопротивления, $\overline{m}$ – приведенная масса частицы.) Можем сказать, что параметр $\gamma$ определяет ширину спектра флуктуаций скоростей частиц. Этот параметр определяет режимы движения системы частиц. Для времени $t$

$$0 \le t \le \frac{1}{\gamma} \tag{1}$$

имеем кинетический режим, на протяжении которого устанавливается локальное равновесие системы частиц по скоростям, а характеристики жидкости не изменяются. Движение системы частиц описывается уравнением типа уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка [7], в котором коэффициент при производных по импульсам от функции плотности распределения вероятностей зависит от взаимодействия между фазами.



©Ткаченко Н. Е., Ткаченко С.Е.

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \vec{q}}+\left[\vec{Q}-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \vec{q}}\right]\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \vec{p}}-\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(\frac{k}{m}\vec{p}\,\mathrm{F}\right)=D_k\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \vec{p}^{\,2}}, \tag{2}$$

где F – одночастичная функция плотности вероятности распределения частиц; $\vec{p}=\{p_1,p_2,p_3\}$ – импульс; $\vec{q}=\{q_1,q_2,q_3\}$ – координата в осредненном одночастичном фазовом пространстве; $\vec{Q}$ – непотенциальные силы межфазового взаимодействия; $\Pi_0$ – осредненная потенциальная энергия системы частиц; $D_k$ – коэффициент диффузии на кинетическом режиме. При изучении процессов в дисперсионной смеси нужно задать также начальные, граничные условия и условия нормирования для функции плотности вероятности.

При

$$\frac{1}{\gamma}\le t\le\frac{L^2}{D_g} \tag{3}$$

имеем диффузный режим. $L$ – максимальный линейный размер сосуда, где находится дисперсная смесь; $D_g$ – коэффициент диффузии на диффузном режиме. Этот режим определяет эволюцию системы в пространстве и времени.

Для системы частиц на диффузном режиме имеем кинетическое уравнение типа уравнения Энштейна-Смолуховского

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}+\frac{p_c}{m}\left(-\frac{1}{\gamma}\vec{g}+\frac{\vec{Q}}{\gamma m}\right)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \vec{q}}=D_g\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \vec{q}^{\,2}}. \tag{4}$$

Здесь $p_c$ – средний импульс частиц на кинетическом режиме. Средняя плотность сплошной среды, которой заменяем систему частиц определяется [7]

$$\rho=\frac{N}{V}\int \mathrm{F}\,\delta(\vec{x}-\vec{q}(t))d\vec{p}d\vec{q}\,, \tag{5}$$

$\vec{x}=\{x,y,z\}$ – координата физического пространства.

Аналогично определяем среднюю скорость частиц [7]

$$\vec{v}(\vec{x},t)=\frac{n_0}{n}\int\frac{\vec{p}}{m}\mathrm{F}\,\delta(\vec{x}-\vec{q}(t))d\vec{p}d\vec{q}\,, \tag{6}$$

где

$$n(\vec{x},t)=\frac{N}{V}\int\delta(\vec{x}-\vec{q}(t))d\vec{p}d\vec{q}\,. \tag{7}$$

Таким образом, для описания смеси жидкость-частицы имеем систему взаимосвязанных уравнений: кинетические уравнения (2) или (4) и система уравнений Эйлера, дополненная в правых частях осредненными силами взаимодействия, которые зависят от решений кинетических уравнений.

В кинетических уравнениях переменные $\vec{p},\vec{q}$ относятся к фазовому пространству, а переменные физического пространства $x,y,z$ входят как параметры.

**Постановка и метод решения задачи.** Пусть в некотором открытом параллелепипеде высоты $h$, ширины $2l_2$ и длины $2l_1$ в начальный момент времени находится идеальная, несжимаемая жидкость в состоянии гидростатического равновесия. Свободную поверхность жидкости принимаем за плоскость $XOY$ декартовой системы координат. Ось $OZ$ направим по вертикали вверх. В начальный момент времени в плоскости $Z=0$ вводятся частички с начальной средней скоростью $\vec{v}_0$ и средней плотностью $\rho_0$. Кроме того в этот же момент времени происходит импульсное изменение давления в плоскости $Z=0$. В этом случае дисперсная система жидкости-частицы описывается системой уравнений для жидкости

$$\mathrm{div}\vec{V}=0,\quad \rho_p=const \tag{8}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\frac{(1-a_1\rho)}{\rho_p}\frac{\partial P}{\partial \vec{x}}+\frac{k\rho}{m\rho_p}\left(\vec{v}-\vec{V}\right)+g\left(1-a_2\frac{\rho}{\rho_p}\right)\vec{E}\,, \tag{9}$$

$$\vec{E}=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}, \tag{10}$$

где $\vec{V}$ – скорость жидкости, $P$ – гидродинамическое давление, $a_1, a_2$ – коэффициенты, которые зависят от начальной плотности жидкости и частиц, а также кинетических уравнений (2) или (4) для частиц с учетом определения средних величин $\rho$ и $\vec{v}$. Начальные условия, которые характеризуют введение частиц в одной точке и с одной средней скоростью, удобно задавать для функции F

$$\mathrm{F}\big|_{t=0}=\delta(q_1-0)\delta(q_2-0)\delta(q_3-0)(p_1-0)(p_2-0)(p_3-\vec{m}v_0). \tag{11}$$

Граничные условия задаем для средних величин

$$\rho\big|_{Z=0}=\rho_0,\quad \vec{v}\big|_{Z=0}=\vec{v}_0. \tag{12}$$

Пристеночный кнудсеновский слой для частиц не учитываем. На стенках сосуда средняя скорость движения частиц равняется нулю. Для жидкости

$$\vec{V}_{\nu}\Big|_{\Gamma}=0\quad \vec{V}\Big|_{\substack{t=0\\Z=0}}=0, \tag{13}$$

$\nu$ - орт нормали к поверхности сосуда, $\Gamma$ - внутренняя поверхность сосуда.

$$P\big|_{\substack{t=0\\Z=0}}=P_0,\quad P=P_0+\Delta P \text{ при } Z=0,\ 0<t<\tau. \tag{14}$$

Функции $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$, $P=P(x,y,z,t)$ определяются в физическом пространстве. Они зависят только от средних величин, которые характеризуют движение частиц и выражаются через переменные физического пространства $(x,y,z,t)$. Наша задача сводится к переменным только физического пространства, то есть можем решить кинетические уравнения в общем виде, удовлетворяя начальным условиям (11). Зная решение кинетического уравнения, определим в общем виде и выражения для средних плотности $\rho$ и скорости $\vec{v}$ как функций переменных физического пространства. Величины $\rho$ и $\vec{v}$ зависят также от сил, обусловленных взаимодействием частиц с жидкостью. В дальнейшем приводим систему уравнений к безразмерному виду и опускаем черту над безразмерными переменными. Так как концентрация частиц в дисперсионной системе мала, то $\rho_0/\rho_{p0}<<1$. Эту величину будем считать малым параметром. Разложим систему уравнений, которые описывают движение дисперсионной смеси в ряды по малому параметру. В нулевом приближении взаимосвязанная система уравнений распадается на систему уравнений для жидкости (это уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости) и уравнение для частиц с известными начальными и граничными условиями.

Согласно работе [8] движение, которое возникает в несжимаемой идеальной жидкости за счет импульсного давления будет потенциальным и в момент времени непосредственно после прикладывания сил. В нулевом приближении для жидкости имеем уравнение Лапласа при известных начальных и граничных условиях, а также кинетические уравнения для частиц на кинетическом и диффузном режимах. Приведем здесь выражения для распределения частиц в нулевом приближении

$$0<t<1,\quad \rho^0=\rho_o=const,\quad v_x^0=v_y^0=0, v_z^0=v_0, \tag{21}$$

$$1<t<\frac{h^2\bar{m}}{k_5T},\quad \rho^0=\rho_0\exp\{-\frac{1}{4D_g\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\sum_{l=1}^{2}\Big[x_l+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{A_{ij}}{\omega_{4ij}}\sin\omega_{1i}x\sin\omega_{2i}y\,\mathrm{ch}\,\omega_{3ij}(z+z_0)\sin\omega_{4ij}t\Big]^2-\frac{1}{4D_g\left(t-\frac{1}{\gamma}\right)}\Big[z-h_0+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{A_{ij}}{\omega_{4ij}}\sin\omega_{1i}x\sin\omega_{2i}y\,\mathrm{sh}\,\omega_{3ij}\left(z+z_0\right)\sin\omega_{4ij}t\Big]^2\Bigg\} \qquad (22)$$

$k_5$ – постоянная Больцмана.

Ограничимся рассмотрением нулевого и первого приближений.

В представленной работе рассматривается движение частиц только до того периода, когда они достигают стенок сосуда.

**Анализ результатов.** На протяжении кинетического режима частицы двигаются с постоянной скоростью вдоль вертикальной оси сосуда. Средняя скорость частиц существенно не изменяется. На разброс скоростей влияют как процессы, которые происходят внутри системы частиц (взаимодействия частиц между собой, случайные влияния), так и процессы, которые обусловлены взаимодействием частиц с окружающей их средой. Процессы в среде, которая окружает частицы, происходят значительно медленнее чем флуктуации в самой системе частиц. На первом этапе, когда в системе частиц происходит установление состояния равновесия по скоростям, основное влияние на изменение скоростей движения частиц осуществляют возмущения в системе частиц, а не волновое движение жидкости. Период колебаний жидкости значительно больше продолжительности кинетического режима. За это время волновое движение жидкости не успевает повлиять на процесс релаксации частиц. Частицы стремятся к установлению состояния равновесия по скоростям на микроуровне. Средние характеристики движения частиц, в том числе и средняя скорость движения частиц, не успевают измениться за это время. Средняя скорость движения частиц направлена по оси $OZ$ ко дну сосуда и равняется по величине скорости впрыскивания частиц.

На диффузионом режиме частицы стремятся равномерно распределиться по всему объему. Но этому стремлению препятствует взаимодействие частиц с волновым движением жидкости. Средняя плотность частиц уменьшается с течением времени. Ее изменение существенно зависит от пространственных координат, при этом квадрат смещения частиц возрастает пропорционально времени. Частицы распространяются по всему объему сосуда, одновременно выполняя колебательное движение вместе с жидкостью. На экспоненциальные зависимости от координат накладываются гармонические составляющие, обусловленные взаимодействием частиц с жидкостью, которые стараются затормозить распространение частиц по всему сосуду. Быстрее всего частицы достигают дна сосуда, так как составляющая средней скорости частиц в этом направлении больше чем другие компоненты. Средняя скорость частиц является функцией координат и времени. Ее изменение в основном обусловлено волновым движением окружающей среды, силой веса и силой трения.

Построена полуфеменологическая модель дисперсной среды жидкость-частицы на основе статистического подхода. Исследовано движение системы жидкость-частицы, обусловленное вводом частиц в жидкость и прикладыванием импульсного давления на свободной поверхности жидкости. Найден закон распределения скорости и гидродинамического давления, а также средней плотности и средней скорости частиц на кинетическом и диффузном режиме.

**РЕЗЮМЕ**

На основі статистичного підходу побудоване кінетичне рівняння, яке дає змогу описувати рух системи частинок та визначати осереднені сили взаємодії між фазами. Модель для опису дисперсійної суміші будується на двох рівнях: кінетичному та гідродинамічному. При цьому враховується нерівноважність на мікрорівні. Цей підхід дозволяє описувати перехідні процеси в дисперсійній суміші. В системі є два параметра релаксації: густинний та дисипативний. Ці параметри визначають два режими руху дисперсійної суміші. Розглянуто рух дисперсійної суміші в жорсткій посудині. Визначені осереднені характеристики та вказані особливості руху дисперсійної суміші на кінетичному та дифузійному режимах.

**SUMMARY**

Kinetic equation, which allowed to describe motion of particle system and find mean forces of interaction between phases, is built on the base of the statistical approach. Model for dispersing mixture describing is built on two levels: kinetic and hydrodynamic. This approach allows to describe transients in the dispersing mixture. System has two parameters of relaxation: density and dissipate. These parameters determine two modes of motion of the dispersing mixture. The motion of the dispersing mixture in rigid vessel is considered. The mean characteristics are found and the features of motion of a dispersing mixture on kinetic and diffusion modes are indicated.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Бердичевский А.Л. Об осредненном описании жидкости, содержащей пузырьки газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1980. – №6. – С.72-79.
2. Буевич Ю.А. К модели снижения сопротивления при введении частиц в турбулентный поток вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1970. – №2. – С.114-120.
3. Гавин Л.Б., Шрайбер А.А. Турбулентные течения газа с частицами // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Механика жидкости и газа. – 1991. – Вып.25. – С.95-182.
4. Ивандаев А.И., Кутушев А.Г., Нигматулин Р.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Мех. жидкости и газа. – 1981. – Вып.16. – С.209-290.
5. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука. – 1978. – 336 с.
6. Кильчевский Н.А. Кильчинская Г.А. Ткаченко Н.Е. Аналитическая механика континуальных систем. – К.: Наук. думка. – 1979. – 188 с.
7. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. – М.: Наука. – 1975. – 352 с.
8. Кочин Н.Е. Кибель И.А. Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Физматгиз. – Т.1. – 1963. – 560 с.

*Надійшла до редакції 15.04.2002 р.*

УДК 533.6.013.42

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИНОК, НАХОДЯЩИХСЯ НА СВОБОДНОЙ И ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТЯХ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

*Ю.Н.Кононов*

В работе [1] исследована задача о свободных колебаниях двухслойной жидкости в прямом круговом цилиндре с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в [2] – плоская задача о свободных колебаниях двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругими пластинками на свободной и внутренней поверхностях. В настоящей статье результаты этих работ обобщены на случай цилиндрической полости произвольного поперечное сечение и пластинок произвольного очертания, то есть на пространственный случай.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух идеальных несмешивающихся жидкостей с плотностями $\rho_i$, заполняющих жесткий цилиндрический сосуд произвольного поперечного сечения $S$ до глубин $h_i$ $(i=1,2)$. На свободной поверхности верхней жидкости $(i=1)$ и на внутренней поверхности раздела двухслойной жидкости находятся упругие пластинки с растягивающими усилиями $T_i$ в срединной поверхности. Пластинки жестко закреплены по краю, считаются изотропными с изгибной жесткостью $D_i$, плотностью $\rho_{0i}$ и толщиной $\delta_{0i}$. Движение жидкостей и пластинок будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость $Oxy$ совпадает с плоскостью раздела жидкостей в невозмущенном положении, а ось $Oz$ направлена вдоль образующей цилиндрической полости противоположно вектору ускорения свободного падения $\vec{g}$.

Задачу о колебаниях указанной механической системы будем решать в рамках линейной теории. Совместные колебания жидкости и пластинок будем предполагать безотрывными, то есть без кавитации, а движения жидкостей считать потенциальными. Рассматриваемые краевые задачи имеют вид [1–3]

$$\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } \tau_i \quad (i=1,2); \quad \left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu}\right|_{\Sigma} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad (z=h_1); \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial W_2}{\partial t} \quad (z=0);$$

$$\rho_{0i}\delta_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i\Delta_1^2 W_i - T_i\Delta_1 W_i = P_i - P_{i-1} \quad (z=h_1,\ i=1; z=0,\ i=2);$$

$$W_i\big|_{\gamma} = \left.\frac{\partial W_i}{\partial\nu}\right|_{\gamma} = 0; W_i, \nabla W_i \prec \infty; \int_S W_i ds = 0. \tag{1}$$

Здесь $P_i = -\rho_i\left(\partial\Phi_i/\partial t + gz - Q_i(t)\right)$; $P_i$ и $\Phi_i$ – соответственно давление и потенциал относительной скорости жидкости в $\tau_i$-ой полости $(i=1,2)$, причем $P_0 = 0$; $W_i$ – прогиб $i$-ой пластинки; $\Delta_1 = \Delta - \partial^2/\partial z^2$; $\gamma$ – контур области $S$; $Q_i(t)$ – произвольная функция.

Будем исследовать собственные колебания рассматриваемой механической системы. В связи с этим положим

$$\Phi_i = e^{i\omega t}\phi_i(x,y,z), \quad W_i = e^{i\omega t}w_i(x,y). \tag{2}$$

В записанном выше выражении следует отличать нижний индекс $i$ от мнимой единицы.

Представим функции $\varphi_i$ и $w_i$ в виде [1-4]

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{1n}e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z}\right)\Psi_n(x,y), \quad \phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}\operatorname{ch}k_n(z+h_2)\Psi_n(x,y);$$

$$w_i = A_i w_{i1}(x,y) + B_i w_{i2}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_{in}\Psi_n(x,y), \tag{3}$$

©Кононов Ю.Н.

где собственные функции $\Psi_n$ и соответствующие им собственные числа $k_n$ находятся из следующей краевой задачи [5]

$$\Delta_1\Psi_n + k_n^2\Psi_n = 0, (x,y)\in S;\ \frac{\partial\Psi_n}{\partial\nu}\Big|_\gamma = 0;$$

$w_{i1}$, $w_{i2}$ - линейно независимые ограниченные решения однородного уравнения

$$D_i\Delta_1^2 w_{ij} - T_i\Delta_1 w_{ij} + \left(g\Delta\rho_i - \rho_{0i}\delta_{0i}\omega^2\right)w_{ij} = 0,\ (i,j=1,2),\quad \Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1},\ (\rho_0 = 0).$$

Собственные функции $\Psi_n$ после добавления к ним константы образуют на области $S$ полную и ортогональную систему функций. В дальнейшем будем полагать эту систему известной. Примеры ее построения можно найти в [5].

Подставив соотношения (2-3) в систему уравнений (1) и разрешив ее относительно $A_{in}, B_n, \tilde{C}_{in}$, получим следующую линейную однородную систему относительно неизвестных $A_i, B_i$

$$a_{11}A_1 + a_{12}B_1 + a_{13}A_2 + a_{14}B_2 = 0;\quad a_{21}A_1 + a_{22}B_1 + a_{23}A_2 + a_{24}B_2 = 0;$$
$$\tilde{C}_{11}A_1 + \tilde{C}_{12}B_1 = 0;\quad \tilde{C}_{21}A_2 + \tilde{C}_{22}B_2 = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$a_{11} = B_{11} + \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\alpha_{11n},\ a_{12} = B_{12} + \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\beta_{11n},$$
$$a_{13} = \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\alpha_{12n},\ a_{14} = \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\beta_{12n},$$
$$a_{21} = \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\alpha_{21n},\ a_{22} = \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\beta_{21n},\ a_{23} = B_{21} + \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\alpha_{22n},$$
$$a_{24} = B_{22} + \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\beta_{22n},\ B_{ij} = w_{ij}\big|_\gamma,\ B_n^* = \Psi_n\big|_\gamma,\ C_{ij} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial\nu}\Big|_\gamma,$$
$$\alpha_{11n} = -\tilde{\alpha}_{1n}\tilde{\Omega}_{2n},\ \beta_{11n} = -\tilde{\beta}_{1n}\tilde{\Omega}_{2n},\ \alpha_{12n} = \tilde{\alpha}_{2n}\left(\Omega_{2n} - \omega^2\right)\Big/\operatorname{ch}\kappa_{1n},$$
$$\beta_{12n} = \tilde{\beta}_{2n}\left(\Omega_{2n} - \omega^2\right)\Big/\operatorname{ch}\kappa_{1n},\ \alpha_{22n} = -\alpha_{2n}\tilde{\Omega}_{1n},\ \beta_{22n} = -\tilde{\beta}_{2n}\Omega_{1n},\ \alpha_{21n} = \tilde{\alpha}_{1n}\gamma_n,$$
$$\beta_{21n} = \tilde{\beta}_{1n}\gamma_n,\ \gamma_n = \rho_1\left(\Omega_{1n} - \omega^2\right)\Big/\left(a_n\operatorname{sh}\kappa_{1n}\right),\ \tilde{\alpha}_{in} = \alpha_{in}/\Delta_n,\ \tilde{\beta}_{in} = \beta_{in}/\Delta_n,$$
$$\tilde{\Omega}_{in} = \Omega_{in} - 2\rho_1\omega^2\Big/\left(a_n\operatorname{sh}2\kappa_{1n}\right),\ a_n = \rho_1\operatorname{cth}\kappa_{1n} + \rho_2\operatorname{cth}\kappa_{2n},\ \Omega_{in} = \delta_{in}\omega^2 - \tilde{\omega}_{in}^2,$$
$$\delta_{in} = 1 + \rho_{0i}\delta_{0i}\omega_{in}^2\Big/\left(\Delta\rho_i g\right),\ \beta_{21n} = \tilde{\beta}_{1n}\gamma_n,\ \gamma_n = \rho_1\left(\Omega_{1n} - \omega^2\right)\Big/\left(a_n\operatorname{sh}\kappa_{1n}\right),$$
$$\beta_{21n} = \tilde{\beta}_{1n}\gamma_n,\ \gamma_n = \rho_1\left(\Omega_{1n} - \omega^2\right)\Big/\left(a_n\operatorname{sh}\kappa_{1n}\right),\ \tilde{\alpha}_{in} = \alpha_{in}/\Delta_n,\ \tilde{\beta}_{in} = \beta_{in}/\Delta_n,$$
$$\tilde{\Omega}_{in} = \Omega_{in} - 2\rho_1\omega^2\Big/\left(a_n\operatorname{sh}2\kappa_{1n}\right),\ a_n = \rho_1\operatorname{cth}\kappa_{1n} + \rho_2\operatorname{cth}\kappa_{2n},\ \Omega_{in} = \delta_{in}\omega^2 - \tilde{\omega}_{in}^2,$$
$$\delta_{in} = 1 + \rho_{0i}\delta_{0i}\omega_{in}^2\Big/\left(\Delta\rho_i g\right),\ \tilde{\omega}_{in}^2 = \omega_{in}^2\left(1 + \left(D_i k_n^2 + T_i\right)k_n^2\Big/\left(\Delta\rho_i g\right)\right),\ \omega_{in}^2 = gk_n/a_n\Delta\rho_i,$$
$$\alpha_{in} = \int_S\Psi_n w_{i1}ds\Big/N_n^2,\ \beta_{in} = \int_S\Psi_n w_{i2}ds\Big/N_n^2,\ N_n^2 = \int_S\Psi_n^2 ds,\ \kappa_{in} = k_n h_i,$$
$$\Delta_n = \Omega_{1n}\Omega_{2n} - 2\omega^4\rho_1\Big/\left(a_n\operatorname{sh}2\kappa_{1n}\right). \tag{5}$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (4) получаем частотное уравнение собственных колебаний двухслойной жидкости с упругими пластинами на свободной и внутренней поверхностях

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $h_1 = \infty$, тогда $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{23} = B_{21}$, $a_{24} = B_{22}$ . В этом случае частотное уравнение (6) запишется следующим образом

$$(a_{12}C_{11} - a_{11}C_{12})(B_{21}C_{22} - B_{22}C_{21}) = 0. \qquad (7)$$

Соотношение (7) при $\rho_{02} = 0$ совпадает с уравнением собственных колебаний бесконечно глубокой однослойной жидкости [3]. Следовательно, при достаточно большой глубине заполнения верхней жидкости и безинерционной внутренней пластинки собственные частоты колебаний двухслойной жидкости не зависят от параметров этой пластинки и параметров нижней жидкости.

2. Пластинка находится только на свободной поверхности. В этом случае в (4) следует считать $A_2 = B_2 = 0$ и в соотношениях (5) положить $D_2 = T_2 = \rho_{02} = 0$. Тогда частотное уравнение (6) имеет вид

$$C_{12}a_{11} - C_{11}a_{12} = 0. \qquad (8)$$

Нетрудно показать, что если $\rho_2 \geq \rho_1$, то есть когда более тяжелая жидкость находится внизу сосуда, частотное уравнение (8) имеет положительные корни.

При $D_1 = \infty$ или $T_1 = \infty$ из соотношения (8) получаем известную собственную частоту колебаний внутренней поверхности $\omega^2 = \omega_{2n}^2$ [1].

3. Пластинка находится только на внутренней поверхности. Тогда в системе (4) следует положить $A_1 = B_1 = 0$ и в соотношениях (5) считать $D_1 = T_1 = \rho_{01} = 0$. В этом случае частотное соотношение (6) можно записать в виде $C_{22}a_{23} - C_{21}a_{24} = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* (C_{22}\alpha_{2n} - C_{21}\beta_{2n})\left(1 + \omega^2 \tilde{\Omega}_{1n}/\Delta_n\right) = 0. \qquad (9)$$

В первом приближении ($n = 1$) множество корней уравнения (9) содержит корни квадратного уравнения

$$(1 + \delta_{2n} - 4\rho_1/a_n \operatorname{sh} 2\kappa_{1n})x^2 - \left((1 + \delta_{2n})\omega_{1n}^2 + \tilde{\omega}_{2n}^2\right)x + \omega_{1n}^2\tilde{\omega}_{2n}^2 = 0, \qquad (10)$$

где $x = \omega^2$. Если $\rho_2 \geq \rho_1$, то это уравнение всегда имеет положительные корни.

При $\rho_2 \prec \rho_1$, т.е., когда более тяжелая жидкость находится вверху сосуда, уравнение (10) может иметь отрицательные корни и условие устойчивости собственных колебаний определяется соотношением

$$\rho_1 - \rho_2 \prec \left(D_2 k_n^2 + T_2\right)k_n^2 / g. \qquad (11)$$

Таким образом, для заданного поперечного сечения $S$ условие устойчивости (11) определяется только предварительным натяжением и изгибной жесткостью внутренней пластинки и не зависит от глубин заполнения и массы этой пластинки. Для случая прямоугольного канала аналогичное соотношение было получено в [2] с учетом двух членов разложения в уравнении (9).

4. Предположим, что изгибная жесткость $i$-ой пластинки $D_i = 0$. В этом случае для $i$-ой пластинки исключается из рассмотрения граничное условие $(\partial W_i/\partial \nu)\big|_\gamma = 0$. Так, при $D_1 = 0$ и $D_2 \neq 0$, $D_2 = 0$ и $D_2 \neq 0$ и $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$ частотное уравнение (6) записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ C_{11} & C_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (12)$$

В случае прямоугольного канала уравнение (6) совпадает с уравнением работы [2], а в случае прямого кругового цилиндра третье уравнение в формуле (12) совпадает с уравнением работы [1].

Проведенные численные исследования для прямого кругового цилиндра, прямоугольного канала и параллелепипеда подтвердили результаты аналитических исследований и позволили сделать следующие общие выводы:

– частотный спектр можно разбить на два набора собственных частот, соответствующих колебаниям пластинок на свободной и внутренней поверхностях;

– с увеличением натяжения или изгибной жесткости пластины, находящейся на свободной поверхности жидкости, существенно увеличиваются частоты колебаний первого набора и незначительно частоты колебаний второго набора. Аналогичная картина наблюдается и для пластинки, находящейся на внутренней поверхности;

– увеличение натяжения пластинок или изгибной жесткости и уменьшение их масс приводит к увеличению собственных частот, что находится в полном соответствии с теоремой Релея.

**РЕЗЮМЕ**

Дано розв'язання просторової задачі про вільні коливання двошарової рідини в циліндричному контейнері довільного поперечного перетину з пружними платівками на вільній та внутрішній поверхнях двошарової рідини. Одержано частотне рівняння та умови стійкості вільних коливань. Проведені аналітичні та чисельні дослідження вільних коливань для деяких окремих випадків.

**SUMMARY**

The solution of a three-dimensional problem describing the free oscillations of two-layer liquid in the cylindrical vessel of arbitrary cross-section with elastic plates, located on free and interior surfaces of two-layer liquid is given. The frequency equation and stability conditions for free oscillations of liquid and plates are received. Analytical and numerical analysis of free oscillations for some particular cases are carried out.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Кононов Ю.Н., Шевченко В.П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теорет. и прикладная механика. – 2001. – Вып.32. – С.158-163.
2. Кононов Ю. Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып.36. – С.170-176.
3. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Наука. – 1987. – 232 с.
4. Докучаев Л.В., Хорошилов В.С. Движение тела с жидкостью при наличии упругой пластины на ее поверхности // Прикладная механика. – 1971. – Т.7. – №4. – С.82-88.
5. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Наука. – 1968. – 532 с.

*Надійшла до редакції 20.03.2003 р.*

УДК 51-7+612.133

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ БАЛЛОННОЙ АНГИОПЛАСТИКИ

*О.К.Зенин, А.В.Лашин, В.В.Белоусов, Г.С.Кирьякулов, О.Л.Метлова*
*Донецкий государственный медицинский университет,*
*Донецкий национальный университет,*
*ЗАО "ДОРИС", г. Донецк*

Баллонная ангиопластика (БА) – один из методов лечения атеросклероза. Реализация процедуры БА состоит в том, что упругий баллон вводится в поврежденный сосуд с помощью катетера, а затем в него накачивается жидкость. Расширение баллона приводит к местному расширению стенки сосуда и появлению трещин. Успех процедуры зависит от многих случайностей. Недостаток трещин приводит к неэффективности выполнения процедуры, а присутствие крупных трещин может быть опасным для здоровья человека. В настоящее время нет надежного метода определения момента появления трещин и их размеров при реализации процедуры БА. Для этого используется получение сигналов акустической эмиссии от места образования трещин. Однако недостаток надежной физической теории [1] распределения акустических волн в биологических средах делает этот метод в большей или меньшей степени субъективным. В данной работе на основе теории больших деформаций [2] построена математическая модель процедуры БА и указан метод определения на её основании таких критических параметров как критическое давление жидкости в баллоне, значения напряжений и их распределение в стенке расширяющегося участка кровеносного сосуда, распределение энергии напряжения. Значения этих параметров были определены для брюшного отдела человеческой аорты.

**Материалы и методы.** Упругие свойства материала стенки крупных кровеносных сосудов человека характеризуются двумя свойствами: нелинейностью [3] и анизотропией [4], а точнее, ортотропией [5]. Первая координатная кривая параллельна оси кровеносного сосуда, вторая - направлена тангенциально к его радиусу, третья - вдоль радиуса.

Уравнение стационарного состояния деформированной искажённой области имеет вид

$$\tau_{,i}^{ij} + \Gamma^{j}_{ir}\tau^{ir} + \Gamma_{ir}^{\ i}\tau^{rj} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\tau_{ij}$ – тензор напряжений; $\Gamma_{ij}^{k}$ – числа Кристоффеля. Связь между $\tau_{ij}$ и натяжениями $\gamma_{ij}$, для случая несжимаемых искажённых областей, следующая:

$$\tau^{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}}\right) + qG^{ij}, \qquad (2)$$

где $W$ – функция специфической энергии напряжения; $q$ – скалярная функция координат точек деформированных областей; $\gamma_{ij}$ – тензор напряжений. Для случая, когда сосуды находятся под действием осевого расширения и внутреннего давления (постоянного по осям сосуда) получена следующая формула функции специфической энергии напряжения $W$ [4, 5]:

$$W = \alpha_1(\exp(\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)^2 + \alpha_3(\lambda_2-\lambda_3)^2 + \alpha_4(\lambda_3-\lambda_1)^2) - 1) + \\ + \alpha_5(\exp(\alpha_6(\lambda_1-\lambda_2)^2 + \alpha_7(\lambda_2-\lambda_3)^2 + \alpha_8(\lambda_3-\lambda_1)^2) - 1). \qquad (3)$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – степени удлинения сосудов по трем координатным кривым; $\alpha_i$ – эмпирические константы. Вследствие несжимаемости вещества стенки сосуда [8] в дальнейшем можно использовать только две независимых величины: $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Связь между компонентами тензора напряжения $\gamma_{ij}$ и степенями удлинения $\lambda_i$ для случая однородных напряжений следующая [2]:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda_i^{\ 2} - 1\right). \qquad (4)$$

Поскольку в нашей системе координат координатные кривые совпадают с основными осями тензора напряжения, компоненты $\gamma_{ij}$ для $i \neq j$ равны нулю. Показано [6], что в данном случае напряжения, действующие в стенке сосуда, следующие:

©Зенин О.К., Лашин А.В., Белоусов В.В., Кирьякулов Г.С., Метлова О.Л.

$$\sigma_3 = -\int_{\rho}^{R_2}\left(2\lambda_2\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}+\lambda_1\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)\frac{d\rho}{\rho},\quad \sigma_2 = \sigma_3 + 2\lambda_2\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}+\lambda_1\frac{\partial W}{\partial\lambda_1},$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2\lambda_1\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}+\lambda_2\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}. \qquad (5)$$

Здесь $\rho$ – расстояние от оси сосуда до точки, в которой напряжения вычислены; $R_2$ – внешний радиус деформированного сосуда. Таким образом, давление $P$, оказываемое жидкостью на внутреннюю стенку кровеносного сосуда, равно:

$$P = \int_{R_1}^{R_2}\left(2\lambda_2\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}+\lambda_1\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)\frac{d\rho}{\rho}. \qquad (6)$$

В процессе реализации процедуры БА форма кровеносного сосуда перестаёт быть цилиндрической и формулы [6, 7] к этому участку сосуда неприменимы.

Физический метод решения, который мы предлагаем, состоит в следующем. Рассматриваемый участок кровеносного сосуда делится на $N$ сегментов равной ширины плоскостями, перпендикулярными оси сосуда. На внутреннюю стенку такого сегмента действует давление, равное физиологическому, если внутри сегмента нет расширяющегося баллона, или давлению, оказываемому баллоном, если последний в сегменте присутствует. Мы предполагаем, что давление, созданное расширяющимся баллоном, является одинаковым для всех содержащих его сегментов. Кроме того, мы предполагаем, что в течение деформации границы между сегментами продолжают быть перпендикулярными к оси кровеносного сосуда. Если два смежных сегмента имеют различный средний радиус, между такими сегментами имеются тангенциальные напряжения, имеющие тенденцию увеличивать меньший сегмент и уменьшать больший.

Основная идея метода решения, предлагаемого авторами, заключается в следующем: при неопределенно маленькой толщине сегментов, тангенциальные напряжения, действующие вдоль радиуса смежных сегментов, могут быть заменены соответствующими объемными силами, действующими на каждый сегмент. В этом случае необходимо решить систему уравнений вида (1) с дополнительным членом, который принимает во внимание эти объемные силы. Эта система уравнений будет следующей:

$$\begin{aligned}
&{}^{(1)}\tau_{,i}^{ij} + \Gamma^{j}_{ir}\,{}^{(1)}\tau^{ir} + \Gamma^{i}_{ir}\,{}^{(1)}\tau^{rj} + {}^{(1)}f^{j} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&{}^{(k)}\tau_{,i}^{ij} + \Gamma^{j}_{ir}\,{}^{(k)}\tau^{ir} + \Gamma^{i}_{ir}\,{}^{(k)}\tau^{rj} + {}^{(k)}f^{j} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&{}^{(N)}\tau_{,i}^{ij} + \Gamma^{j}_{ir}\,{}^{(N)}\tau^{ir} + \Gamma^{i}_{ir}\,{}^{(N)}\tau^{rj} + {}^{(N)}f^{j} = 0.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь *ff* - компонент объемных сил. Только $f_3$ будет отлично от нуля.

Рассмотрим два смежных сегмента: $i$ и $i + 1$. Обозначим через $R_{init}$ средний радиус сегментов в недеформированном состоянии, а через $R_i$ и $R_{i+1}$ расстояния от оси кровеносного сосуда до точек в искаженных сегментах, которые в недеформированном состоянии были на расстоянии $R_{init}$ от оси кровеносного сосуда. Примем расстояние от оси сосуда до произвольной точки в стене такого недеформированного сегмента равным $r$, тогда расстояние $\rho$ до той же самой точки в искаженной доле будет следующее:

$$\rho_i = \sqrt{R_i + \left(r^2 - R^2_{init}\right)/\lambda_1} \qquad (8)$$

для $i$-го сегмента.

Расстояние $d$ между двумя точками неопределенно тонких сегментов $i$ и $i+1$, точками, которые в недеформированном состоянии имели те же координаты, будет равно:

$$d = \left|\rho_{i+1} - \rho_i\right|. \qquad (9)$$

Если эта величина отлична от нуля, между смежными сегментами имеются тангенциальные напряжения, эквивалентные некоторой объемной силе, которая будет всегда увеличивать давление внутри искаженного участка кровеносного сосуда. Ввиду этого уравнение (6) может быть записано так:

$${}^{(i)}p = {}^{(i)}p_0 + \Delta^{(i)}p. \qquad (10)$$

Здесь $i \in [-N/2+1, N/2-1]$; ${}^{(i)}p_0$ – давление на внутренней стене искаженного сегмента без учёта тангенциальных напряжений. Оно равно:

$$ {}^{(i)}p_0 = \int_{{}^{(i)}R_1}^{{}^{(i)}R_2} \left( 2\,{}^{(i)}\lambda_2 \frac{\partial W}{\partial\,{}^{(i)}\lambda_2} + {}^{(i)}\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial\,{}^{(i)}\lambda_1} \right) \frac{d\rho_i}{\rho_i}. \qquad (11) $$

$\Delta^{(i)}p_0$ – слагаемое, объясняемое присутствием тангенциальных напряжений между смежными сегментами. Оно равно:

$$ \Delta^{(i)}p_0 = \int_{{}^{(i)}R_1}^{{}^{(i)}R_2} 2\pi\rho \left[ \left( \frac{\rho_{i+1}-\rho_i}{\Delta l} \right) G + \left( \frac{\rho_{i-1}-\rho_i}{\Delta l} \right) G \right] d\rho_i, \qquad (12) $$

где $G$ – тангенциальный модуль эластичности стенки кровеносного сосуда; $\rho_{i-1}$ и $\rho_{i+1}$ - функции $\rho_i$ и $R_i$.

В стационарном состоянии ${}^{(i)}p$ равно физиологическому давлению $p_{phys}$, если внутри $i$ сегмента нет баллона или давлению $p_{bal}$, которое создается расширяющимся баллоном. Допустим, баллон находится внутри сегментов с номерами $i \in [-k, k]$. Получим систему из $N + 1$ уравнения:

$$ {}^{(i)}p\left( {}^{(i-1)}\lambda_2, {}^{(i)}\lambda_2, {}^{(i+1)}\lambda_2 \right) = p_{bal}\left[\eta(i+k)-\eta(i-k)\right] + p_{phys}\left[\eta(k-i)+\eta(i-k)\right], \qquad (13) $$

где $i \in [-N/2+1, N/2-1]$ и $\eta(x)$ определяется как:

$$ \eta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}. \qquad (14) $$

Запишем следующую систему уравнений:

$$ m\,{}^{(i)}\ddot{\lambda}_2 + \beta\,{}^{(i)}\dot{\lambda}_2 + \left( \frac{p\left( {}^{(i-1)}\lambda_2, {}^{(i)}\lambda_2, {}^{(i+1)}\lambda_2 \right)}{p_{bal}\left[\eta(i+k)-\eta(i-k)\right] + p_{phys}\left[\eta(k-i)+\eta(i-k)\right]} - 1 \right) = 0, \qquad (15) $$

где $i \in [-N/2+1, N/2-1]$. Легко видеть, что стационарное решение этого набора уравнений – одновременно решение нелинейной системы интегральных уравнений (10). С другой стороны набор уравнений (15) подобен набору уравнений, описывающих демпфирование колебаний связанных между собой генераторов с нелинейной силой возвращения, описываемой выражением, данным в скобках. Стационарное решение этой системы было найдено числовым интегрированием с начальными условиями ${}^{(i)}\dot{\lambda}_2 = 0$.

$$ {}^{(i)}p_0\left( {}^{(i)}\lambda_2 \right) = p_{bal}\left[\eta(i+k)-\eta(i-k)\right] + p_{phys}\left[\eta(k-i)+\eta(i-k)\right]. \qquad (16) $$

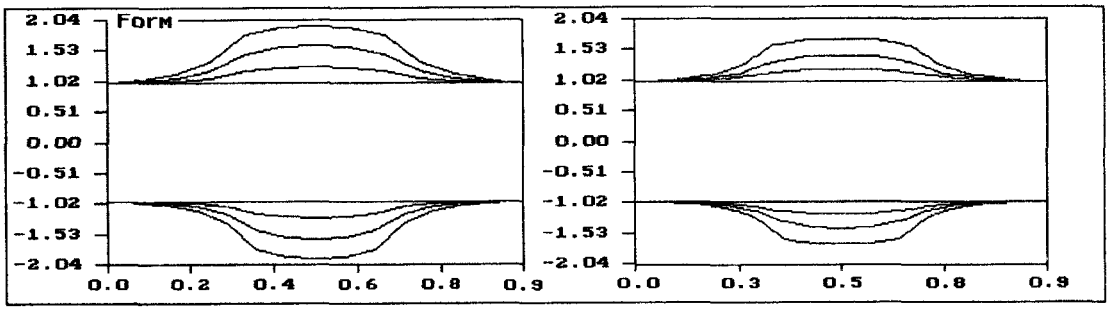
Интегрирование было выполнено до момента, когда амплитудой демпфирования колебаний можно пренебречь. После определения ${}^{(i)}\lambda_2$, значение напряжения может быть рассчитано по формулам (5).

**Результаты и обсуждение.** Для вычислений мы использовали функцию специфической энергии деформации, предложенной [6, 7] специально для брюшного отдела человеческой аорты. Все вычисления сделаны для двух возрастных групп: 17-35 лет и 36-57 лет.

Была проверена модель при длине сосуда меньшей, чем баллона. Максимальные расширения вдоль второй оси из нашего вычисления и из экспериментальных данных равны [6]: 94 % и (100±6) % для первой группы и 69 % и (75±5) % для второй. Дальнейшие вычисления были сделаны для баллона с длиной 0.01 м. Результаты вычислений показаны на рис. 1. Получается, что, как и при длинном баллоне, максимальные напряжения находятся на внутренней стене сосуда. Напряжения $\sigma_3$ отрицательные, следовательно, они не могут вызывать разрушение кровеносного сосуда. Поэтому, для предсказания момента разрушения сосуда необходимо знать только значение напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_2$.

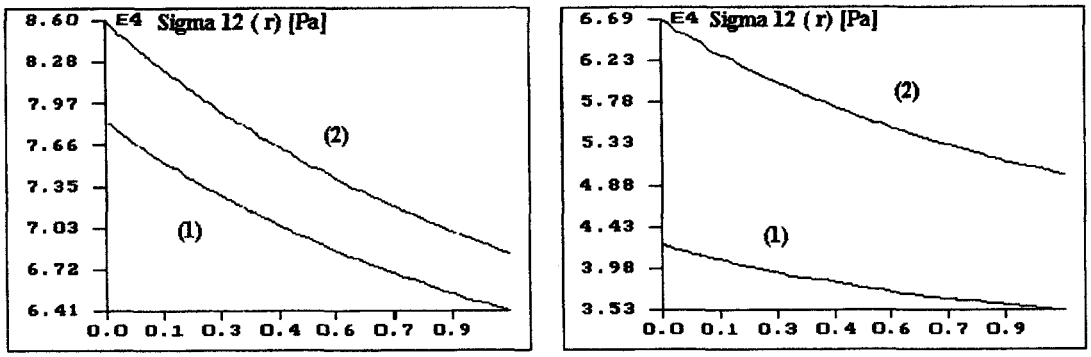
Распределение напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_2$ в среднем участке кровеносного сосуда показано на рис. 2–4.

На рис. 4 показано распределение напряжений при критическом значении давления жидкости внутри баллона. Критическое давление соответствует критическим напряжениям [6]: $\sigma_1$=1.422×10$^6$ *Па*,



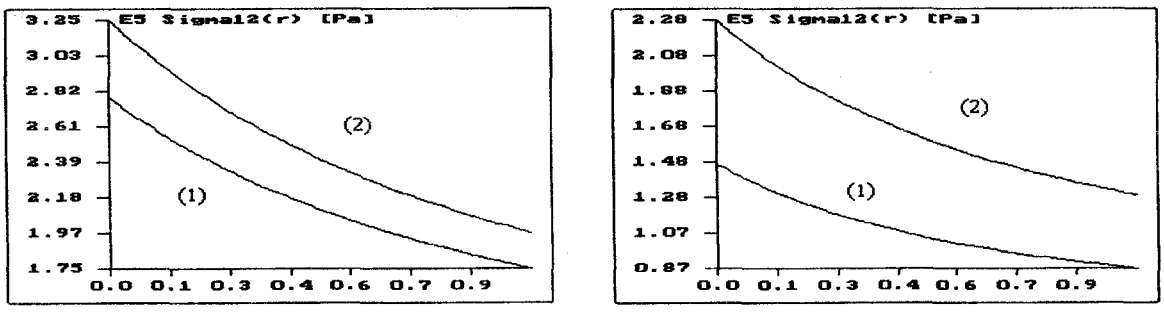

*а* *б*

Рис. 1. Форма оперируемого кровеносного сосуда в три последовательных момента в течение процедуры БА. Значение давления, соответствующего этим моментам - 10632, 21263 и 44918 Па для первой группы и 10632, 21263 и 48507 Па для второй.




*а* *б*

Рис. 2. Напряжения, как функции радиуса, в стене кровеносного сосуда при давлении равном 10632 Па *а* и *б* соответствуют первой и второй группам, соответственно.




*а* *б*

Рис. 3. Те же самые значения при давлении равном 21263 Ра.

$\sigma_2$=1.393×10$^6$ *Па* для первой группы и, $\sigma_1$=7.750×10$^5$ *Па*, $\sigma_2$=1.089×10$^6$ *Па* для второй. Критическое давление мы получили: $P_{crit}$=44918 *Па* для первой группы и $P_{crit}$=48507 *Па* для второй. Хотя критические напряжения для первой группы являются большими, чем для второй, критическое давление напротив является большим для второй группы. Для первой группы, когда $\sigma_2$ достигает критического значения, $\sigma_1$ - только 80 % максимального значения. Для второй в подобном случае $\sigma_1$ достигает 97 % его максималь-

ного значения. Следовательно, в отличие от второй группы, где и $\sigma_1$, и $\sigma_2$ важны для разрушения, для первой группы причиной разрушения будет только $\sigma_2$.

Исследование модели для брюшного отдела человеческой аорты, выполненное на людях различного возраста, ведет к парадоксальному заключению, что реализация процедуры БА у молодых людей связано с большей вероятностью постоперационных осложнений, чем у пожилых. Это связано с тем, что у молодых людей наравне с продольными трещинами возможны поперечные трещины. Присутствие поперечных трещин менее благоприятно для пациента из-за факта, что поперечные трещины могут привести к созданию в слое *intima* сосуда сужения просвета и образованию пробки.

**РЕЗЮМЕ**

Розглянуто математичну модель великих кровоносних судин людини для контролю за проведенням процедури балонної ангіопластики. На підвалинах моделі розраховано розподіл напруги в місті проведення операції та критичний тиск, створюваний балоном. Розрахунки були зроблені для черевного відділу аорти людей різного віку. Проведені розрахунки дозволяють зробити висновки щодо характеру потенційних ушкоджень внутрішнього шару кровоносних судин людей різного віку.

**SUMMARY**

The mathematical model of balloon angioplastic on man's large blood vessels has been constructed. On the basis of this model the distributions of stresses in operating site of the vessel, the deformation of this site, as well as critical pressure created inside this site by extending balloon and the distribution of the specific energy of the strain inside the wall of the blood vessel are calculated.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Hellan K. Introduction to Fracture Mechanics. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1981. – 398 p.
2. Green A.E., Adkins J.E. Large elastic deformation and non-linear continuum mechanics. – Oxford: Clarendon Press, 1960. – 492 p.
3. Vaishnav R.N., Young J.T., Janicki J.S., Patel D.J. Non-linear anisotropic elastic properties of the canine aorta // Biophys. J. – 1972. – Vol.8., №8. – P.1008-1027.
4. Fenn W.D. Tissue elasticity. – Washington: Remington J. W., 1957. – 458 p.
5. Hardung V. Die Bedeutung der Anisotropie und Inhomogenität bei der Bestimmund der Elastizität der Blutgefässe // Angiologica. – 1964. – Bd.1. – H.3. – S.141-153.
6. Пуриня Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. – Рига: Знатне, 1980. – 463 с.
7. Касьянов В.А., Кнетс И.В. Функция энергии деформации крупных кровеносных сосудов человека // Механика полимеров. – 1974. – №1. – С.122-128.
8. Carew T.E., Vaishnav R.N., Patel D.J. Compressibility of the arterial wall // Circulation Res. – 1968. – Vol.23., №1. – P.151-168.

*Надійшла до редакції 15.04.2002 р.*

УДК 532.5:518.5

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КАВИТАЦИИ

*О.А.Русанова, А.Н.Семко*

**Введение**

Характерной особенностью импульсных и волновых движений жидкости является возникновение в жидкости в определенные моменты времени растягивающих напряжений. Неспособность жидкостей выдерживать растягивающие напряжения (для воды около 0,4 ÷ 1,0 МПа [1, 2]) приводит к появлению в ней нестационарной кавитации. С этим явлением сталкиваются в различных технологических процессах, например: штамповка взрывом, калибровка оболочек и запрессовка труб подводным электрическим разрядом, получение импульсных высоконапорных струй жидкости и т.д. [3 - 6]. Игнорирование кавитации при расчете гидравлических установок может существенно исказить их параметры. Расчет течений жидкости с кавитацией осложняется тем, что рассматриваемые процессы являются существенно нестационарными, границы зоны кавитации не известны заранее и изменяются с течением времени, возможна ликвидация и повторное возникновение кавитации.

В настоящей работе рассматриваются две модели нестационарной кавитации, основанные на представлениях о сплошной среде: модель с постоянным давлением и модель с постоянной скоростью звука в зоне кавитации. Для расчета нестационарной кавитации предложена разностная схема, основанная на введении искусственной вязкости, которая не требует выделения границ кавитации и просто адаптируется для разных моделей кавитации. Результаты расчетов для разных моделей кавитации сравниваются между собой, с аналитическим решением для модельной задачи и с расчетами другими численными методами. Приводятся результаты расчетов конкретных гидроимпульсных устройств, движение жидкости в которых сопровождается кавитацией.

**1. Уравнения движения жидкости**

Одномерное движение идеальной сжимаемой жидкости описывается системой уравнений нестационарной газовой динамики, которую можно представить в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где $t$ и $x$ – время и координата; $u, p, \rho$ и $e$ - скорость, давление, плотность и внутренняя энергия единицы массы. Замыкается система (1) двучленным уравнением состояния жидкости

$$p = nB\left[(\rho/\rho_0)^n - 1\right] + \rho(n-1)e. \tag{2}$$

Для воды постоянные в уравнении состояния равны: $n = 7{,}15$, $B = 304{,}5$ МПа, $\rho_0 = 1000$ кг/м$^3$. Отметим, что в настоящее время уравнение состояния жидкости аналитически не получено, и на практике пользуются различными эмпирическими зависимостями, как, например, уравнение (2).

Как известно, при сжатии воды ударными волнами до 3000 МПа изменением энтропии можно пренебречь и считать течение изоэнтропическим [7 - 9]. Для описания изоэнтропических течений жидкости достаточно первых двух уравнений системы (1), которые замыкаются наиболее распространенным уравнением состояния в форме Тэта [8]

$$p = B\left[(\rho/\rho_0)^n - 1\right]. \tag{3}$$

Приведенные уравнения состояния воды не учитывают возможности возникновения кавитации. Так, например, уравнение (3) формально допускает существование больших отрицательных давлений (растяжений) до – 300 МПа, игнорирование которыми может существенно повлиять на картину течения.

**2. Модели кавитации**

Существует несколько моделей кавитации, основанных на представлениях сплошной среды [10]. В первой модели считается, что жидкость выдерживает небольшие растягивающие напряжения и в состоянии кавитации не действует на границу раздела «жидкость-кавитация». Расчеты по этой модели удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными по прогибу пластин и измерению давления на них [10]. Во второй модели, как и в первой, считается, что жидкость выдерживает небольшие растягивающие напряжения, но влияет на границу раздела кавитации. Влияние кавитации учитывается через плотность, которая считается постоянной, близкой к плотности насыщенного пара. Третья модель отли-



©Русанова О.А., Семко А.Н.

чается от второй тем, что плотность среды в области кавитации не остается постоянной, а определяется из закона сохранения массы.

На наш взгляд кавитация всегда действует на границу раздела «жидкость-кавитация», так как на границе кавитации ставится какое-то граничное условие. Оно может быть поставлено явно, в виде, например, граничных условий на контактной поверхности, когда эта граница раздела выделяется. Или неявно, когда расчет проводится без выделения границы методами сквозного счета. Через это граничное условие происходит влияние кавитации на параметры жидкости.

В этих моделях считается, что если жидкость выдерживает отрицательные давления и в ней возникает кавитация, то давление в жидкости остается постоянным, равным предельному отрицательному (критическому) давлению, которое выдерживает жидкость. Наверное, более правильным было бы считать, что при возникновении кавитации давление в жидкости повышается до некоторого положительного, например, давления насыщенного пара, который заполняет образующуюся каверну. Конечно, для образования пара необходимо некоторое время, которого может быть недостаточно, если кавитация существует в нестационарных процессах доли миллисекунд. В таких случаях наверно можно пренебречь паром и считать, что давление в жидкости равно критическому.

Эти модели основаны на экспериментальных фактах, согласно которым обычная вода практически не выдерживает растягивающих напряжений и "разрушается". Величина критического давления $p_{kr}$, при котором вода разрушается, составляет около 0,05 - 1 МПа [1, 2]. Причем, с уменьшением времени воздействия $p_{kr}$ возрастает, и, например, по данным [11] достигает около 0,25 МПа при времени воздействия 20 – 30 мкс. При стационарном растяжении специально обработанной воды удалось достичь растягивающих напряжений до 28 МПа [12]. Это состояние воды не устойчиво, и при малых возмущениях разрушается. Согласно теоретическим оценкам величина растягивающих напряжений для чистой воды может достигать 200 – 300 МПа [1]. Однако растягивающие напряжения, полученные в экспериментах, обычно не превышают 3 – 5 МПа [13].

По мнению авторов [1, 2, 12] капельная жидкость, которая специально не обработана, не может выдерживать растяжения и стремится к образованию областей, заполненных паром (каверн), которые расширяются и снижают отрицательное давление. Тем самым непрерывность жидкости нарушается, и для описания такого течения требуется определять положение и движение границ каверны.

Такой подход оправдан при описании стационарной кавитации, когда в жидкости образуется устойчивая каверна с неподвижными границами. Появление нестационарной кавитации связано с волнами разрежения, которые возникают, например, при отражении волн сжатия от свободной поверхности, или при торможении поршня в гидропушке [7, 8, 11, 14]. В этом случае границы кавитации подвижные, кавитация возникает в какой-то момент времени, развивается и исчезает. Рассчитать параметры течения в таких задачах, выделяя границы кавитации, очень затруднительно [14].

**2.1. Модель кавитации с постоянным давлением**

Будем считать, что смесь в зонах кавитации состоит из двух компонентов – жидкости и газа – и представляет собой однородную сплошную среду. Согласно экспериментальным данным [10] давление в зонах кавитации меняется мало, и его можно считать постоянным, равным $p_{kr}$. Условие возникновения кавитации можно записать в виде [10]

$$\int_{t_{kr}}^{t} p dt \le p_{kr} \Delta t, \tag{4}$$

где $p_{kr}$ – давление жидкости при статическом растяжении; $t_{kr}$ – время возникновения давления $p_{kr}$; $\Delta t$ - время, необходимое для разрыва столба жидкости давлением, равным $p_{kr}$. Из этого условия следует, что при увеличении отрицательного давления время возникновения кавитации уменьшается. Интегральное условие (4) сложно в реализации и на практике обычно пользуются более простым условием, не учитывающим время возникновения кавитации: кавитация возникает, если $p < p_{kr}$ (или $\rho < \rho_{kr}$). Кавитация в точке жидкости исчезает, если $\rho \ge \rho_{kr}$.

Таким образом, уравнение состояния (3) с учетом кавитации принимает вид

$$p = \begin{cases} B\left[(\rho/\rho_0)^n - 1\right], & \rho > \rho_{kr}, \\ 0, & \rho \le \rho_{kr}. \end{cases} \tag{5}$$

Из уравнений (1) следует, что частицы среды в зонах кавитации движутся, разлетаясь с постоянными скоростями и не взаимодействуя друг с другом ($du/dt = 0$). Скорость звука в такой среде равна

нулю: $a = \overline{\partial p / \partial \rho} = 0$. Как только плотность среды станет равной $\rho_{kr}$, она скачком переходит в другое состояние, и кавитация закрывается.

**2.2. Модель кавитации с постоянной скоростью звука**

Среда в зонах кавитации состоит из смеси частиц жидкости и пузырьков газа, поэтому она легко сжимается. Скорость звука в такой среде при давлениях близких к атмосферному, значительно меньше, чем в жидкости или воздухе, и в некоторых пределах изменения газовой фазы слабо зависит от общего содержания газа [15, 16]. Жесткость на сжатие воздушно-водяной смеси определяется давлением воздуха. Если это давление мало, то упругость смеси воздух – вода близка к упругости смеси в зонах кавитации и значение скоростей звука в указанных двух смесях близки по величине. Из этого следует, что в некоторых пределах изменения объемного содержания газа скорость звука в зонах кавитации можно считать постоянной, равной $a_{kr}$. Тогда уравнение состояния среды при кавитации можно записать в виде

$$p - p_{kr} = a_{kr}^2 (\rho - \rho_{kr}). \tag{6}$$

Если в уравнении (6) положить скорость звука $a_{kr}$ равной нулю, то получим первую модель кавитации.

Критическое значение скорости звука при кавитации можно выбрать из исследований распространения акустических волн в воде с пузырьками воздуха. Известно, что даже при небольшой концентрации пузырьков скорость звука в такой суспензии гораздо меньше скорости звука в воздухе [15].

Условия возникновения и закрытия кавитации остаются такими же, как и в I модели: если расчетное давление становится меньше критического, то в среде возникает кавитация. Отметим, что в воздушно-водяной смеси отрицательные давления (растяжения) возникнуть не могут по физическим соображениям. Поэтому критическое давление будет положительным и его можно принять, например, равным давлению насыщенного пара при данной температуре. Критическому давлению соответствует некоторая критическая плотность, которую удобно контролировать при расчетах. Таким образом, уравнение состояния для II модели кавитации принимает вид

$$p = \begin{cases} p_0 + a^2(\rho - \rho_0), & \text{если } \rho > \rho_{kr}, \\ p_{kr} + a_{kr}^2(\rho - \rho_{kr}), & \text{если } \rho \le \rho_{kr}. \end{cases} \tag{7}$$

Однако, из уравнения (6) следует возможность существования отрицательных давлений при уменьшении плотности в зоне кавитации. Этот факт можно отнести к недостаткам второй модели.

**2.3. Метод расчета течений жидкости с кавитацией**

При расчете течений жидкости с кавитацией методом характеристик необходимо выделять границы кавитации [14, 17] и сшивать на этих границах решения согласно условиям динамической совместности. При расчете методом Годунова требуется добавлять новые типы "распадов взрывов" [18], что существенно усложняет алгоритм расчета. Расчеты этими методами по разным моделям кавитации требуют существенных изменений алгоритма, т.к. изменяются условия на характеристиках и формулы для расчета распада произвольного разрыва.

Ниже предложена разностная схема VIS, основанная на введении искусственной вязкости в уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости, свободная от перечисленных недостатков. Для единообразного описания течения без выделения разрывов в уравнения движения (1) вводится вязкое давление $q$ (искусственная вязкость), как добавка к гидростатическому давлению $p$. Тогда уравнения одномерного движения в лагранжевой форме примут вид [19]

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial (p+q)}{\partial x}, \quad \frac{de}{dt} = -\frac{(p+q)}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{8}$$

Вязкое давление $q$ представлено суммой линейной и квадратичной вязкости [20]

$$q_1 = \begin{cases} \lambda_1 a \rho \Delta x \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, & \frac{\partial u}{\partial x} < 0; \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \ge 0, \end{cases} \qquad q_2 = \begin{cases} \lambda_2 \rho \Delta x^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, & \frac{\partial u}{\partial x} < 0; \\ 0, & \frac{\partial u}{\partial x} \ge 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – коэффициенты линейной и квадратичной вязкости, $a$ – местная скорость звука, $\Delta x$ – шаг разностной сетки. Квадратичная вязкость $q_2$ включается на ударных волнах, а линейная вязкость $q_1$

- только при сглаживании пульсаций. Экспериментально установлены оптимальные значения коэффициентов вязкости $\lambda_1 = 0{,}6$ и $\lambda_2 = 2$.

Аппроксимация уравнений (4) производится на лагранжевой сетке, узлы которой перемещаются со скоростью движения жидкости, по формулам

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{2\Delta t\left((p+q)^j_{i+1/2} + (p+q)^j_{i-1/2}\right)}{(\rho\Delta x)^j_{i-1/2} + (\rho\Delta x)^j_{i+1/2}}, \quad \rho^{j+1}_{i+1/2} = \rho^j_{i+1/2}\frac{\Delta x^j_{i+1/2}}{\Delta x^{j+1}_{i+1/2}},$$

$$e^{j+1}_{i+1/2} = e^j_{i+1/2} - \Delta t^j\left(\frac{p+q}{\rho}\right)^j_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x_{i+1/2}}\right)^{j+1/2},$$

$$x_i^{j+1} = x_i^j + u_i^{j+1/2}\Delta t,$$

где нижний индекс $i$ соответствует координате, а верхний $j$ - времени; $\Delta x_{i+1\,2} = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta t$ - шаги сетки по координате и по времени. Скорость определяется в узлах основной сетки с координатами $x_i$, а остальные параметры рассчитываются в узлах вспомогательной сетки, с координатами $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$. Полуцелые индексы соответствуют координате $x_{i+1\,2}$ и времени $t^{j+1\,2} = \left(t^{j+1} + t^j\right)/2$.

Предложенный метод опробован при расчете ряда модельных задач с кавитацией, некоторые из которых имеют аналитическое решение. Сравнение метода VIS с методом Годунова и сеточно-характеристическими методами показало полное совпадение результатов расчетов течений без кавитации для разных конфигураций ударных волн и волн разрежения. При возникновении кавитации наблюдалось различие результатов, т.к. при расчете другими методами учет кавитации очень затруднителен и поэтому не производился. При расчетах методом VIS контролировались балансы массы, импульса и энергии, которые выполнялись с точностью 0,1%.

**3. Расчет течений жидкости с кавитацией**

Модели кавитации тестировалась на различных задачах. Если показатель изоэнтропы $n = 3$ в уравнении состояния (3), то волны в жидкости становятся независимыми и для некоторых движений жидкости с кавитацией для I модели при $p_{kr} = 0$ можно получить аналитическое решение [21]. Для такой жидкости плотность пропорциональна скорости звука: $a = \sqrt{3(p+B)/\rho} = a_0\frac{\rho}{\rho_0}$.

Рассмотрим для случая $n = 3$ истечение жидкости в трубу такого же сечения. Неподвижная жидкость, сжатая в цилиндрическом объеме длиной $l$ до давления $p_1$, начинает истекать через открытый торец объема. Движение жидкости описывалось уравнениями (4) с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = 0,\ p(0,x) = p_1,\ \rho(0,x) = \rho_1,\ u(t,0) = 0,\ p(t,x_f) = p_a, \qquad (9)$$

где индексом "1" отмечены начальные значения, $x_f$ - координата свободной поверхности, $p_a$ - наружное давление. Начало координат помещено у закрытого торца объема. Критическое давление для возникновения кавитации $p_{kr} = 0$.

В момент времени $t_1 = l/a_1$ фронт волны разрежения достигнет стенки $x = 0$ и волна начнет отражаться от нее так же волной разрежения, еще больше понижая давление. К моменту времени $t_c = l/a_a$ ($t_c > t_1$) возле стенки в области $0 \le x \le x_c$, где $x_c = (a_1/a_a - 1)l$, возникнет кавитация. Распределение параметров в этот момент времени в зоне кавитации будет

$$u = \frac{a_a}{L}x,\ a = a_a \ \text{ при } \ 0 \le x \le x_c.$$

В дальнейшем зона кавитации расширяется, линейное распределение скорости в ней сохраняется, скорость звука равна нулю, а плотность убывает обратно пропорционально времени

$$u = \frac{x}{t},\ \rho = \rho_0\frac{L}{a_a t} \ \text{ при } 0 \le x \le u_a t \ \text{ и } t > t_c. \qquad (10)$$

Здесь $a_a$ - скорость звука при давлении $p_a$, $u_a = a_1 - a_a$ - скорость жидкости после расширения в волне разрежения до давления $p_a$. На границе кавитации график скорости имеет излом, а плотности и скорости звука – разрыв.

На рис. 1 и 2 приведены распределения скорости и плотности среды по координате $x$, полученные при расчете методом VIS на моменты времени $t_c$, $2t_c$, $3t_c$, $4t_c$ (кривые 1 – 4). Квадратиками отмечено аналитическое решение (10), а кружочками – распределение параметров, пересчитанное в автомодельных переменных на момент времени $4t_c$. Скорость, плотность и координата на графиках отнесены к характерным величинам $u_a$, $\rho_a$ и $l$.

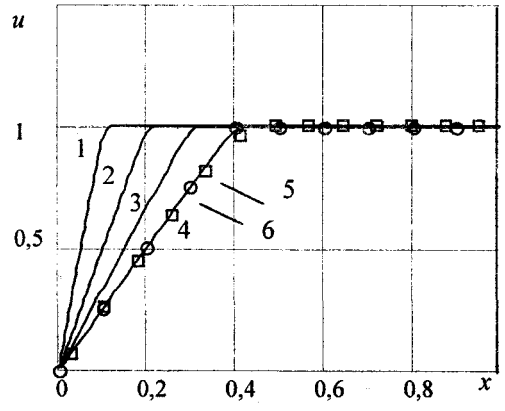



Рис. 1.

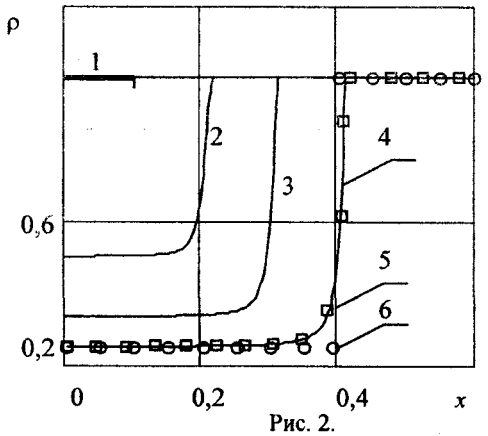



Рис. 2.

Из графиков видно, что распределение параметров остается подобным со временем. Численное решение хорошо совпадает с аналитическим. Можно выделить две зоны течения: зону с постоянными параметрами, соответствующую обычной жидкости и зону, в которой значение плотности, значительно меньше критической, которая соответствует кавитации. В зоне кавитации скорость среды в направлении стенки убывает по линейному закону, и частицы среды здесь движутся разлетаясь. Это приводит к тому, что со временем кавитация развивается и плотность среды уменьшается обратно пропорционально времени, как видно из решения (10).

Аналогичная задача решалась для воды, показатель изоэнтропы которой в уравнении состояния (5) $n = 7{,}15$. В этом случае задача аналитического решения не имеет, и решалась численно методом VIS. Полученное решение качественно такое же, как и для модельной жидкости.

Закрытие кавитации исследовалось на следующей модельной задаче. В цилиндрической трубе длиной $L$ находилась неподвижная жидкость при критическом давлении с плотностью, ниже критической. В начальный момент поршень с постоянной скоростью $w_p$ начинал сжимать жидкость. Движение жидкости описывалось уравнениями (8) с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = 0,\ p(0,x) = p_{kr},\ \rho(0,x) = \rho_1 < \rho_{kr},\ u(t,x_p) = w_p\ \ u(t,l) = 0.$$

При расчетах использовалась I модель кавитации с критическим давлением $p_{kr}$ = - 0,1 МПа. Начальное значение плотности $\rho_1$ = 950 кг/м$^3$. При ударе поршня формируется стационарная ударная волна, параметры которой можно рассчитать по условиям динамической совместности. В Таблице 1 приведены результаты численного расчета методом VIS и аналитического решения по условиям динамической совместности, отмеченные индексами "1" и "2" соответственно. Из сравнения результатов можно заключить, что численное решение хорошо совпадает с аналитическим и метод VIS позволяет рассчитывать не только развитие, но и закрытие кавитации.

Таблица 1

| $w_p$, м/с | $u_1$, м/с | $u_2$, м/с | $\delta_v$,% | $p_1$, МПа | $p_2$, МПа | $\delta_p$, % | $\rho_1$, кг/м$^3$ | $\rho_1$, кг/м$^3$ | $\delta_\rho$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 1230 | 1360 | 9 | 38 | 34 | 12 | 1016 | 1015 | 0,13 |
| 50 | 1400 | 1490 | 6 | 79 | 74 | 6 | 1032 | 1030 | 0,14 |
| 100 | 1570 | 1650 | 4 | 171 | 164 | 4 | 1063 | 1060 | 0,28 |
| 300 | 2040 | 2190 | 6 | 682 | 655 | 4 | 1165 | 1154 | 0,95 |
| 600 | 2850 | 3130 | 9 | 1929 | 1870 | 3 | 1248 | 1232 | 1,29 |

Исследовалось влияние критической скорости звука на параметры среды во II модели кавитации для жидкости с показателем изоэнтропы $n = 3$ в задаче о разлете сжатого столба жидкости с начальными и граничными условиями (9). На рис. 3 приведены распределения скорости (сплошные кривые) и плотности (пунктирные кривые) по координате $x$ на момент времени $2t_c$ для разных значений критической скорости звука: $a_{kr}$, $2a_{kr}$ и $4a_{kr}$ (кривые 1, 2 и 3 соответственно). За критическое значение $a_{kr}$ для модельной жидкости было взято минимальное значение скорости звука в газожидкостной суспензии воды, равное 30 м/с. Скорость, плотность и координата на графиках отнесены к величинам $u_a$, $\rho_a$ и $l$. Из графиков видно существенное влияние критической скорости звука на параметры среды при кавитации. При стремлении критической скорости звука к нулю распределение параметров для II модели совпадает с распределение, полученным для I модели кавитации.

На рис. 4 для сравнения приведены распределения скорости (кривые 1 и 2) и плотности (кривые 3 и 4) для развитой кавитации на моменты времени $2t_c$ (кривые 1 и 3) и $4t_c$ (кривые 2 и 4) для задачи о разлете сжатого столба жидкости с начальными и граничными условиями (9). Сплошные и пунктирные кривые – расчеты для I и II моделей кавитации. Критические параметры жидкости для моделей равны: $p_{kr}$=0 и $a_{kr}$=30 м/с. Скорость, плотность и координата на графиках отнесены к величинам $u_a$, $\rho_a$ и $l$.

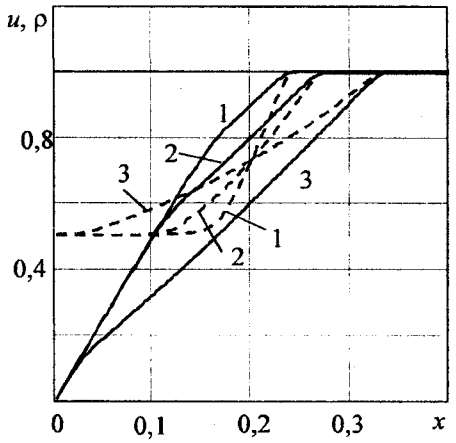



Рис. 3.

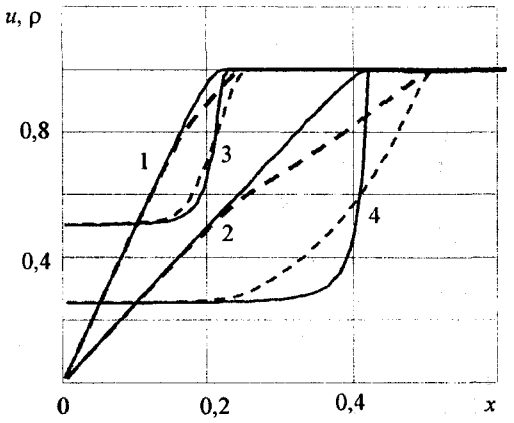



Рис. 4.

Из сравнения видно, что результаты расчетов по разным моделям полностью совпадают при наименьшей критической скорости звука. При увеличении скорости звука различие в распределении параметров увеличивается. Это различие связано с тем, что для II модели по кавитирующей жидкости могут распространяться волны, и на границе кавитации происходит их отражение, что приводит к изменению параметров среды. Излом на графике скорости для расчетов по II модели (пунктирные кривые 1 и 2) как раз и объясняется взаимодействием волн, распространяющихся по кавитации.

Метод VIS сравнивался с методом Годунова и методом характеристических направлений (МХН) [22, 23]. Для сравнения выбрана задача с кавитацией, ударными волнами, волнами разрежения и подвижными границами. Неподвижный столб жидкости длиной $L$ в круглой трубе разделен диафрагмой на две секции с высоким и низким давлением. С левого торца расположен тяжелый поршень, а с правого – свободная поверхность. В начальный момент диафрагма разрывается, а поршень с постоянной скоростью $w_p$ ударяет по жидкости. Движение жидкости описывалось уравнениями (8) с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = 0,\ 0 < x < L,\ \ p(0,x) = p_1,\ \rho(0,x) = \rho_1,\ \ 0 < x < L\,2,$$
$$p(0,x) = p_0,\ \rho(0,x) = \rho_0,\ L\,2 < x < L;$$
$$u(t,x_p) = w_p,\ \ p(t,x_f) = p_0,$$

где $x_p$ и $x_f$ – координаты поршня и свободной поверхности. Значения величин: $L$ = 4 м, $p_0$ = 0,1 МПа, $p_1$ =100 МПа, $w_p$ = 30 м/с. От диафрагмы вправо пойдет ударная волна, влево центрированная волна разрежения, от поршня вправо пойдет ударная волна.

На рис. 5 приведено распределение параметров на момент времени $t$ = 6 мс с учетом кавитации (кривые 1, 2 и 3) и без учета кавитации (кривые 4 и 5). Кривые 1 и 4 – скорость, 2 и 5 – давление, 3 –

плотность. Все величины безразмерные, отнесенные к $w_{p0}$, $p_1$, $\rho_0$ и $L$. Кружочками отмечены результаты расчетов методами Годунова и МХН без учета кавитации. Кавитация рассчитывалась по первой модели с постоянным критическим давлением, равным давлению насыщающего пара $p_{kr}$ = 0,002 МПа при комнатной температуре. Расчеты без учета кавитации проведены при условии, что вода выдерживает предельные растягивающие напряжения, которые допускает уравнение состояния (5) - около -300 МПа. Из сравнения видно, что игнорирование кавитации существенно искажает картину течения. К данному моменту времени давление во всей области равно критическому (кривая 2) и образовались три зоны *A*, *B* и *C* развитой кавитации, которые соответствуют значениям $\rho < \rho_{kr}$ на графике плотности (кривая 3). По середине в месте разрыва начальных параметров, возникла небольшая первая зона *A* кавитации. Вторая зона *B* кавитации образовалась при взаимодействии волн разрежения, отразившихся от свободной поверхности и от поршня на расстоянии около 0,8 *L*. Третья, последняя, зона *C* кавитации появилась возле поршня после отражения от него волны разрежения, идущей от свободной поверхности. Ширина зон кавитации и изменение плотности в них зависит от интенсивности волн разрежения. При расчетах без учета кавитации давление в жидкости везде меньше нуля, а возле поршня достигает отрицательных значений до -120 МПа. Распределение параметров для этого варианта наглядно отражает волновые процессы, происходящие в жидкости.

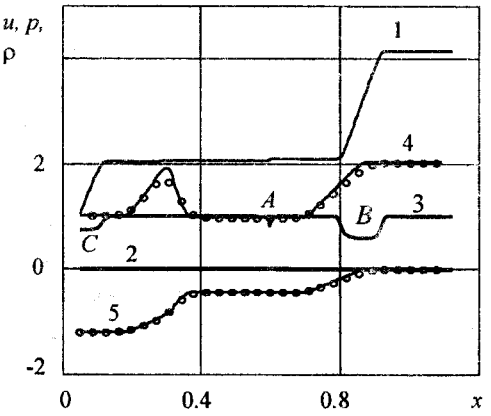


Рис. 5.

Сравнение методов VIS, Годунова и МХН показало полное совпадение результатов расчетов в области нормальной жидкости. В области кавитации результаты сравнить невозможно, т.к. методы Годунова и МХН не позволяют рассчитывать такие течения. Формально уравнение состояния воды Тэта допускает значение отрицательных давлений до $p_{kr}$ = -300 МПа. Расчеты течений при условии, что вода выдерживает большие отрицательные давлениями (например, до $p_{kr}$ = -100 МПа) разными методами полностью совпадают.

Метод VIS был применен для расчета конкретной гидроимпульсной установки, движение жидкости в которой сопровождается кавитацией. В работе [10] описана гидродинамическая импульсная пресс-пушка со следующими параметрами: радиус ствола $R_c$ = 56 мм; длина столба жидкости $L$ = 650 мм; масса поршня $m_p$ = 2,3 кг; скорость поршня в момент удара о жидкость $w_{p0}$ = 32 м/с. Закрытый торец установки абсолютно жесткий. Движение жидкости описывалось уравнениями (4) с начальными и граничными условия

$$u(0,x)=0,\quad p(0,x)=p_a,\quad \rho(0,x)=\rho_a,\quad 0\le x\le L;$$
$$u(t,x_p)=w_p,\quad u(t,L)=0,$$

где $x_p$ и $w_p$ – координата и скорость поршня, $p_a$ и $\rho_a$ - параметры воды при атмосферном давлении. Движение поршня описывалось дифференциальными уравнениями с начальными условиями

$$m_p\frac{dw_p}{dt}=-p(t,x_p)F_c,\quad \frac{dx_p}{dt}=w_p,\quad w_p(0)=w_{p0},\quad x_p(0)=0, \qquad (10)$$

где $F_c=\pi R_c^2$ - площадь поршня. При расчетах использовалась I модель кавитации с критическим давлением $p_{kr}$ = –0,1 МПа.

На рис. 6 а приведены зависимости давления на поршне и на торце и скорости поршня от времени (кривые 1, 2 и 3). Давление на поршне и на торце изменяется скачкообразно, что отражает волновые процессы в установке. Сразу после удара давление на поршне равно 50 МПа, что соответствует давлению гидроудара, рассчитанному по формуле Жуковского $p_y=\rho c w_{p0}$. Ударная волна, возникшая при ударе поршня, ослабляется волнами разрежения, испускаемыми поршнем при торможении. Вследствие торможения давление на поршне быстро уменьшается практически по экспоненциальному закону (пунктирная кривая 1). Через время $t_1=L/c$ = 0,43 мс ударная волна достигает торца, повышая здесь давление почти в два раза. Отразившись от торца к моменту времени $2t_1$, ударная волна возвращается к поршню, вызы-

вая его резкое торможение, которое сопровождается волнами разрежения, приводящими к появлению кавитации. Из графиков видно, что к моменту времени $t \approx 1$ мс на поршне, а затем при $t \approx 1{,}36$ мс и на торце возникает кавитация. Поршень к этому моменту движется в обратном направлении равномерно, его скорость меньше начальной. При расчете без учета кавитации давление на поршне и на торце становится отрицательным, достигая величины – 40 МПа. Отрицательное давление воды на поршне приводит к его повторному ускорению.

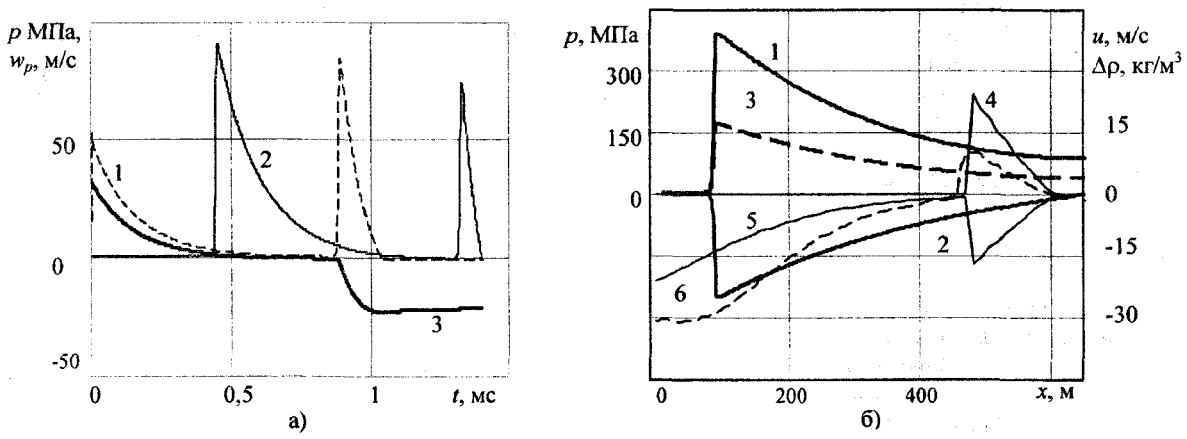



Рис. 6

На рис. 6 б приведены распределения скорости (кривые 1 и 4), давления (кривые 2 и 5) и плотности $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ (кривые 3 и 6) по длине установки на моменты времени 0,8 мс (кривые 1, 3 и 5) и 1,4 мс (кривые 2, 4 и 6) после отражения волны от закрытого торца, а затем от поршня. Распределение параметров наглядно демонстрирует волновой характер процесса, описанный выше. Возле поршня возникает развитая кавитация, плотность среды здесь уменьшается до 970 кг/м$^3$ при критическом значении $\rho_{kr}$ = 995,4 кг/м$^3$.

**Заключение**

Рассмотрено несколько моделей нестационарной кавитации, основанных на представлениях о сплошной среде. Подробно проанализированы две модели кавитации: с постоянным давлением и постоянной скоростью звука. Для расчета одномерных нестационарных течений жидкости с кавитацией предложена разностная схема с искусственной вязкостью, которая в отличие от других численных методов не требует выделения границ кавитации и легко адаптируется к различным моделям кавитации. Результаты расчетов для разных моделей кавитации сравниваются между собой и с аналитическим решением для модельных задач, которые сопровождаются эволюцией кавитации: возникновением, развитием и исчезновением. Показано, что при уменьшении критической скорости звука для второй модели кавитации, результаты расчетов по обеим моделям полностью совпадают. Сравнение методов VIS, Годунова и МХН показало полное совпадение результатов расчетов до образования кавитации. Приведены результаты расчетов гидроимпульсной установки, движение жидкости в которой сопровождается кавитацией. Показано, что пренебрежение кавитацией существенно искажает физику процесса и количественные значения параметров.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке фонда CRDF Project #: UE2-2441-DO-02.

**РЕЗЮМЕ**

Розглядаються декілька моделей нестаціонарної кавітації, що грунтуються на уявленнях про суцільне середовище. Докладно проаналізовані дві моделі кавітації: з постійним тиском та постійною швидкістю звука. Для розрахунку одномірних нестаціонарних течій рідини з кавітацією запропонована різницева схема зі штучною в'язкістю, яка на відміну від інших чисельних методів не потребує виділення межі кавітації та легко адаптується до різних моделей кавітації. Результати розрахунків для різних моделей кавітації порівнюються між собою та з аналітичним розв'язанням для модельних задач, які супроводжуються еволюцією кавітації: виникненням, розвитком та зникненням. Порівняння методів VIS, Годунова и МХН довело повний збіг результатів до виникнення кавітації. Доведено, що при зменшенні критичної швидкості звука для другої моделі кавітації, результати розрахунків для обох моделей повністю співпадають. Наведено результати розрахунків гідроімпульсного приладу, рух рідини в якому супроводжується кавітацією. Доведено, що нехтування кавітацією суттєво спотворює фізику процесу і кількісне значення параметрів.

**SUMMARY**

Some models of the unsteady cavitation based on representations about a continuous medium are considered. Two models of cavitation that are based on a constancy of pressure and the sound speed in the cavitation zone are analyzed in details. A numerical scheme with artificial viscosity for calculation of one-dimensional unsteady currents of a liquid with cavitation is offered. Unlike other numerical methods, it does not demand allocation of cavitation borders and easily adapts for various models of cavitation. Results of calculations for different models of cavitation are compared. It is known the analytical decision for modeling problems which evolution of cavitation (occurrence, development and disappearance). Comparison of methods VIS, Godunov's and MXH has shown full concurrence of results of calculations before formation of cavitation. The result of numerical calculations are compared to it. It is shown, the results of calculations on both models completely coincide, if critical speed of a sound for the second model of cavitation decreases. The calculation results for hydro-pulse installations are given. It is shown, that the neglect of cavitation deforms physics of process and quantitative values of the parameters.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Биркгоф Г., Э.Сарантонелло Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1964. – 640 с.
2. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хеммит Ф. Кавитация.– М.: Мир. – 1974. – 687 с.
3. Анучин М.А., Антоненков О.Д., Жбанков Ю.Н. Штамповка взрывом. – М.: Машиностроение, 1972. – 149 с.
4. Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве.– Л.: Судостроение, 1967. – 387 с.
5. Мазуровский Б.Я., Сизев А.Н. Электрогидравлический эффект в листовой штамповке. – К.: Наук. думка, 1983. – 192 с.
6. Атанов Г.А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К.: Вища школа, 1987. – 155 с.
7. Коул Р. Подводные взрывы. – М., ИЛ, 1950. – 495 с.
8. Яковлев Ю.С. Гидродинамика взрыва. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 316 с.
9. Физика взрыва / Под ред. К.П.Станюковича. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
10. Галиев Ш.У. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. – К.: Наукова думка. – 1988. – 264 с.
11. Гавриленко Т.П., Топчиян М.Е. Исследование динамической прочности воды на разрыв // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1966. – №4. – С.172-174.
12. Briggs L.I. Limiting negative pressure of water // J. Appl. Phys.– 1950, vol.1, No.7. – P.721-722.
13. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.].
14. Атанов Г. А. Расчет течения с отколами в гидропушке // Изв. ВУЗов СССР. Энергетика. – 1974. – №5. – С.108-113.
15. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
16. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В 2 ч. – М.: Наука, 1987. – Ч.1. – 464 с. – Ч.2. – 360 с.
17. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. матем. ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова. – М., 1960. – Т.58. – 150 с.
18. Атанов Г.А. Обобщение метода С.К.Годунова на расчет течений с отколом // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1978. – №6. – С.1607-1612.
19. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
20. Уилкинс М.Л. Расчет упруго пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С.212-263.
21. Станюкович К.П. Неустановившееся движение сплошной среды. – М.: Наука, 1971. – 600 с.
22. Атанов Г.А. Эффективный метод численного решения нестационарных уравнений газовой динамики . – Донецк, 1988. – 24 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 10.08.88, N1879 – Ук88.
23. Семко А.Н. О влиянии сжимаемости жидкости на параметры гидропушки // Инженерно-физический журнал. 2001. –Т.74. – №1. – С.1-5.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

УДК 532.54

# СТАТИКА И ДИНАМИКА ОБЪЕМНОГО ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРИВОДА ВЕНТИЛЯТОРА ОХЛАЖДАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ТРАНСПОРТНОЙ МАШИНЫ

*А.А.Коваленко, В.И.Соколов, Е.Н.Кондауров, К.М.Дядичев*
*Восточноукраинский национальный университет, г. Луганск*

Расход мощности на привод вентилятора охлаждающей системы двигателя внутреннего сгорания составляет от 2 до 7 % мощности двигателя [1]. Использование систем автоматического управления, поддерживающих оптимальное значение температуры теплоносителей, позволяет сократить эти расходы и, тем самым, повысить эффективность работы транспортного средства. При этом система управления может быть выполнена с использованием различных средств автоматики. Среди них гидравлический привод с объемными гидромашинами постоянной производительности обладает рядом преимуществ. Прежде всего, габариты и вес привода гораздо меньше, чем у приводов других типов, что является немаловажным фактором для транспортной машины. Кроме того, гидравлический привод обладает свободой компоновки, у него легко реализуется как аналоговое, так и дискретное регулирование частоты вращения вала мотора, а следовательно, и температуры теплоносителя [2, 3]. Именно такая схема охлаждения использована на тепловозе ТЭП75 (рис.1). Учитывая это, в работе поставлена цель исследовать статические и динамические характеристики гидравлического привода вентилятора.

Схема экспериментальной установки гидравлического привода вентилятора охлаждающей системы представлена на рис. 2. Объемный насос 2 соединен непосредственно с валом двигателя 1, на валу гидромотора 5 установлен вентилятор 7. Предохранительный клапан 3 предохраняет систему от перегрузки. Два регулируемых дросселя a и b установлены параллельно и последовательно с гидромотором. Эти дроссели имитируют регуляторы температуры и позволяют исследовать соответственно две схемы регулирования – с последовательной и параллельной установкой температуры в системе охлаждения. Кроме того, на экспериментальном стенде установлены расходомеры 6 и манометры 8.

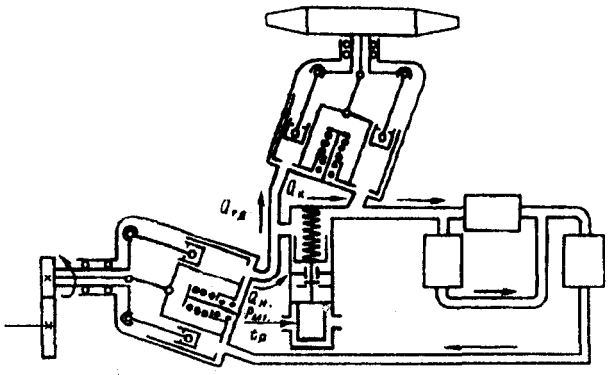


Рис. 1. Схема гидропривода вентилятора тепловоза ТЭП75.

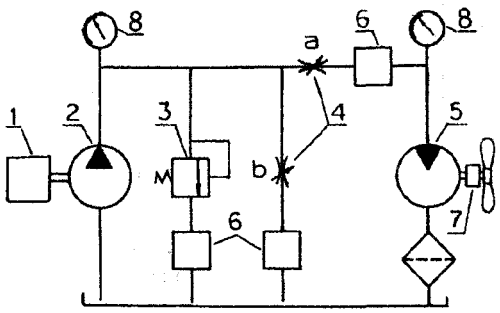



Рис.2. Схема экспериментальной установки

При сравнении эффективности различных схем предполагалось, что потери в гидравлических линиях пренебрежимо малы, а гидромотор и насос – идеальны. Кроме того, при расчетном режиме работы привода расход насоса и мотора одинаков.

Связь между угловой скоростью вентилятора $n$ и его моментом $M_в$ (момент нагрузки) [4]

$$M_в = M_0 + an^2 \cong an^2, \qquad (1)$$

где $M_0$ - момент трения в подшипниках, который обычно пренебрежимо мал по сравнению с полезной нагрузкой.

Относительная мощность, потребляемая вентилятором (отнесенная к мощности на расчетном режиме),

$$\bar{N}_в = \frac{N_в}{N_0} = \frac{nM_в}{n_0 M_{в0}} = \bar{n}^3, \qquad (2)$$

где $\bar{n} = n/n_0$ - относительная угловая скорость вентилятора.

©Коваленко А.А., Соколов В.И., Кондауров Е.Н., Дядичев К.М.

Для схемы с регулятором, установленным последовательно гидродвигателю (схема а), давление перед предохранительным клапаном постоянно и определяется его настройкой, поэтому мощность, потребляемая системой охлаждения, также постоянна. В этом случае относительные потери мощности

$$\bar{N}_n = 1 - \bar{n}^3. \qquad (3)$$

Когда регулятор установлен параллельно гидродвигателю (схема b), давление в линии нагнетания не постоянно и всегда ниже, чем давление в расчетном режиме. Его величина определяется моментом нагрузки $\bar{p} = \bar{n}^2$.

Относительный расход через гидромотор зависит от его угловой скорости $\bar{Q}_M = \bar{n}$ и потери энергии в системе гидропривода

$$\bar{N}_n = (1 - \bar{n})\bar{h}^2. \qquad (4)$$

Сравнение уравнений (3) и (4) показывает, что потери в схеме b всегда меньше, чем в схеме а. Этот вывод подтвержден экспериментально (рис. 3).

Таким образом, потери энергии в системе регулирования гидропривода с нерегулируемыми гидромашинами и регулятором, установленным параллельно двигателю, не превышают 15 % от номинальной мощности насоса (мощности при расчетном режиме).

Важными требованиями к приводу вентилятора, которые в значительной степени определяет его работоспособность, является требования к его динамическим характеристикам. Математическая модель привода (рис. 4), позволяющая рассчитать время переходного процесса и изменение давления в линии нагнетания включает:

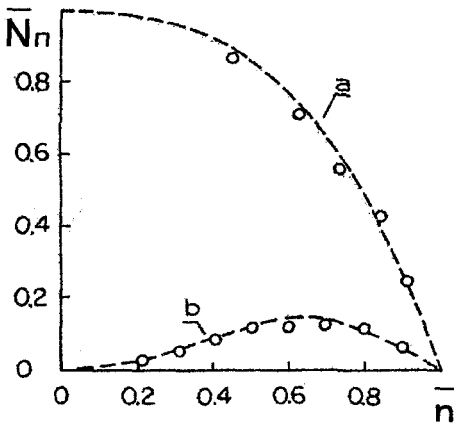



Рис. 3. Потери мощности при различных схемах подключения регулятора.

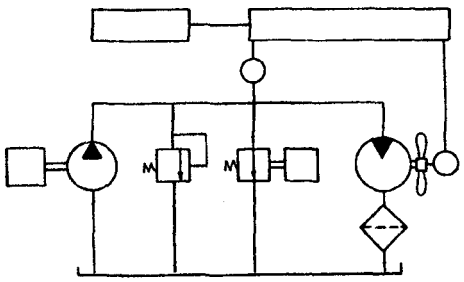


Рис. 4. Принципиальная схема подключения вентилятора.

1. Уравнение, связывающее температуру теплоносителя и выходной сигнал датчика температуры

$$T_1 \frac{d\bar{h}}{dt} + \bar{h} = \bar{\theta}, \qquad (5)$$

где $T_1$ - постоянная времени датчика, зависящая от условий теплообмена между средой и корпусом датчика; $\bar{h} = \frac{h}{h_{max}}$ - относительное перемещение штока датчика; $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{max}}$ - относительная температура теплоносителя.

2. Зависимость площади проходного сечения клапана управления от перемещения золотника

$$\bar{f} = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar{h} \le \Delta_1; \\ \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2}\bar{h} - \frac{1}{\Delta_1 - \Delta_2}, \text{ если } \Delta_1 < \bar{h} < \Delta_2; \\ 0, \text{ если } \Delta_2 \le \bar{h}. \end{cases} \qquad (6)$$

В этом выражении $\bar{f}$ - относительная площадь проходного сечения клапана, а $\Delta_1$ и $\Delta_2$ диапазон изменения перемещения.

Уравнение (6) нелинейное и представляет собой одну из типичных нелинейностей типа ограничения.

3. Уравнение неразрывности для гидравлической системы

$$Q_Н - Q_М - Q_С - Q_{УТ} = C\frac{dp}{dt}.$$

Здесь $Q_Н$, $Q_М$, $Q_С$ и $Q_{УТ}$ - расход насоса, мотора, через клапан управления и утечек соответственно; $C$ - акустическая емкость гидравлической линии [5]; $p$ - давление перед клапаном управления.

В относительных величинах уравнение неразрывности будет иметь вид

$$1 - \bar{Q}_М - \bar{Q}_С - \bar{Q}_{УТ} = T_2\frac{d\bar{p}}{dt}. \qquad (7)$$

Расходы нормированы по отношению к подаче насоса, а давление – по отношению к максимальному в системе.

4. Для объемных гидравлических машин расход утечек пропорционален давлению нагнетания [6]. В относительных величинах

$$\bar{Q}_{УТ} = k_1\bar{p}, \qquad (8)$$

где $k_1$ - постоянный коэффициент, определяемый типом машины.

5. Расход рабочей жидкости через мотор пропорционален его частоте вращения, или в относительных переменных

$$\bar{Q}_М = \bar{n}. \qquad (9)$$

6. Расход жидкости через клапан управления

$$Q_k = \mu f\sqrt{2p/\rho},$$

где $\mu$ - коэффициент расхода проходного сечения клапана; $\rho$ - плотность рабочей жидкости.

Используя относительные переменные, имеем

$$\bar{Q}_k = k_2\bar{f}\sqrt{\bar{p}}. \qquad (10)$$

Здесь $k_2$ - постоянный коэффициент.

7. Обычно режим течения жидкости в трубопроводах турбулентное, поэтому потери давления пропорциональны расходу, т.е.

$$p_М = p_Н - k_3Q_Н^2.$$

Коэффициент $k_3$ кроме числа Рейнольдса, зависит от наличия местных гидравлических сопротивлений. В безразмерном виде давление перед мотором

$$\bar{p}_М = \bar{p}_Н - k_4\bar{n}^2. \qquad (11)$$

8. Поскольку длины трубопроводов обычно невелики, в рассматриваемом случае инерционным напором будем пренебрегать.

9. Крутящий момент вентилятора (см. формулу (11)) в безразмерном виде

$$\bar{M}_в = k_5\bar{n}^2. \qquad (12)$$

10. Момент, развиваемый гидромотором

$$\bar{M}_М = k_6\bar{p}_М. \qquad (13)$$

11. Уравнение движения подвижных частей привода в безразмерном виде

$$J\frac{d\bar{n}}{dt} + \left(k_7 + \frac{1}{k_7+1}\bar{n}^2\right) = \bar{p}_М, \qquad (14)$$

где $J$ - приведенный момент инерции мотора и вентилятора; $k_7 = \frac{M_0}{M_{в0}}$.

Уравнения (7...14) представляют собой математическую модель работы привода вентилятора. Адекватность математической модели проверялась сравнением экспериментальных данных (давления в линии нагнетания и частоты вращения) с расчетными (рис. 5). Статистическая проверка показала адекватность предложенной модели.

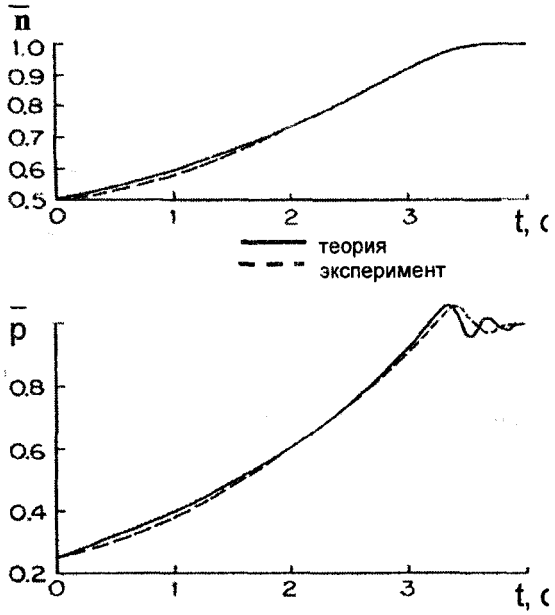



Рис. 5. Динамические характеристики гидропривода вентилятора охлаждающего устройства транспортной машины.

Таким образом, показано, что гидравлический привод системы охлаждения теплоносителя транспортной машины, использующий нерегулируемые машины и регулятор, включенный параллельно двигателю, имеет сравнительно низкие потери, связанные с процессом регулирования, и приемлемые динамические характеристики. Разработанная адекватная математическая модель может быть использована для оптимизации как характеристик гидромашин и аппаратуры, так и рационального выбора датчика температуры и параметров гидравлических линий.

**РЕЗЮМЕ**

У статті розглядаються аналітичні й експериментальні дослідження статичних та динамічних характеристик гідроприводу для системи охолодження двигуна внутрішнього згоряння. Статичним аналізом і експериментом показано, що гідропривід з нагнітаючим насосом постійної продуктивності і дроселем управління, встановленим паралельно, має відносно більшу ефективність, ніж у випадку коли регулятор установлено послідовно насосу і мотору. Представлено математичну модель гідроприводу.

**SUMMARY**

This paper deals with an analytical and experimental investigation of the static and dynamic characteristics of a hydraulic actuator for the cooling system of the internal combustion engine. It is shown by static analysis and experiment that the hydraulic actuator with positive displacement constant delivery pump and motor and control valve installed in parallel has relatively higher efficiency than the case where the control valve is installed sequentially with pump and motor. A mathematical model of the dynamics of the hydraulic actuator is presented.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Куликов Ю.А. Системы охлаждения силовых установок тепловозов. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
2. Луков Н.М. Автоматические системы управления и регулирования тепловозов. – М.: Изд. МИИТ, 1983. – 144 с.
3. Thoma, J.U. Hydrostatic Power Transmission, Trade and Technical Press, England, 1964.
4. Б.Экк Проектирование и эксплуатация центробежных и осевых вентиляторов. – М.: Изд. л-ры по горному делу, 1959. – 566 с.
5. Shearer, J.L., Murphy, A.T., Richardson, H.H., Introduction to System Dynamics, Addison-Wesley, 1987, 834 p.
6. Коваленко А.А., Соколов В.И., Уваров П.Е., Пазин В.В. Основы объемного гидравлического привода строительных и дорожных машин. – Луганск: Изд-во ДонГАСА, 1999. – 136 с.

*Надійшла до редакції 15.06.2002 р.*

УДК 532.517.4:537.84

# О ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ СО ВЗВЕШЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

*Б.А.Коловандин*, *Н.И.Болонов*
**Институт тепломассообмена АН Белоруссии, г. Минск*

1.Основные уравнения. Рассматривается турбулентное течение электропроводной жидкости, содержащей взвешенные частицы при наличии внешних гравитационных и электромагнитных сил. При этом предполагается малость магнитных чисел Рейнольдса ($R_m$<<1), что позволяет пренебречь взаимодействием скорости с индуцированным магнитным полем. Кроме того, считается, что плотность и проводимость частиц и жидкости различны. Предполагается, что размеры твердых частиц малы, тогда в соответствии с [1] можно принять, что горизонтальные компоненты скорости частиц и жидкости совпадают, а вертикальные отличаются на величину гидравлической крупности $a_0$, то есть $\omega_i = u_i - a_0\delta_{i2}$.

Учитывая это условие, система уравнений движения дисперсоида [1] записывается в форме:

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = -(\rho_s - \rho)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{a_0 S(1-S)}{D}\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial D}{\partial x_\alpha} = D(\rho_s - \rho)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{a_0 S(1-S)}{D}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial DV_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} DV_i V_\alpha = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \rho\rho_s \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{a_0 S(1-S)}{D}\right]\delta_{i2} + Dg_i + f_i + S(f_{si} - f_i), \tag{3}$$

где $D = \rho(1-S') + \rho_S S'$ - плотность дисперсоида

$$V_i = u_i - \frac{1}{D}\rho_s S a_0 \delta_{i2} = \omega_i + \frac{1}{D}\rho(1-S)a_0\delta_{i2},$$

$i$ = 1,2,3 (по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3). В дальнейшем считается, что концентрация твердых частиц и относительная их масса малы, то есть $S$<<1, $\overline{\rho}S$ <<1, где $\overline{\rho} = (\rho_s - \rho)\rho^{-1}$. Тогда уравнение неразрывности (1) запишется в виде

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\overline{\rho} a_0 \frac{\partial S}{\partial x_2}, \tag{4}$$

а уравнение сохранения массы (2) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = a_0 \frac{\partial S}{\partial x_2}. \tag{5}$$

В дальнейшем неоднородность жидкости учитывается только в уравнении баланса массы и в членах уравнения (3), содержащих внешние силы [1]. Тогда уравнение неразрывности (4) запишется в обычном виде

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{6}$$

а уравнение движения дисперсоида (3) в форме

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{i\alpha}}{\partial x_2} + (1+\overline{\rho}S)g_i + \frac{1}{\rho}f_i + \frac{1}{\rho}S(f_{si} - f_i). \tag{7}$$

Используя уравнения (4) ÷ (7), рассмотрим уравнения для осредненных и пульсационных полей скорости дисперсоида. Для этого представим переменные, входящие в них, состоящими из осредненных по времени составляющих и их пульсаций. Осредняя полученные уравнения, будем иметь

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{V}_i\overline{V}'_\alpha = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{T}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + g_i(1+\overline{\rho}\overline{S}) + \\ + \frac{1}{\rho}\overline{F}_i + \frac{1}{\rho}\overline{S}(\overline{F}_{si} - \overline{F}_i) + \frac{1}{\rho}\overline{S'(f'_{si} - f'_i)} \tag{8}$$

Входящая в уравнение (8) осредненная концентрация определяется из осредненного уравнения сохранения массы, получающегося путем осреднения уравнения (5)

$$\overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{S}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V'_\alpha S'} = a_0 \frac{\partial \overline{S}}{\partial x_2}. \tag{9}$$

Осредняя уравнения (4) и (6), получим

©Коловандин Б.А., Болонов Н.И.

$$\frac{\partial \bar{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\rho a_0 \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_2} = 0\,,\ \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (10)$$

Из уравнений (7) и (8) можно получить следующее уравнение двойных корреляций пульсаций скорости дисперсоида

$$\frac{\partial \overline{V_i'V_j'}}{\partial t} + \bar{V}_\alpha \frac{\partial \overline{V_i'V_j'}}{\partial x_\alpha} + \overline{V_j'V_\alpha'}\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_\alpha} + \overline{V_i'V_\alpha'}\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\overline{V_i'V_j'V_\alpha'} + \frac{1}{\rho}(\overline{\rho' V_j'}\delta_{\alpha i} + \overline{\rho' V_i'}\delta_{\alpha j})] -$$

$$-(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V_j'T_{i\alpha}'} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V_i'T_{j\alpha}'}) + (\overline{T_{i\alpha}'\frac{\partial V_j'}{\partial x_\alpha}} + \overline{T_{j\alpha}'\frac{\partial V_i'}{\partial x_\alpha}}) - \frac{1}{\rho}(\overline{\rho'\frac{\partial V_i'}{\partial x_j}} - \overline{\rho'\frac{\partial V_j'}{\partial x_i}}) = \qquad (11)$$

$$= \bar{\rho}(g_i\overline{V_j'S'} + g_i\overline{V_i'S'}) + \frac{1}{\rho}(1-\bar{S})(\overline{V_j'f_i'} + \overline{V_i'f_j'}) + \frac{1}{\rho}\bar{S}(\overline{V_j'f_{si}'} + \overline{V_i'f_{sj}'}) +$$

$$+\frac{1}{\rho}(\bar{F}_{si} - \bar{F}_i)\overline{V_j'S'} + \frac{1}{\rho}(\bar{F}_{sj} - \bar{F}_j)\overline{V_i'S'}$$

Члены левой части уравнения (11) имеют известный физический смысл [2], а члены правой части соответственно характеризуют изменение энергии дисперсоида за счет действия внешних гравитационных и электромагнитных сил. Замыкание системы уравнений (9) – (11) производится путем введения гипотез для «неизвестных» корреляций. В частности, для членов, характеризующих в (11) обмен потоками импульса дисперсоида по различным направлениям, используется аппроксимационное соотношение аналогичное предложенному Ю. Ротта [2] для соответствующих членов в уравнениях для рейнольдсовых напряжений. В рассматриваемом случае это соотношение имеет вид

$$\overline{P'[\frac{\partial V_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j'}{\partial x_i}]} = -a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}(\overline{V_i'V_j'} - \frac{2}{3}\bar{q}\delta_{ij}) \qquad (12)$$

где $q = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}\overline{V_\alpha'^2}$ - осредненное значение кинетической энергии пульсаций скорости, отнесенное к единице массы.

Далее рассмотрим диссипативные члены в (11). Для двухфазной жидкости $\tau_{i\alpha} = \tau_{i\alpha}^{(1)} + \tau_{i\alpha}^{(2)}$. При небольших относительных объемах взвешенных частиц тензор $\tau_{i\alpha}^{(1)}$ имеет то же строение, что и в однофазной вязкой несжимаемой жидкости. Тензор $\tau_{i\alpha}^{(2)}$ мал сравнительно с $\tau_{i\alpha}^{(1)}$. Тогда для количественной оценки членов, характеризующих вязкую диссипацию, также можно принять аппроксимационную зависимость, аналогичную предложенной Ю. Ротта [2]

$$\overline{T_{i\alpha}'\frac{\partial V_j'}{\partial x_\alpha}} + \overline{T_{j\alpha}'\frac{\partial V_i'}{\partial x_\alpha}} = \upsilon b\frac{\overline{V_i'V_j'}}{l^2} + \frac{2}{3}C\delta_{ij}\frac{\overline{q^{\frac{2}{3}}}}{l}. \qquad (13)$$

Известно, что диффузия давления

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\frac{1}{\rho}(\overline{P'V_j'}\delta_{j\alpha} + \overline{P'V_i'}\delta_{i\alpha})] \qquad (14)$$

в основной области турбулентного пристенного течения, включающей область вязкого подслоя, переходную область и турбулентное ядро (эта область течения рассматривается в дальнейшем), является приблизительно сбалансированной диффузией кинетической энергии, то есть в этой области баланс энергии пульсаций можно рассматривать вообще без учета турбулентной диффузии.

Коэффициенты, входящие в аппроксимации (12), (13), необходимо определить экспериментально. Однако, можно привести их асимптотические значения. Действительно, следуя Ю. Ротта [2] и В.Б.Левину [4], можно получить

$$a = 0{,}96\,,\ b = \frac{5}{4}\pi\,,\ c = 0{,}4\alpha.,$$

где $\alpha$ = 0,45 – постоянная Гейзенберга [3]. При нахождении приближенных значений коэффициентов в качестве масштаба турбулентности принимается интегральный поперечный масштаб турбулентности [3].

2.Течение в плоском открытом канале. Рассмотрим установившееся турбулентное течение проводящей жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести (см.рис.1).Параллельно свободной поверхности приложено однородное поперечное магнитное поле с индукцией $B_0$. Кроме того, к потоку извне в направлении основного движения приложено электрическое поле, создающее в жидкости ток проводимости $I_0$. Предполагается, что плотности индуцированных и внешних токов сравнимы по величине,

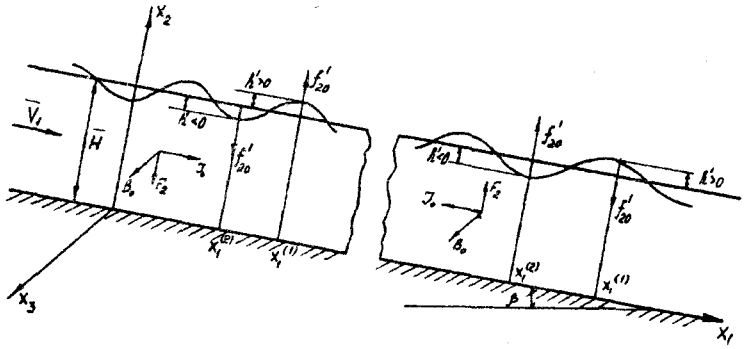


Рис. 1. Схема течения

частицы не ферромагнитны. В рассматриваемом примере принимается бездиффузионное приближение уравнений для вторых моментов, в котором пренебрегается как молекулярной, так и турбулентной диффузией. При этом утрачивается возможность расчета пульсационных характеристик в области молекулярного подслоя (что, вообще-то говоря, и невозможно при изучении двухфазного потока, если не рассматривать молекулярную диффузию твердых частиц в этой области) и в области суперслоя. При этом, ввиду большой заполненности полей скорости, в области суперслоя пренебрежение турбулентной диффузией не будет играть сколько-нибудь существенной роли при определении характеристик осредненного движения. В дальнейшем предполагается, что значения коэффициентов в аппроксимациях (12), (13) являются универсальными и для рассматриваемого двухфазного потока (при этом, конечно, имеется в виду уже сделанное ранее предположение о малой концентрации взвешенных частиц и малой величине их относительной массы). В соответствии с этим пренебрегается влияние взвеси на изменение масштаба турбулентности. Учитывая сделанные допущения, уравнение (11) перепишется в виде

$$\begin{aligned}&\overline{V_i'V_\alpha'}\frac{\partial \bar V_j}{\partial x_\alpha}+\overline{V_j'V_\alpha'}\frac{\partial \bar V_i}{\partial x_\alpha}+\bar V_\alpha\frac{\partial \overline{V_iV_j}}{\partial x_\alpha}+\nu b\frac{\overline{V_iV_j}}{l^2}+\frac{2}{3}C\frac{q^{-3/2}}{l}\delta_{ij}+\\&+a\frac{\sqrt{\bar q}}{l}(\overline{V_iV_j}-\frac{2}{3}\bar q\delta_{ij})+\bar\rho(g_i\overline{V_j'S'}+g_i\overline{V_i'S'})-\\&-\frac{1}{\rho}(1-\bar S)(\overline{V_j'f_i'}+\overline{V_i'f_j'})-\frac{1}{\rho}S(\overline{V_j'f_{si}'}+\overline{V_i'f_{sj}'})-\\&-\frac{1}{\rho}(\overline{F_{si}}-\bar F_i)\overline{V_j'S'}-\frac{1}{\rho}(\overline{F_{sj}}-\bar F_j)\overline{V_i'S'}=0\end{aligned}\qquad(15)$$

Рассмотрим выражения для электромагнитных сил, входящих в это уравнение. Как известно, [5] объемная плотность электромагнитных сил в проводящей жидкости может быть записана в виде

$$f_i=\varepsilon_{imn}I_mB_n \qquad(16)$$

Плотность тока, согласно закону Ома в движущейся жидкости, имеет вид

$$I_m=I_{m0}+\sigma[E_m+\varepsilon_{mpr}u_pB_r] \qquad(17)$$

Представляя переменные, входящие в уравнения (16) и (17), в виде осредненных значений и пульсаций (при этом пренебрегается, принимая во внимание малость $R_m$, возмущениями магнитного поля), получим

$$\bar F_i=\varepsilon_{imn}\bar I_m\bar B_n,\ f_i'=\varepsilon_{imn}I_m'\bar B_n \qquad(18)$$

где

$$\begin{aligned}I_m'&=I_{m0}'+\sigma[E_m'+\varepsilon_{mpr}u_p'\bar B_r]\\\bar I_m&=\bar I_{m0}+\sigma[\bar E_m+\varepsilon_{mpr}\bar u_p\bar B_r]\end{aligned}\qquad(19)$$

Аналогичные выражения могут быть записаны и для электромагнитных сил, действующих на частицы, находящиеся в жидкости

$$\bar F_{si}=\varepsilon_{imn}\bar I_{sm}\bar B_n,\ f_{si}'=\varepsilon_{imn}\bar B_nI_{sm}'. \qquad(20)$$

Как известно [6], компланарное поперечное поле в случае плоского течения не взаимодействует с полем продольной осредненной скорости жидкости. Так как течение является безнапорным и полностью развитым, то поперечные скорости отсутствуют. Таким образом

$$\bar{E}_m + \varepsilon_{mpr}\bar{u}_p\bar{B}_r = 0 \qquad (21)$$

Для случая плоского и в среднем стационарного однородного потока осредненный расход частиц через плоскость, параллельную свободной поверхности, равен нулю, то есть поперечные осредненные скорости частиц отсутствуют. Таким образом, выражения (18) и (20) для осредненных сил будут иметь вид

$$\bar{F}_i = \varepsilon_{imn}\bar{I}_{m0}\bar{B}_n \qquad (22)$$

$$\bar{F}_{si} = \varepsilon_{imn}\bar{I}_{sm0}\bar{B}_n \qquad (23)$$

Известно, что электрическое поле внутри сферы с проводимостью $\sigma_s$ [7, 8], окруженной средой с проводимостью $\sigma$, помещенной в однородное электрическое поле напряженности $E$, определяется из выражения $E_{sm} = E_m \dfrac{3\sigma_s}{2\sigma + \sigma_s}$, откуда плотность тока в сферической частице

$I_{sm} = I_m 3\sigma_s(2\sigma + \sigma_s)^{-1}$, или $I_{sm} = I_m\bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma} = 3\sigma_s(2\sigma + \sigma_s)^{-1}$.

Тогда выражение (20) запишется в виде

$$\bar{F}_{si} = \varepsilon_{imn}\bar{I}_{m0}\bar{B}_n\bar{\sigma}. \qquad (24)$$

Следуя [9], выражение для пульсационной составляющей тока в жидкости записывается в форме

$$I'_m = I'_{m0} + \upsilon\sigma\varepsilon_{mpr}u'_p\bar{B}_r. \qquad (25)$$

Аналогичное соотношение запишется для пульсаций плотности тока в частицах

$$I'_{sm} = I_{m0}\bar{\sigma} + \upsilon\sigma_s\varepsilon_{mpr}\omega'_p\bar{B}_r. \qquad (26)$$

В выражения (25) и (26) входят пульсации плотности тока от внешнего источника. Наличие их объясняется возмущенностью свободной поверхности. Следуя [10], для оценки пульсаций плотности тока внешнего источника принимается аппроксимационная зависимость вида

$$I'_{m0} = -\bar{I}_{m0}h^{-1}\bar{H}^{-1} \qquad (27)$$

Далее рассмотрим качественную картину влияния пульсаций плотности тока от внешнего источника на возмущение уровня свободной поверхности. Считается, что внешнее магнитное поле ориентировано в направлении оси $x_3$, то есть $\bar{B}_3 = \bar{B}_0$, а вектор плотности осредненного тока – в направлении основного движения жидкости. Рассмотрим два случая ориентирования вектора плотности тока $\bar{I}_{m0}$: в направлении оси $x_1$, ($\bar{I}_{10} = \bar{I}_0$) и в противоположном направлении ($\bar{I}_{10} = \bar{I}_0$). В первом случае проекции осредненной и пульсационной составляющих электромагнитных сил $\bar{F}$ и $f_i'$ на ось $x_2$ будут иметь вид

$$\bar{F}_2 = -\bar{I}_0\bar{B}_0, \quad f'_{20} = I_0h'\bar{H}^{-1}\bar{B}_0 \qquad (28)$$

(индекс "0" у пульсации электромагнитной силы введен для отличия полной $f_2'$ от рассматриваемой силы, обусловленной только пульсациями плотности тока от внешнего источника), то есть осредненная электромагнитная сила направлена к твердой границе, а знак $f_{20}'$ зависит от знака пульсации свободной поверхности.

Выберем сечение $x_1^{(1)}$, (см. рис. 2), где в данный момент времени $h' > 0$. При этом, как видно из (28), $f_{20}' > 0$, то есть пульсация $f_{20}'$ стремится увеличить амплитуду $h'$. Так как пульсации свободной поверхности непосредственно связаны с поперечными (по оси $x_2$) пульсациями скорости жидкости на ее поверхности, то увеличение $h'$ приведет к увеличению положительной пульсации скорости $u_{20}'$.

Далее выберем сечение $x_1^{(2)}$, где в тот же момент времени $h' < 0$. Легко видеть, что при этом $f_{20}' < 0$, то есть пульсация также стремится увеличить амплитуду $h'$. В свою очередь увеличение амплитуды $h'$ приведет к увеличению амплитуды пульсаций $u_{20}'$ в этом сечении, то есть в рассматриваемом сечении амплитуда возмущений свободной поверхности и пульсации скорости жидкости на ней также увеличиваются. Таким образом, в рассматриваемом примере, когда осредненная электромагнитная сила направлена к твердой границе, в любом сечении амплитуда пульсаций уровня свободной поверхности и поперечных пульсаций скорости жидкости на ней увеличиваются.

Следует отметить, что вследствие наличия пространственной корреляции поперечных пульсаций скорости $\overline{u_{20}' u_2'} > 0$, пульсации электромагнитной силы будут влиять не только на пульсации скорости на свободной поверхности, но и на пульсации скорости внутри потока, во всяком случае, вблизи свободной поверхности. Естественно, что из-за увеличения рейнольдсовых напряжений, являющегося следствием

увеличения амплитуды поперечных пульсаций скорости, должна происходить деформация профиля осредненной скорости. Качественная картина деформации профиля осредненной скорости изображена на рис. 2. Здесь кривые 2 и 3 соответствуют двум различным значениям осредненной плотности тока $\bar{I}_0$. При этом кривая 3 соответствует тому (по-видимому, реальному) случаю, когда турбулентные напряжения трения на свободной поверхности преобладают над напряжением трения в соседних внутренних областях (см. рис. 3, кривая 3).

Во втором случае проекции осредненной и пульсационной электромагнитных сил на ось $x_3$ будут иметь вид

$$\bar{F}_2 = \bar{I}_0 \bar{B}_0, \; f'_{20} = -I_0, \tag{29}$$

то есть осредненная электромагнитная сила направлена к свободной поверхности, а знак $f'_{20}$ в данный момент определяется знаком пульсаций свободной поверхности. Как и прежде выбирается сечение $x_1^{(1)}$, где в данный момент времени $h' > 0$. При этом $f'_{20} < 0$, то есть пульсации электромагнитной силы стремятся уменьшить амплитуду $h'$.

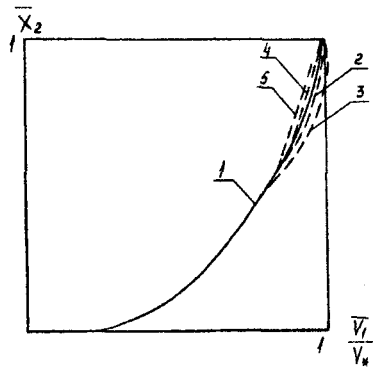



Рис. 2. Качественная картина деформации профиля скорости.

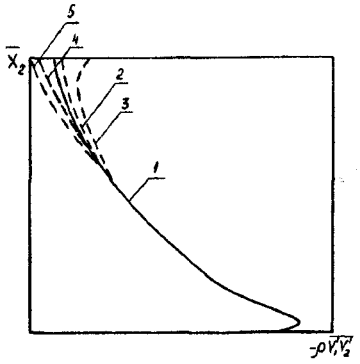



Рис. 3. Качественная картина изменения турбулентного напряжения трения.

В сечении $x_1^{(2)}$, где в тот же момент времени $h' < 0$, $f'_{20} < 0$, то есть пульсации электромагнитной силы и в этом сечении будут стремиться уменьшить амплитуду $h'$. Таким образом, в рассматриваемом случае, когда осредненная электромагнитная сила направлена к свободной поверхности, амплитуда пульсаций свободной поверхности уменьшается.

Как и в первом случае, изменение рейнольдсовых напряжений вблизи свободной поверхности, являющееся следствием изменения поперечных пульсаций скорости в этой области, будет приводить к деформации профиля осредненной скорости. В рассматриваемом случае рейнольдсовы напряжения будут уменьшаться. Качественная картина деформации профиля скорости приведена на рис. 2 (кривые 4 и 5), а соответствующая ей картина распределения турбулентного трения – на рис. 3 (кривые 4 и 5).

Таким образом, с помощью внешних электромагнитных сил, создаваемых при рассмотренной выше ориентации внешнего магнитного поля и тока от внешнего источника, то есть сил, направленных к твердой границе или к свободной поверхности, представляется возможным управлять возмущениями свободной поверхности и турбулентным трением в области, примыкающей к свободной поверхности.

При анализе влияния электромагнитных сил на пульсации свободной поверхности были рассмотрены лишь силы, обусловленные взаимодействием магнитного поля с током внешнего источника. Это было сделано с целью отделить рассмотренный выше эффект от известного эффекта гашения пульсаций скорости внешним магнитным полем, определяемого взаимодействием пульсаций индуцированного тока (второй член правой части выражения (25) ) с внешним магнитным полем.

Так как скорости частиц однозначно связаны со скоростями жидкости, то влияние электромагнитных сил, обусловленных взаимодействием пульсаций тока от внешнего источника с магнитным полем, на движение частиц будет аналогично рассмотренному выше влиянию этих сил на скорости жидкости. Несомненно, также, что в количественном отношении эти эффекты будут различны при различных электропроводностях частиц и жидкости. Имея в виду однозначную связь пульсаций уровня свободной поверхности с поперечными (по оси $x_2$ ) пульсациями скорости жидкости на ней, выражение (27),следуя [10] ,можно представить в виде

$$I'_{m0} = -\bar{I}_{m0} k \frac{u'_{i0}}{V} \delta_{i2}, \tag{30}$$

где $V$ – масштаб скорости, от выбора которого зависит коэффициент $k$. Выражая пульсации скорости жидкости и твердых частиц через скорость дисперсоида и имея в виду выражение (30), уравнение для пульсационной составляющей электромагнитной силы, действующей на жидкость и твердые частицы, запишется в виде

$$f_i' = \varepsilon_{imn}[-\bar{I}_{m0}k\frac{V_{i0}' + \frac{\rho_s}{\rho}S_0'a_0\delta_{i2}}{V}\delta_{i2} + \upsilon\sigma\varepsilon_{mpr}(V_p' + \frac{\rho_s}{\rho}S'a_0\delta_{pr})\bar{B}_r]\bar{B}_n, \tag{31}$$

$$f_{si}' = \varepsilon_{imn}[-\bar{I}_{m0}k\sigma\frac{V_{i0}'}{V}\delta_{i2} + \upsilon\sigma_s\varepsilon_{mpr}V_p'\bar{B}_r]\bar{B}_n \tag{32}$$

Умножив эти соотношения на $V_j'$ и осреднив полученные соотношения, получим выражения для корреляций $\overline{V_j'f_i'}$ и $\overline{V_j'f_{si}'}$, входящих в уравнение (15)

$$\overline{V_j'f_i'} = \varepsilon_{imn}[-I_{m0}\frac{k}{V}(R_{V_{i0}V_j}\overline{V_i'V_j'} + \frac{\rho_s}{\rho}a_0\delta_{i2}R_{S_0V_j}\overline{S'V_j'})\delta_{i2} + \\ +\nu\sigma\varepsilon_{mpr}(V_p'V_j' + \frac{\rho_s}{\rho}a_0\delta_{pr}\overline{S'V_j'})\bar{B}_r]\bar{B}_n \tag{33}$$

$$\overline{V_j'f_{si}'} = \varepsilon_{imn}[-\bar{I}_{m0}\bar{\sigma}\frac{k}{V}R_{V_{i0}V_j}\overline{V_i'V_j'}\delta_{i2} + \nu\sigma_s\varepsilon_{mpr}\overline{V_p'V_j'}\bar{B}_r]\bar{B}_n, \tag{34}$$

где $R_{V_{i0}V_j} = \frac{\overline{V_{i0}'V_j'}}{\overline{V_i'V_j'}}$, $R_{S_0V_j} = \frac{\overline{S_0V_j'}}{\overline{S'V_j'}}$.

Аналогичные выражения могут быть записаны и для корреляций $\overline{V_j'f_i'}$ и $V_j'f_{si}'$.

Рассмотрим коэффициенты корреляции, входящие в предыдущие выражения. Относительно коэффициента $R_{V_{i0}V_j}$, при условии малости концентрации, можно предположить, что

$$R_{V_{i0}V_j} = \frac{\overline{u_{i0}'u_j'} - \frac{\rho_s}{\rho}a_0\delta_{i2}\overline{S'V_{i0}'}}{\overline{u_{i0}'u_j'} + (\frac{\rho_s}{\rho})^2a_0\delta_{i2}\delta_{j2}\bar{S}'^2 - \frac{\rho_s}{\rho}a_0(\delta_{i2}\overline{S'V_j'} + \delta_{j2}\overline{S'V_i'})} \cong \frac{\overline{u_{i0}'u_j'}}{\overline{u_i'u_j'}} = R_{u_{i0}u_j}.$$

Это предположение подтверждается, например, результатами эксперимента [11]. При этом коэффициент корреляции $R_{u_{i0}u_j}$ представляет собой известную и, по-видимому, универсальную [12] функцию координат. Далее, принимая во внимание, что пульсации концентрации на свободной поверхности равны нулю $R_{S_0V_j} = 0$.

Для оценки корреляции «пульсация концентрации – пульсация скорости», следуя [1], принимается зависимость вида

$$S'V_i' = -\lambda\frac{\partial\bar{S}}{\partial x_i}. \tag{35}$$

Наконец запишем уравнения для вторых моментов с учетом выражений для электромагнитных сил и приведенных выше корреляций при различных значениях индексов $i$ и $j$.

$$2\overline{V_1'V_2'}\frac{d\bar{V}_1}{dx_2} + \upsilon b\frac{\bar{V}_1'^2}{l^2} + \frac{2}{3}C\frac{\bar{q}^{3/2}}{l} + a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}(\bar{V}_1'^2 - \frac{2}{3}\bar{q}) + \\ +2\frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\upsilon\sigma\bar{V}_1'^2\bar{B}_0^2 + 2\frac{1}{\rho}\bar{S}\upsilon\sigma_s\bar{V}_1'^2\bar{B}_0^2 = 0 \tag{36}$$

$$\bar{V}_2'^2\frac{d\bar{V}_1}{dx_2} + \upsilon b\frac{\overline{V_1'V_2'}}{l^2} + a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}\overline{V_1'V'}_2 + 2\frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\upsilon\sigma B_0^2\overline{V_1'V_2'} + \\ +2\frac{1}{\rho}\bar{S}\upsilon\sigma_sB_0^2\overline{V_1'V_2'} + \frac{1}{\rho}[(1-\bar{S}) + \bar{\sigma}\bar{S}]\bar{I}_0\bar{B}_0R_{V_{i0}V_j}\frac{k}{V}\overline{V_1'V_2'} = 0 \tag{37}$$

$$\overline{V_2'V_3'}\frac{dV_1}{dx_2} + \upsilon b\frac{\overline{V_1'V_3'}}{l^2} + a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}\overline{V_1'V_3'} + \frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\upsilon\sigma B_0^2\overline{V_1'V_3'} + \frac{1}{\rho}\bar{S}\upsilon\sigma_sB_0^2\overline{V_1'V_3'} = 0, \tag{38}$$

$$\upsilon b\frac{\bar{V}_2'^2}{l^2}+\frac{2}{3}C\frac{\bar{q}^{3/2}}{l}+a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}(\bar{V}_2'^2-\frac{2}{3}\bar{q})+2g\rho a_0\bar{S}+2\frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\bar{I}_0\bar{B}_0R_{V_{i0}V_j}\frac{k}{V}\bar{V}_2'^2+$$

$$+2\frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\upsilon\sigma\bar{V}_2'^2\bar{B}_0^2+2\frac{1}{\rho}\bar{S}(1-\bar{S})\upsilon\sigma\bar{B}_0^2\frac{\rho_s}{\rho}a_0^2+2\overline{SI}_0\bar{B}_0R_{V_{i0}V_j}\frac{k}{V}\bar{V}_2'^2+ \quad , \tag{39}$$

$$+2\frac{1}{\rho}\bar{S}\upsilon\sigma_s\bar{V}_2'^2\bar{B}_0^2-2\frac{1}{\rho}(\bar{\sigma}-1)\bar{I}_0\bar{B}_0a_0\bar{S}=0$$

$$\upsilon b\frac{\overline{V_2'V_3'}}{l^2}+a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}\overline{V_2'V_3'}+\frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\bar{I}_0\bar{B}_0R_{V_{i0}V_j}\frac{k}{V}\overline{V_2'V_3'}+\frac{1}{\rho}(1-\bar{S})\upsilon\sigma B_0^2\overline{V_2'V_3'}+ \quad , \tag{40}$$

$$+\frac{1}{\rho}\overline{SI}_0\bar{B}_0\bar{\sigma}R_{V_{i0}V_j}\frac{k}{V}\overline{V_2'V_3'}+\frac{1}{\rho}\bar{S}\upsilon\sigma_SB_0^2\overline{V_2'V_3'}=0$$

$$\upsilon b\frac{\bar{V}_3'^2}{l^2}+\frac{2}{3}C\frac{\bar{q}^{3/2}}{l}+a\frac{\sqrt{\bar{q}}}{l}(\bar{V}_3'^2-\frac{2}{3}\bar{q})=0\cdot \tag{41}$$

Здесь $\bar{V}_1$ - осредненное значение продольной скорости дисперсоида.

Полученная нами система шести уравнений (36) – (41) не замкнута, так как независимыми являются девять величин

$$\bar{V}_1'^2,\ \bar{V}_2'^2,\ \bar{V}_3'^2,\ \overline{V_1'V_2'},\ \overline{V_1'V_3'},\ \frac{d\bar{S}}{dx_2},\ \frac{d\bar{V}}{dx_2},\ l.$$

Для замыкания указанной системы необходимо введение еще трех уравнений, определяющих среднюю скорость, среднюю концентрацию и масштаб турбулентности.

В качестве первого из них используется осредненное уравнение движения, в качестве второго – уравнение сохранения массы. Что касается масштаба турбулентности, то он определен с точностью до постоянного множителя, принятого ранее аппроксимационными соотношениями.

**РЕЗЮМЕ**

Розглянута течія електропровідної рідини у плоскому каналі при малих числах Рейнольдса. Описана якісна картина впливу електромагнітної об'ємної сили, обумовленої взаємодією току зовнішнєго джерела з зовнішним магнитним полем на картину течії рідини. Використовуючи апроксимаційні співвідношення Ю. Ротта одержана система рівнянь для рейнольдсових напружень.

**SUMMARY**

A flow of electroconductive liquid in a small channel under low values of Reynolds number is considered. A qualitative pattern of how electromagnetic volumetric force caused by the interaction of an external source current and a magnetic field influences the liquid flow is described. Based on Yu. Rott's approximation proportions the system of equations for Reynolds tensions.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Г.И. Баренблатт Прикладная математика и механика, т.17 вып.3, 1953, т.19 вып.1, 1955.
2. I. Rotta Zeitschrift fur Physik, 6, 1951.
3. О.И. Хинце Турбулентность. – М.: Физматгиз, 1963.
4. В.Б. Левин Теплофизика высоких температур, т.2, №4, 1964.
5. Т. Каулинг Магнитная гидродинамика. – М.: Изд-во ИЛ, 1959.
6. E.L. Reslers, W.R. Sears Journal of the aeronautical science, v.25, 4, 1958.
7. В.Г. Левич и др. Теоретическая физика. – М.: Физматгиз.–1962.– Т. 2
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматгиз, 1959.
9. Д.С. Ковнер, В.Б. Левин Теплофизика высоких температур, т.2, №5, 1964.
10. Б.А. Колованднн Гидрогазодинамика, труды ЛПИ, №265, 1966.
11. В.Ф. Очередько В сб. «Исследования однородных и взвесенесущих турбулентных потоков». – К.: Наукова думка, 1967.
12. Е.М. Минский Турбулентность руслового потока. – М.: Гидрометеоиздат, 1953.

*Надійшла до редакції 15.06.2002 р.*

УДК 532.517.4:532.135

# СНИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТРЕНИЯ ДОБАВКАМИ МИЦЕЛЛООБРАЗУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ

*А.Б. Ступин, П.В. Асланов, С.А. Фоменко*

Одной из основных задач практической гидромеханики, на наш взгляд, является снижение сопротивления при относительном движении жидкости и твердой, прямой или криволинейной, границы. Следствием этого можно значительно уменьшить количество затрачиваемой энергии или повысить скорость движения. Существенный вклад сопротивлению движения вносит трение, а при течении жидкости в гладких прямолинейных трубах гидродинамическое сопротивление полностью определятся им. В 1948 - 1949 годах впервые было сообщено о возможности снижения гидродинамического сопротивления трения при турбулентном течении с помощью добавок в жидкость растворимых высокомолекулярных полимеров или мицеллообразующих поверхностно-активных веществ (ПАВ) [1,2]. Позже было выяснено, что способностью снижать трение обладают и добавки в поток или пограничный слой нерастворимых асимметричных частиц. В настоящее время накоплено много работ в этой области, подробное изложение их является предметом ряда обзорных работ [3 – 6].

Из анализа литературных данных следует, что, несмотря на многочисленные теоретические и экспериментальные работы, посвященные снижению турбулентного трения добавками, эта проблема далека еще от окончательного решения. Многие вопросы, связанные с этой проблемой, остаются мало изученными, а некоторые практически не исследованы. К ним, в первую очередь, следует отнести вопросы, связанные с влиянием добавок ПАВ на турбулентную структуру и выяснением механизма снижения турбулентного трения в снижающих трение растворах. Эффект снижения гидродинамического сопротивления трения (эффект Томса) является необычайно сложным, что определяется как отсутствием полноценной теории турбулентного движения, так и сложностью взаимодействия частиц добавок с турбулентным полем течения. Изучение эффекта Томса позволит, с одной стороны, более глубоко познать физическую природу эффекта снижения турбулентного трения и даст материал для построения теории данного эффекта, на основе которой возможен достоверный расчет интегральных и турбулентных характеристик потоков, движущихся с гидродинамически активными добавками, а с другой - позволит более целенаправленно воздействовать на турбулентность потока с целью получения заданных значений относительного снижения сопротивления в прикладных задачах.

Существует два вида гидродинамически активных добавок - высокомолекулярные полимеры и низкомолекулярные мицеллообразующие поверхностно-активные вещества. Своим названием последние обязаны способности снижать поверхностное и межфазное натяжение из-за адсорбции и ориентации молекул у поверхности раздела [7]. Снижение поверхностного натяжения, как правило, обусловлено дифильностью строения молекул ПАВ, обладающих полярной (гидрофильной) и неполярной (гидрофобной) частями. Молекулы ПАВ обладают сравнительно небольшой молекулярной массой (200-500) и числом атомов углерода в гидрофобной цепи $n$ = 10-20. При малых концентрациях ПАВ образуют истинные растворы, диспергируясь до отдельных молекул (или ионов). С ростом концентрации двойственность свойств молекул таких дифильных веществ приводит их к самоассоциации в растворе, результатом чего является образование так называемых мицелл — агрегатов из длинноцепочечных дифильных молекул или ионов ПАВ. Образование мицелл происходит самопроизвольно при кооперативном связывании между собой мономеров при концентрациях, превышающих довольно узкую область, называемую критической концентрацией мицеллообразования (ККМ). ККМ - это концентрация ПАВ, при которой в его растворе возникает большое число мицелл, находящихся в термодинамическом равновесии с молекулами (ионами).

При повышении концентрации ПАВ раствор проходит ряд равновесных состояний, характеризуемых определенным числом агрегации, размером и формой мицелл. Так увеличение концентрации приводит к появлению в истинном растворе поначалу сферических (при концентрации, обозначаемой как $ККМ_1$), а в дальнейшем более сложных, цилиндрических ($ККМ_2$), пластинчатых мицелл и сплошной гелеобразной структуры системы. При этом резко изменяется ряд свойств раствора, таких, как например, вязкость, поверхностное натяжение, электрическая проводимость и ряд других. Величину $ККМ_2$ можно изменять, в некотором интервале концентраций, с помощью добавок электролитов.

Анализируя ПАВ, известные в литературе как добавки к воде, эффективно снижающие ее гидродинамическое сопротивление, видно, что все они являются мицеллообразующими соединениями. В области концентраций ПАВ, близких к $ККМ_2$ и выше, их растворы обладают сниженным сопротивлением трения. Замечено, что чем больше длина палочкообразных мицелл, тем выше величина эффекта снижения гидродинамического сопротивления воды [4].



©Ступин А.Б., Асланов П.В., Фоменко С.А.

Используемые для снижения гидродинамического сопротивления трения добавки обладают каждая своими достоинствами и недостатками. Растворы высокомолекулярных полимеров имеют очень малую, порядка тысячных долей процента по весу, концентрацию, достаточно легко приготавливаются, позволяют достигать 80% уменьшения коэффициента гидродинамического трения $\lambda$, но макромолекулы полимеров деструктируют (разрушаются) при больших напряжениях трения, что приводит к уменьшению величины гидродинамического эффекта. Поэтому использование высокомолекулярных полимеров предпочтительно в течениях разомкнутого типа.

Концентрация добавок ПАВ, при которой проявляется эффект снижения трения, составляет десятые доли процента и связана с величиной $ККМ_2$, их растворы обычно требуют введения в них дополнительно электролита. С точки зрения устойчивости к механической деструкции добавки ПАВ имеют определенные преимущества перед полимерами. В отличии от последних поверхностно-активные вещества после прохождения через насосы и местные сопротивления вновь восстанавливают свою гидродинамическую эффективность /8/. Асимметричные мицеллы ПАВ под воздействием механических сил со стороны гидродинамического поля разрушаются до сферических и далее до отдельных молекул (ионов). При этом в потоке происходит одновременно два процесса — разрушение мицелл и их восстановление, поскольку последнее в растворе с достаточной концентрацией ПАВ является термодинамически выгодным /7/. Использование ПАВ в замкнутых гидравлических системах, с учетом такого поведения мицелл, может быть предпочтительнее использования полимеров. Так в работах [9, 16-20] описывается применение промышленных паст "диталан" и "метаупон" в составе хладоносителя для шахтных стационарных установок охлаждения воздуха, при эксплуатации которого на Донецкой шахте им. газеты "Донбасс" в течении полутора месяцев наблюдалось стабильное снижение суммарного гидравлического сопротивления замкнутой трубопроводной системы на 50%.

В настоящей работе приведены результаты исследований турбулентных течений растворов промышленной пасты "метаупон", которая представляет собой смесь следующего состава: β-(*N* –метил - *N* - оленоил)-этилсульфокислоты натриевая соль — 52,1%, хлористый натрий — 10%, вода - остальное до 100%. Опыты проводились на гидродинамической установке замкнутого цикла в канале квадратного сечения со стороной 0,04 метра, стенки которого изготовлены из органического стекла. Концентрация добавки ПАВ, рассчитанная по массовой доле пасты "метаупон" в растворе, составляла $c$=0,2; 0,3 и 0,48%. В качестве электролита использовался хлористый натрий концентрации 7%. Метаупон является анионактивным ПАВ, поэтому, с целью устранения гидролиза, водородный показатель среды поддерживался равным $pH \geq 8$. Температура растворов во всех опытах была близкой к 20°С. Измерение расходной скорости проводились индукционным расходомеров ИР-51 с относительной погрешностью 1%, перепад давления на рабочем участке измерялся датчиком перепадов с частотным выходом. Абсолютная погрешность измерения перепада давления, с учетом используемых для этой цели приборов, составляла 0,35 Н/м$^2$. Измерительный участок находился на расстоянии 100 калибров от входа в канал.

Поле скорости измерялось однокомпонентным лазерным доплеровским анемометром со спектральным анализом сигнала. Выбор в качестве измерителя локальных скоростей лазерного анемометра обусловлен тем, что измерение поля скорости и турбулентных характеристик в течениях с добавками поверхностно-активных веществ или полимеров имеет свои особенности. Широко используемый при исследованиях турбулентных потоков термоанемометр для измерений в этом случае не пригоден из-за изменения теплофизических характеристик применяемых растворов и связанной с этим нестабильности тарировочной характеристики датчиков прибора в процессе работы. Одним из наилучших инструментов для исследований таких течений является используемый в настоящей работе лазерный доплеровский анемометр (ЛДА). Бесконтактность и высокая разрешающая способность ЛДА позволяют производить измерения на расстоянии 0,05 - 0,1 мм от твердой стенки. Относительная погрешность измерения средней локальной скорости с помощью данного метода измерений в наших опытах составляла 1% в центре канала и увеличивалась до 3 - 5% у стенки.

При рассмотрении турбулентных течений жидкостей одной из наиболее важных является зависимость коэффициента гидродинамического сопротивления трения $\lambda$ от числа Рейнольдса $Re$. Для течений растворов поверхностно-активных веществ возможны два подхода при построении таких зависимостей. Принципиальное отличие этих подходов проявляется при выборе вязкости в числе Рейнольдса. Вязкость растворов ПАВ сильно зависит от концентрации добавки, что обусловлено образованием в растворе мицелл, поэтому выбор вязкости в числе $Re$ может иметь принципиальное значение.

Выбор вязкости в числе Рейнольдса обусловлен конкретной задачей исследования. Добавки поверхностно-активных веществ вводят в турбулентный поток с целью уменьшить сопротивление трения по сравнению с течением чистого растворителя. Следовательно, при определении величины эффекта снижения сопротивления в трубах, в первую очередь, целесообразно рассматривать величину относительного уменьшения перепада давления на участке трубы, измеренного при одинаковых расходных

скоростях течения растворителя и раствора. Отсюда вытекает определение величины эффекта снижения гидродинамического сопротивления трения:

$$\Delta\lambda/\lambda = 100\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,/\,\lambda_1,$$

где $\lambda_1$, $\lambda_2$ — коэффициенты сопротивления трения при течении растворителя и раствора соответственно. В соответствии с таким определением наглядное представление о величине действительного ("технического") эффекта снижения сопротивление, при течении растворов, дают графики связи $\lambda = f\,(Re)$, построенные на базе чисел Рейнольдса, основанных на вязкости растворителя. Результаты опытов, представленные в виде графиков $\lambda = f\,(Re')$, где $Re'$ - числа Рейнольдса, учитывающие вязкость раствора и его неньютоновские свойства, имеют целью подчеркнуть физическую сторону данного явления. На основании этих графиков "физический" эффект снижения сопротивления трения определяется путем сравнения сопротивления раствора и сопротивления ньютоновской жидкости, имеющей наибольшую для данного раствора вязкость. При таком представлении вычисленные значения величины эффекта оказываются завышенными по сравнению с фактическим ("техническим") уменьшением сопротивления.

Результаты исследований коэффициента сопротивления трения $\lambda$ при течении растворов технического ПАВ "метаупон" (далее просто метаупон) представлены на рис. 1 в виде зависимостей $\lambda$ от чисел Рейнольдса $Re$, рассчитанных по вязкости воды (а) и по вязкости раствора (б).

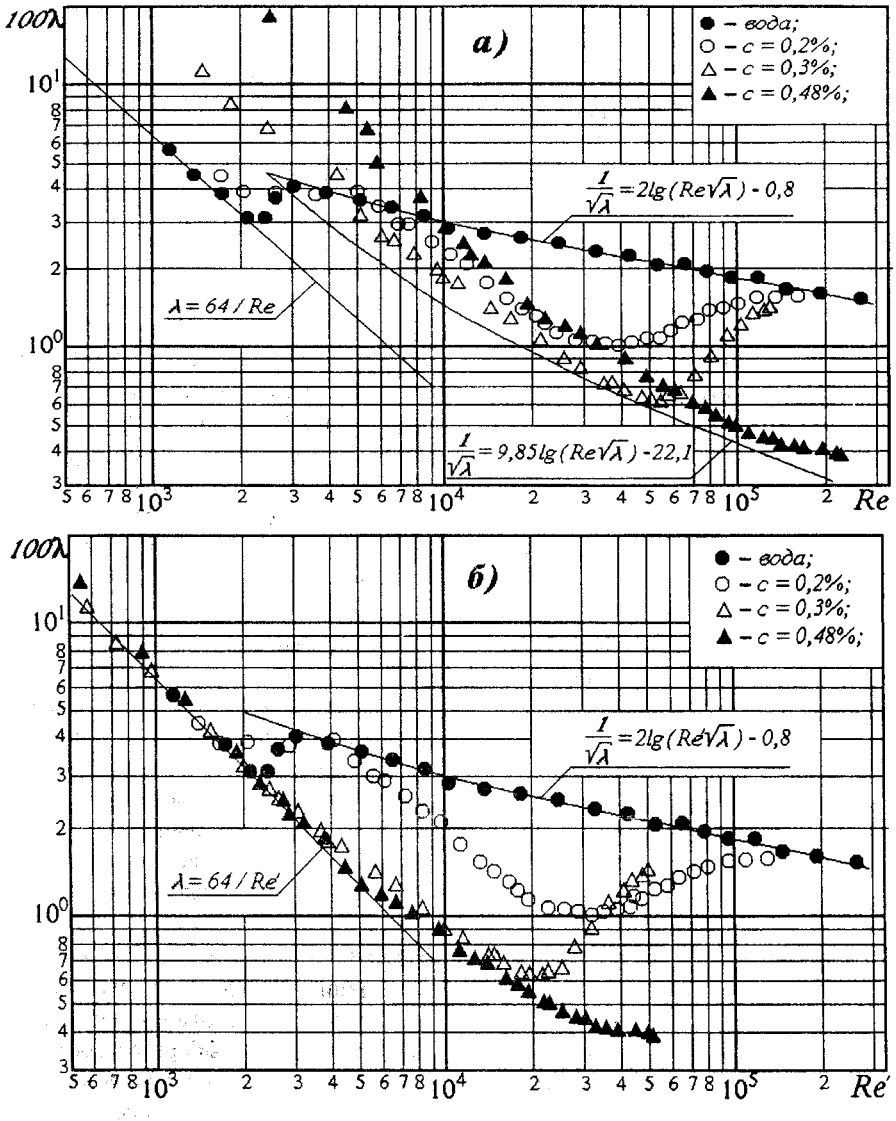



Рис. 1. Зависимости коэффициентов гидродинамического сопротивления трения λ от чисел Рейнольдса по вязкости воды $Re$ (а) и от чисел Рейнольдса по вязкости раствора $Re'$ при течении воды и растворов метаупона.

Из рисунка видно, что добавки метаупона различных концентраций по разному влияют на зависимость $\lambda = f\,(Re)$. В развитом ламинарном стационарном течении в трубах растворов ПАВ снижение

сопротивления не наблюдается, а за счет более высокой, по сравнению с растворителем, вязкости происходит увеличение сопротивления при одинаковых скоростях течения раствора и растворителя. При этом для растворов с концентрациями 0,2 и 0,3% эти зависимости расположены параллельно соответствующей кривой для растворителя (см. рис. 1а). Это указывает на то, что вязкость таких растворов, по крайней мере, в диапазоне исследованных и соответствующих в используемом канале ламинарному течению, чисел Рейнольдса не меняется. Для раствора концентрации 0,48% кривая для такой зависимости изменяется значительно круче, чем для течения чистого растворителя (ньютоновской жидкости). Такое поведение кривой $\lambda = f(Re)$ характерно для жидкостей, в которых вязкость уменьшается с ростом скорости течения в трубе, т.е. для неньютоновской жидкости.

Различные концентрации ПАВ по разному влияют на ход кривых $\lambda = f(Re)$, в переходном и турбулентном режимах течения. Добавка метаупона концентрацией 0,2% мало влияет на зависимость коэффициента сопротивления трения $\lambda$ от чисел Рейнольдса $Re$ в переходном режиме течения. В начале режима турбулентного течения кривая $\lambda = f(Re)$ подобна кривой, получаемой, обычно, для течения растворов полимеров [5,6]. Т.е. для этой концентрации метаупона при турбулентном течении, как и при течении растворов полимеров, возможно выделить режим без снижения сопротивления, в котором коэффициент сопротивления трения является равным соответствующей величине при течении растворителя или, из-за повышенной вязкости раствора, несколько большим и режим со сниженным сопротивлением. Число Рейнольдса, при котором начинается снижение сопротивление трения, можно назвать пороговым числом Рейнольдса $Re_{пор}$.

При течении растворов метаупона концентраций 0,3 и 0,48% поведение кривых $\lambda = f(Re)$ носит другой характер. Как было сказано выше, при ламинарном режиме течения этих растворов, так же как и для концентрации 0,2%, коэффициенты сопротивления $\lambda$ больше соответствующих значений для течения чистого растворителя (рис. 1а). Такое положение сохраняется и для чисел Рейнольдса соответствующих переходной и частично области турбулентного режима течения ньютоновских жидкостей. Значения коэффициентов гидродинамического сопротивления трения остаются большими соответствующих значений для течения растворителя до достижения определенного числа Рейнольдса, которое также можно называть пороговым числом Рейнольдса $Re_{пор}$, и которое определяется как точка пересечения кривых для $\lambda$ при течении раствора и чистого растворителя.

Выше значений чисел Рейнольдса, определенных как $Re_{пор}$, для всех трех исследованных нами концентраций раствора метаупона проявляется эффект снижения сопротивления трения, т.е. коэффициент сопротивления трения при течении раствора становится меньше, чем при течении чистого растворителя. С увеличением чисел Рейнольдса величина $\lambda$ уменьшается, стремясь к соответствующим значениям для ламинарного течения ньютоновской жидкости, а величина эффекта снижения трения $\Delta\lambda/\lambda$, соответственно, увеличивается. Получаемый в опытах эффект уменьшения сопротивления увеличивается с ростом скорости, достигая некоторого предельного значения, а величина коэффициента трения $\lambda$ уменьшается до своего минимального, для данного опыта, значения. Значение чисел $Re$, при которых величина эффекта максимальна, а $\lambda$ минимальное, вообще говоря не равны друг другу, хотя и являются близкими. Из имеющегося набора экспериментальных точек число Рейнольдса, при котором коэффициент трения минимальный, можно определить с большей точностью, чем определить число Рейнольдса для максимального значения величины эффекта снижения сопротивления, так как в большинстве случаев имеется диапазон чисел $Re$ в котором величина $\Delta\lambda/\lambda$, в пределах погрешности определения, постоянна. Поэтому за вторую, характерную для кривой $\lambda = f(Re)$, точку можно принять значение числа Рейнольдса $Re_{min}$, где величина $\lambda$ принимает минимальное значение. При $R > Re_{min}$ коэффициент сопротивления трения возрастает и кривая $\lambda = f(Re)$ выходит на соответствующую кривую для ньютоновской жидкости. Числа Рейнольдса, при которых исчезает эффект снижения гидродинамического сопротивления трения, будем называть предельными $Re_{пр}$. Все три определенные выше числа различны для разных концентраций и увеличиваются с ростом концентрации ПАВ в растворе.

На этом же рисунке приведена кривая

$$1 / \sqrt{\lambda} = 9{,}85 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 22{,}1,$$

которая носит названия кривой максимального снижения гидродинамического сопротивления трения и получена авторами работы [9]. Из рисунка видно, что раствор концентрации 0,3% имеет максимальное для условий проведения эксперимента снижения трения.

При использовании чисел Рейнольдса, основанных на вязкости раствора (рис. 1б), в ламинарном режиме течения для всех трех концентраций растворов метаупона значения коэффициентов гидродинамического сопротивления трения достаточно удовлетворительно лежат на кривой, описываемой законом трения для ламинарного режима течения $\lambda = 64/Re'$. При этом вязкость определялась как средняя вязкость этих растворов для экспериментальных точек, лежащих на прямолинейных участках графиков за-

висимостей $\lambda$ от $Re'$. Такое представление экспериментальных результатов дает возможность можно говорить о затягивании ламинарного режима течения до чисел Рейнольдса $Re'$ приблизительно равных 3000 и 5500 для растворов с концентрациями соответственно 0,3 и 0,48%. Для раствора с концентрацией 0,2% ламинарный режим течения имеет своей границей традиционное для ньютоновских жидкостей значение 2300 - 2400. При увеличении чисел $Re'$ выше этих значений начинают наблюдаться различия в поведении кривых $\lambda = f(Re')$ для растворов с разными концентрациями.

Переходная область течения для раствора метаупона с концентрацией 0,2% почти не отличается от течения ньютоновских жидкостей. В начале турбулентного режима коэффициенты гидродинамического сопротивления трения при течении раствора равны соответствующим величинам для ньютоновской жидкости при равных числах Рейнольдса. С дальнейшим увеличением чисел $Re'$ начинается отход экспериментальных точек от кривой для турбулентного режима течения ньютоновских жидкостей в сторону кривой $\lambda = 64/Re'$. Для течения растворов метаупона с концентрациями 0,3 и 0,48% при числах Рейнольдса, соответственно больших 3000 и 5500, коэффициенты сопротивления трения становятся большими, чем при ламинарном, но меньше значений $\lambda$ для турбулентного течений ньютоновских жидкостей. Вначале отход экспериментальных точек от кривой для ламинарного течения является постепенным и плавным, значения $\lambda$, при этом, с ростом чисел Рейнольдса продолжают уменьшаться. В дальнейшем поведение всех трех кривых становится похожим друг на друга.

С ростом чисел Рейнольдса (по вязкости) значения коэффициентов гидродинамического сопротивления трения уменьшаются, оставаясь в промежутке между значениями для ламинарного и турбулентного режимов течения. Достигая некоторого числа $Re'$, которое соответствует ранее введенному по вязкости растворителя числу $Re_{min}$, значения коэффициентов трения начинают увеличиваться с ростом чисел $Re'$, достигая величин равных значениям при течении ньютоновских жидкостей.

Объяснить такое поведение зависимостей коэффициента гидродинамического сопротивления трения от чисел Рейнольдса с помощью одной только гидродинамики невозможно. Необходимо также рассматривать мицеллярную или гелеобразную структуру растворов поверхностно-активных веществ и их взаимодействие с гидродинамическим полем. Не вызывает сомнения тот факт, что добавки поверхностно-активных веществ воздействуют на турбулентность потока, а гидродинамическое поле течения, в свою очередь, воздействует на мицеллы ПАВ или пространственные структуры, которые образуются в растворе при больших концентрациях.

В целом поведение кривых $\lambda = f(Re)$ при увеличении чисел Рейнольдса можно объяснить следующим образом. Снижение сопротивления трения с помощью поверхностно-активных веществ происходит при концентрациях добавок, когда в растворе возникают асимметричные (палочкообразные) мицеллы [4]. Отношение большой оси такой мицеллы к малой растет до некоторого предела с ростом концентрации ПАВ в растворе [10]. В потоке, с одной стороны, асимметричные мицеллы под действием градиента скорости ориентируются своей большей осью вдоль направления течения, а с другой стороны, эта ориентация нарушается под действием турбулентных пульсаций скорости и теплового движения самих мицелл. При малых скоростях сдвига, т.е. при $Re \le Re_{пор}$, степень ориентации мицелл вдоль направления потока низкая и, в таких условиях, раствор не снижает трение (соответствующая концентрации метаупона 0,2% кривая на рис. 1а при числах Рейнольдса меньше чем $Re_{пор}$). С увеличением скорости течения увеличивается также степень ориентации мицелл вдоль направления течения и начинает проявляться эффект снижения гидродинамического сопротивления трения.

Выше сказанное справедливо, в основном, для растворов ПАВ вязкость которых не намного выше вязкости растворителя. С увеличением концентрации ПАВ в растворе его вязкость начинает сильно увеличиваться и картина течения будет намного сложнее. Известно, что все применяемые для снижения гидродинамического сопротивления трения растворы поверхностно-активных веществ относятся к неньютоновским жидкостям /11/. В зависимости от концентрации ПАВ в растворе, степень их неньютоновского поведения различная и возрастает с ростом концентрации добавки в растворе. Возрастает также и вязкость растворов. В свою очередь это приводит к возрастанию коэффициентов трения при числах Рейнольдса, рассчитанных по вязкости растворителя, меньших чем 2400, т.е. таких, которые заведомо соответствуют ламинарному течению этих растворов.

Для неньютоновских жидкостей одной из важнейших характеристик является зависимость вязкости от скорости сдвига. Для раствора метаупона эта зависимость носит псевдопластичный характер /12/, т.е. с увеличением скорости сдвига вязкость растворов уменьшается. С ростом скорости течения растет, соответственно, и скорость сдвига, следовательно, вязкость раствора уменьшается, а степень ориентации мицелл под действием увеличивающегося градиента скорости растет. Преимущественная ориентация асимметричных частиц приводит к возникновению дополнительной анизотропии турбулентного переноса /8/. Это, в свою очередь, приводит к появлению эффекта снижения гидродинамического сопротивления трения при числах $Re \ge Re_{пор}$ и его увеличения с ростом скорости течения до значений

чисел $Re_{min}$, при которых коэффициенты сопротивления трения минимальны, а величина эффекта снижения сопротивления трения максимальна.

Имеющиеся в растворе мицеллы нельзя рассматривать как жесткую неразрушаемую частицу даже при малых скоростях сдвига. Воздействие теплового движения молекул в мицелле, влияние сил со стороны гидродинамического поля и другие факторы действуют на мицеллу разрушающим образом. Можно говорить, что в растворе одновременно происходит два процесса - разрушение мицелл и одновременно их образование, поскольку последний процесс, при достаточных концентрациях, для раствора поверхностно-активных веществ является термодинамически выгодным [7]. При объяснении хода кривой $\lambda = f(Re)$ необходимо учитывать какой процесс - разрушение или образование мицелл при этом будет иметь большее влияние, а также, о чем было сказано выше, необходимо учитывать зависимость вязкости от скорости сдвига. В свою очередь, процессы разрушения и образования мицелл также влияют на эту зависимость вязкости. Эти два фактора многократно усложняют объяснение эффекта снижения гидродинамического сопротивления трения с помощью добавок поверхностно-активных веществ.

При числах Рейнольдса меньших, чем $Re_{min}$ интенсивность разрушения мицелл меньше чем интенсивность их восстановления и этот процесс разрушения-восстановления можно не учитывать, по крайней мере, при построении первого приближения модели механизма снижения сопротивления с помощью добавок ПАВ.

При достаточно больших скоростях сдвига вязкость раствора ПАВ достигает своего минимального значения и при дальнейшем увеличении скорости сдвига остается постоянной. В этом случае основными факторами, влияющими на снижение сопротивления, становятся процессы динамического разрушения и восстановления мицелл. Так при возрастании чисел Рейнольдса до значений $Re_{min}$ процессы разрушения будут играть все большую роль. Этим возможно объясняется уменьшение локального наклона кривой $\lambda = f(Re)$ с приближением до чисел Рейнольдса равных значениям $Re_{min}$. В области, близкой к $Re_{min}$, интенсивность процессов разрушения и восстановления мицелл близки друг к другу, чем можно объяснить конечную величину максимального значения эффекта снижения сопротивления трения меньшую предельно возможной (за предельно возможное снижение гидродинамического сопротивления трения считается такое снижение, когда коэффициенты сопротивления трения при течении растворов равнялись бы их значениям при ламинарном течении ньютоновской жидкости). При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса скорость разрушения мицелл еще более возрастает, в отличие от скорости восстановления, которая практически не меняется, и это приводит к уменьшению эффекта снижения сопротивления трения вплоть до его полного исчезновения.

Для понимания физики эффекта снижения гидродинамического сопротивления трения добавками необходимо иметь информацию о их влиянии на поле скорости и турбулентные характеристики таких течений. Результаты измерений профилей скорости в универсальных координатах $U^+ = f(y^+)$ для растворов метаупона с концентрациями 0,2 и 0,3% представлены на рис. 2. Здесь безразмерная скорость определялась по выражению $U^+ = \langle U \rangle / U_*$, где $\langle U \rangle$-осредненная по времени локальная скорость течения, $U_* = (\tau_w / \rho)^{1/2}$ - динамическая скорость, $\tau_w$ - напряжение трения на стенке, $\rho$ - плотность жидкости, а безразмерная координата $y^+ = U_* y / \nu$, где - текущая нормальная к стенке координата ($y$=0 на стенке) рассчитывалась по вязкости раствора $\nu$, определенной из закона Ньютона $\tau_w = \rho\nu(\langle U \rangle / dy)_{y \to 0}$. Измерения проводились при числах Рейнольдса, рассчитанных по вязкости растворителя, равных 10000, 21000 и 37000.

Из рисунка видно, что введение добавок приводит к значительным изменениям в распределении профилей скорости по сечению потока. При течении растворов метаупона они изменяются значительно круче в сравнении с универсальным профилем для ньютоновских жидкостей. На всех профилях скорости можно выделить те же три характерные зоны, удовлетворяющих трехслойной модели турбулентного течения в трубах, что и при течении ньютоновских жидкостей: вязкий подслой, переходную или буферную зону и зону турбулентного ядра. Вязкий подслой и переходная зона при течении ньютоновских жидкостей занимает, в зависимости от расходной скорости, не более 15% сечения трубы [13] и уменьшается с увеличением скорости течения. Для случая течения раствора метаупона концентрацией 0,2% это положение сохраняется в силе, при этом замечено, что безразмерная толщина вязкого подслоя (ее значение в этом случае $\delta^+_{му} = 8$) несколько увеличивается по сравнению с течением воды ($\delta^+_{в} = 5$), а границу переходной зоны, так же как и для ньютоновских жидкостей (в том числе воды), можно определить при координате $y^+ = 30$. Если профиль скорости в переходной зоне и турбулентном ядре описывать принятым для трехслойной модели турбулентного течения в трубе ньютоновских жидкостей уравнением вида $U^+ = A \lg y^+ + B$, то в обоих зонах течения значение коэффициента $A$ больше, чем при течении воды. Соответственно меняет свое значение и величина $B$. При этом значения $A$ и $B$ являются разными для разных чисел Рейнольдса течения раствора метаупона величины снижения гидродинамического сопротивления трения.

Более существенно отличаются профили скорости при течении раствора метаупона концентрации 0,3%. Область вязкого подслоя и переходной зоны занимают в этом случае около 60% сечения пото-

ка в независимости от расходной скорости течения (числа Рейнольдса по вязкости растворителя), что является несколько неожиданным результатом. Универсальную координату внешней границы вязкого подслоя для всех трех режимов течения можно определить приблизительно равной 15, что существенно больше как для случая течения воды так и для случая течения раствора метаупона концентрации 0,2%. В переходной зоне для всех трех исследованных режимов течения раствора этой концентрации кривые $U^+=f(y^+)$ совпали.

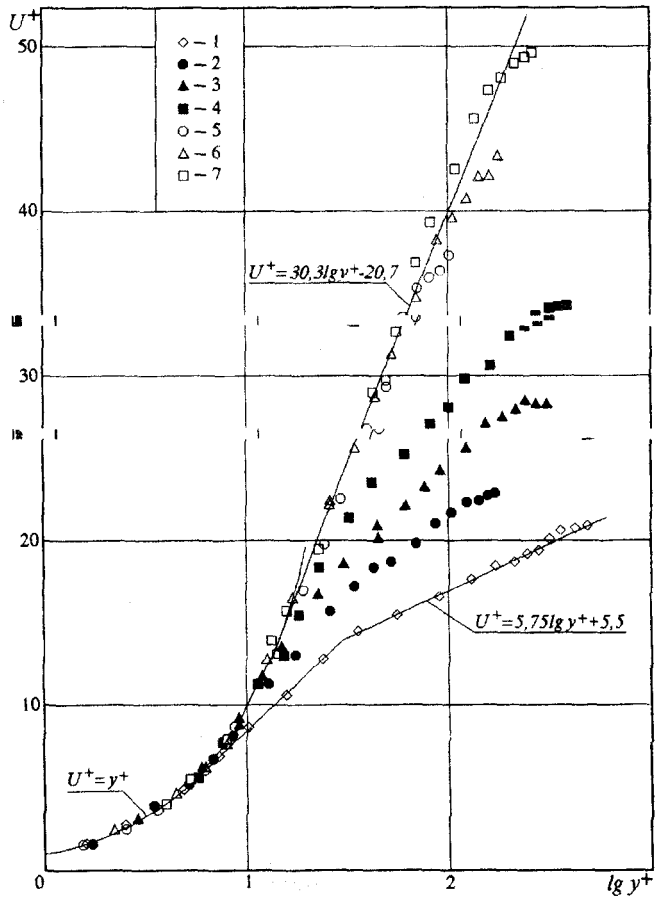



Рис. 2. Безразмерные профили скорости при течении воды (1) и растворов метаупона концентраций 0,2% (кривые 2 - 4) и 0,3% (кривые 5 - 7), числа Рейнольдса равны 10000, 21000 и 37000.

Выше была сказано, что данный раствор метаупона обладает максимальным, для данных условий проведения эксперимента, снижением сопротивления трения. Математическая обработка совокупности экспериментальных точек для этих трех режимов течения показала, что в переходной зоне течения в универсальных координатах зависимость осредненной скорости течения по сечению потока можно аппроксимировать выражением

$$U^+ = 30{,}3\ lg\ y^+ - 20{,}7.$$

За внешнюю границу переходной зоны можно принять координату $y=0{,}6H$, где $H$ - полувысота канала. В турбулентном ядре профили скорости также описываются логарифмическим уравнением вида

$$U^+ = A_1\ lg\ y^+ + B_1,$$

где $A_1$ для всех трех чисел Рейнольдса, при которых проводились исследования, можно принять равным 11,6, а $B_1$ для каждого режима течения будет свое.

Из рассмотрения профилей скорости при течении растворов метаупона концентраций 0,2 и 0,3% снова, о чем говорилось при анализе кривых $\lambda = f(Re)$, напрашивается вывод о существовании несколько различных механизмов явления снижения гидродинамического сопротивления трения: наличием асимметричных частиц - мицелл в случае малых концентраций и дополнительно большим влиянием повышенной, по сравнению с растворителем, вязкости раствора, сильный рост которой вызван образованием мицелл в надмицеллярные структуры. В последнем случае происходит сильный рост вязкости и раствор в большей степени проявляет свои неньютоновские свойства, что резко усложняет картину течения и, соответственно, сам механизм явления снижения сопротивления трения. Общим для всех течений со снижением сопротивления трения с помощью добавок поверхностно-активных веществ является нали-

чие в растворе асимметричных частиц мицелл или их объединение, при достаточных концентрациях, в более крупные надмицеллярные структуры. Увеличение вязкости или загущающее действие добавок ПАВ при этом является следствием образования мицеллярной структуры растворов, но никак не причиной эффекта снижения трения, что выдвигается в качестве одной из основных причин в некоторых работах, например [14,15].

**РЕЗЮМЕ**

Приведены результаты измерений зависимостей коэффициентов гидродинамического сопротивления трения от чисел Рейнольдса и профилей скорости при течении водных растворов промышленной пасты "метаупон" различных концентраций.

Показано, что при разных концентрациях поверхностно-активного вещества могут существовать несколько отличающиеся друг от друга механизмы снижения трения, что вызвано различной мицеллярной структурой этих растворов. Исходя из трехслойной схемы течения, экспериментально получена система уравнений описывающая профиль скорости в канале при максимальном снижении сопротивления трения

**SUMMARY**

The results of measuring on how the coefficients of hydrodynamical friction resistance depend on Reynolds numbers and speed profiles during the flow of water solutions of the paste "metaupon" of different concentrations are provided.

It is shown that under different concentrations of a surface-active substance there are different mechanisms of friction resistance that is caused by a various micellar structure of these solutions. As the flow scheme has three layers, the system of equations describing a speed profile in the channel under maximum decrease of friction resistance was obtained in the result of experiments.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Toms B.A. Some observation on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers // In.: Proc. Intern. Congr. Rheol. Sheveningen, 1948. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co. - 1949, vol. 2. - P. 135-142.
2. Patent 2.492.173(USA). Flow of thickened fluids / Mysels K.J. - U.S. Patent Office, Dec. 27, 1949.
3. Повх І.Л., Ступін О.Б. Проблема зменшення турбулентного тертя добавками // Вісник АН УРСР. - 1979. - № 10. С. 55 - 65.
4. Пилипенко В.Н. Влияние добавок на пристенные турбулентные течения // В кн.: Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Сер.: Мех. жидкости и газа. - 1980. Т.15. - С. 156 - 257.
5. Virk P.S. Drag reduction fundamentals // AJChE Journal. - 1975. - Vol. 21, No. 4. - P. 625 - 656.
6. Hoyt J.W. The effect of additives on fluid friction // Trans. ASME. 1972. - Vol. 94, No. 2. - P. 258 - 285. (Перевод: Хойт Дж. У. Влияние добавок на сопротивление трения в жидкости // Теор. основы инж. расчетов.-1972.- Т. 94, № 2.- С. 1-31).
7. Коллоидные поверхностно-активные вещества / Шинода К., Накагава Т., Тамамуси Б., Исемура Т. // М.: Мир. - 1966. - 320 с.
8. Особенности турбулентных течений растворов мицеллообразующих поверхностно-активных веществ / Повх И.Л., Ступин А.Б., Максютенко С.Н. и др. - В сб.: Механика турбулентных потоков. - М.: Наука, 1980. - С. 44 - 69.
9. Повх И.Л., Ступин А.Б., Симоненко А.П. Применение поверхностно-активных веществ (ПАВ) для уменьшения турбулентного трения жидкостей в технологических агрегатах. В кн.: Аэродинамика в технологических процессах. М.: Наука, 1981. - С. 230 - 240.
10. Сердюк А.И., Кучер Р.В. Мицеллярные переходы в растворах поверхностно-активных веществ. Киев: Наукова думка, 1987, 208 с.
11. Симоненко А.П. Турбулентное трение и теплообмен хладоносителей с добавками мицеллообразующих поверхностно-активных веществ. - Дис. ... канд. техн. наук, Киев,1980, 128 с.
12. Кривенко В.В., Самуйлов В.О., Симоненко А.П. Гидродинамическое сопротивление водных растворов мицеллообразующих поверхностно-активных веществ. В сб.: Физическая гидродинамика, Донецк: ДонГУ, 1990. С. 42 - 47.
13. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях: Пер. с англ. - М.: Энергия, 1979. - 408 с.
14. Добрыченко В.М., Лобачев В.Г., Повх И.Л. и др. Снижение гидродинамических потерь загущающими добавками ПАВ // ИФЖ. - 1976. - Т. 30, № 3. - С. 240 - 245.
15. Zakin J.L. Drag reduction with soap and surfactant additives // Colloid int. CNRS. - 1975. - No. 233. - P. 295 - 303.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

UDK 532.517.4:532.135

# THE DECREASE IN THE EFFECT OF DRAG REDUCTION AT THE INTRODUCTION OF THE POLYMER SOLUTION INTO THE BOUNDARY LAYER OF THE FIRE HOSE

*V.G Pogrebnyak, I.A.Fedorkina*
*Donetsk State University of Economics and Trade*

## INTRODUCTION

Fire is the most important ecological factor that under certain conditions has the severe adverse environmental impact. Therefore, improvement of the fire-fighting systems operation is one of the technological means allowing reduction in the pollution of the biosphere with the combustion products. Due to the reduction of the hydrodynamic drag resistance in the fire hoses it is possible to improve the effective operation of the water-based fire-suppression systems which are the most widespread and feasible methods of the fire-fighting.

Among the well-known methods of the decrease in the hydrodynamic drag resistance through the artificial modification of the boundary layer of the fire hoses, the method of the introduction of the polymer solutions is almost unique, and certain practical results have been achieved in its development. The study has shown that the introduction of small amounts of polyethylene oxide (PEO) and polyacrylamide (PAA) into the fire-suppression liquids (water and water solutions of surfactants) make it possible to significantly (down to 75%) reduce the hydrodynamic drag resistance. This reduction, when the other parameters of the hydraulic system are unchanged, ensures that the capacity of the fire-fighting systems is 1.5-2 times higher, or the length of the fire hoses may be 3-5 times higher, or the pump power consumption may be decreased by 60-70%, or the diameter of the fire-suppression pipes may be decreased by 15-20%. Besides, it has been shown that the additions of the polymers to water or surfactant solutions considerably improve their fire-suppression properties.

This study relates to the hydrodynamics of the polymer solutions in the pipelines and problem of the improvement of the introduction devices. The hydrodynamics of polymer solutions at the polymer introduction into the boundary layer of the fire hoses has not been given due attention.

It is assumed that in case of the flow of polymer solutions through the slots and other elements of the introduction systems, essential "anomalies", which could considerably affect the Toms effect, cannot be observed. Such a conclusion is based on the analysis of the data obtained from the study of the shear laminar flows where the effects of elastic deformations are insignificant. In the introduction systems, as a rule, a complex flow consisting of superposition of the shear and predominantly longitudinal (with stretching) flow takes place. In case of such complex flows, the effects of elastic deformations become so significant that they may result in lessening the potential effect of the polymer additives, especially at high velocities of the flow of the firesuppressing liquids.

This paper investigated regularities and manifestations of the elastic deformations of the polymer flow under conditions close to that of the real flows of the fire hoses.

## EXPERIMENTAL DATA

We used a special hydrodynamic bench that allows achieving the exhaust velocities of the water flow through its channel of up to 35 m/s; the channel's lengths was 8.5 m. Orifices for measuring the pressure and for the sensors of friction force were placed on the lower wall of the channel. The injection system consisted of a dosing unit, underslot chamber ensuring different conditions of the deformation of the polymer solution (by changing the entrance angle) at the entrance to the slot. The angle between the injected polymer stream and the wall did not vary. The following characteristics have been variable: the angle of the opening of the slot (the angle of the entrance to the slot), concentration of the injected polymer solution, velocity of the injection, molecular mass, polymer brand, and velocity of the fire suppressing liquid (water).

## RESULTS AND DISCUSSION

In Fig.1, the experimental data related to the flow of polyethylene oxide (PEO) water solutions through the underslot camera are shown.

It is clear that the phenomena, unusual for purely viscous mediums, are inherent for such flows. At a certain critical (threshold) average exhaust velocity U, the relative pressure differential increases sharply, and it is sharper at the higher polymer concentrations. The characteristics of the dependence $\xi = f(U)$ indicate the high dissipation of energy in the polymer solutions flow through the injector, i.e. the increased hydrodynamic drag resistance is observed at the supercritical flow rates.

The presented experimental data are in accordance with the results obtained from the study of the flow of the polymer solutions under the simulated conditions such as through short capillary tubes and slots. These flows were thoroughly investigated in papers [1-5]. There should be stressed the most important moments of the elastic stress effects in the polymer solution flows with stretching. Transition to a flow mode with increased energy dis-


©Pogrebnyak V.G., Fedorkina I.A.

sipation is accompanied by formation of so called "inlet flooded jet" as a "cord" or "fillet" enclosed by secondary flows in the shape of ring-shaped vortex. In case of the supercritical flow mode for polymer concentrations ranged from very diluted to moderately concentrated, the hydrodynamic field causes rather strong deformation effects on molecular chains. The uncoiled part of a polymer chain may be as large as 60%. In half-diluted and moderately concentrated polymer solutions, the relaxation times of the fully stretched and slightly deformed individual chains differ more than by 2 orders of magnitude.

The reason for such a large time for the curling of the polymer chain is supermolecular structures formed in the hydrodynamic field. This is reflected in the decrease of turbulent friction if the lifetime of supermolecular formations in the polymer solution at the moment of its introduction to the boundary layer is comparable to the residence time in the fire hose.

The results of the polymer solution injection onto the lower wall of the channel through the underslot chambers with varying angles of the entrance to the slot shows (Fig.2), that when the polymer solution is introduced onto the inner surface of the fire hose at low angles of the entrance to the slot, the drop in the tangent stresses of friction is exhibited practically right behind the point of the introduction of the polymer to the flow.

If the polymer solution is introduced into the boundary layer through the chamber with a large angle of the entrance, there is a delay in development of hydrodynamic activity of the polymer molecules.

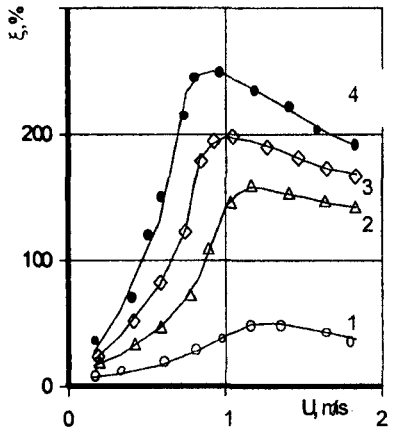



Fig. 1. Influence of U and the angle of the entrance to the slot on the relative pressure differential: 1-9°, 2-13°, 3-22°, 4-34°. $C_{PEO}$=0.1%, $M_{PEO}$=4·10$^6$

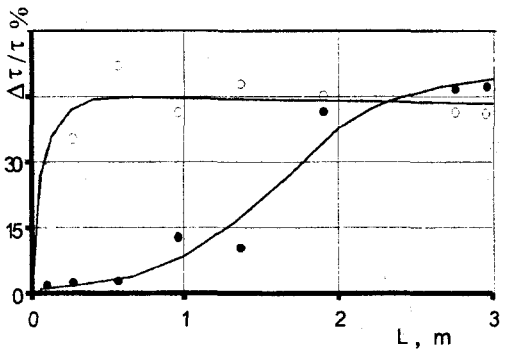



Fig. 2. Influence of the angle of the entrance to the slot on the distribution of the decrease in the tangent stresses along the lower wall of the channel for the injections of PEO solutions; mol. mass 2·10$^6$, $V_0$=16.5 m/s, Q=50 sm$^3$/s, $C_{PEO}$=0.3%; β°: 1-7.8°, 2-165°.

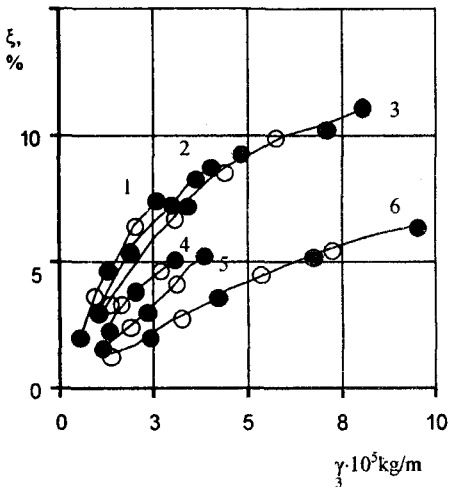



Fig. 3. Plot of the general pressure losses along the channel versus the specific concentration of PEO. Mol. mass: 2·10$^6$, $V_o$: ● = 16.5m/s, O = 25m/s; β=7.8$^0$ (1,2,3), β=165$^0$ (4,5,6); $C_{PEO}$: 1 and 4 - 0.05%, 2 and 5 - 0.1%, 3 and 6 – 0.3%.

It should be mentioned that the distribution of the tangent stresses and relative pressure losses along the channel correlate with each other. As it follows from the results shown in Fig. 2, the change of the mode of the polymer introduction through the underslot camera from weakly dissipative to strongly dissipative by modification of the entrance conditions results in double decrease in the drag resistance coefficient.

There has been (Fig. 3) registered a considerably larger divergence in the plots of the drop of the resistance versus $\gamma=Q\cdot C_{PEO}/\Omega\cdot V_0$ (where Q is the velocity of the injection, $C_{peo}$-concentration of the injected polymer solution, Ω-moistened surface, $V_0$ – velocity of the filling flow) at the changing concentrations of the polymer in case of the introduction of the polymer onto the inner surface of the fire hose under conditions of strong deformation effect of the hydrodynamic field on the injected solution, compared to the weak gradient effect.

The visualization of the flows of the polymer solution in the underslot chamber shows that the conditions of the entrance render influence on the drop of hydrodynamic resistance only when there is a loss of stability of the flow caused, as was shown earlier in [1-3], by the formation of the dynamic supermolecular structures which sharply increase the dissipativeness of the flow. The reduction of ef-

ficiency of the polymeric solution due to the deformation effects in the introduction system may be as large as 25% or higher at $V_0$>15 m/s. The increase in the rate of the water flow results in the expansion of the area with the reduced hydrodynamic activity of the polymer.

The significance of the area with the reduced hydrodynamic activity of the polymer introduced into the boundary layer is the more, the less is the length of the fire hose. It may be explained by the fact that the lifetime of the derivative structures under conditions of the flow with stretching is in the order of magnitude of 0,1-0,2 s or higher [4]. This is the time during which the polymer after leaving the slot in the fire hose has reduced activity due to its memory. Obviously, the more is the velocity of the water flow, the larger is the area behind the slot filled with the polymer solution under this condition, and its size is defined as: $l_\lambda=\theta_{sw} \cdot V_o$, where $\theta_{sw}$ - the time of structural relaxation of the supermolecular formations. Hence, for the velocity of the water flow of 25 m/s, this area should extend downwards along the stream to 2,5 m, if $\theta_{sw}$ = 0,1 s. The estimated size of the area with the reduced hydrodynamic activity of the polymer is in good correlation with the experimentally obtained esults.

The results of the experiments with the introduction of the polymer solutions of the various concentration through the underslot camera with the changing angle of the entrance show that for the given specific average concentration of the polymer in the boundary layer the efficiency of the reduction of drag resistance is decreased with the growth of the concentration of the injected polymer solution, and it is the stronger,the higher is the angle of the entrance. In [6], there was outlined a hypothesis that viscoelastic effects (swelling of the jet) near the slot strengthen the pull of the polymer solution by the external boundary layer and result in a faster decrease in the concentration of the polymer on the inner surface of the pipeline. The results obtained in [7, 8] make us reconsider this hypothesis because the visualization of the flow behind the slot [7] and the actual concentration of the polymer in the boundary layer [8] have not evidenced to the increased diffusion of the polymer. Most feasible is the explanation based on the impact of the effective viscosity (taken in its broad sense) that does not contradict to the results of the studies on the hydrodynamic activity of the polymers under conditions of the introduction of the polymer solution to the fire suppression pipeline. The dynamic structures of the polymer formed in the hydrodynamic field cause its compression [1,3], and this, of course, should cause decrease in the diffusion of the polymer in the boundary layer.

The detected regularities of the manifestation of elastic deformations at the introduction of the polymer solution to the fire-suppression pipeline allow suggesting a method for evaluation of the flow resistance of the fire suppressant liquid with the polymer additives in it. The flow resistance of the liquid in the pipeline at the introduction of the polymer solution to the boundary layer caused by the elastic deformations can be determined as:

$$X = \int_0^{l_\lambda} \chi(x)\tau_{wo}\,dx + \int_{l_\lambda}^{L-l_\lambda} \chi(x)\tau_{wl}\,dx,$$

where $\chi$ is the perimeter of the pipeline cross-section, $\tau_{w0}$ and $\tau_{wl}$ - tangential stresses with the introduction of the polymer to the boundary layer and without it, L - length of the pipeline , $l_\lambda=\theta_{sw} \cdot V_0$ ($\theta_{sw}$- time of structural relaxation of the supermolecular formations, $V_0$ –velocity of the filling flow).

**РЕЗЮМЕ**

Представлені в роботі дані свідчать, що при вирішенні задачі про зниження опору течії пожежегасильної рідини в трубопроводах за допомогою інжекції полімерних розчинів в прикордонний шар в частині розробки оптимальних варіантів систем підводу необхідно враховувати можливість проявлення у них ефектів пружних деформацій. Зменшення ефекту зниження опору течії рідини при підведені полімерного розчину в прикордонний шар пожежного рукава є результатом сполучення деформаційного впливу подовжнього гідродинамічного поля, яке реалізується в системі підводу, і молекулярно-концентраційних характеристик полімерного розчину.

Робота демонструє шляхи підвищення ефективності систем вводу полімерів у пожежні рукави і систем пожежотушіння водою або розчинами поверхнево-активних речовин, що буде сприяти зменшенню теплового забруднення навколишнього середовища та продуктами згорання різних речовин.

**SUMMARY**

The data obtained in this study shows that when solving the problem of drag reduction of the fire suppressing liquid in the pipeline by injecting the polymer solutions in the boundary layer, for the development of the optimum system of the introduction, it is necessary to take into account possible effects of the elastic deformations.

The decrease in the effect of drag reduction at the introduction of the polymer solution into the boundary layer of the fire hose is due to the combination of the deformational effects of the longitudinal hydrodynamic field developed in the system of the injection and molecular-concentration characteristics of the polymeric solution.

Thus it is possible to improve the effective systems of the polymer introduction into the fire hoses and therefore operation of the fire suppression systems using water and surfactant solutions. This will result in less adverse environmental impact caused by the heat and the combustion products.

**REFERENCES**

1. Pogrebnyak V.G., Ivanyuta Y.F., Frenkel S.Y. "The Structure of the Hydrodynamic Field and Distortions of the Molecular Shape of Flexible Polymers under Free-Converging Flow Conditions" Polymer Science USSR, 1992, Vol. 34, No. 3, p. 270-273.
2. Pogrebnyak V.G., Pisarenko A.A. "Solutions of Polymers in Conditions of near-the-wall turbulence and the mechanism of hydrodynamic drag reduction" J. Applied Hydrodynamics. Kiev, Ukraine, 2000, Vol. 2(74), No. 2, p.83-95.
3. Pogrebnyak V.G., Ivanyuta Y.F., Naymchuk N.V., Tverdokhleb S.V., and Frenkel S.Y. "Flow structure of polyethylene oxide solutions in the input zone of a short capillary" Inzh.-Fiz. Zh., 1985, Vol. 49, No. 4, p. 614-621.
4. Pogrebnyak V.G. "Deformation relaxation time of polymers' solutions" Hydro- and gas-dynamics of flows with heat and mass transfer, Ed. By Nikulin V.A., Izhevsk, USSR, 1989, Issue No. 3, p. 143-149.
5. Pogrebnyak V.G., Naymchuk N.V., and Tverdokhleb S.V, "Dynamic structure formation in the solutions of hydrodynamically active polymers" Inzh.-Fiz. Zh., 1992, Vol. 63, No. 2., p. 147-150.
6. Wu J., Fruman D.H., Tulin M.P. " Drag reduction by polymer diffusion at high Reynolds numbers " J. of Hydronautics, 1978, Vol. 12, July, p.134-136.
7. Fruman D.H. and Galivel P. "Anomalous effects connected with ejection of polymer, reducing resistance, in turbulent boundary layers of pure water" Technical papers from the Symposium on Viscous Drag Reduction, Ed. By Gary R. Hough, Vought Advanced Technology Center, Dallas, Texas, Vol. 72, November 1979.
8. Vdovin A.V. and Smolyakov A.V. "Diffusion of solutions in a turbulent boundary layer" Zh. Prikl. Meh. i teh. Fiz.1978, No. 2, p.66-73

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

УДК 532.543

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВБЛИЗИ ПРЕПЯТСТВИЯ В УСЛОВИЯХ ТЕРМИЧЕСКИХ ИНВЕРСИЙ АТМОСФЕРЫ

*А.Б.Ступин, Е.В.Бруяцкий*, В.С.Оверко, Н.А.Дмитренко*
**Институт гидромеханики НАН Украины*

Рост промышленных мощностей и сопутствующее ему загрязнение биосферы различными типами загрязняющих веществ требуют решения задач по определению степени загрязненности городов и промышленных объектов.

При этом особую актуальность приобретают исследования по расчёту диффузии загрязняющих веществ в атмосфере. Расчет рассеивания атмосферных выбросов в условиях крупных городов или предприятий требует учета характера застройки, термической и барической стратификации атмосферы. Значительное влияние на характер распространения загрязняющих веществ оказывают термические инверсионные слои. В работах [1,2], определено влияние приподнятых и приземных инверсий на рассеивание выбросов. В частности, в результате ночного выхолаживания подстилающей поверхности в малооблачную погоду образуются слои приземной инверсии, в которых температура растет с высотой, а выше слоя инверсии температура убывает. Утром при нагреве почвы и прилегающего слоя воздуха возрастание температуры с высотой вблизи подстилающей поверхности постепенно сменяется ее снижением, а выше некоторое время сохраняется образовавшаяся с ночи инверсия. Таким образом, возникает слой приподнятой инверсии.

Изменение температуры с высотой влечет за собой изменение плотности атмосферы. Следовательно, при инверсионной стратификации атмосферы наблюдается возникновение задерживающего слоя, влияние которого на рассеивание выбросов определяется следующим образом: если источник выбросов находится ниже слоя инверсии, то задерживающий слой препятствует проникновению загрязняющих веществ в верхние слои атмосферы, а в случае, когда наблюдается приземная инверсия с расположенным над ней источником выбросов, задерживающий слой препятствует проникновению выбросов в нижние слои атмосферы .

Поэтому, большой интерес представляет учет совместного влияния термических инверсий и неоднородности рельефа подстилающей поверхности.

В настоящей работе проведен численный расчет распространения выброса от постоянно действующего источника в инверсионно стратифицированной атмосфере при наличии полуэллиптического препятствия. Задача решалась в двумерной постановке. С физической точки зрения она адекватна процессу рассеивания промышленных выбросов в районе протяженной гряды холмов или в местах плотной промышленной застройки.

Численное исследование полей концентрации проведено путем решения полной системы уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска и уравнений тепло- и массопереноса. С целью уменьшения влияния границ расчетная область выбиралась таким образом, чтобы высота расчетной области H была в 5-10 раз больше характерного размера препятствия $b$. При этом продольный размер $L$ был выбран в восемь раз больше поперечного.

Система исходных расчетных уравнений имеет вид [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+Ri\left(T+\frac{b}{H}z\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+w\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{1}{Pe_d}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right), \tag{4}$$

где $Re=\frac{U\cdot b}{\nu}$ - число Рейнольдса, $Ri=\frac{g\cdot\beta\cdot b(T_0-T_h)}{U^2}$ - число Ричардсона, $Pe=\frac{U\cdot b}{a}$ - тепловое число Пекле, $Pe_d=\frac{U\cdot b}{D}$ - диффузионное число Пекле.



©Ступин А.Б., Бруяцкий Е.В., Оверко В.С., Дмитренко Н.А.

Конечно-разностная аппроксимация исходной системы уравнений и краевые условия изложены в работе [4].

При проведению расчетов по обтеканию полуэллиптического препятствия для получения исследуемых полей концентрации предварительно были определены поля скорости, давления и температуры. При этом число Ричардсона варьировалось от –0.005 до 0.05.

На рис 1 -3 представлены распределения полей концентрации, скорости и температуры для случая, когда максимум профиля концентрации находится ниже уровня инверсии (Ri<0). Подписи на изолиниях обозначают значения концентрации и температуры нормированные на максимальную температуру и концентрацию, соответственно.

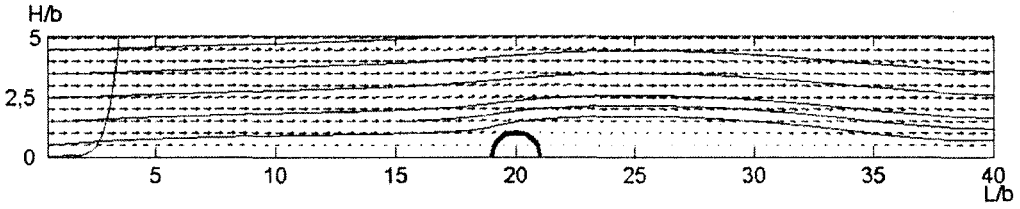



Рис. 1. Поле скорости и линии тока

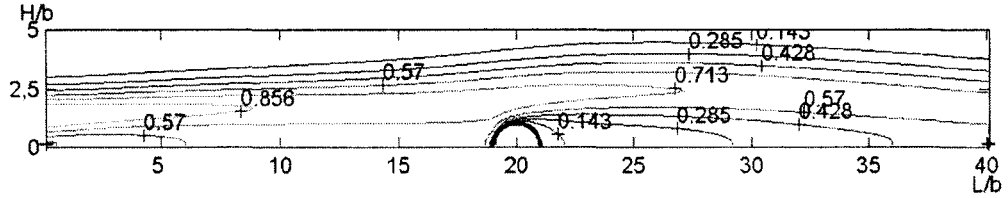



Рис. 2. Поле концентрации пассивной примеси.

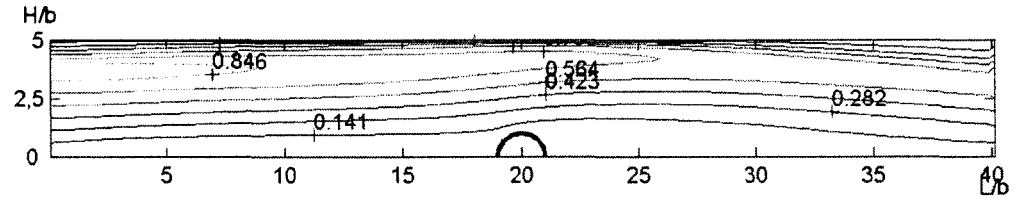



Рис. 3. Поле температуры

На рис 4 -6 представлены распределения полей концентрации, скорости и температуры в случае, когда максимум профиля концентрации находится ниже уровня инверсии (Ri>0).

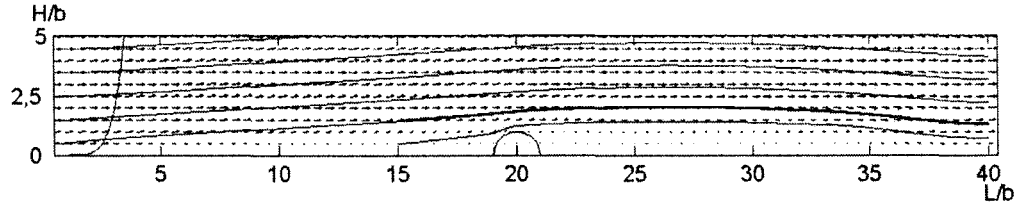



Рис. 4. Поле скорости и линии тока

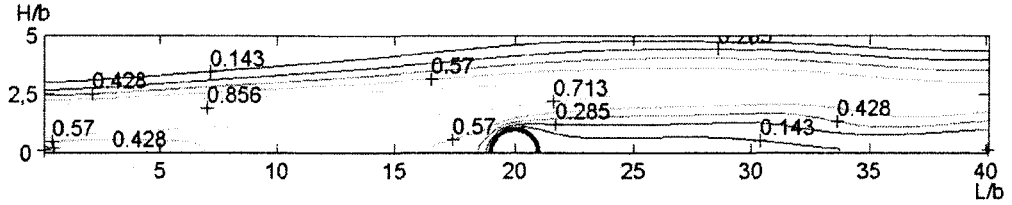



Рис. 5. Поле концентрации пассивной примеси.

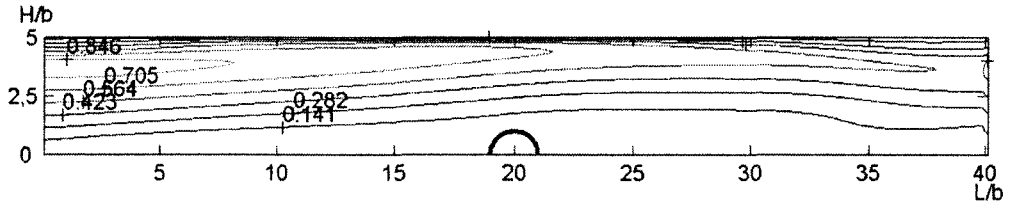



Рис. 6. Поле температуры

Рассмотрим температурные поля при отрицательных (рис. 3) и положительных (рис. 5) силах плавучести. Из сравнения расчетных данных, приведенных на рисунках, видно, что отрицательные силы плавучести усиливают эффект задерживающей площадки. Однако, при Ri>0 восходящие конвективные движения при обтекании препятствия усиливают действие архимедовых сил и максимум концентрации над препятствием выходит за область исходного инверсионного слоя.

На рис. 7-9 приведены результаты расчетов, когда максимум концентрации находится над слоем приземной инверсии.

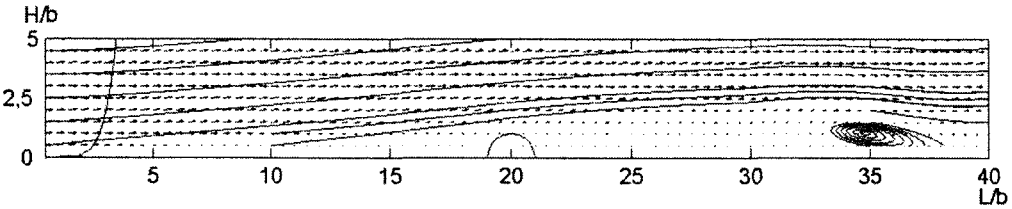



Рис. 7. Поле скорости и линии тока

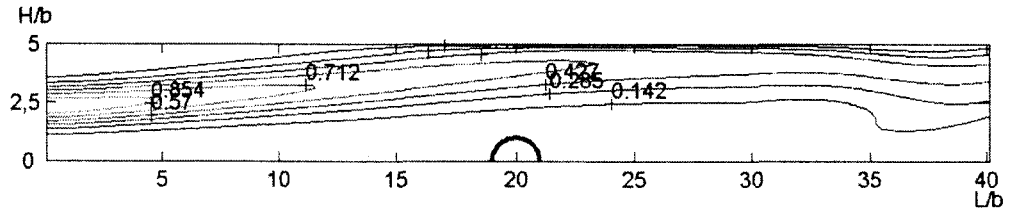



Рис. 8. Поле концентрации пассивной примеси.

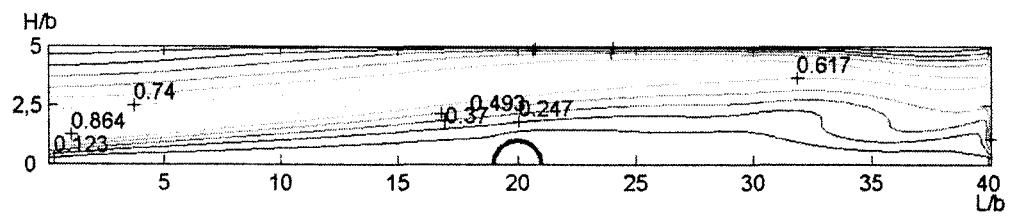



Рис. 9. Поле температуры

Из сравнения полученных полей скорости (рис. 1, 4, 7), видно, что в случае приземной инверсии значительно увеличивается область отрывных течений. Восходящие конвективные потоки деформируют исходное температурное поле таким образом, что область приземной инверсии смещается в верхние слои атмосферы и способствует вытеснению выбросов из приземного слоя. При этом в области отрывных течений наблюдаются волновые процессы, разрушающие слой приземной инверсии и, что способствует перераспределению температурного режима и, как следствие этого увеличению загрязненности нижних слоев атмосферы.

На основе вышеизложенного можно сделать вывод, что сложность рельефа и вид термической стратификации атмосферы приводят к значительному отличию характера рассеивания выбросов от общепринятой гауссовой модели Поэтому для точного определения полей концентрации в областях с плотной застройкой и промышленных площадках предприятий необходимо учитывать влияние этих факторов.

**РЕЗЮМЕ**

Досліджено розсіювання консервативних домішок в інверсійно стратифікованій атмосфері при обтіканні напівеліптичної перешкоди. Визначено спільний вплив неоднорідності рельєфу і термічних інверсій атмосфери на розподіл забруднюючих речовин в атмосфері.

**SUMMARY**

Research of dispersion of conservative impurity in inversion to the stratified atmosphere at flow semi-elliptic obstacles. Joint influence of heterogeneity of a relief and thermal inversions of an atmosphere on distribution of polluting substances is determined.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. М.Е.Берлянд. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л., Гидрометеоиздат, 1975. – 448 с.
2. Н.Л.Бызова, В.Н.Иванов, Е.К.Гаргер Турбулентность в пограничном слое атмосферы. – Л., Гидрометеоиздат, 1989. – 2648 с.
3. Монин А.С. Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. – С.-Пб: Гидрометеоиздат, 1992. – 694 с.
4. Е.В.Бруяцкий., А.Б.Ступин, В.С.Оверко, Н.А.Дмитренко. Численное исследование полей концентрации вблизи препятствия при его обтекании термически стратифицированным потоком // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2002. – №1. – С.217-222.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

УДК 536.421.1+532.522.546:621.746

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕМ КОМПОЗИТНОМ СЛИТКЕ

*Ф.В.Недопекин, В.М.Мелихов, В.В.Белоусов, В.М.Кондратенко**
**Институт черной металлургии НАН Украины, г. Днепропетровск*

Для математического моделирования процесса кристаллизации стального слитка, затвердевающего в чугунной изложнице при утеплении зеркала металла слоем шлака, предлагается следующая физическая постановка задачи.

Формирование композитного слитка осуществляется в три этапа. На первом этапе в уширенную кверху изложницу с прибыльной надставкой заливается расплав основного состава. Изложница и прибыльная надставка имеют температуру окружающей среды $T_{изл}$. Заливку производят до уровня, незначительно превышающего уровень стыка изложницы и надставки. Масса этого расплава составляет в зависимости от относительного объема прибыльной части слитка около 80 – 90%. При этом расплав имеет температуру $T_{01}$ и концентрацию углерода $C_{01}$. На этом этапе часть расплава затвердевает у стенок и дна изложницы, формируя поверхностный слой слитка определенной толщины.

На втором этапе, металл некоторое время выдерживается в изложнице, при этом продолжается формирование (увеличение толщины) поверхностного слоя. Этот период называется временем «выдержки». Время «выдержки» зависит от массы слитка и толщины поверхностного слоя, который требуется сформировать. Время выдержки может составлять от 5 до 30 минут.

На третьем этапе в изложницу до уровня верха прибыльной надставки заливают расплав другого состава температуру $T_{02}$ и концентрацию углерода $C_{02}$. В течение короткого промежутка времени под воздействие энергии струи и конвективного массопереноса, внутри сформировавшегося поверхностного слоя происходит смешивание двух расплавов и образуется расплав промежуточного состава, из которого при дальнейшей кристаллизации формируется внутренняя часть слитка. Таким способом можно получать слитки, наружный слой которых состоит, например, из нержавеющей стали, а внутренние объемы из обычной углеродистой. В зависимости от условий применения металлопродукции состав этих пар может быть иным. Если условия службы изделия требуют сочетания пластичности и высокой прочности, то поверхностный слой слитка формируется из низкоуглеродистого металла, а внутренний – из высокоуглеродистого. При необходимости производства самозатачивающихся изделий может быть использована обратная комбинация упомянутых углеродистых сталей [1].

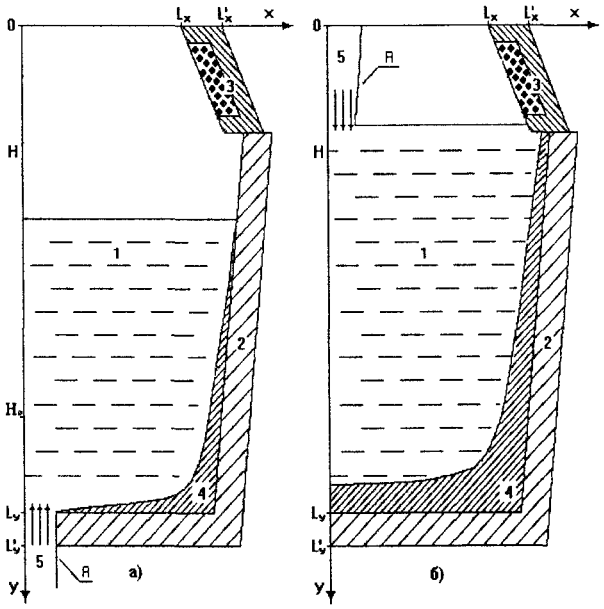



Рис.1. Схема исследуемой области формирования композитного слитка а) сифонная разливка; б) разливка сверху:
1 – расплав; 2 – изложница; 3 – прибыльная надставка; 4 - затвердевающая корочка;
5 – струя поступающего расплава.


©Недопекин Ф.В., Мелихов В.М., Белоусов В.В., Кондратенко В.М.

На основе экспериментальных исследованиях параметров разливки, а также производя оценку характера формирования таких слитков и прогнозирования их структуры и свойств металлопродукции с большими материальными и техническими затратами, разработали математическую модель кристаллизации слитка, которая основывается на следующих предположениях [2]:

- процесс заполнения изложницы квадратного сечения считается симметричным относительно вертикальной оси координат;
- постоянная скорость поступления расплава $V_m$;
- температура и примесь углерода по всему объему расплава в начальный момент времени распределены равномерно;
- за характерный размер выбирается наибольшая полуширина слитка $X_0$;
- затвердевание стали происходит при идеальном тепловом контакте слитка с изложницей;
- граница поверхности уровня плоская;
- коэффициенты теплопроводности, удельной теплоемкости и кинематический коэффициент вязкости для расплава считаются постоянными;
- изложница предварительно (20%) заполнена расплавом, температура которого в начальный момент времени соответствует температуре разливаемого металла;
- уровень расплава находится на высоте $H_0$, соответствующей предварительно заполненному объему расплава;
- величина скорости перемешивания в жидкой части расплава в начальный момент времени равна нулю;
- струя идеально организована;
- уравнение гидродинамики записывается в приближении Буссинеска.

В основу математической модели формирования композитного слитка положены уравнения гидродинамики и тепломассопереноса, широко используемые при численных исследованиях затвердевания стальных слитков. Для исследования гидродинамических процессов в расплаве и двухфазной зоне используются уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости (уравнение Навье - Стокса и уравнение неразрывности) в приближении усредненных вложенных макроконтинуумов:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla \nu_{эф}\vec{V} + \beta_\Gamma \vec{g} + \beta_T \Delta T \vec{g} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\vec{V} = 0; \qquad (2)$$

где $\vec{V}$ – скорость, $\tau$ – время, P – давление, $\rho_ж$ – плотность жидкой фазы, $\xi$ – доля твердой фазы, $\beta_\Gamma$ – газосодержание; $\nu_{эф} = \nu + \nu_t$ – эффективный коэффициент вязкости, определяемый с учетом вклада турбулентного движения; $\nu_t$ – турбулентный коэффициент вязкости; $\beta_T$ – тепловой коэффициент объемного расширения, $\Delta T$ – разность между локальным значением температуры и температурой солидус расплава.

При заливке расплава сверху происходит аэрация воздуха в расплав. Количество захватываемого струей воздуха определяется долей газосодержания $\beta_\Gamma$ в расплаве. Уравнение переноса газовой фазы в расплаве стали имеет вид:

$$\frac{\partial \beta_\Gamma}{\partial \tau} + (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\beta_\Gamma = 0. \qquad (3)$$

Граничные условия для уравнения переноса газовой фазы имеют вид:

на оси симметрии $\beta_\Gamma = 0$;
на твердой поверхности $\beta_\Gamma = 0$; (4)
на зеркале металла $\beta_\Gamma = \beta_0$; при $0 \le x < R$
$\beta_\Gamma = 0$; при $R < x \le L_1$.

Тепловые процессы в жидкой и жидко-твердой зонах слитка описываются уравнением теплопереноса в приближении квазинеравновесной двухфазной зоны:

$$\left[\left(c_т \rho_т - c_ж \rho_ж\right)\xi + c_ж \rho_ж + c_\Gamma \rho_\Gamma \beta_\Gamma\right]\frac{\partial T}{\partial \tau} + \left[c_ж \rho_ж (1-\xi) + c_\Gamma \rho_\Gamma \beta_\Gamma\right](\vec{\nabla}\vec{\nabla})T = \vec{\nabla}\left\{\left[\left(\lambda_т - \lambda_ж\right)\xi + \lambda_ж + \lambda_\Gamma \beta_\Gamma\right]\vec{\nabla}T\right\} + L\rho_т \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \qquad (5)$$

где $c_ж$ и $c_т$ – теплоемкости жидкой и твердой фазы, $\rho_т$ – плотность твердой фазы, T – температура, $\lambda_ж$ и $\lambda_т$ – коэффициенты теплопроводности жидкой и твердой фазы, L – теплота кристаллизации стали.

Для изложницы, прибыльной надставки, огнеупорной керамики и твердой фазы уравнение теплопереноса имеет вид:

$$\tilde{n}_i \rho_i \frac{\partial T}{\partial \tau} = \vec{\nabla}\left(\lambda_i \vec{\nabla} T\right), \tag{6}$$

где i – индекс, соответствующий исследуемой области.

Доля твердой фазы $\xi$ определяется из правила неравновесного рычага

$$\xi = 1 - \left(\frac{T_k - T}{T_k - T_L}\right)^{-1/(1-k_0)}, \tag{7}$$

где $T_k$ и $T_L$ – температуры кристаллизации и ликвидуса; $k_0$- коэффициент распределения углерода в стали.

Система уравнений гидродинамики и теплопереноса дополнена краевыми условиями. В начальный момент предполагается выполнение следующих условий для всей расчетной области:

$$\tau=0:\ u=0, \qquad v=0,$$

$$\xi=0,\ T = \begin{cases} T_{01}, L_x < y < H_0, 0 < x < L_x \\ T_{\text{èçë}}, L_x \le x \le L'_x, L_y \le y \le L'_y \end{cases}, \tag{8}.$$

При решении уравнений (1,2) граничные условия для скорости движения расплава включают условия непроницаемости и прилипания на твердых поверхностях исследуемой области:

$$u = 0,\ v = 0, \tag{9}$$

симметрии – на оси слитка:

$$u\Big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \tag{10}$$

и на свободной поверхности расплава (вертикальная компонента скорости определялась из условия равенства расхода жидкости в обеих частях системы, горизонтальная полагалась равной нулю):

$$u\Big|_{y=0} = 0,\ v\Big|_{y=0} = V_{стр}\frac{d^2_{стр}}{D^2_{сл}}, \tag{11}$$

где $d_{стр}$– диаметр заливочной струи, $D_{сл}$- диаметр слитка.

Граничные условия для температуры отражают отсутствие потока тепла на оси слитка:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \tag{12}$$

и на нижней границе изложницы:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

сопряжение на границах расплав - твердая фаза и металл-изложница в предположении идеального (контакта i и k – индексы, соответствующие граничащим областям):

$$\lambda_i (\vec{n}\nabla) T\big|_{L-} = \lambda_k (\vec{n}\nabla) T\big|_{L+}, \qquad T\big|_{L-} = T\big|_{L+}, \tag{14}$$

и внешний теплообмен на границе контакта изложницы с окружающей средой.

Граничные условия для переменных $\omega$, $\psi$, T, $\xi$, $\beta_\Gamma$ определены в работе [2]. Гидродинамические и *теплофизические процессы, протекающие в композитном слитке при* заливке первого металла, достаточно хорошо описаны в работе [3].

Вычислительный эксперимент по разработанной модели проводился для 11 тонного уширенного кверху слитка квадратного сечения, отливаемого сифонным способом. Для определения отличительных особенностей затвердевания проводилось сопоставление с результатами моделирования процессов формирования обычного слитка таких же размеров.

Наполнение изложницы расплавом при различной скорости заливки и при различной температуре перегрева выше линии ликвидус приводит к существенному изменению режима затвердевания биметаллического слитка. Увеличение перегрева стаи приводит и к увеличению кинетической энергии стали (рис. 2).

Поэтому увеличение скорости наполнения изложницы может интенсифицировать процессы тепломассообмена между слитком и изложницей. Больший перегрев стали может привести к уменьшению толщины корочки слитка.

*Для определения* отличительных особенностей затвердевания 11-тонного биметаллического слитка проводился вычислительный эксперимент в сопоставлении с результатами затвердевания обычного

слитка. При формировании обычного слитка производилась сифонная заливка металла, включая и прибыльную часть слитка.

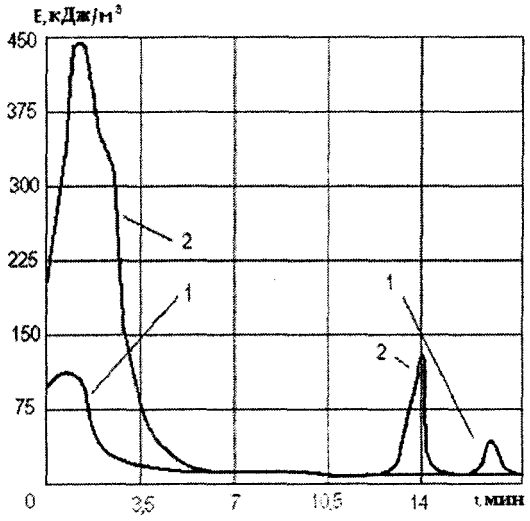



Рис. 2. Изменение кинетической энергии при перегреве 90°С и скорости наполнения изложницы:
1 – 2т/мин; 2 – 4 т/мин

Распределение поля температуры в биметаллическом и обычном слитке представлено на рис. 3а, рис. 3б (вертикальные штриховые линии– границы изложницы, соответствуют номерам представленных кривых). Изменение температуры на различных горизонтах показывает, что при затвердевании биметаллического слитка температура повышается (для времени после выдержки металла).

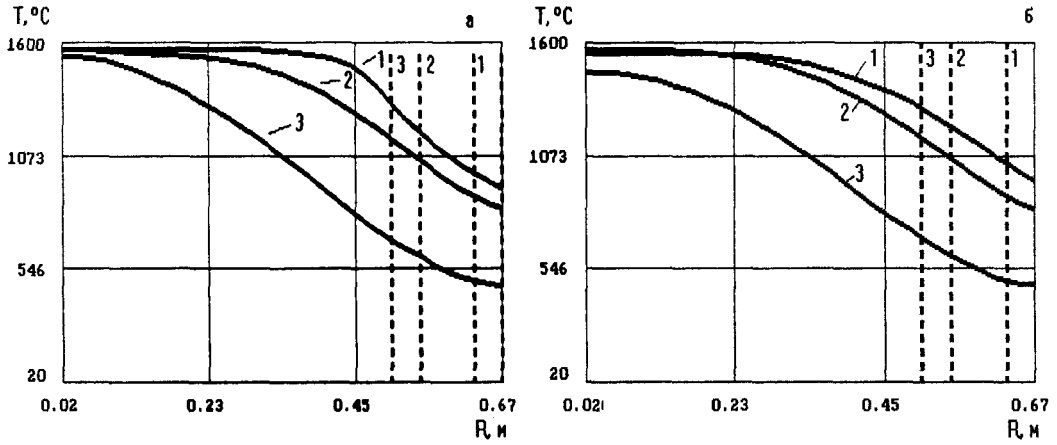



Рис. 3. Распределение температуры в биметаллическом слитке, время 17 мин. на горизонтах:
1 – 1 м; 2 - 1,6 м; 3 - 2,3 м

Это связано с дополнительным поступлением углеродистой стали, а также с уменьшением теплоотвода и при затвердевшем слое стали при выдержке металла.

Затвердевание слитка во многом определяется тепловой энергией в расплаве. Распределение тепловой энергии представлено на рис.4, из которого видно, что тепловая энергия возрастает при заливке вследствие увеличении количества расплава поступающего в изложницу, а в период выдержки имеет тенденцию медленного уменьшения. Кроме того, необходимо отметить, что с повышение перегрева тепловая энергия увеличивается.

**Выводы.**

Разработана математическая модель, вычислительный алгоритм и программное обеспечение для исследования гидродинамических и тепломассообменных процессов при затвердевании композитных слитков. Модель и пакет прикладных программ позволяют исследовать гидродинамические и теплообменные процессы в системе расплав-изложница в период наполнения изложницы, гидродинамические и теплообменные процессы в системе композитный слиток - расплав - стенка изложницы - окружающая среда в период формирования стального слитка.

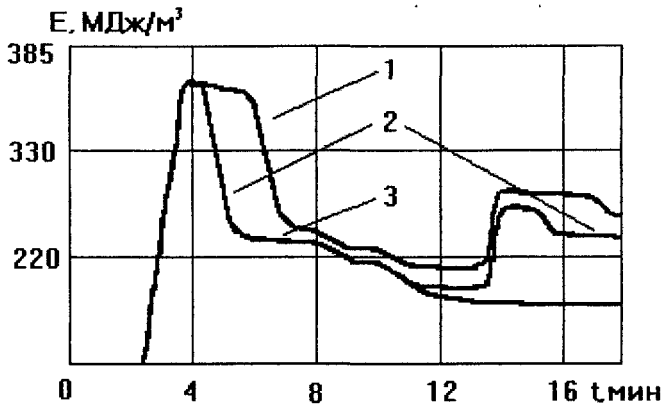



Рис. 4. Распределение плотности тепловой энергии:
1-биметаллический слиток перегрев 90°С; 2 - 50°С; 3 - обычный слиток

В результате вычислительного эксперимента получены распределения полей скорости, температуры, доли твердой фазы, функции тока и вихря скорости. Исследования показали, что: при затвердевании композитного слитка температура повышается на границе двух металлов; тепловая энергия возрастает при заливке вследствие увеличения количества расплава поступающего в изложницу, а в период выдержки имеет тенденцию медленного уменьшения; увеличение перегрева приводит к увеличению его кинетической энергии.

**РЕЗЮМЕ**

Для оптимізації процесу формування композитного злитка розроблена математична модель, обчислювальний алгоритм і програмне забезпечення дослідження гідродинамічних і тепломасообмінних процесів. Визначені поля швидкостей, температури та частки твердої фази.

**SUMMARY**

For optimization of process of shaping of the composite ingot the mathematical model, computing algorithm and software of examination hydrodynamics and processes of heat and mass transfer designed. The fields of velocities, temperature, fraction of a solid phase and concentration of carbon in the ingot are spotted.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Баптизманский В.И., Поживанов А.М., Исаев Е.И., Огурцов А.П. Повышение эффективности производства стальных слитков. – М.: Металлургия, 1992. – 223 с.
2. Недопекин Ф.В., Белоусов В.В., Мелихов В.М., Поляков В.Ф., Кондратенко В.М., Потапов А.В. Тепломассоперенос при формировании биметаллического слитка. Материалы междун. науч.-техн. конф. "Производство стали в XXI веке. Прогноз, процессы, технологии, экология" (15-16 мая 2000,Киев; 17-19 мая 200, Днепродзержинск). – К.:НТТУ "КПИ". – С.534-537.
3.Недопекин Ф.В., Кондратенко В.М., Мелихов В.М. – Математическая модель формирования многослойных слитков // Математичне моделювання, 2(7), 2001. – С.65-69.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

УДК 621.771:004.18

# ТЕПЛООБМЕН ПРИ УСКОРЕННОМ ОХЛАЖДЕНИИ ГОРЯЧЕГО ПРОКАТА

*А.А.Рыбалов, В.И.Губинский*
*Национальная металлургическая академия Украины, г. Днепропетровск*

Ускоренным охлаждением и термическим упрочнением проката отечественная наука занимается более сорока лет. Тем не менее, этот вопрос продолжает оставаться актуальным и в наши дни ввиду ряда нерешенных проблем. Среди таких проблем можно выделить отсутствие единого подхода к расчету теплообмена в процессе ускоренного охлаждения проката водой высокого давления.

Отсутствие единого подхода объясняется сложностью протекающих теплофизических процессов, которые имеют ряд весьма существенных особенностей: прямо- или противоточное движение проката и охлаждающей воды со скоростью до 100м/с и 20 – 40 м/с соответственно; сопряженные температурные поля металла и воды; высокие значения коэффициентов теплоотдачи (до 750000 Вт/(м$^2$ *К)), чисел Био (до 150) и скоростей охлаждения (до 4000 – 5000$^0$С/с).

Принципиальная схема линии ускоренного охлаждения представлена на рисунке 1.

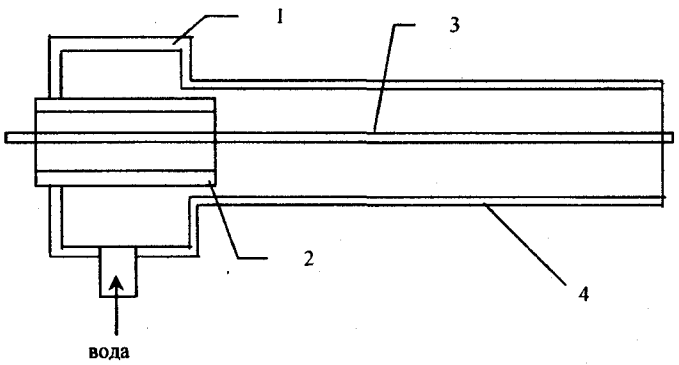



Рис.1. Принципиальная схема линии ускоренного охлаждения и термоупрочнения проката:
1 – корпус форсунки; 2 – сопло форсунки; 3 – арматурный пруток; 4 – камера охлаждения.

Высокая интенсивность охлаждения объясняется физическим механизмом теплоотдачи, который представляется как поверхностное кипение воды, не догретой до температуры кипения.

При входе проката с температурой конца прокатки (1050 – 1100$^0$С) в камеру, между его поверхностью и охлаждающей водой возникает большой температурный напор. Вследствие этого происходит вытеснение воды из пограничного слоя и образование сплошной паровой рубашки на поверхности металла, что сильно тормозит теплоотдачу [1]. Однако, значения коэффициента теплоотдачи 300000–400000 Вт/(м$^2$ *К), получаемые на данном этапе охлаждения, не соответствуют тем значениям, которые наблюдаются при наличии паровой рубашки на поверхности проката. Этот факт объясняется тем, что происходит интенсивное разрушение паровой рубашки под воздействием турбулентного движения охлаждающей воды, движения воды относительно поверхности металла, а также периодического профиля арматурного прутка, в результате чего происходит непосредственное взаимодействие проката и жидкости. От частоты и длительности таких контактов зависит количество тепла, передаваемого от прутка к воде. Так как среднемассовая температура жидкости меньше температуры насыщения, то в пограничном слое наблюдается кипение, а за его пределами в общей массе воды происходит конденсация пара, образовавшегося на поверхности нагрева [2].

Все выше отмеченные теплофизические особенности процесса ускоренного охлаждения нашли свое отражение в подходе к расчету коэффициента теплоотдачи. Расчетные зависимости для коэффициента теплоотдачи обычно сводятся к критериальным зависимостям вида:

$$Nu = C \cdot \left( \mathrm{Re}_a{}^2 + \mathrm{Re}_o{}^2 \right)^n \qquad (1)$$

где С и n – коэффициенты, определяемые экспериментальным путем.

©Рыбалов А.А., Губинский В.И.

В зависимость (1) включены числа Рейнольдса во второй степени, исходя из предположения, что результат разрушения пограничного слоя будет зависеть от суммарного действия кинетических энергий жидкости с абсолютной скоростью $W_{абс}$ и скоростью относительно поверхности проката $W_{отн}$ [3].

Среди используемых в настоящее время методик расчета теплообмена в процессе ускоренного охлаждения проката можно отметить следующие.

В [4] приводится расчет, основанный на аналитическом решении дифференциального уравнения теплопроводности для бесконечного цилиндра при следующих граничных условиях: температура поверхности проката мгновенно снижается до величины температуры охлаждающей воды на входе в камеру и остается постоянной на всем ее протяжении. При этом, соответственно, отпадает необходимость в расчете коэффициента теплоотдачи, так как его значение принимается равным бесконечности. Теплофизические свойства проката (коэффициент температуропроводности и теплопроводности) принимались неизменными в процессе охлаждения.

В [5] рассматривается расчет теплообмена и температур проката по графикам решения уравнения теплопроводности для цилиндра бесконечной длины при граничных условиях 3-го рода. Коэффициент теплоотдачи рассчитывается по формуле типа (1). Коэффициент теплопроводности и кинематическая вязкость воды рассчитываются по среднему значению температуры охлаждающей воды в процессе охлаждения. Параметры воды на линии насыщения определяются по средней величине статического давления. В результате коэффициент теплоотдачи усредняется и принимается постоянным по длине камеры охлаждения. Теплофизические свойства металла рассчитываются для средней по массе температуры и также принимаются постоянными в процессе охлаждения.

В [6] приводится сравнение аналитического, численно-аналитического и численного методов расчета процесса ускоренного охлаждения проката. Теплофизические свойства металла рассчитывались по начальной температуре проката в аналитическом методе, по среднемассовой температуре на каждом временном интервале в численно-аналитическом методе, по температуре каждого слоя по радиусу проката в численном методе. Коэффициент теплоотдачи принимался неизменным по длине камеры охлаждения.

Таким образом, из всех известных на данный момент методик расчета, ни одна не учитывает изменение теплофизических параметров охлаждающей воды в процессе охлаждения. Тем самым, не принимается в расчет изменение величины коэффициента теплоотдачи, которое имеет место в реальном процессе.

Задача настоящей работы состояла в том, чтобы разработать достаточно достоверную методику расчета процесса ускоренного охлаждения проката водой высокого давления. Требовалось оценить величину погрешности, вызванной различными допущениями, принимаемыми в модели. Это связано с тем, что уровень достоверности и сложности метода должен соответствовать применимости его для прогнозирования микроструктуры и механических свойств готовой продукции в промышленных условиях.

Методика расчета, рассматриваемая в данной работе, состоит из следующих этапов: гидродинамический расчет линии ускоренного охлаждения; расчет коэффициента теплоотдачи; расчет температурного поля по сечению проката и температуры самоотпуска; прогнозирование конечной микроструктуры и механических свойств проката в зависимости от условий охлаждения.

Целью гидродинамического расчета является определение скорости движения и расхода охлаждающей воды в каждой из последовательных камер охлаждения по известной величине давления воды перед форсункой.

Расчет теплообмена в данной работе основывался на выражении для коэффициента теплоотдачи, полученном при исследовании охлаждения катанки диаметром 6,3 и 7,0 мм водой высокого давления в охлаждающей противоточной камере со сложным профилем и дающем наибольшие значения из ряда других рассмотренных формул в процессе адаптации математической модели. В критериальной форме используемое выражение имеет следующий вид [6]:

$$Nu = 0.33 \cdot 10^{-9} \cdot (\mathrm{Re}_a{}^2 + \mathrm{Re}_o{}^2)^{1.0455} \qquad (2)$$

Расчет температурного поля по сечению проката основан на аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности для бесконечного цилиндра при граничных условиях 3-го рода методом конечных разностей с применением явной схемы.

Как известно, метод конечных разностей предполагает разбиение всего времени процесса на временные интервалы. На каждом временном интервале производится расчет теплофизических параметров проката и охлаждающей воды, рассчитывается коэффициент теплоотдачи и температурное поле по радиусу проката.

По окончании расчета процесса охлаждения водой, рассчитывается температурное поле металла в процессе выравнивания температур по сечению на воздухе. В результате определяется температура самоотпуска, величина которой служит для прогнозирования микроструктуры и механических свойств готовой продукции.

Адаптация данной модели осуществлялась на основе работы линии ускоренного охлаждения арматурного проката диаметром 12 мм из стали марки Ст3пс в потоке мелкосортного стана 250 – 4 комбината "Криворожсталь".

Графические результаты типичного расчета температур проката представлены на рисунках 2 и 3.

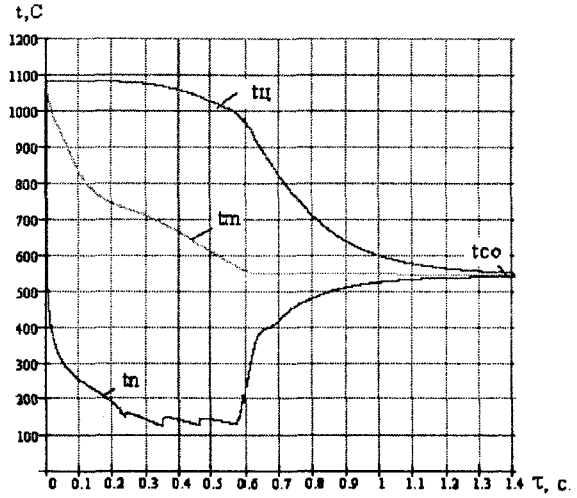



Рис.2. Изменение температур проката в процессе ускоренного охлаждения водой и выравнивания на воздухе: $t_ц$ -температура центра, $t_m$-среднемассовая температура, $t_n$-температура поверхности, $t_{co}$-температура самоотпуска.

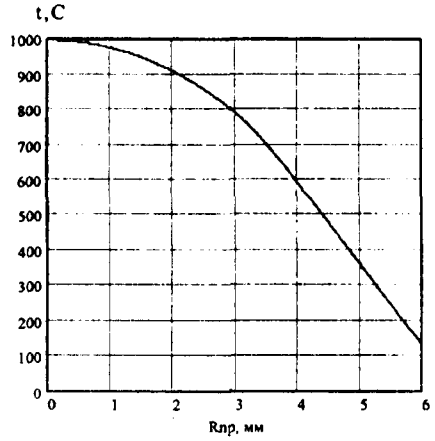



Рис.3. Распределение температуры по радиусу проката в конце процесса охлаждения.

Представленные температурные диаграммы получены при следующих параметрах прокатки: температура конца прокатки 1080$^0$С; скорость прокатки 13,5 м/с; температура охлаждающей воды перед форсункой 36$^0$С; давление воды перед форсункой 26 ати; диаметр проката 12 мм; общая длина четырех камер охлаждения 7,7 м; характер движения проката и воды - прямоток.

Знание распределения температуры по сечению металла в конце процесса охлаждения, а также температуры начала аустенитно-мартенситного превращения для данной марки стали, позволяет прогнозировать объемную долю мартенсита (толщину мартенситного "пояска") в микроструктуре готового проката. Значение температуры самоотпуска позволяет прогнозировать образование конкретной микроструктуры в основном сечении проката.

Для возможности прогнозирования механических свойств были обработаны экспериментальные данные с целью выявления количественной связи между объемами образующихся фаз структуры и механическими свойствами. Прочностные свойства стали, как природного композита, рассчитывали по правилу смесей [7, 8]:

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \cdot V_i$$

Для оценки адекватности модели в качестве экспериментальных данных использовали результаты исследования микроструктуры и механических свойств тридцати проб ускоренно охлажденного арматурного проката.

Среднее отклонение расчетного предела текучести от экспериментального составило 17 МПа или 2,73 %, отклонение предела прочности составило 23 МПа или 3,27 %.

Таким образом, определено, что результаты расчета весьма близки к экспериментальным данным и разработанная модель может быть применима для достоверного описания процесса ускоренного охлаждения.

Для оценки погрешности, вносимой в результаты моделирования при различных подходах к определению теплофизических параметров металла и охлаждающей воды, были произведены следующие сравнительные расчеты ускоренного охлаждения арматурного проката с использованием разработанной модели и при указанных выше параметрах прокатки (таблица 1).

Табл. 1.

Результаты сравнительных расчетов ускоренного охлаждения арматурного проката.

| № п/п | $tm_1$ $^0C$ | $tm_2$ $^0C$ | $tm_3$ $^0C$ | $tm_4$ $^0C$ | tco $^0C$ | $\varepsilon_{tco}$ $^0C$ | $\sigma_m^p$ МПА | $\sigma_в^p$ МПа | $\varepsilon_{\sigma m}$ МПА | $\varepsilon_{\sigma в}$ МПА |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 739 | 658 | 598 | 549 | 538 | - | 637 | 724 | 2 | 4 |
| 2 | 740 | 659 | 598 | 549 | 539 | 1 | 635 | 722 | 0 | 2 |
| 3 | 738 | 666 | 601 | 540 | 530 | 8 | 639 | 725 | 4 | 5 |

*$tm_1$, $tm_2$, $tm_3$, $tm_4$ – среднемассовые температуры проката в конце камер охлаждения; tco – температура самоотпуска; $\varepsilon_{tco}$ - погрешность по температуре самоотпуска; $\varepsilon_{\sigma m}$ и $\varepsilon_{\sigma в}$ - погрешность по пределу текучести и пределу прочности соответственно.

В вариантах 1 и 2 теплофизические свойства металла ($\lambda_m$ и $a_m$) определялись по температуре каждого слоя по радиусу проката на каждом интервале по времени. Теплофизические параметры охлаждающей воды ($\lambda_в$ и $\nu_в$) в варианте 1 рассчитывались по температуре воды, определяемой из уравнения теплового баланса на каждом временном интервале. В варианте 2 температура воды по длине камер охлаждения между начальным и конечным значениями изменялась по закону прямой линии. Теплофизические свойства на линии насыщения ($t_{нас}$ и $\nu_{нас}$) в вариантах 1 и 2 определялись по величине статического давления на каждом интервале.

В варианте 3 все параметры охлаждающей воды и проката, и, соответственно, коэффициент теплоотдачи, усреднялись и оставались постоянными по длине каждой камеры.

Расчетные значения $\sigma_m^p$ и $\sigma_в^p$ сравнивались с экспериментальными значениями ($\sigma_m^э$ = 635 МПа и $\sigma_в^э$ = 720 МПа), полученными в процессе охлаждения проката при указанных выше параметрах прокатки.

Значения температур самоотпуска, полученные в вариантах 2 и 3, сравниваются со значением, полученным в варианте 1, так как в производственных условиях измерение данной температуры не представлялось возможным.

Полученные данные показывают, что упрощенная методика расчета теплофизических параметров металла и охлаждающей воды, принятая в варианте 3, не вносит какой-либо существенной погрешности в результаты моделирования. Максимальная погрешность в вариантах по температуре самоотпуска составила $8^0$C, по пределу текучести - 4 МПа и пределу прочности - 5 МПа.

По-видимому, такая незначительная погрешность во всех вариантах объясняется высокими значениями коэффициента теплоотдачи по длине камер охлаждения. Так, для варианта 1 $\alpha_{min}$=309000 Вт/(м$^2$*К), $\alpha_{max}$=732000 Вт/(м$^2$*К).

Использование различных подходов к расчету теплофизических свойств проката и охлаждающей воды может внести изменение в величину коэффициента теплоотдачи в несколько десятков тысяч, что при общем значении коэффициента в несколько сот тысяч, не может существенно повлиять на результаты моделирования. Таким образом, наиболее простой метод определения теплофизических параметров металла и охлаждающей воды (вариант 3) обеспечивает достаточную точность расчета, несколько упрощает модель и значительно сокращает затраты машинного времени на получение конечных результатов моделирования.

Следует отметить, что при значениях числа Нуссельта менее 4500 – 5000 данный вывод нуждается в проверке.

При указанных выше параметрах прокатки, был произведен расчет ускоренного охлаждения по методике [5]. Результаты расчета оказались близки к данным, полученным в варианте 1. Расхождение по температуре самоотпуска составило 11$^0$С. Отклонение расчетного предела текучести от экспериментального составило 6 МПа и предела прочности - 7 МПа. Таким образом, методика, представленная в [5], вполне приемлема для расчета температур проката в процессе ускоренного охлаждения. Однако, по сравнению с разработанной моделью, является более громоздкой и требует значительно больших затрат времени.

Был произведен сравнительный расчет по исходным данным методики [4], но с использованием разработанной модели. Расхождение по среднемассовой температуре проката в конце процесса охлаждения составило 80$^0$С (600$^0$С и 680$^0$С соответственно). Такую погрешность, допускаемую при расчете по методике [4], будем считать неприемлемой, особенно в начальной стадии процесса охлаждения при снижении температуры поверхности проката до температуры начала мартенситного превращения, что отмечается и другими исследователями [9].

Вывод. Разработана и адаптирована математическая модель, достоверно описывающая процесс ускоренного охлаждения и термического упрочнения арматурного проката в потоке мелкосортных станов.

Определено, что усреднение теплофизических параметров проката и охлаждающей воды не вносит существенной погрешности в результаты расчета температурного поля и механических свойств готового проката при больших числах Нуссельта (более 4500).

**РЕЗЮМЕ**

Надано теплофізичне описування та метод розрахунку процесу прискореного охолоджування та термічного зміцнення арматурного прокату в потоці неперервних дрібносортних станів. Здійснено огляд відомих методик розрахунку, надана оцінка похибки, яка вноситься до результату моделювання при різних підходах до визначення теплофізичних властивостей прокату та води.

**SUMMARY**

The thermal description and method of calculation of process of accelerated cooling and thermal strengthening of rolled metal is submitted. The review of modern methods of calculation, estimation of an error which is brought in to results of mathematical modeling with the various approach to definition of thermal properties of metal and cooled water are realized

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Губинский В.И., Минаев А.Н., Тайц Н.Ю. Исследование процесса охлаждения проволоки после прокатки на непрерывном стане // Известия ВУЗов. – №11. – 1962 г. – С.128-132.
2. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367с.
3. Бузник В.М., Везломцев К.А. Некоторые результаты обобщения экспериментальных данных по интенсификации процессов конвективного теплообмена / Известия ВУЗов. Энергетика, №8, 1959 г.
4. Шеремет В.А., Любимов И.М., Смияненко И.Н., Гунькин И.А., Журавлев И.И. Ускоренное охлаждение арматурного проката в нескольких камерах // Теория и практика металлургии. – 2001. – №2 (22). – С.37-41.
5. Губинский В.И., Минаев А.Н., Гончаров Ю.В. Уменьшение окалинообразования при производстве проката. – К.: Техніка, 1981. – 135 с.
6. Волковский О.С. Совершенствование методов моделирования и внедрение ускоренного охлаждения проката специальных марок стали с целью повышения качества продукции. Дисс. … канд. техн. наук. – Днепропетровск, 1988. – 234 с.
7. Пикеринг Ф.Б. Физическое металловедение и разработка сталей: Пер. с англ. – М.: Металлургия, 1982. – 184 с.
8. Пилюшенко В.Л., Ноговицын А.В. Феноменологическая модель механических свойств проката из низкоуглеродистой микролегированной стали / Фундаментальные и прикладные проблемы черной металлургии. – Киев: Наукова думка, 1995. – 218 с.
9. Сидоренко О.Г., Федорова И.П., Демченко Е.М., Казырский Е.О., Клепиков А.Г. Методика расчета параметров многоциклового охлаждения при упрочнении стержневой арматуры // Сталь. – 1997. – №12.

*Надійшла до редакції 15.06.2002 р.*

УДК 624.014

# АЕРОДИНАМІЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ З ТРЬОХ КОЛОВИХ ЦИЛІНДРІВ

*Є.-А.Журанські*, Р.І.Кінаш, О.Є.Копилов*
*Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів*
**Інститут Будівельної Техніки, м. Варшава*

## 1. Вступ

В практиці будівництва часто зустрічаються димарі у формі поодинокого колового циліндра [1, 2] або системи з двох [3, 4, 7, 9], трьох та чотирьох колових циліндрів [12, 13]. При цьому відстань між ними може бути різною.

На такі конструкції, що розташовані в поперечному напливі повітряних мас діє гідродинамічне або, як його ще часто називають, аеродинамічне навантаження. При цьому наступає явище відривання вихорів, яке в певних межах числа Рейнольдса може мати регулярний або циклічний характер і призводити до появи коливань в площині перпендикулярній до середнього напрямку напливу повітряних мас [2, 5, 6, 8,10, 11].

Величиною, що характеризує частоту відривання вихорів від конструкції, яку розташовано в межах напливу повітряних мас є число Струхаля (St), яке визначають за формулою:

$$St = \frac{U}{Df}; \qquad (1)$$

де: D- діаметр циліндра, м; U-швидкість напливу повітряних мас, м/с; f-частота відривання вихорів, Гц.

Число Струхаля є величиною, яка характеризує форму поперечного перерізу гнучкої конструкції. Число Струхаля як і характер напливу в пристінному шарі конструкції, що опливається залежать від числа Рейнольдса.

Знаючи величину числа Струхаля розглядуваної конструкції, її зовнішні розміри та частоту власних коливань $n_i$ (i=1,2,...) ( зазвичай найважливішим є перший вид коливань, хоча в деяких випадках і другий) підставляючи в (1) $f = n_i$ можна обчислити критичну швидкість резонансу $V_{cr}$.

Визначення величин аеродинамічних сил, що виникають під час явища резонансу та амплітуди коливань є складною практичною задачею і вимагає спеціальних досліджень. Однак знаючи величину числа Струхаля можна оцінити імовірність появи вихрового збурення коливань і при потребі вжити запобіжних заходів: запроектувати гасники коливань, змінити конструкцію тощо.

Взаємодію між моделлю та повітряними масами під час силових вимірювань можна охарактеризувати за допомогою коефіцієнта аеродинамічного опору $C_x$ :

$$C_x = \frac{P_x}{q \cdot D \cdot l \cdot n}, \qquad (2)$$

де: $P_x$- динамічний тиск у площині вимірювання; діаметр циліндрів; довжина циліндра; n - кількість циліндрів у системі.

## 2. Мета експериментальних досліджень

Метою експериментальних досліджень було визначення та порівняння величин коефіцієнтів аеродинамічного опору $C_x$, чисел Струхаля St для системи з трьох колових циліндрів залежно від способу їхнього розміщення відносно один одного у просторі.

## 3. Методика проведення експериментальних досліджень

Експериментальні дослідження проведено у аеродинамічній трубі низьких швидкостей Варшавської Політехніки. Форма поперечного перерізу труби – квадрат, із розміром ребра 1м. Довжина робочої камери труби 8 м. Швидкість нагнітання повітряних мас за допомогою реостату можна плавно змінювати в межах від 1 до 18 м/с. Силові дослідження здійснювалися у аеродинамічній трубі замкнутого типу з відкритою робочою частиною довжиною 2,01м, та діаметром вихідного сопла 1,5м. Для нагнітання повітряних мас в аеродинамічній трубі використовувався вентилятор з чотирма лопатнями, який живився від двигуна змінного струму потужністю 55 кВт. В даній аеродинамічній трубі можна досягти напливу повітряних мас із швидкістю від 15м/с до 40м/с.

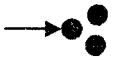
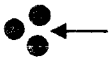
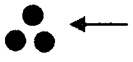
Для елементів моделей димових труб з трьох повітропроводів було використано пластмасові труби діаметром 32 мм із товщиною стінки 3,0 мм та латунні труби діаметром 60 мм із товщиною стінки 1,5 мм. Зовнішні поверхні труб були відполіровані. Моделі було жорстко закріплено між підлогою та стелею робочої камери аеродинамічної труби, через це було прийнято, що модель знаходиться у плоскому припливі ( $\lambda = \infty$ ).


©Журанські Є.-А., Кінаш Р.І., Копилов О.Є.

Спосіб розміщення колових циліндрів відносно напрямку набіганні повітряних мас наведено в табл.1.

Таблиця 1

Спосіб розміщення колових циліндрів відносно напрямку вітру

| Комбінація №1 | Комбінація №2 | Комбінація №3 |
|---|---|---|
|  |  |  |

Детально методика проведення аеродинамічних досліджень системи з трьох колових циліндрів описана для тандему в роботі [3].

**4. Результати експериментальних досліджень та їх аналіз**

На нижче поданих рисунках (рис.1 - 10) наведено і порівняно результати вимірювань величин чисел Струхаля St, коефіцієнта аеродинамічного опору $C_x$ для різних швидкостей напливів повітряних мас у сліді за системою з трьох циліндрів колового перерізу для різних умов розміщення у просторі (див. табл.1).

Залежність величини коефіцієнта аеродинамічного опору Cx для системи з трьох циліндрів від способу їхньої розміщення в просторі, швидкості напливу повітря V=30 м/с для діаметра D=60 мм наведено на рис.1.

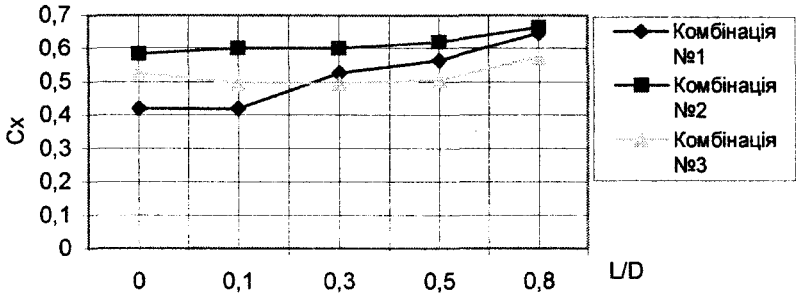



Рис.1. Залежність величини коефіцієнта аеродинамічного опору Cx від способу розстановки циліндрів у просторі

Залежність величини числа Струхаля St для системи з трьох циліндрів від способу їхньої розміщення в просторі для труб діаметром D=60 мм для швидкості напливу повітря V=12,4 м/с наведено на рис.2, для швидкості V=20 м/с – на рис.3, для швидкості V=30 м/с – на рис.4, а для швидкості V=40 м/с – на рис.5.

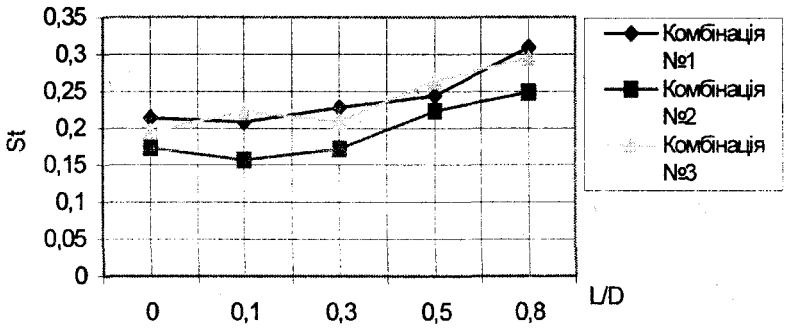



Рис.2. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі (швидкість напливу повітря V=12,4 м/с, D=60мм)

З аналізу рис.6 та рис.7 випливає, що для швидкостей в діапазоні 12,65-17,89 м/с відбувається незначна зміна частот відривання вихорів f від систем колових циліндрів, і як наслідок – зміна чисел Струхаля St.

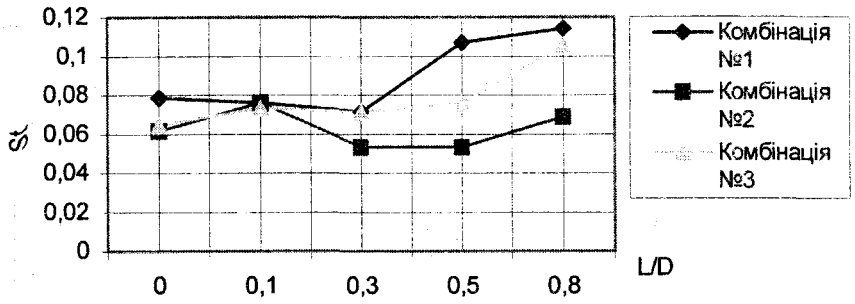



Рис.3. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі та напрямку напливу повітряних мас (швидкість напливу повітряних мас V=20м/с)

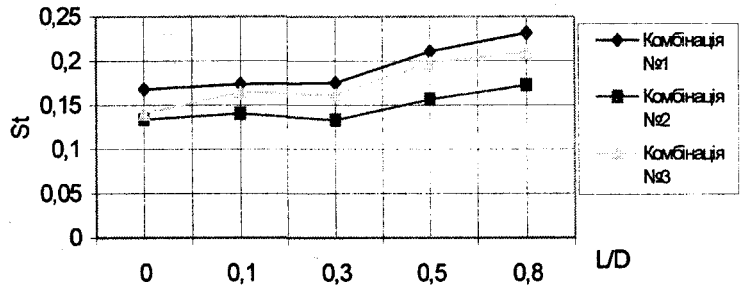



Рис.4. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі та напрямку напливу повітряних мас (швидкість напливу повітряних мас V=30м/с)

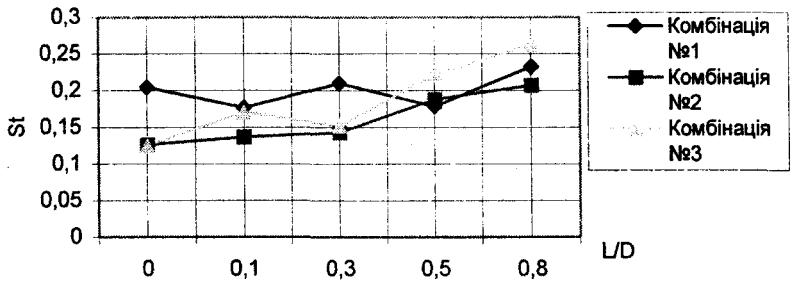



Рис.5. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі та напрямку напливу повітряних мас (швидкість напливу повітряних мас V=40м/с)

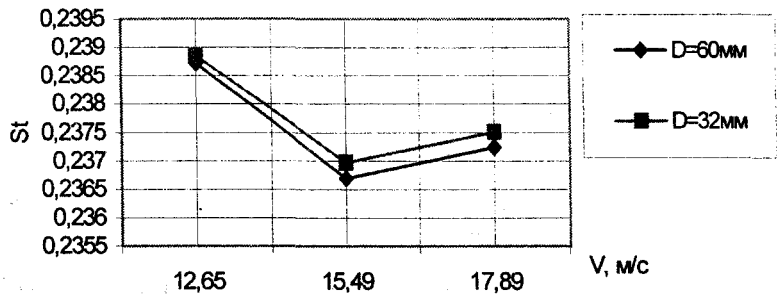



Рис.6. Залежність величини числа Струхаля St від діаметрів циліндрів D та швидкості напливу повітряних мас (комбінація циліндрів №2, відстань між циліндрами L/D=0,8)

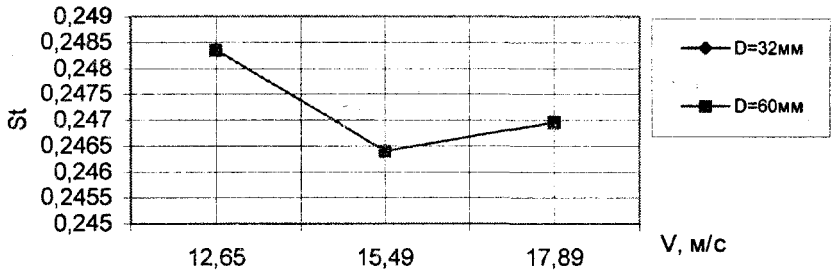



Рис.7. Залежність величини числа Струхаля St від діаметру циліндрів D та швидкості напливу повітряних мас (комбінація циліндрів №2, відстань між циліндрами L/D=0,8 )

Залежності величини числа Струхаля St від способу розміщення циліндрів (D=60 мм) в просторі та швидкості напливу повітряних мас для комбінацій циліндрів №1, №2 і №3 наведено відповідно на рис.8, 9 і 10.

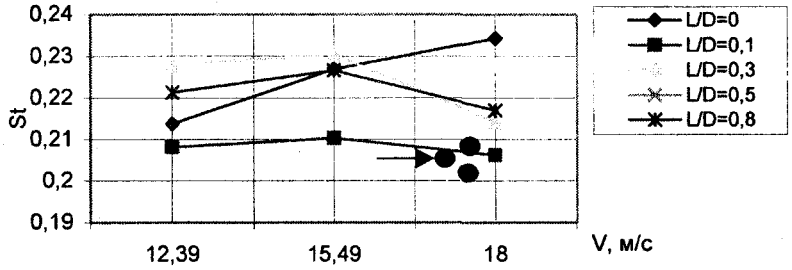



Рис.8. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі та швидкості напливу повітряних мас (комбінація циліндрів №1)

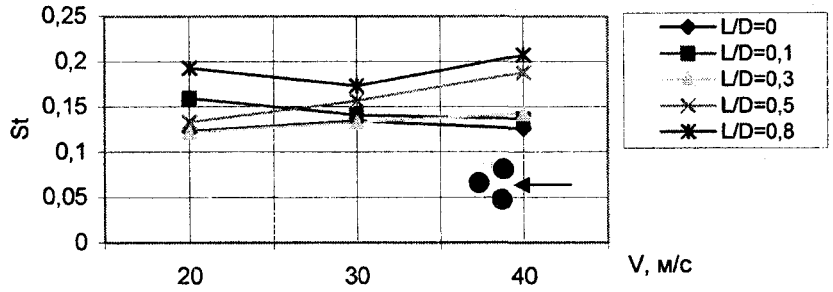



Рис.9. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі та швидкості напливу повітряних мас (комбінація циліндрів №2 )

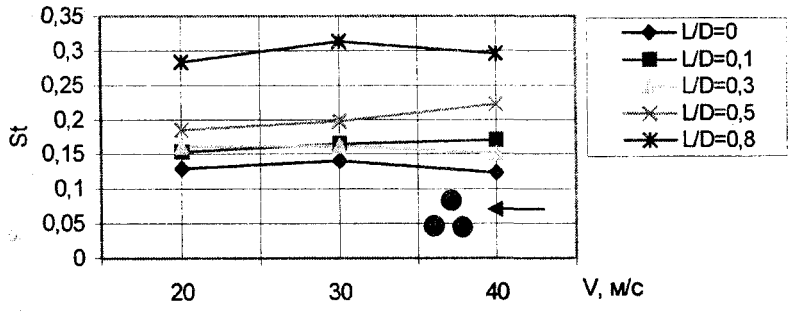



Рис.10. Залежність величини числа Струхаля St від способу розстановки циліндрів в просторі та швидкості напливу повітряних мас (комбінація циліндрів №3)

**Висновки**

1. У результаті проведених досліджень одержано значення чисел Струхаля St, коефіцієнта аеродинамічного опору $C_x$, $P_x$ та частоти пульсації швидкості припливу повітряних мас для систем з трьох колових циліндрів.
2. Одержано залежності чисел Струхаля St від відстані L між коловими циліндрами та їхнього діаметра, швидкості напливу повітряних мас, а також результати впливу способу розміщення системи колових циліндрів відносно напрямку напливу повітряних мас у просторі.
3. Визначені діапазони швидкостей напливу повітряних мас для різних діаметрів та комбінацій розміщення колових циліндрів у просторі, в яких відбувається зміна чисел Струхаля St.
4. Із зростанням відстані L між циліндрами зростають значення аеродинамічного опору Cx, як для тандему з двох циліндрів [3], проте необхідно встановити інтервал на якому ця тенденція буде зберігатись.
5. Одержані результати складають один з етапів програми виконаних аеродинамічних досліджень одного, двох, трьох і чотирьох колових циліндрів, які використані в нормах проектування сталевих димарів аналогічної конструкції.

Робота виконана під науковим керівництвом доктора інж. Я. Войцеховського (Варшавська політехніка) та фінансувалася Інститутом Будівельної Техніки, м. Варшава

**РЕЗЮМЕ**

Наведено результати вимірювань величин чисел Струхаля, коефіцієнта аеродинамічного опору $C_x$ залежно від швидкості припливу повітряних мас. Одержано залежності чисел Струхаля St від відстані L між коловими циліндрами та їхнього діаметра, а також напрямку набігання повітряних мас відносно розташування системи з трьох колових циліндрів.

**SUMMARY**

Results of measuring the volumes of Strouhal numbers and aerodynamic resistance coefficient $C_x$ depending on the speed of air masses arriving are provided. The information on how Strouhal numbers St depend on distance L between peg cylinders, their diameter and direction of air masses movement concerning to the location of three-peg cylinder system is also given.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Кінаш Р.І. Коваленко В.А., Копилов О.Є. Аеродинамічні дослідження числа Струхаля для поодинокого циліндра круглого перерізу /Вісник ДДАБА, вип. 2001-1(26), Макіївка, 2001. - с.110-115.
2. Кінаш Р.І. Стасюк М.І., Копилов О.Є. Аналіз аеродинамічних досліджень колових циліндрів /Вісник ДДАБА, вип. 2001-1(26), Макіївка, 2001. - с.110-115.
3. Кінаш Р.І., Копилов О.Є. Аеродинамічні дослідження тандему з двох колових циліндрів / Вісник НУ"ЛП", "Теорія і практика будівництва" N 441, Львів, НУ "ЛП", 2001. - с.85-94.
4. Błazik-Borowa E., Flaga A., Kazakiewicz M.I.: Problemy interferencji aerodynamicznej dwóch walców kołowych.- KILiW PAN, IPPT, Studia z zakresu inżynierii nr 42, Warszawa 1997.
6. Maeda H., Kubo Y., Kato K., Fukushima S.: Aerodynamic characteristics of closely and rigidly connected cables for cable-stayed bridges.- Bluff Body Aerodynamics & Applications III, July 28 - August 1, 1996, Blacksburg, Virginia, USA.
7. Novák J.: Strouhal Number of cylinder pair. Acta Technica ČSAV, 1974, No 5, str.581-588.
8. Okajima, A.: Flows around Two Tandem Circular Cylinders at Very High Reynolds Numbers.- Bulletin of the JSME, vol. 22, No 166, April 1979.
9. Williamson C.H.K.: Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 159, 1985, P. 1-18.
10. Zdravkovich M.M.: Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements.- ASME Transactions, Journal of Fluids Engineering v. 99, 1977, 618-631.
11. Zdravkovich M.M.: The effects of interference between circular cylinders in cross flow.– Journal of Fluids and Structures 1, 1987, 239-261.
12. Графский И.Ю., Казакевич М.И. Аэродинамика плохообтекаемых тел: Учебное пособие. – Днепропетровск: ДГУ, 1983. – 116с.
12. Wojciechowski J., Żurański J. A., Kinasz R. Badania liczby Strouhala wiązki walców kołowych / Materialy III Ogolnopolskie sympozijum „Wplywy srodowiskowe na budowle i ludzi – obciazena, oddzialywania, interakcje, dyskomfort", Lublin. – 2001. – s. 55-62.
13. Żurański J.A.: Wpływ interferencji aerodynamicznej na obciążenie wiatrem stalowych kominów wieloprzewodowych. Prace Instytutu Techniki Budowlanej – Kwartalnik, Nr 2-3, 2000, str. 37-64.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

УДК 669.184:518.12

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЕКАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В КОНВЕРТЕРНОЙ ВАННЕ И ОЦЕНКА ВЫДЕЛЕНИЯ ДЖОУЛЕВА ТЕПЛА

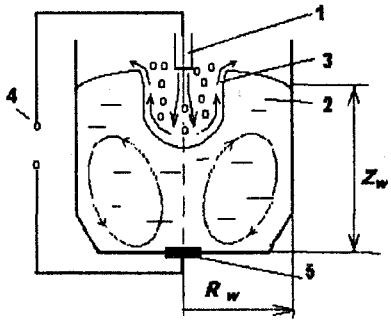
*А.Ю.Дреус*, В.Ф.Поляков, С.И.Семыкин*
**Днепропетровский национальный университет,*
*Институт черной металлургии НАН Украины, г. Днепропетровск*

**Введение.** В работах [1, 2] показано, что пропускание электрического тока сквозь ванну кислородного конвертера во время ее продувки может служить основой, для улучшения технико-экономических показателей данного вида выплавки стали. Возникающие при этом магнитогидродинамические и электрические явления способствуют созданию благоприятных условий для интенсификации процессов тепло и массопереноса и ускорения химических реакций. В частности, одним из эффектов, полученных в ходе экспериментальных исследований, является повышение средней температуры расплава по сравнению с обычными режимами плавки. Особенностью предложенной авторами [1, 2] технологии является использование электрической энергии относительно небольшой мощности. Для детального исследования физических явлений в ванне, в результате такого рода воздействия, и поиска путей усовершенствования технологии представляет интерес оценка вклада джоулева тепла в общий энергетический баланс ванны на основе математического моделирования электромагнитных полей в ванне и последующего расчета мощности объемного тепловыделения $q_v$ (Вт/м$^3$) за счет электрического тока из закона Джоуля-Ленца:

$$q_v=j^2/\sigma, \qquad (1)$$

где j – плотность электрического тока, А/м$^2$, $\sigma$ – удельная электропроводность среды, Ом·м$^{-1}$.

**Постановка задачи.** Физическая модель задачи представлена на рис. 1. Рассматривается осесимметричная ванна радиусом $R_W$, заполненная расплавом высотой $Z_W$.




с жидким металлом

Продувка осуществляется посредством погружаемой в ванну сверху фурмы кислородного дутья 1. Струя термически активного газа оказывает тепловое и механическое воздействие на расплав 2 с образованием лунки 3 (высокотемпературной реакционной зоны). Электрический ток протекает сквозь расплав при наложении разности электрических потенциалов 4 между фурмой и донным контактным электродом 5. При этом предполагается, что лунка заполнена электропроводящей сплошной средой (шлакометаллической эмульсией), что делает возможным протекание электрического тока. Растекающийся по объему ванны от мест токоввода электрический ток будет существенно пространственно рассосредоточенным и формирует вокруг себя электрическое и маг Рис. 1. Схема продувки ванны нитное поля.

Для определения электромагнитных величин рассмотрим систему стационарных уравнения Максвелла в дифференциальной форме и закон Ома [3]:

$$rot\,\boldsymbol{E}=0,\ rot\,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \boldsymbol{B}=\mu_0\mu\boldsymbol{H},\qquad \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{E}$ – вектор напряженности электрического поля тока, В/м; $\boldsymbol{H}$ – вектор напряженности магнитного поля тока, А/м; $\mu_0=4\pi10^{-7}$ Н/м – магнитная постоянная , $\mu$ - магнитная проницаемость среды (для расплава и шлака ≈1). Предполагается, что влиянием движения металла на распределение электромагнитных полей можно пренебречь, кроме того, используется допущение об осевой симметрии процесса то есть, учитываем только азимутальную составляющая магнитного поля $H_\varphi$ ($H_r=H_z=0$). Выполнив несложные преобразования, получим уравнение для определения $H_\varphi$:

©Дреус А.Ю., Поляков В.Ф., Семыкин С.И.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r H_\varphi}{\partial r}\right)\right)+\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (3)$$

Граничные условия для (3) ставятся на основе закона Био-Савара-Лапласа также как и в работе [4]. На поверхности электродов задается неоднородное распределение плотности тока, поскольку у краев электрода наблюдается ее концентрация [3].

$$H_\varphi\big|_{r\in[0,\mathrm{Re}]}=\frac{I}{2\pi R_e}\frac{1-\sqrt{1-(r/R_e)}}{r}, \qquad (4)$$

где – $I$ сила тока пропускаемого сквозь ванну, А, $R_e$ – радиус электрода, м. Решение данного уравнения позволяет определить мощность внутренних источников тепла из (1), которое с учетом (2) примет вид:

$$q_v=\frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right)^2+\left(-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \qquad (5)$$

**Описание и анализ результатов численных исследований.** В качестве примера проведем расчет джоулева тепловыделения для 60-тонной конвертерной ванны при воздействии электрического тока силой 1000 А, что соответствует электрическим мощностям, которые использованы в [2]. Радиус ванны $R_W$=1,75 м, радиус донного электрода $R_e$=0,25 м, высота расплава $Z_W$ =1,20 м, глубина лунки $Z_л$=0,75 м. Следует заметить, что при продувке ванны, ее электропроводность является непостоянной величиной и зависит от достаточно большого количества факторов: состава участка ванны, рода пропускаемого тока (переменный или постоянный), периода продувки и др. Для проведения расчетов электропроводность металла примем равной $\sigma=10^4$ $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$. Для участка лунки, заполненной шлакометаллической эмульсией электропроводность определим как близкую к проводимости железистых шлаков $\sigma\approx 0.01$ $(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$.

Уравнение (3) с соответствующими граничными условиями решалось численным методом, при этом на границе раздела расплав-шлакометаллическая эмульсия принималось условие непрерывности осевой и радиальной составляющих вектора плотности электрического тока. В качестве расчетной области выбрана половина осевого сечения цилиндра, в силу принятого допущения осевой симметрии. Результаты решения (3) представлены на рис.2. в виде распределения электрического тока (изолинии $rH_\varphi=const$) в расчетной области. Как видно из представленного рисунка, растекающийся по объему ванны электрический ток существенно пространственно неоднороден. Наибольшие градиенты плотности тока наблюдаются в окрестностях донного и верхнего электродов.

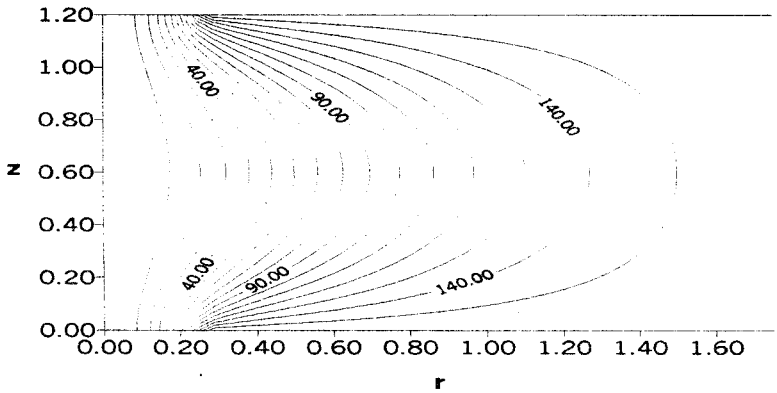



Рис.2. Картина изолиний электрического тока по половине сечения ванны.

Распределение мощности источников джоулева тепла по расчетной области представлено на рис.3.

**Выводы.** Представленный результат показывает, что наибольшее количество тепла за счет прохождения электрического тока будет выделяться лишь в областях максимальных градиентов электрического тока, особенно в зоне лунки, где электрическая проводимость существенно меньше проводимости жидкого металла. В основном объеме металлического расплава тепловыделение крайне незначительно.

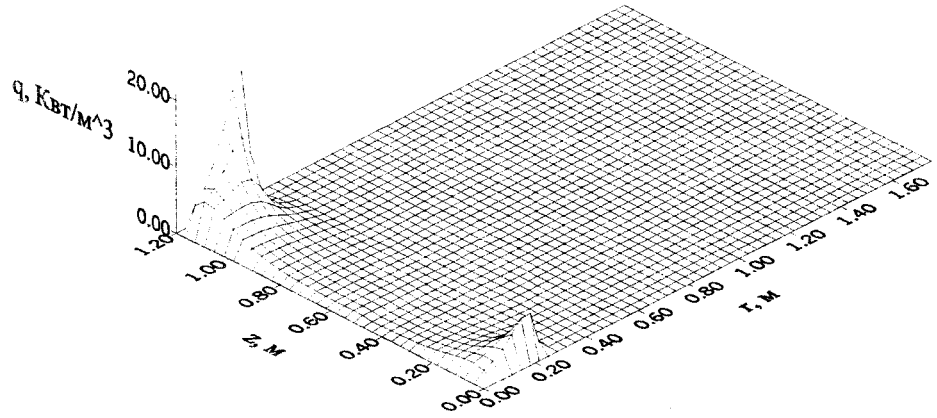



Рис.3. Мощность источников джоулева тепла в ванне

В заключение заметим, что представленные результаты следует рассматривать, как оценочные, которые позволяют качественно определить распределение электромагнитных и тепловых полей в конвертерной ванне. Однако после уточнения электрических характеристик сред, сквозь которые проходит электрический ток, данная модель может быть использована для количественных оценок и проведения исследований процесса плавки, с учетом электромагнитных воздействий.

**РЕЗЮМЕ**

В роботі наведена математична модель та результати розрахунку процесу тепловиділення в металевій ванні, під дією електричного струму.

**SUMMARY**

The mathematical model and calculate results of sources of heat in a liquid metal bath at influence of an electrical current are present.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1.Семыкин С.И., Поляков В.Ф., Семыкина Е.В. Исследование на лабораторной установке конвертерного процесса при совместном воздействии на расплав электрических и магнитных полей // Материалы межд. научн.-техн. конф. «Производство стали в XXI веке. Прогноз, процессы, технология, экология». – Киев - Днепродзержинск. – 2000. – С.128-129.

2.Поляков В.Ф., Семыкин С.И., Семыкина Е.В. Результаты и пути повышения эффективности использования электрической энергии малой мощности при конвертерной плавке // Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2002. – №7. – С.13-15.

3.Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.:. Наука, 1980. –352 с.

4.Дреус А.Ю., Поляков В.Ф., Семыкин С.И., и др. Исследование влияния электрического тока на процессы гидродинамики в сталеплавильной ванне // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2001. – Вип.5. – Т.1. – С.91–96.

*Надійшла до редакції 12.06.2002 р.*

УДК 532.516:532.529

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ОСАЖДЕНИЯ ПОРОШКОВОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ДЕТОНАЦИОННОМ НАПЫЛЕНИИ

*А.В.Зинченко*
*Институт транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг», г. Днепропетровск*

Методы детонационного нанесения специальных покрытий получили широкое распространение в различных областях техники. Данная технология позволяет наносить покрытия из наиболее тугоплавких и коррозионно-стойких материалов и в ряде случаев дает значительный экономический эффект. Однако получение высококачественных покрытий с заданными характеристиками невозможно без тщательного выбора конструктивных особенностей оборудования и параметров процесса напыления. При этом в первую очередь необходимо учитывать форму и размеры изделий, требования, предъявляемые к точности нанесения покрытия и его эксплуатационным свойствам.

Анализ параметров технологии детонационного и плазменного напыления показывает, что в процесс переноса порошкового материала на поверхность основы осуществляется высокотемпературной сверхзвуковой струей газа. При этом параметры эффективности осаждения, а также качество образуемого покрытия в значительной степени зависят от гранулометрического состава используемого порошка.

В работах [1,2] показано, что нанесение качественного покрытия возможно только, если в двухфазном потоке реализуется режим инерционного осаждения. При этом для смесей с крупнодисперсными частицами образование качественного покрытия также затруднительно [2], ввиду недостаточной энергетики и значительного разброса скоростей частиц в потоке. Эффективность напыления существенно снижается [2] и в случае околоравновесных смесей с параметрами релаксации частиц, близкими к критическим.

Для выяснения причин низкой эффективности напыления, а также физических закономерностей поведения мелких частиц порошков при напылении была рассмотрена область, непосредственно прилегающая к обрабатываемой детали. Для численного моделирования нестационарного двухфазного течения воспользуемся методом, описанным в работах [1,3].

Будем считать, что прямоугольное в плане облако частиц порошкового материала, начальной объемной концентрацией $\alpha_0=10^{-3}$ и высотой $h=0.4$, переносится сверхзвуковым потоком с числом Маха $M_\infty$ на цилиндрическую заготовку, радиусом $r=0.05$ м. В качестве начального приближения в нестационарной задаче используем установившееся поле течения при $M_\infty=3$ для чистого газа, полученное на сетке 150×105 узлов. Число Рейнольдса набегающего потока составляло $Re=2\cdot10^5$ [2]. Параметры двухфазной смеси были выбраны следующими: плотность несущей фазы $\rho_\infty=1.29$ кг/м$^3$, плотность материала частиц $\rho_{тр}=4000$ кг/м$^3$, диаметр частиц $d_p=10$ мкм соотношение удельных теплоемкостей фаз $\omega=1.671$, $\gamma=1.4$, что соответствует воздуху и частицам оксида алюминия $Al_2O_3$. Время релаксации рассматриваемой смеси имеет порядок $\tau_{□□}$.

В момент времени $t=0$ в расчетную область попадает облако частиц (рис. 1а,в). В момент прохождения ударной волны частицы быстро тормозятся в ударном слое, облако сжимается (рис. 1г,ж), при этом ударная волна значительно деформируется (рис. 1б,д). В последствии края облака напыляемого порошка несколько изгибаются (рис. 1з). Вблизи стенки цилиндра нормальная к поверхности составляющая скорости частиц оказывается достаточно малой. Облако не оседает на поверхности, а «растекается», превращаясь в тонкое вытянутое образование с загнутыми краями (рис. 2). При этом ударная волна постепенно восстанавливает первоначальную форму.

Анализ полей векторов скорости частиц позволяет сделать вывод о том, что при $M_\infty=3$ для частиц диаметром 10 мкм напыление невозможно, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами, приведенными в работе [2].

Полное время расчета нестационарной задачи до момента времени $t=3$ составило 4 часа на ПЭВМ с процессором Intel Pentium-233MMX.



©Зинченко А.В.

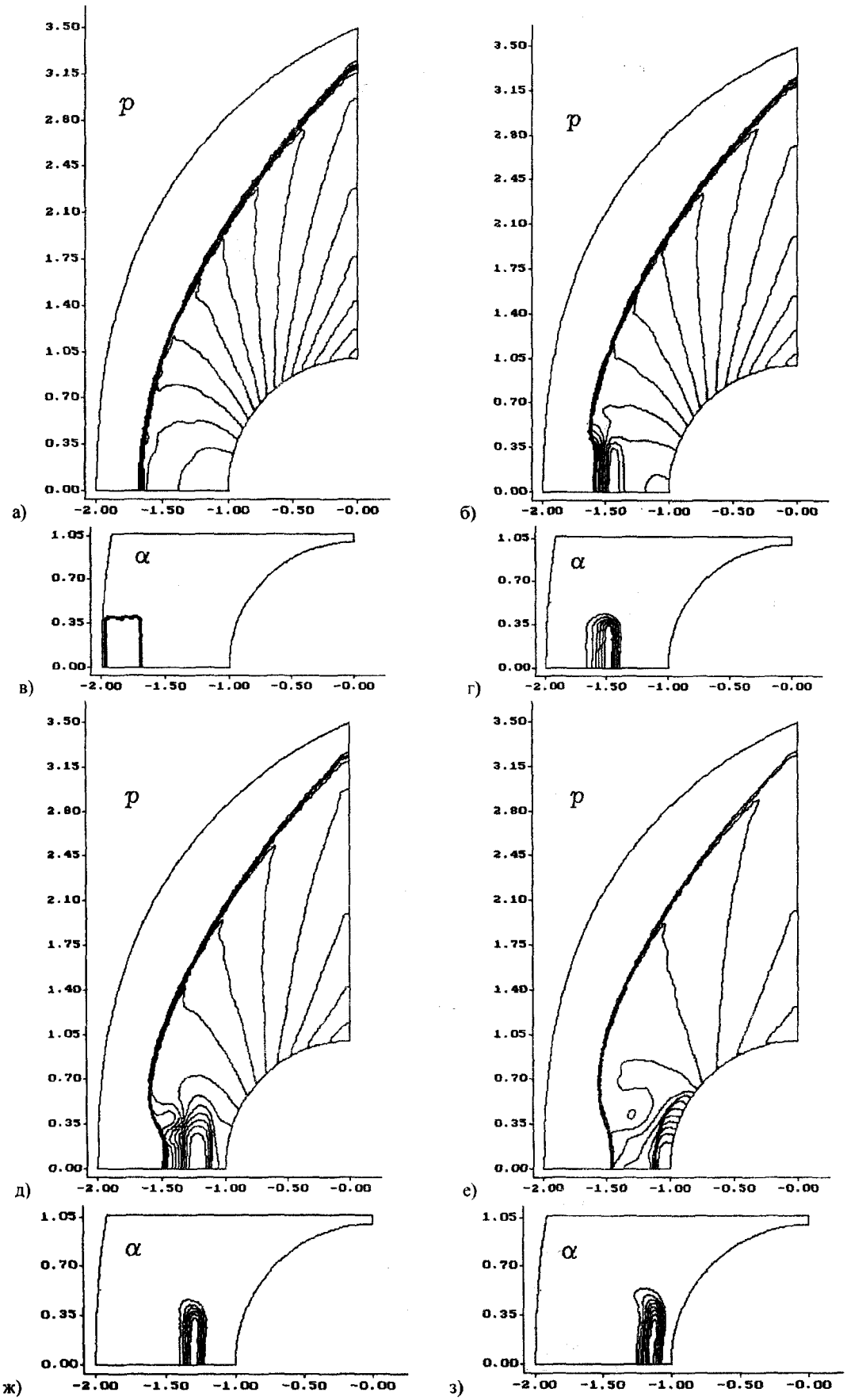



Рис. 1. Распределения давления и концентрации частиц диаметром 10мкм для моментов времени $t$=0 (а, в), $t$=0.375 (б, г), $t$=0.75 (д, ж), $t$=1.2 (е, з)

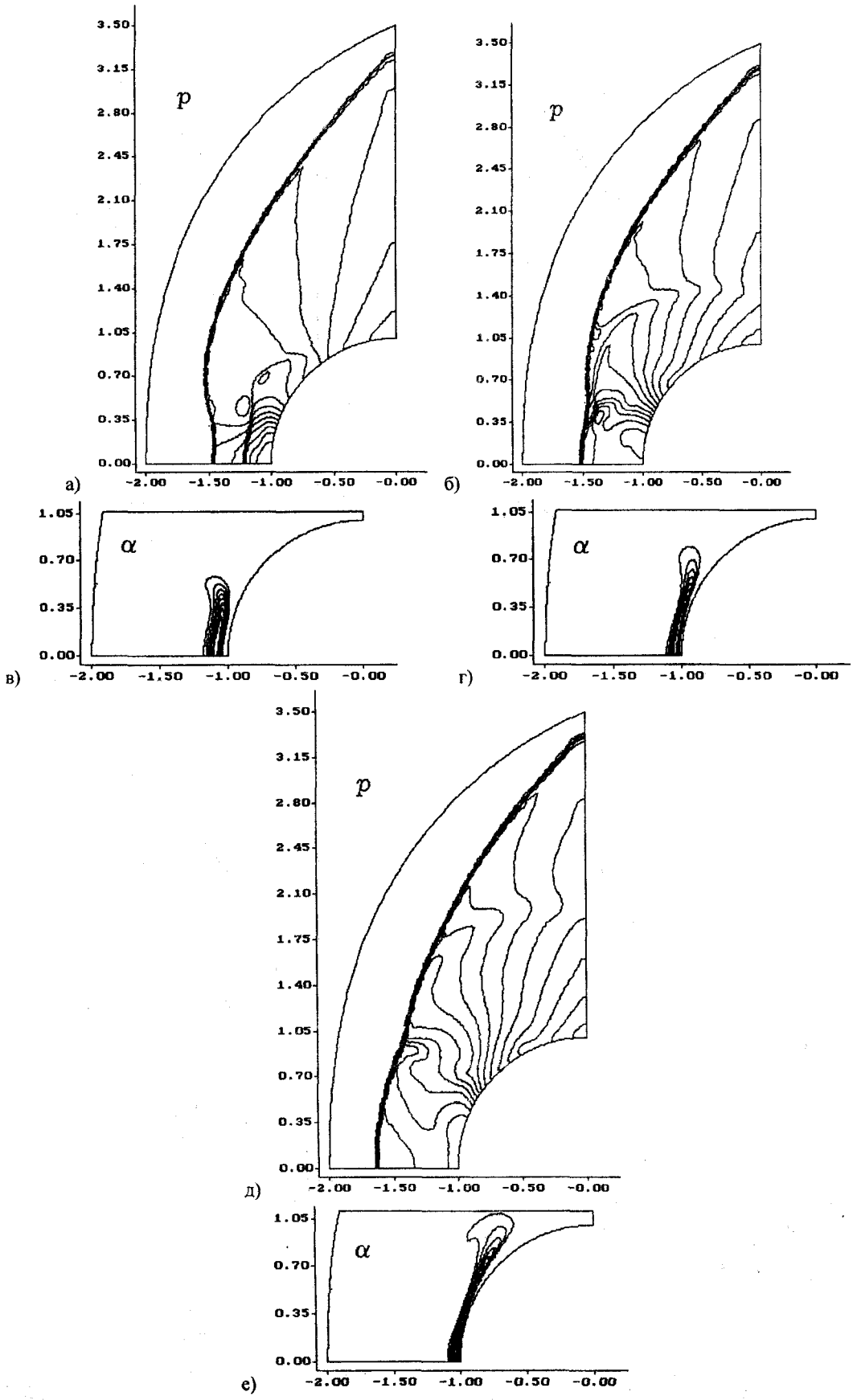



Рис. 2. Распределения давления и концентрации частиц диаметром 10мкм для $t$=1.5 (а, в), $t$=2.25 (б, г), $t$=3 (д, е)

**РЕЗЮМЕ**

Рассмотрены вопросы численного моделирования нестационарных процессов осаждения порошкового материала при детонационном напылении. С использованием модели вязкой двухфазной среды исследован характер поведения мелкодисперсных частиц в пограничном слое вблизи обрабатываемой поверхности. Показано, что эффективность осаждения частиц для околоравновесных двухфазных смесей существенно снижается.

**SUMMARY**

Questions devoted to numerical simulation of transient precipitation of powders in detonation coating processes were considered. The behavior of small particles in the near wall boundary layer was investigated using viscous two-fluid models. It was shown that particle precipitation effectiveness essentially degraded for near-equilibrium mixtures.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Зинченко А.В. Численное исследование эффективности процессов сверхзвукового напыления порошков // Регіональний міжвузівський збірник наукових праць "Системні технології". – Дніпропетровськ, 2002. – №2(19). – С.14-19.
2. Гладилин А.М., Григоров А.И., Сагидуллин Г.Г. Детонационные процессы в двухфазных средах. – М.: Недра, 1991. – 144 с.
3. Приходько А.А., Зинченко А.В. Управление отрывом сжимаемых многофазных течений // Труды IV Минского международного форума "Тепломассообмен ММФ–2000". – Минск: "Институт тепло– и массообмена им. Лыкова НАНБ", 2000. – Т.1. – С.301-308.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

## Ф І З И К А

УДК 519.6

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНАРНОГО ТРАНЗИСТОРА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

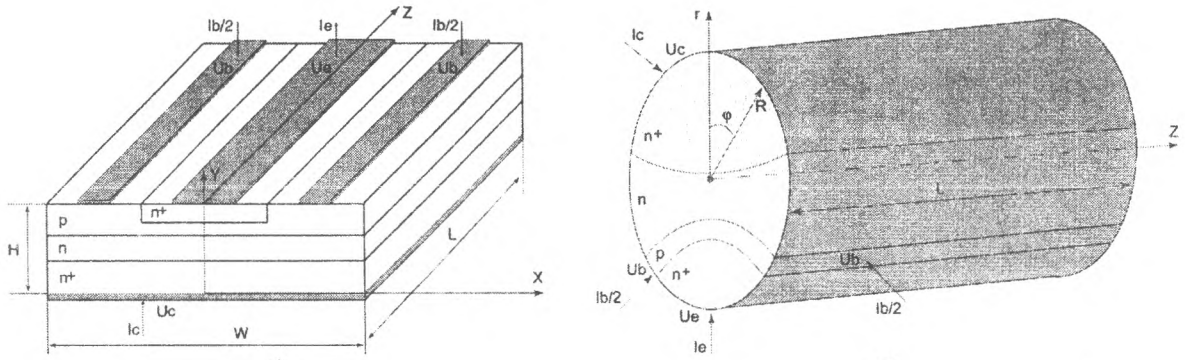
*И.Н.Шевченко, Ю.Н.Солонский, В.Г.Крыжановский.*

В связи с усложнением задач, стоящих перед разработчиками радиоэлектронных устройств, повышаются требования к точности моделирования активных приборов. Продолжает оставаться актуальной проблема физико-топологического моделирования для расчета тонких эффектов в усилителях, генераторах и смесителях СВЧ. При расчете характеристик транзистора с использованием наиболее информативных моделей "крупных" частиц, возникает задача уменьшения времени расчета сил, действующих на носители заряда – крупные частицы [1, 2].

В данной работе рассматривается один из методов уменьшения вычислительных затрат при моделировании биполярного транзистора (БТ), который может быть применен и для решения аналогичных задач, например, моделирования полевых транзисторов.

В общем случае модель крупных частиц описывается двумя группами дифференциальных уравнений. Первая группа – это система дифференциальных уравнений электромагнитного поля (уравнения Максвелла). Вторая группа – это уравнения движения заряженных частиц в электромагнитном поле. Механизм расчета в методе крупных частиц таков: 1) решение уравнений поля и 2) решение уравнений движения для крупных частиц. После чего процесс повторяется. Основную вычислительную трудность при этом представляет вычисление полей, особенно создаваемых всеми крупными частицами (поле пространственного заряда).

Обобщенная структура планарного БТ, используемая для создания двумерных моделей БТ, приведена на рис. 1а. В планарных БТ площадь поверхности $S_{sr} = L * W$ значительно превосходит площадь его поперечного сечения $S_{sc} = W * H$ и если $L >> W >> H$, то структура поля в сечении $XY$ будет неизменной практически по всей длине прибора за исключением областей, примыкающих к торцам. Движение носителей в таких БТ происходит, в основном, в толще полупроводника в направлении, перпендикулярном поверхности прибора, то есть в плоскости $XY$. Поэтому для моделирования перемещений носителей заряда достаточно смоделировать их движение в сечении $XY$ под действием электрического поля, зависящего только от координат $x, y$.




а) б)

Рис. 1. Структуры кристалла планарного (а) и цилиндрического (б) БТ.

Таким образом, мы получаем для расчета статических полей стационарную двумерную задачу:

$$\mathrm{rot}\overline{E}(x,y) = 0, \quad \mathrm{div}\overline{E}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

где: $\varepsilon_0, \varepsilon$ – абсолютная и относительная диэлектрические проницаемости (считаем постоянными), $\rho$ - плотность зарядов. Поскольку $E = \mathrm{grad}\,U$, то:



©Шевченко И.Н., Солонский Ю.Н., Крыжановский В.Г.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \Delta U(x,y) = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \tag{2}$$

где $\Delta$ – двумерный оператор Лапласа. Для полноты постановки задачи это уравнение необходимо дополнить условиями для потенциала на границах БТ:

$$U|_{\Gamma} = f(\Gamma). \tag{3}$$

Преимуществом структуры рис. 1а является близость топологий реального и моделируемого прибора. Основной недостаток – низкая точность существующих методов вычисления электрических полей в плоской прямоугольной структуре и как следствие, координат и скоростей частиц. Кроме того, при низкой точности вычислений происходит быстрое накопление ошибок, что не позволяет исследовать долговременные процессы.

Избавиться от этого недостатка можно, используя для моделирования структуру БТ, в которой решение уравнений поля в поперечном сечении может быть найдено в аналитическом виде с конечным числом членов, например, цилиндрическую структуру (рис. 1б).

Для вычисления распределения потенциала внутри круглой области радиуса $R$, которая является сечением структуры рис. 1б, используется уравнение Пуассона

$$\Delta U(r,\varphi) = -\frac{\rho(r,\varphi)}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{4}$$

с граничными условиями вида

$$U(R,\varphi) = b(\varphi). \tag{5}$$

Решение этой задачи, как будет показано далее, существенно проще, нежели решение задачи (2), (3) для прямоугольной области. Однако, распространение решения, полученного при моделировании цилиндрических структур БТ на планарные БТ не является очевидным. Поэтому данный аспект требует доказательств.

Пусть сечение планарной структуры представляет собой прямоугольник с координатами вершин $A_1(a,0)$, $A_2(a,ib)$, $A_3(-a,ib)$, $A_4(-a,0)$ на комплексной плоскости $Z$. Такое представление ни в коей мере не уменьшает общность, так как любую прямоугольную область плоскости $Z$ с помощью конформного отображения можно привести к рассматриваемой.

Предположим, что нам известно конформное отображение $f(z)$ прямоугольной области $-a < \operatorname{Re}(z) < a$, $0 < \operatorname{Im}(z) < b$ на круг $|w| < R$, принадлежащий комплексной плоскости $W$ (рис. 3).

Тогда, на основании свойств конформных отображений можно утверждать: если существует конформное отображение сечения $z$ планарной структуры БТ на сечение $|w| < R$ цилиндрической структуры БТ, то *внешнее* поведение таких структур будет одинаковым.

Существование такого конформного отображения следует из фундаментальной теоремы конформных отображений (теоремы Римана) [3-5].

Очевидно, что сечения планарной и цилиндрической структур удовлетворяют теореме Римана, что означает существование конформного отображения одного сечения на другое.

Эквивалентность внешнего поведения структур, для сечений которых найдено конформное отображение следует из принципа соответствия границ [3-5].

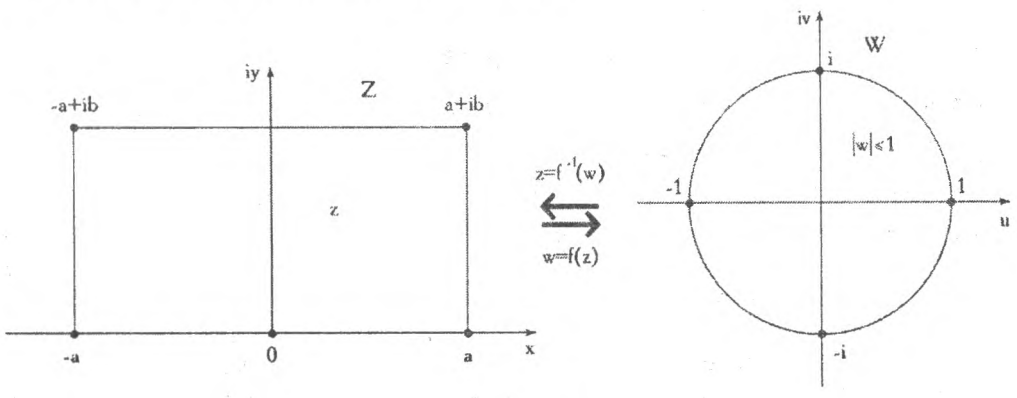



Рис. 2.

То есть, как только частица достигнет границы круглой области, то координаты частицы приобретут значение координаты какой-то точки границы. В силу принципа соответствия границ, попадание частицы на границу круглой области означает попадание частицы на границу прямоугольной области. А так как отображение взаимно-однозначно, то попадание частицы на контакт в круглой области будет означать попадание частицы на соответствующий контакт в прямоугольной области.

Чтобы построить конформное отображение $f(z)$ или $f^{-1}(w)$ воспользуемся вспомогательным преобразованием областей рис. 3 на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}(g)>0$ плоскости $G$ и свойством суперпозиции конформных отображений.

Найдем конформное преобразование верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(g)>0$ на прямоугольник z: $-a<\mathrm{Re}(z)<a$, $0<\mathrm{Im}(z)<b$ плоскости $Z$. При этом потребуем, чтобы:

$$\begin{aligned} g_1 &= -1 \leftrightarrow z_1 = -a, \\ g_2 &= 0 \leftrightarrow z_2 = 0, \\ g_3 &= 1 \leftrightarrow z_3 = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Это можно сделать ввиду того, что полуплоскость $G$ можно конформно и взаимно однозначно отобразить саму на себя и при этом три произвольные точки, принадлежащие этой полуплоскости, перевести в три наперед заданные точки.

Из теории конформных отображений известно, что конформное отображение верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(g)>0$ на многоугольник, принадлежащий комплексной плоскости $Z$, осуществляется посредством интеграла Шварца-Кристоффеля [3-5]:

$$z = C'\int_{g_0}^{g}(\zeta-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(\zeta-a_n)^{\alpha_n-1}d\zeta + C_1. \tag{7}$$

Здесь $g_0, C', C_1$ - заданные комплексные постоянные, $a_1,\ldots,a_n$ – образы точек $z_1,\ldots z_n$, расположенные в порядке возрастания, $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi,\ldots,\alpha_n\pi$ – внутренние углы при вершинах с координатами $z_1,\ldots z_n$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – положительные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = n-2, 0<\alpha_i<2. \tag{8}$$

Опуская промежуточные выкладки, для конформного отображения $w=f(z)$ внутренности прямоугольной области $-a<\mathrm{Re}(z)<a$, $0<\mathrm{Im}(z)<b$ комплексной плоскости $Z$ на внутренность круга $|w|<R$ комплексной плоскости $w$ получим выражение

$$w = iR\,\frac{sn\left(\frac{z}{aC},k\right)-sn\left(\frac{ib}{2aC},k\right)}{sn\left(\frac{z}{aC},k\right)-sn\left(\frac{ib}{2aC},k\right)}. \tag{9}$$

где: $sn(z,k)$ – синус Якоби (эллиптический синус), $0<k<1$, $C$ – параметры, определяемые из условий соответствия преобразования верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(g)>0$ и прямоугольника $-a<\mathrm{Re}(z)<a$, $0<\mathrm{Im}(z)<b$. Постоянная $C$ в (9) связана с постоянной $C'$ в (7) соотношением $aC=kC'$, а постоянная $C_1$ в (7) равна нулю в силу условий преобразования (6).

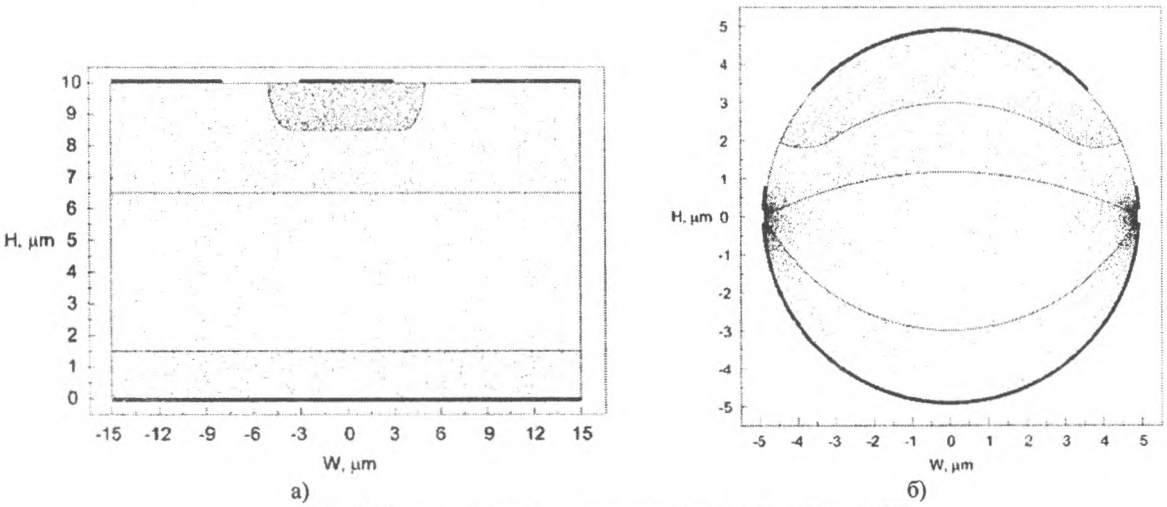
Что касается транзисторных структур с сечениями более сложными, чем прямоугольные, то их границы могут быть с любой степенью точности аппроксимированы многоугольниками, а для построения конформных отображений потребуется привлечение полностью численных методов [3].

Радиус $R$ в конформном отображении (9) и длина $\Lambda$ цилиндрической структуры являются неизвестными параметрами. Чтобы их получить, необходимо определить коэффициент изменения площади при отображении (9) и равенство электрических емкостей прямоугольной и цилиндрической структуры. Итоговый результат равен:

$$R = \frac{aC}{2}\sqrt{\frac{L}{\Lambda}\frac{\iint\limits_{\Omega_r} n(x,y)dxdy}{\iint\limits_{\Omega_r} n(x,y)\lambda(x,y)dxdy}}, \quad \text{где } \Lambda = \frac{2aL}{b}\arctan\left(\frac{\tilde{u}_0}{\sqrt{1-\tilde{u}_0^2}}\right)^{-1} \tag{10}$$

Где: $\tilde{u}_0$ – нормированная на $R$ горизонтальная координата точки, в которую переходит вершина $a+ib$ прямоугольной структуры при конформном отображении (9); $n(x,y)$ – распределение концентрации примеси в сечении прямоугольной структуры; функция $\lambda(z) = \frac{a^2C^2}{R^2}J(z)$ представляет собой нормированный якобиан $J(z)$ преобразования (9).

Таким образом, все геометрические параметры цилиндрической структуры полностью определены. Применим полученное конформное отображение (9) к планарной структуре БТ (рис. 3а).




а) б)

Рис. 3. Сечения планарной и цилиндрической структур БТ.

Сечение полученной цилиндрической структуры и ее строение приведено на рис. 3б.

Как видно из приведенных рисунков, концентрация легирующей примеси $n(z)$ в планарной структуре, равная постоянной величине в пределах $i$-ой области легирования, становится координатно-зависимой $n_c(z)$ в пределах $i$-области легирования после отображения. Чтобы получить эту зависимость, воспользуемся условием равенства количеств носителей заряда в бесконечно малом объеме планарной структуры и в соответствующем этому объему бесконечно малом объеме цилиндрической структуры

$$n(z)LdS = n_c(z)\Lambda J(z)dS, \quad \text{где } J(z) = |w'(z)|^2. \tag{11}$$

Вычисляя якобиан преобразования (9) и подставляя его в (11), получаем

$$n_c(z) = n(z)\frac{a^2C^2L}{4R^2\Lambda}\left|\frac{1}{i}\frac{\left(sn\left(\frac{z}{aC},k\right)+sn\left(\frac{ib}{2aC},k\right)\right)^2}{sn\left(\frac{ib}{2aC},k\right)cn\left(\frac{z}{aC},k\right)dn\left(\frac{z}{aC},k\right)}\right|^2. \tag{12}$$

Так как концентрация в цилиндрической структуре является функцией комплексной переменной $w$, то соотношение (12) уместно переписать в терминах переменной $w$

$$n_c(w) = \frac{4a^2C^2L}{R^2\Lambda}n(z(w))\lambda(\tilde{w}), \tag{13}$$

где $\lambda(\widetilde{w}) = \left| w_0 \left( i(1+i\widetilde{w})^2 \sqrt{\left(1-\frac{w_0^2(1-i\widetilde{w})^2}{(1+i\widetilde{w})^2}\right)\left(1-\frac{k^2 w_0^2(1-i\widetilde{w})^2}{(1+i\widetilde{w})^2}\right)}^{-1} \right)^2 \right|$, $\widetilde{w} = \frac{w}{R}$, $w_0 = sn\left(\frac{ib}{2aC}, k\right)$.

На рис. 4 приведен вид функции $\gamma(\widetilde{w})$. Видно, что концентрация примеси в цилиндрической структуре, полученной в результате конформного отображения (9), будет расти к полюсам сечения цилиндрической структуры, что и наблюдается на рис. 3б.

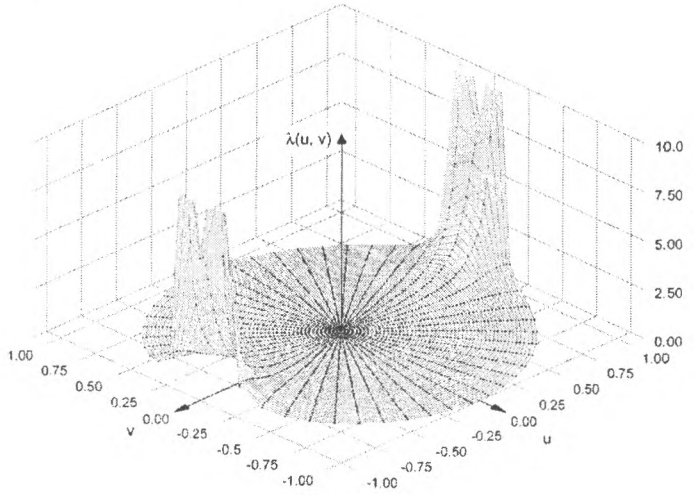


Рис. 4.

**Вычисление электрического поля в цилиндрической структуре с заданными потенциалами на ее электродах**

Найдем решение внутренней задача Дирихле для круга радиуса $R$ с заданными граничными условиями на границе этого круга:

$$\frac{\partial^2 U(r,\varphi)}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{N-1}\eta_n \delta(r-r_n)\delta(\varphi-\varphi_n),$$

$$U(R,0) = U(R,2\pi),\ \left.\frac{\partial U(R,\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial U(R,\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi}, \qquad (14)$$

$$U(R,\varphi) = b(\varphi).$$

Представим функцию $U(r,\varphi)$ в виде суммы двух функций $V(r,\varphi)+Y(r,\varphi)$. Где $V(r,\varphi)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона на круге и неоднородными граничными условиями, а $Y(r,\varphi)$ – решение задачи Дирихле с ненулевой правой частью в уравнении Пуассона и однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$V(R,0) = V(R,2\pi),\ \left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi}, \qquad (15)$$

$$V(R,\varphi) = b(\varphi).$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{N-1}\eta_n \delta(r-r_n)\delta(\varphi-\varphi_n),$$

$$Y(R,0) = Y(R,2\pi),\ \left.\frac{\partial Y(R,\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial Y(R,\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi}, \qquad (16)$$

$$Y(R,\varphi) = 0.$$

Решить задачу (15) можно с использованием метода конформных отображений. Данная процедура подробно описана в [5], поэтому приводим конечный результат:

$$V(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(\varsigma)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varsigma-\varphi)}d\varsigma. \qquad (17)$$

Учитывая, что функция $b(\varphi)$ является кусочно-постоянной

$$b(\varphi)=\begin{cases}\sum_{m=0}^{M-1}U_m, \varphi\in[\varphi_{sm},\varphi_{em}],\\ 0, \varphi\notin[\varphi_{sm},\varphi_{em}],\end{cases} \qquad (18)$$

где $m=0...M-1$ – номера областей границы с потенциалом $U_m$, то потенциал (17) выражается в элементарных функциях:

$$V(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{M-1}U_m\left(\arctan\left(\frac{r+R}{r-R}\tan\left(\frac{\varphi-\varphi_{sm}}{2}\right)\right)-\arctan\left(\frac{r+R}{r-R}\tan\left(\frac{\varphi-\varphi_{em}}{2}\right)\right)\right). \qquad (19)$$

Потенциал $Y(r,\varphi)$, входящий в уравнение задачи (16) представим в виде суммы потенциалов $\sum_{n=0}^{N-1}Y_n(r,\varphi)$, создаваемых каждой частицей в отдельности. Тогда уравнение (16) достаточно решить для одной частицы, а окончательный результат просуммировать по всем частицам.

Для решения неоднородной задачи воспользуемся информацией, известной нам из постановки задачи. Так как у нас в круге содержатся точечные заряды, то наиболее приемлемый метод поиска решения – метод изображений.

Разместим частицу с координатами $r_n,\varphi_n$ в начале координат. Тогда из-за симметрии полярных координат в потенциале исчезает зависимость от $\varphi$. И уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Y(r)}{\partial r}\right)=-\frac{\eta_n}{\varepsilon\varepsilon_n}\delta(r), \qquad (20)$$

которое решается простым интегрированием. Решение имеет вид

$$Y(r)=C_1+C_2\ln(r). \qquad (21)$$

Одну из постоянных в решении (21) определим из закона Гаусса

$$\varepsilon\varepsilon_0\oint E_r dl=\eta_n. \qquad (22)$$

В нашем случае контур охватывает заряд, приходящийся на единицу длины. Поэтому в (22) фигурирует линейная плотность заряда.

Определяя постоянную $C_2$ из (22) и подставляя в (21) получаем:

$$Y(r)=\frac{\eta_n}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r}\right)+C_1. \qquad (23)$$

Чтобы записать решение в произвольной точке $r_n,\varphi_n$ расположения заряда достаточно перенести начало координат в эту точку.

Тогда расстояние между зарядом и точкой М (рис. 5) примет вид:

$$\sqrt{r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}.$$

А потенциал:

$$Y_n(r,\varphi)=\frac{\eta_n}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}\right)+C_1 \qquad (24)$$

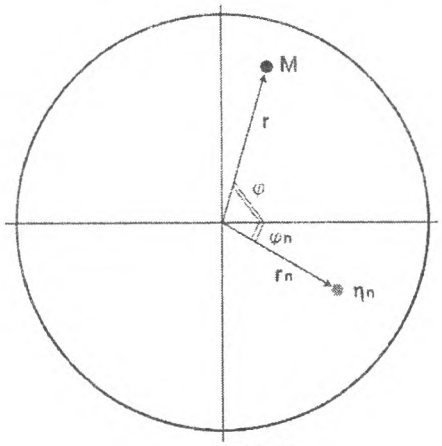


Рис. 5.

Простой подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что это – решение. Чтобы удовлетворить граничным условиям, используем метод изображений.

Рассмотрим систему двух разноименно заряженных частиц, лежащих на одной прямой, проходящей через начало координат. Одна из них находится в пределах круга на расстоянии $r_n$ от центра, а другая – на расстоянии $\tilde{r}_n$ за пределом круговой области. Тогда потенциал, создаваемый этой парой, выглядит так:

$$Y_n(r,\varphi)=\frac{\eta_n}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{1}{r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}\right)-\ln\left(\frac{1}{r^2+\tilde{r}_n^2-2r\tilde{r}_n\cos(\varphi-\varphi_n)}\right)\right)+C_1. \qquad (25)$$

Расстояние от начала координат до второй частицы выберем так, чтобы выполнялось условие симметрии относительно окружности радиуса $R$:

$$r_n\tilde{r}_n=R^2 \Rightarrow \tilde{r}_n=R^2/r_n. \qquad (26)$$

Подставляя это соотношение в (25) и определяя постоянную $C_1$ при помощи граничного условия задачи (16), получаем выражение для потенциала $Y_n(r,\varphi)$:

$$Y_n(r,\varphi)=\frac{\eta_n}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R^2+r_n^2\frac{r^2}{R^2}-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}{r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}\right). \qquad (27)$$

Суммируя (27) по частицам и прибавляя (19), получаем решение исходной задачи Дирихле (14):

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{M-1}U_m\left(\arctan\left(\frac{r+R}{r-R}\tan\left(\frac{\varphi-\varphi_{sm}}{2}\right)\right)-\arctan\left(\frac{r+R}{r-R}\tan\left(\frac{\varphi-\varphi_{em}}{2}\right)\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{N-1}\eta_n\ln\left(\frac{R^2+r_n^2\frac{r^2}{R^2}-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}{r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n)}\right). \qquad (28)$$

Учитывая, что электрическое поле выражается через отрицательный градиент потенциала, получаем компоненты поля, порождаемого границей

$$E_{Vr}=\frac{R}{\pi}\sum_{m=0}^{M-1}U_m\frac{(r^2+R^2)(\sin(\varphi-\varphi_{em})-\sin(\varphi-\varphi_{sm}))+2rR\sin(\varphi_{em}-\varphi_{sm})}{(r^2+R^2-2rR\cos(\varphi-\varphi_{sm}))(r^2+R^2-2rR\cos(\varphi-\varphi_{em}))},$$
$$E_{V\varphi}=\frac{R}{\pi}\sum_{m=0}^{M-1}U_m\frac{(R^2-r^2)(\cos(\varphi-\varphi_{em})-\cos(\varphi-\varphi_{sm}))}{(r^2+R^2-2rR\cos(\varphi-\varphi_{sm}))(r^2+R^2-2rR\cos(\varphi-\varphi_{em}))}, \qquad (29)$$

и компоненты поля, порождаемые ансамблем частиц

$$E_{Yr}=\frac{-1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\eta_n(R^2-r_n^2)(r_n(R^2+r^2)\cos(\varphi-\varphi_n)-r(R^2+r_n^2))}{(r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n))(R^4+r^2r_n^2-2rr_nR^2\cos(\varphi-\varphi_n))},$$
$$E_{Y\varphi}=\frac{-1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\eta_nr_n(r^2-R^2)(R^2-r_n^2)\sin(\varphi-\varphi_n)}{(r^2+r_n^2-2rr_n\cos(\varphi-\varphi_n))(R^4+r^2r_n^2-2rr_nR^2\cos(\varphi-\varphi_n))}. \qquad (30)$$

Таким образом, мы получили соотношения для электрических полей в длинной $L>>R$ цилиндрической структуре рис. 1б, используя которые, можем вычислить силы и ускорения для носителей заряда в объеме полупроводника.

**РЕЗЮМЕ**

Показано можливість використання циліндричної структури замість планарної структури кристала биполярного транзистора при чисельному моделюванні методом частинок. Отримано аналітичні співвідношення для електричних полів у циліндричних структурах, що дозволяють підвищити точність і швидкість моделювання, і співвідношення, засновані на теорії конформних відображень, що дозволяють розрахувати топологію циліндричної структури, що моделюється, зовнішня поведінка котрої еквівалентна планарній.

**SUMMARY**

It is shown use possibility of the cylindrical structure instead of planar structure of the BJT crystal under numerical modeling by particles method. The analytical expressions for electrical fields in cylindrical structure permitting to increase accuracy and speed of simulation are obtained. Presented expressions, founded on conformal images theory, allowing calculate topology and geometric parameters of prototyped cylindrical structure, the external behavior which equivalent initial planar structure.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 640 с.
2. Моглестю К. Применение метода частиц для моделирования полупроводниковых приборов: в сб. Моделирование полупроводниковых приборов и технологических процессов. Последние достижения. Под ред. Д.Миллера., Пер с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 277 с.
3. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. – К.: Наукова думка, 1964. – 532 с.
4. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 510 с.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: 5-е изд. – М.: Наука, 1999. – 320 с.

*Надійшла до редакції 25.12.2002 р.*

УДК 531.241.13:539.2

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ СТРУКТУРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АКУСТООПТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

*В.В.Данилов, С.В.Иванов*

**Введение**

Акустооптические устройства (АОУ) предназначены для ввода радиосигналов в оптические вычислительные средства (ОВС) обработки радиосигналов (обнаружение, распознавание, хранение). Эти устройства являются единственными, позволяющими реализовать ввод радиосигналов в ОВС, без дополнительных преобразований.

Статья содержит результаты экспериментальной работы по исследованию физической реализуемости структурных элементов АОУ и устройств в целом.

**Структура обобщенного акустооптического устройства**

Элементы структуры АОУ представлены на рис. 1 [1]. Основными в структуре являются модули: возбуждения электроакустического преобразователя (ЭАП), акустооптической ячейки (АОЯ), обеспечения эксплуатационной стабильности, а также элементы оптической схемотехники (линзы, диафрагмы, просветляющие покрытия и т.д.), источник управляющего радиосигнала, источник когерентного излучения (лазер).

Декомпозиция структуры акустооптической ячейки, позволяет выделить узлы электроакустического преобразователя, акустооптического взаимодействия (АОВ), поглощения энергии акустической волны (ПАЭ). В качестве ЭАП, применяются пьезопреобразователи на основе пьезоэлектрических пластин кристаллов или пленок (ПЭП), который посредством элемента акустической связи (элемент АС), крепится с светозвукопроводом. На поверхности ПЭП формируются контактные площадки в виде внешнего (ВнешЭ) и внутреннего (ВнЭ) электродов. Средами АОВ могут быть жидкости, стекла и кристаллы. Как элемент устройства, средой АОВ является светозвукопровод (СЗП). На грани СЗП, через которые проходит лазерный пучок, при необходимости, наносятся просветляющие покрытия (ПП). Посредством элемента акустической связи СЗП соединен с поглотителем акустических волн – акустической нагрузкой (АН). В АОУ на стоячей акустической волне, этот элемент отсутствует.

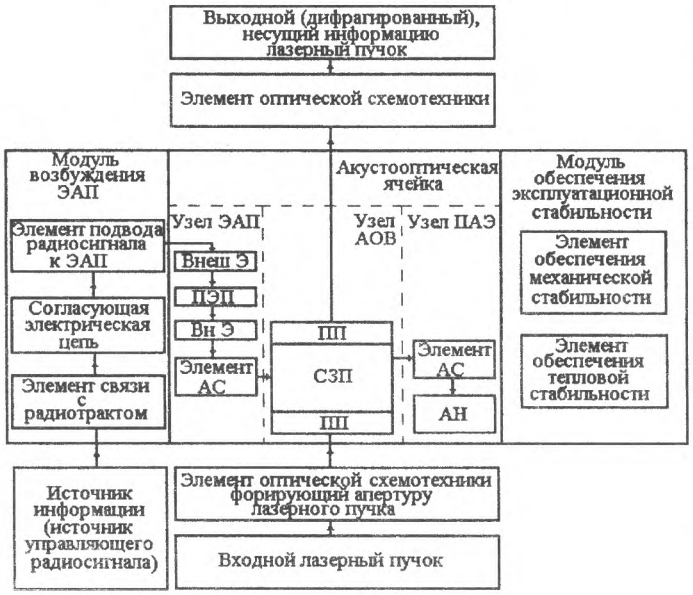



Рис. 1. Структура обобщенного акустооптического устройства.

Декомпозиция модуля возбуждения электроакустического преобразователя, позволяет выделить: элементы связи с трактом управляющего радиосигнала, электрическую согласующую цепь, элемент подвода радиосигнала к ЭАП.

Модуль обеспечения эксплуатационной стабильности содержит элементы обеспечивающие механическую и тепловую стабильность АОУ.

**Модуль и узел возбуждения электроакустического преобразователя**

В технике электроакустических преобразований, известна эквивалентная схема пьезопреобразователя для анализа его входных и передаточных функций [2]. Физическая модель структуры узла и модуля возбуждения электроакустического преобразователя представлена на рис. 2.

Эквивалентная схема ЭАП, в соответствии с [2,3], представлена на рис. 2*б*, где сечение 1-1, является электрическим входом, 2-2 и 3-3 отображают соответственно внутреннюю и внешнюю поверхности пьезопреобразователя (ППр). Внутренний электрод, одновременно является и элементом акустической связи между ППр и светозвукопроводом АОУ.

Для решения аппроксимационной задачи широкополосного согласования пьезопреобразователя с источником радиосигнала и нагрузкой (светозвукопроводом), как показано в [4-7], значительно более



©Данилов В.В., Иванов С.В.

удобной является электрическая эквивалентная схема в виде 2-х полюсника с сосредоточенными параметрами (см. рис. 3*а*). Согласно этой схеме, в области основной резонансной частоты (первой гармоники) входное сопротивление ППр, с достаточной для практики точностью, при относительной ширине полосы пропускания до ±60 %, может быть аппроксимировано входным сопротивлением 4-х элементного 2-х полюсника, в виде параллельного соединения $C_0$ и последовательного $LCR$ контура.

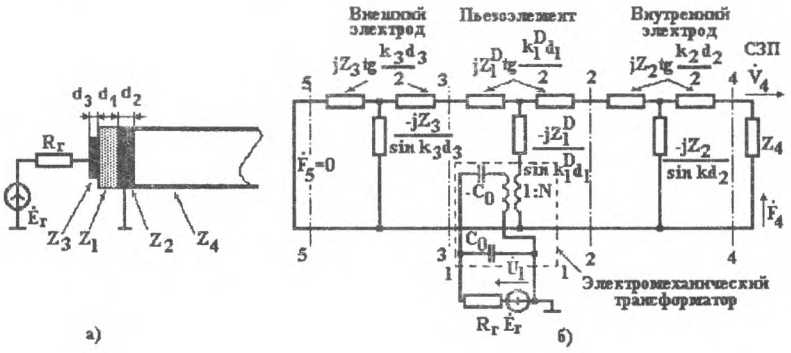



Рис. 2. Структура модуля возбуждения и узла ЭАП (а) а также их эквивалентная схема (б), где $d_1$, $d_2$, $d_3$ – толщины внешнего электрода, пьезоэлемента, внутреннего электрода; $Z_3$, $Z_2$, $Z_1$, $Z_4$ – акустические импедансы внешнего и внутреннего электродов, пьезоэлемента и светозвукопровода.

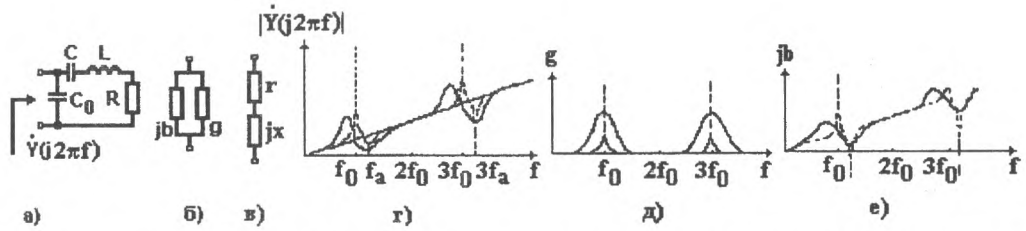



Рис. 3. Эквивалентный 2-х полюсник (а), схемы его замещения (б, в) и частоты резонанса - антирезонанса его проводимости (г, д., е), где $C_0$ – статическая емкость механически зажатого ПЭ (емкость ПЭ при отсутствии пьезоэффекта); *LCR* - последовательный колебательный контур, характеризующий процесс колебания механической энергии в системе «внешний электрод – ПЭ – элемент акустической связи (внутренний электрод) - светозвукопровод», имеющий резонансную частоту $f_0^E$ ; *L* и *C* - динамические индуктивность и емкость, *R* - эквивалентное сопротивление, моделирующее поглощение активной мощности, обусловленное излучением акустической волны в СЗП и диссипативными потерями в ППр.

Если толщины электродов и элементов акустической связи значительно меньше толщины пьезопреобразователя, ряд параметров данной эквивалентной схемы можно определить, используя соотношения [7]: $C_0 = \varepsilon^S \varepsilon_0 A / d_1$, $\varepsilon_0 \cong 8{,}85\ n\Phi/м$, $d_1 = V^E / 2f_0$, $f_0^E = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, $k = k_{ЭМ}^2/(1-k_{ЭМ}^2)$, $C = kC_0$, $f_0^D = 1/2\pi\sqrt{L\dfrac{CC_0}{C+C_0}}$, $f_0^D = f_0^E\sqrt{1+k}$, $L = 1(2\pi f_0^E)^2 C$,

где $\varepsilon^S$ - диэлектрическая проницаемость при постоянстве деформации (механически зажатого ППр), $A$ - площадь перекрытия внешнего и внутреннего электродов, $d_1$ - толщина ППр, $V^E$ - скорость распространения акустической волны в пластине ППр при постоянстве электрического поля $E$, $f_0^E$ - эквивалентная полуволновая резонансная частота при постоянстве $E$, $k$ - коэффициент электрической связи, $k_{ЭМ}$ - коэффициент электромеханической связи пластины ППр. Как показала практика технической реализации модуля возбуждения и узла ЭАП, наибольшие затруднения вызывает определение параметров электрической эквивалентной схемы акустически нагруженного пьезопреобразователя, т.е. его добротности $Q$ и коэффициента электромеханической связи k.

Комплексное сопротивление 2-х полюсника (рис. 3*а*), можно представить в виде [6]:

$$Z(j2\pi f) = \frac{R(1+jQ\varsigma)/(j2\pi fC_0)}{1/(2\pi fC_0)+R(1+jQ\varsigma)} = \frac{1+jQ\varsigma}{2\pi f_0 C_0[kQ - Q(f/f_0)\varsigma + j(f/f_0)}, \qquad (1)$$

где $\varsigma = (f/f_0) - (f_0/f)$, $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) \Rightarrow f_0^E$, $Q = 1/(2\pi f_0 CR)$, $k = C/C_0$. Нормируя $Z(j2\pi f)$ относительно величины реактивного сопротивления статической емкости на частоте полуволнового резонанса и разделив вещественную и мнимые части, получим:

$$\bar{Z}(j2\pi f) = \frac{kQ}{[kQ - Q(f/f_0)\varsigma]^2 + (f/f_0)^2} + j\frac{kQ^2\varsigma - (f/f_0) - (f/f_0)Q^2\varsigma^2}{[kQ - (f/f_0)Q\varsigma)^2 + (f/f_0)^2}, \quad (2)$$

$$|\bar{Z}(j2\pi f)| = \sqrt{\frac{1+Q^2\varsigma^2}{[kQ - Q(f/f_0)\varsigma)^2 + (f/f_0)^2}}. \quad (3)$$

Семейство частотных характеристик (3) эквивалентной схемы (рис. 3*а*), при Q=10 и значениях k=0,1; 0,16; 0,36 соответствующих случаю использования материалов с $k_{эм}$=0,3; 0,37; 0,51 представлено на рис. 4. Следовательно, $|\bar{Z}(j2\pi f)|$, является функцией добротности и коэффициента электрической связи ППр, т.е.:

$$|\bar{Z}(j2\pi f)| = |\bar{Z}(j2\pi f)|(k, Q). \quad (4)$$

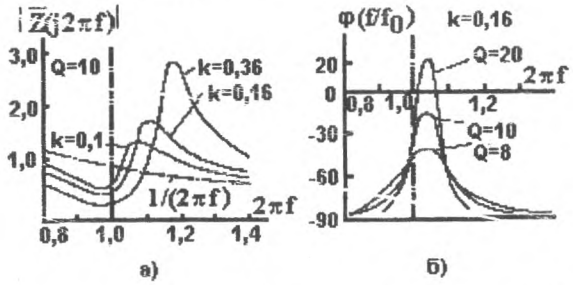



Рис. 4. Частотные зависимости модуля (а) и фазы (б) входного комплексного сопротивления пьезопреобразователя.

Как показывают эксперименты, в высокодобротных ненагруженных ППр (например, резонаторы) наиболее сильное влияние на характеристику вида (4), оказывает коэффициент электрической связи - $k$. Метод его измерения - регистрация характеристических частот резонанса – антирезонанса полного сопротивления хорошо известен [2]. Вместе с тем, анализ (3) позволяет сделать заключение, что определение $k$ по данному методу, при Q<20, приводит к погрешности более 100%. Аргумент (3), определяется зависимостью вида:

$$\varphi(f/f_0) = arctg\left\{[kQ^2\varsigma - (f/f_0)(1+Q^2\varsigma^2)]/(kQ)\right\}. \quad (5)$$

Семейства характеристик $\varphi(f/f_0)$ представлены на рис. 4*б*. Для последовательной схемы замещения (рис. 3*в*), в выражении (2) - первое слагаемое $\bar{r}(f/f_0)$, является активным, а второе, $j\bar{x}(f/f_0)$ - реактивным сопротивлением. Исследуя $\bar{r}(f/f_0)$ на экстремум видно, что положение его максимума по частоте определяется:

$$(f/f_0)_{\max r} = \sqrt{k + 1 - 1/(2Q^2)}. \quad (6)$$

Сделав предположение, что $k > 5/Q^2$, получим что $Q > \sqrt{5/k}$. В этом случае дробью под знаком радикала (6) можно пренебречь. Необходимо отметить, что определение $Q$ по характеристике активной составляющей комплексного сопротивления $Q = (f/f_0)_{\max\ r}/[2\Delta(f/f_0)_{0,5}]$, приводит к завышенным значениям, по-видимому, вследствие смещения положения максимума $\bar{r}(f/f_0)$ от частоты $f_0$. Так при k=0,16, Q=10, ошибка в определении Q составляет 15 % [6].

Комплексная нормированная проводимость эквивалентной схемы ППр (рис. 3*а*), определяется выражением [6]:

$$\bar{Y}(j2\pi f) = \frac{kQ}{1+Q^2\varsigma^2} + J\frac{(f/f_0)(1+Q^2\varsigma^2) - kQ^2\varsigma}{1+Q^2\varsigma^2}. \quad (7)$$

В схеме замещения (см. рис. 3*б*), первый и второй члены в (7) являются активной $\bar{g}(f/f_0)$ и реактивной $j\bar{b}(f/f_0)$ составляющими комплексной проводимости. Максимум $\bar{g}(f/f_0)$ соответствует частоте механического резонанса $f_0$. Следовательно, установив полосу частот, ограниченную уровнем 0,5 относительно максимума $\bar{g}(f/f_0)$, можно определить:

$$Q = f_0/(2\Delta f_{0,5}). \qquad (8)$$

Значение $j\bar{b}(f/f_0)$ на частоте механического резонанса равно реактивной проводимости статической емкости $jbC_0 = j2\pi f_0 C_0$, а активная проводимость на резонансной частоте равна $g_0 = 2\pi f_0 C_0 kQ$ [2]. Откуда зная $f_0$, $g_0$, $C_0$ и $Q$ можно определить k.

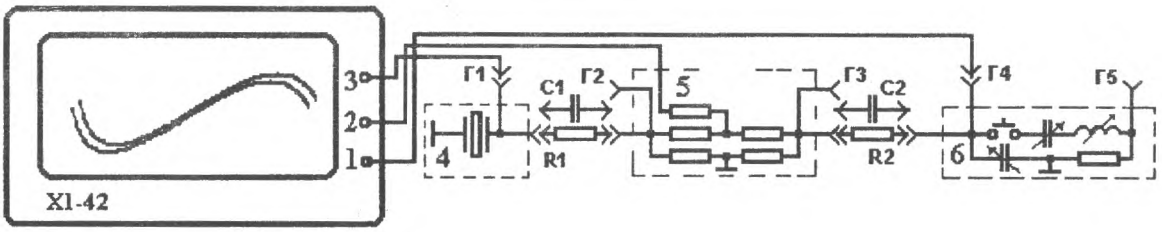



Рис. 5. Структура аппаратных средств измерения параметров электрической эквивалентной схемы акустически нагруженного ППр, где 1,2 – два входа измерителя АЧХ X1-41, 2 – выход X1-42, 4 – пьзопреобразователь исследуемого АОУ, 5 – согласованный разветвитель, 6 – эквивалент.

В основе принципа определения лежит сравнение частотных характеристик $|Z(j2\pi f)|$ исследуемого ППр и его эквивалента, на экране многолучевого измерителя амплитудно-частотных характеристик X1-42 (см. рис.5). Схема измерения представляет собой 4-х плечий несимметричный мост, в диагональ которого включен индикатор сравнения частотных характеристик модулей комплексных сопротивления исследуемого ППр и регулируемого эквивалента. Изменяя значения элементов эквивалента, добиваются максимальной идентичности частотных характеристик $|Z(j2\pi f)|$ исследуемого ППр и эквивалента. Установка имеет следующие технические характеристики: диапазон частот 1...400 МГц, пределы измерения $C_0$= 20...2000 пФ, $C$=5...10000 пФ, $L$= 0,04...10 мкГн, $R$=0,5...100 Ом, k=0,005...1, $Q$=1,5...20. Относительная погрешность измерений на частотах до 300 МГц, менее 10 %.

Физико-технические параметры пьезоэлектриков (монокристаллы и пленки), полученные экспериментально [8], приведены в табл. 1.

Таблица 1.

ФТП пьезоэлектриков для реализации ЭАП

| Пьезоэлектрическая среда | ρ, кг/м$^3$ | Срез | Мода | $k_{эм}$ | $\varepsilon^S/\varepsilon_0$ | V, км·с$^{-1}$ | Z=ρV, $10^6$ кг м$^{-2}$с$^{-2}$ | B, ГГц мкм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $LiNbO_3$ (монокристалл ниобат лития) | 4,64 | Z | L | 0,17 | 27,5 | 7,33 | 34,0 | - |
| | | 36$^0$Y | L | 0,49 | 38,6 | 7,40 | 34,3 | 3,65 |
| | | X | S | 0,68 | 44,3 | 4,79 | 22,3 | 2,4 |
| | | 163$^0$Y | S | 0,62 | 42,9 | 4,48 | 20,8 | 2,24 |
| $LiJO_3$ (монокристалл иодат лития) | 4,5 | Z | L | 0,49 | 6,6 | 4,01 | 18,0 | 2,065 |
| | | Y | S | 0,61 | 8,4 | 2,57 | 11,5 | 1,26 |
| | | 27$^0$Y | L | 0,65 | 6,5 | 4,23 | 19,0 | - |
| Пленка ZnO (текстура окиси цинка) | 5,68 | Z | L | 0,282 | 8,84 | 6,40 | 36,4 | 3,18 |
| | | Y | S | 0,316 | 8,33 | 2,88 | 16,4 | 1,44 |
| | | 39$^0$Y | S | 0,35 | 8,63 | 3,24 | 18,4 | 1,62 |
| Пленка CdS (текстура сернистого кадмия) | 4,82 | Z | L | 0,154 | 9,53 | 4,5 | 21,7 | 2,25 |
| | | Y | S | 0,188 | 9,02 | 1,8 | 8,7 | - |
| | | 40$^0$Y | S | 0,212 | 9,3 | 2,1 | 10,1 | 1,05 |

Метод расчета согласующей цепи по известным параметрам эквивалентной схемы пьезопреобразователя, сообщался в работе [7].

**Акустооптическая ячейка**

Для характеристики эффективности преобразования энергии акустической волны при акустооптическом взаимодействии (АОВ) в энергию выходного лазерного пучка, в физической акустооптике существует понятие приведенной акустооптической эффективности, которая при слабом АОВ равна

$$K_a = \frac{I_d 100\%}{I_i P_a} = \frac{\pi^2}{\lambda^2 2\cos^2\Theta_Б}\frac{L}{H}M_2, \qquad (9)$$

где $P_a$ - мощность акустической волны участвующая в АОВ, $M_2$ - акустооптическая добротность среды АОВ, λ – длина волны лазерного излучения, $\Theta_Б$ - угол Брэгга, L и H – длина и ширина акустооптического взаимодействия.

Связь между мощностью излучаемой пьезопреобразователем в светозвукопровод и мощностью акустической волны принявшей участие в АОВ определяется частотно зависимым коэффициентом [7]:

$$k^0(\Omega, P_a) = \frac{P_a^{'}}{P_a}(\Omega), \qquad (10)$$

где: $P_a^{'}$ - мощность акустической волны, излучаемая ППр, с учетом затухания ее в СЗП, $P_a$ - мощность акустической волны участвующая в АОВ. Формальная связь между $P_a^{'}$ и $P_a$ устанавливается с помощью выражения [7]:

$$P_a^{'} = (1/D)\int_{x_1}^{x_2} P_a e^{-2\alpha x}dx = P_a\left(\frac{1-e^{-2\alpha D}}{2\alpha D}\right) \qquad (11)$$

где: $x_2 - x_1 = D = VT$ - световая апертура АОУ, $\alpha$ - частотно - зависимый коэффициент затухания акустической волны в СЗП, V – скорость акустической волны, T - длительность управляющего радиосигнала.

Возможные два варианта засветки световой апертуры акустооптического устройства представлены на рис. 6 и 7.

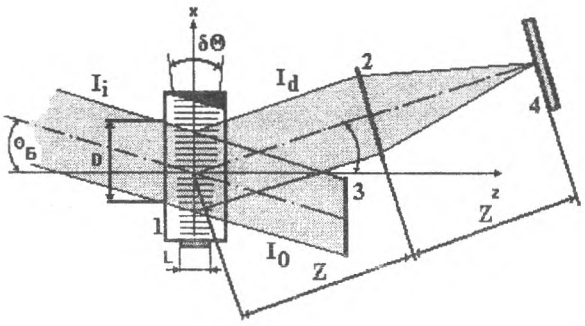



Рис. 6. Засветка входным лазерным пучком, интенсивностью $I_i$ апертуры D акустооптического устройства, где 1 - среда акустооптического взаимодействия, 2 - линза, 3– оптическая "заглушка" недифрагированного лазерного пучка, 4 - фотосчитывающее устройство, D - световая апертура, Z - фокусное расстояние.

У большинства твердотельных материалов $\alpha = \alpha_0\Omega^2$, где $\alpha_0$ - частотно- независимый коэффициент затухания акустической волны в СЗП, Ω – частота акустической волны. Тогда произведение $K_a k^0$ (при слабом АОВ), равное:

$$K_a k^0 = K_a^0 = \frac{\pi^2}{\lambda^2 2\cos^2\Theta_Б}\frac{L}{H}M_2\frac{1-\exp(-2\alpha_0\Omega^2 D)}{2\alpha_0\Omega^2 D}, \qquad (12)$$

определяет частотную зависимость $K_a$ для конкретного СЗП. Так при L/H=1, известной λ, малости углов $\Theta_Б$, приведенная акустооптическая эффективность АОВ - $K_a$, в сущности, определятся константами

среды АОВ - $M_2$ и $\alpha_0$, поперечным размером сечения лазерного пучка D (или $2w_0$) и частотой радиосигнала, на которой предполагается использовать данный материал. Уравнение (12) дает возможность оценить перспективность конкретного материала, среды АОВ, при известных её параметрах - $M_2$, $\alpha$ и ширине засветки апертуры АОУ. Построив семейство таких характеристик, рассчитанных на ЭВМ для разных материалов, апертур и частот можно автоматизировать процесс поиска сред. Результаты такого поиска приведены в табл. 2. Методы измерения акустооптических параметров $M_2$, $\alpha_0$ и V приведены в работе [9].

Просветляющие покрытия (ПП), предназначены для увеличения комплексного коэффициента передачи лазерного излучения светозвукопроводом акустооптического устройства. Вопросы нанесения ПП на известные монокристаллы и стекла, исследованы в [10]. Остановимся на проблеме реализации процесса для новых монокристаллов соединений $Cs_2HgC_4^{VII}$. В работах [11,12] для них, на основе систем $Ge-As-Se$, $Ge-As-S$, $Ge-Sb-Se$, $Ge-As-Te$, методом машинного моделирования найдены составы просветляющих покрытий на длины волн $\lambda_1$=3,39 мкм, $\lambda_2$=5,3 мкм, $\lambda_3$=10,6 мкм.

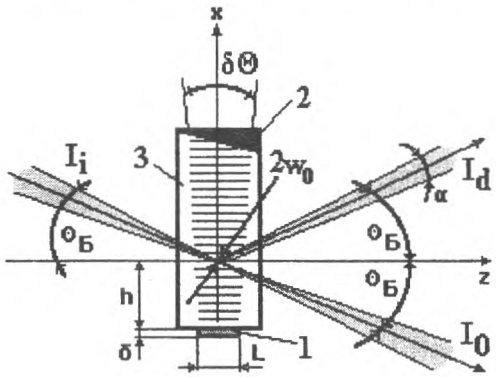



Рис. 7. Засветка входным лазерным пучком, интенсивностью $I_i$ апертуры $2w_0$ акустооптического устройства, где 1 – электроакустический преобразователь, 2 – акустическая нагрузка, 3 – светозвукопровод, δ - толщина ППр, h - расстояние от ППр до области АОВ, $2w_0$ - диаметр лазерного пучка.

Таблица 2

Параметры акустооптического взаимодействия.

| № | Среда акустооптического взаимодействия (химическая формула) | ρ, $10^3$ кг/м$^3$ | n, λ=0,63 мкм | Тип и направление распространения акустической волны | V·$10^3$ м/с | Г·$10^2$ $\frac{дБ}{м \cdot ГГц^2}$ | Поляризация и направление распространения лазерного пучка | $M_2$, $10^{-15}$ с$^3$/кг | $K_a k^0$ %/Вт, L/H=1, λ=0,63; D=5 см, f=$10^8$Гц | Диапазон оптической прозрачности, мкм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 16.<br>17. | Монокристалл $Cs_2HgCl_4$ | 4,05 | $n_g$=1,67<br>$n_m$=1,65<br>$n_p$=1,63 | L[010]<br>L[001] | 1,94<br>1,91 | 27,2<br>27,2 | [001]<br>[010] | 47<br>48 | 57,5<br>58,7 | 0,3 - 18 |
| 18.<br>19. | Монокристалл $Cs_2HgBr_4$ | 4,65 | $n_g$=1,77<br>$n_m$=1,76<br>$n_p$=1,75 | L[010]<br>L[001] | 1,75<br>1,77 | 29,9<br>27,2 | [100]<br>[100] | 69<br>71 | 84,3<br>86,8 | 0,35 - 20 |
| 20.<br>21. | Монокристалл КРС-5 | 7.37 | 2,576 | L[111]<br>S[100] | 1,93<br>0,89 | 27,8<br>675 | ∥<br>∥ или ⊥ | 1152<br>1192 | 1408<br>1217 | 0,53 - 50 |
| 22.<br>23. | Монокристалл КРС-6 | 7,19 | 2.31 | L[111]<br>S[100] | 2,15<br>1,02 | 100<br>1000 | ∥<br>∥ или ⊥ | 745<br>205 | 892<br>43,7 | 0,4 - 25 |
| 24. | Монокристалл $Hg_2Cl_2$ | 7,15 | $n_o$= 2,62<br>$n_e$=1,96 | S[110] | 0,347 | 288,2 | ∥ или ⊥ | 1092 | 1240 | 0,3 - 25 |

Все расчеты и построения спектральных кривых отражения, с учетом поглощения света светозвукопроводом, осуществлялись согласно методики, включающей [12]: машинный поиск показателей преломления покрытий для двух экстремальных значений отражения в области фазовых толщин пленок и их координат; расчет технологических параметров напыления покрытий строго определенной толщины; построение элементарных ячеек отражения и определение экспериментального отражения; построение кривых спектральной зависимости отражения от шероховатости поверхности светозвукопроводов. Ре-

зультаты моделирования позволили сделать заключение, что для СЗП на основе $Cs_2HgCl_4$, соединениями покрытий являются пленки $MgF_2(CaF_2)/Ge-As-Se$ и $Ge-As-S/Ge-Sb-Se$. Для СЗП на основе $Cs_2HgBr_4$, покрытиями являются пленки соединений типа $Ge-As-S/Ge-Sb-Se(Ge-As-Te)/Ge-As-S$. Покрытия наносились методом термического испарения из источника закрытого типа, путем дискретного испарения. Контроль толщины пленок осуществлялся с использованием лазерного толщиномера. Спектр пропускания и отражения системы «светозвукопровод-покрытие» изучался на фурье-спектрометре IFS-110. Исследования светозвукопроводов с нанесенными покрытиями, показали, что они наиболее эффективны на длинах волн $\lambda_1$=3,39 мкм, $\lambda_2$=5,3 мкм, $\lambda_3$=10,6 мкм, в трехслойной композиции, позволяющих увеличить пропускание на 15-20%. По изменениям амплитуды в спектрах ЯМР на протонах воды, установлено, что названные композиции, являются и защитными от водяных паров, причем заметную функцию такой защиты осуществляет первый слой композиции. Адгезия покрытий к СЗП на основе $Cs_2HgCl_4$ и $Cs_2HgBr_4$, в зависимости от шероховатости поверхности образцов лежит в области $(1,6\text{-}3,0)\cdot10^5$ Па.

Практически все монокристаллические соединения (см. табл. 2), имеют скорость упругой волны порядка $10^3$ м/с, акустический импеданс их лежит в диапазоне $(5...25)\cdot10^6$ кг/(м$^2$с). Физико-технические параметры сред для создания акустических нагрузок, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Состав и ФТП акустических нагрузок.

| Тип поглотителя (состав), мас. % | Марка | Продольная волна. Акустический импеданс, $10^6$ кг/(м$^2$с) | Поперечная волна. Акустический импеданс, $10^6$ кг/(м$^2$с) |
|---|---|---|---|
| Галлиевые сплавы | ГИСМ-65 | 9 | 3,1 |
| | ГИМ | 12 | 7,5 |
| | ГОМ-60 | 14 | 4,2 |
| | ГОСМ-50 | 16,6 | 10,6 |
| | ГОИМ-55 | 22 | 12,4 |
| | ГАМ-65 | 23 | 15 |
| | ГМ-66 | 24 | 11 |
| | ГМ-25 | 21,5 | 9,7 |
| Висмутовые сплавы | 50% Bi, 50% In | 16 | 10 |
| | Сплав Розе | 18 | 12 |
| | Сплав Вуда | 20 | 12 |

Элементы акустической связи слои предназначены для соединения и согласования светозвукопровода с пьезопреобразователем и акустической нагрузкой (АН). Количество их может быть различным, однако условие, которому они должны удовлетворять, сводится к следующему:

$Z_{ак} = \rho_i V_i = \rho_{i+1} V_{i+1} = const$, где $\rho_i V_i$, $\rho_{i+1} V_{i+1}$ - акустический импеданс предыдущего и последующего материала слоя. Вторым важнейшим требованием, является наличие адгезии связующих слоев друг с другом и с материалами - средами СЗП, ППр, и АН. Естественным, является требования близости температурных коэффициентов объемного расширения сред СЗП, ППр, АН и элементов АС. Результаты экспериментального исследования по подбору элементов акустической связи представлены в таблице 4. Эти же металлы могут использоваться в качестве электродов, реализованных в виде пленочных [13,14].

Для монокристаллов бромид - йодида таллия (КРС-5), бромид - хлорида таллия (КРС-6), тетраброммеркуриата ($Cs_2HgBr_4$) и тетрахлормеркуриата ($Cs_2HgCl_4$) цезия, хлорида ртути ($Hg_2Cl_2$), экспериментально установлены в качестве связующего материала оптический клей ОК-72ФТ и клей К-400. После полимеризации и отверждения, затухание упругой волны в них на частоте 500 МГц, составляет соответственно 0,05 дБ/мкм и 2 дБ/мкм.

**Модуль обеспечения эксплуатационной стабильности акустооптического устройства**

В качестве элемента механической стабильности предполагается корпус в котором размещены модуля ЭАП и АОЯ. Целесообразность использования металлов для его создания не вызывает сомнения. Экспериментально установлена целесообразность применения в качестве металлов меди или бронзы, обладающих хорошей теплопроводностью.

Промышленно освоенные композиции "Эластосил 137-182" и "Эластосил 11-01", предназначены для герметизации радиоэлементов ранее не применялись в оптическом приборостроении. Исследования-

ми установлены их свойства как теплоотводящих и коррозионостойких компонентов. Результаты исследования их ФТП, с целью использования при реализации АОУ, представлены в табл. 5.

Таблица 4

ФТП сред акустической связи.

| Среда акустической связи | $T_{пл}$, $C^0$ | $\rho \cdot 10^3$ кг/м$^3$ | $V_L$, км/с | $Z_L \cdot 10^6$ кг/(м$^2$с) | $\alpha_L$, дБ/мкм, f=1ГГц | $V_S$, км/с | $Z_S \cdot 10^6$ кг/(м$^2$с) | $\alpha_S$, дБ/мк, f=1ГГц |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Эпоксидная смола ЭД-20 | - | 1,1 | 2,6 | 2,86 | - | 1,2, | 1,34 | - |
| Индий (In) | 156,2 | 6,9 | 3,3 | 20 | 0,21 | 0,8 | 5,5 | 16 |
| Олово (Sn) | 231,9 | 6,5 | - | - | - | 1,4 | 9,1 | - |
| Свинец (Pb) | 327,4 | 11,36 | 2,16 | 24,5 | - | 0,7 | 8 | - |
| Алюминий (Al) | 660 | 2,7 | 6,42 | 17,3 | 0,02 | 3,04 | 8,21 | - |
| Серебро (Ag) | 960,8 | 10,5 | 4,7 | 49,5 | 0,04 | 1,60 | 16,8 | - |
| Золото (Au) | 1063 | 18,7 | 3,4 | 66 | 0,025 | 0,93 | 17,4 | 0,1 |
| Медь (Cu) | 1083 | 8,96 | 4,3 | 38,5 | 0,057 | 2,11 | 18,3 | - |
| Никель (Ni) | 1453 | 8,9 | 5,4 | 48 | 0,04 | 3,22 | 28,6 | - |
| Хром (Cr) | 1890 | 7,1 | 4,2 | 30 | 0,03 | - | - | - |

Таблица 5

ФТП герметиков “Эластосил 137-182” и “Эластосил 11-01”.

| Наименование параметра | Эластосил 137-182 | Эластосил 11-01 |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| Динамическая вязкость композиции при 20 $^0$C, Па·с | 895 | 800 |
| Продолжительность образования поверхностной пленки при 20 $^0$C, не менее, мин | 60 | 150 |
| Прочность на разрыв, МПа, не менее | 3 | 1,6 |
| Относительное удлинение при разрыве, %, не менее | 30 | 140 |
| Прочность связи с металлом при сдвиге, МПа, не менее | | |
| - алюминий | 2,7 | |
| - дюралюминий Д-20 | 2,8 | 15,6 |
| - бронза | 2,8 | 16 |
| - латунь | 2,85 | 17 |
| - медь | 3 | 18 |
| - стекло К-8 | 3 | 18 |
| - кварц (стекло) | 3 | 18 |
| - монокристалл КРС-5 | 2,5 | 18 |
| - монокристалл КРС-6 | 2,5 | 14 |
| - монокристалл $Cs_2HgBr_4$ | 2,3 | 12 |
| - монокристалл $Cs_2HgCl_4$ | 2,2 | 12 |
| - монокристалл $Hg_2Cl_2$ | 2.2 | 12 |
| | | 12 |
| Диэлектрическая проницаемость (T=20 $^0$C, f=1МГц) | 4,5 | 4.2 |
| Тангенс угла диэлектрических потерь (T=20 $^0$C, f=1МГц) | 0,006 | 0,02 |
| Удельное объемное электрическое сопротивление (T=20 $^0$C), Ом·м, не менее | $10^{11}$ | $10^{12}$ |
| Коэффициент теплопроводности (Вт/м·К), не более | 2.2 | 0,6 |
| Интервал рабочих температур, $^0$C | -60...+200 | -60...+200 |

**Выводы**

Акустооптические устройства ввода радиосигналов в оптические вычислительные средства обработки радиосигналов, являются единственными из известных, позволяющих без дополнительных преобразований реализовать процесс.

Предложена структура акустооптического устройства, содержащая модули электроакустического преобразователя, акустооптической ячейки, эксплуатационной стабильности, а также элементы оптической схемотехники и источник радиосигналов. Дальнейшая декомпозиция структурных элементов уст-

ройства позволяет выделить в модуле электроакустического преобразователя, элементы подвода радиосигнала и связи с радиотрактом, согласующую цепь. В модуле акустооптической ячейки предложено различать узел ЭАП, содержащий внешний и внутренний электрод, пьезоэлектрический преобразователь (пьзопреобразователь), элемент акустической связи; узел акустооптического взаимодействия, содержащий светозвукопровод, содержащий (при необходимости) просветляющие покрытия; узел поглощения энергии акустической волны, содержащий элемент акустической связи, акустическую нагрузку. Модуль обеспечения эксплуатационной стабильности, содержит элемент обеспечения механической и тепловой стабильности.

Исследовано решение аппроксимационной задачи широкополосного согласования пьезопреобразователя АОУ с источником радиосигнала, где вместо известного в акустике шестиполюсника, описывающего частотно-зависмый процесс преобразования электрического сигнала в акустический, предложено использование 4-х элементного двухполюсника. Показано что комплексные сопротивление и проводимость его, позволяют определить все параметры его эквивалентной схемы. Приведена методика и структура аппаратных средств для определения добротности и коэффициента электрической связи эквивалентной схемы, в условиях сильной нагруженности пьезопреобразователя и больших значениях его коэффициента электромеханической связи. Предложены результаты исследований физико-технических параметров пьезоэлектриков (монокристаллов и пленок) для реализации пьезопреобразователей АОУ.

Для оценки перспективности использования материалов, при реализации светозвукопроводов АОУ, предложена зависимость вида (12), описывающая частотно-зависмую эффективность акустооптического преобразования энергии акустической волны в интенсивность дифрагированного (выходного) лазерного пучка акустооптической ячейки.

Исследованы возможности создания просветляющих покрытий, сред акустической связи и акустических нагрузок при реализации, основного элемента акустооптических устройств, акустооптической ячейки.

Для реализации модуля эксплуатационной стабильности АОУ, исследованы физико-технические параметры герметиков, типа «Эластосил». Для них установлены прочность связи с металлами и монокристаллами, диэлектрическая проницаемость, коэффициент теплопроводности, динамическая вязкость, прочность на разрыв.

**РЕЗЮМЕ**

Наведені структура узагальненого акустооптичного пристрою та результати досліджень фізичної реалізуємості її елементів.

**SUMMARY**

A structure of the generalized optical-acoustic device and outcomes of researching physical realizability of its elements is provided.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Данилов В.В. Акустооптические устройства управления лазерным пучком систем оптоэлектронной обработки радиосигналов. // Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб. – №111. – 1999. – С.136-142.
2. Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля/ Под общ. ред. И.Н.Ермолова. – М.: Машиностроение. – 1986.
3. Пьезополупроводниковые преобразователи и их применение / А.И.Морозов, В.В.Проклов, Б.А.Станковский, А.Д.Гингис. – М.: Энергия. – 1973.
4. Данилов В.В., Иванов С.В. Моделирование акустически нагруженного пьезопреобразователя акустооптической ячейки. // Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб. – 2000. – №115. – С.66-70.
5. Данилов В.В. Иванов С.В. Электрический импеданс электроакустического преобразователя. // Технология и конструирование в электронной аппаратуре». – 2000. – №4. – С.22-25.
6. Данилов В.В., Иванов С.В. Методика расчета акустического импеданса связующих слоев в акустооптическом устройстве. // Материалы IX-й международной Крымской конференции «СВЧ – техника и телекоммуникационные технологии». – *Севастополь. – 1999. – С.268-269.*
7. Данилов В.В. Инженерный расчет акустооптического модулятора. // Технология и конструирование в электронной аппаратуре». – 2000. – №2-3. – С.16-21.
8. Данилов В.В. Материалы и технология реализации акустооптических устройств. // Материалы VI-й международной Крымской конференции «СВЧ – техника и телекоммуникационные технологии». – Севастополь. – 1996. – С.452-455.
9. Данилов В.В. Основы метрологического контроля технических характеристик акустооптических устройств. Радиотехника. Всеукр. Науч.-техн. сб. – 2002. – №124. – С.148-157.
10. Бабич Л.Я., Вайденбах В.А., Духонец И.И. и др. Справочник технолога – оптика. Под ред. Кузнецова С.М. – Л. – Машиностроение. – 1983.
11. Данилов В.В., Петров В.В., Онопко В.В., Богданова А.В., Сичка М.Ю., Трунов М.Л., Шульга В.Г., Крючин А.А. Особенности формирования фотоактивных материалов, полученных ионно-плазменным методом. // Физика и

технология тонких пленок сложных полупроводников. Тезисы докладов IV республиканской конференции. – Ужгород. – 1981. – С.54-55.

12. Данилов В.В., Фирцак Ю.Ю., Богданова А.В., Онопко В.В., Савельев И.О., Сичка М.Ю., Шульга В.Г., Трунов М.Л. Машинный синтез и изучение параметров антиотражающих покрытий для акустооптических элементов типа $A^{I}B^{II}C^{VII}$. // Физика и технология тонких пленок сложных полупроводников. Тезисы докладов IV-й республиканской конференции. – Ужгород. – 1981. – С.183-185.
13. Данилов В.В., Иванов С.В. Учет влияния связующих слоев на эффективность преобразования акустооптического устройства. // Радиотехника: Всеукр. науч.-техн. сб. – 2000. – №114. – С.169-173.
14. Данилов В.В., Иванов С.В. Искажение формы акустических импульсов в акустооптическом устройстве. // Материалы 10-й Международной Крымской микроволновой конференции «СВЧ- техника и телекоммуникационные технологии». – Севастополь. – 2000 г. – С.454-455.

*Надійшла до редакції 25.03.2003 р.*

УДК 535.377

# ТЕРМОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ЦИНК – СУЛЬФИДНЫХ ЛЮМИНОФОРОВ В СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ КИНЕТИКИ СВЕЧЕНИЯ

*Я.М.Кривошеев, А.И.Бажин, А.Г.Петренко, В.Ю.Дмитренко.*

В области дозиметрии и регистрации излучений одним из наиболее чувствительных методов и достаточно простым в реализации является метод термостимулированной люминесценции (ТСЛ). В данном направлении проводится большое количество экспериментальных и теоретических работ[1-7], охватывающих различные классы полупроводниковых соединений, обнаруживающих способность к ТСЛ, однако, несмотря на большое количество работ и, в частности, теоретических, существует разброс в мнениях исследователей в отношении однозначной трактовки получаемых спектров ТСЛ. Это объясняется различными факторами такими как, например различия в стехиометрическом составе образцов различных групп исследователей (трудностью воспроизведения условий получения образцов), различными мнениями в отношении кинетики преобладающих в люминофоре процессов при ТСЛ. Особое место в данном отношении занимает математическая модель люминофора с одним типом центров захвата и одним типом центров свечения [8], которая широко применяется в оценочных расчетах энергетических уровней в запрещенной зоне и других характеристик дефектов решетки полупроводника.

Для данной модели полупроводника в [9] получена система уравнений, применение которой снимает вопрос о неоднозначном определении кинетики свечения :

$$I = \frac{\gamma^{b-1} W_0 P_{r0}^{b} \exp\left(-\frac{E_t}{k_b T}\right)\left\{\exp\left(-\frac{W_0}{\beta}\int_{T_0}^{T}\exp\left(-\frac{E_t}{k_b T}\right)dT\right)\right\}^{2-b}}{(\gamma_t N_t)^{b-1}\left\{1+\frac{W_0 P_{r0}}{\beta\gamma_t N_t}\int_{T_0}^{T}\exp\left(-\frac{E_t}{k_b T}\right)dT\right\}^{b(b-1)}}, \quad (1)$$

$$\frac{p_{r_m}}{P_{r_p}} = P\frac{T_p}{T_m}\exp\left(-\frac{E_t}{k_b}\left(\frac{1}{T_m}-\frac{1}{T_p}\right)\right), \quad (2)$$

$$E_t = k_b \frac{\ln(P) + \frac{W_0}{\beta}\int_{T_P}^{T_m}\exp\left(-\frac{E_t}{k_b T}\right)dT}{\left(\frac{1}{T_P}-\frac{1}{T_m}\right)}, \quad (3)$$

$$T_m = \frac{E_t}{k_b}\left\{\ln\frac{W_0 k_b T_m^2 \gamma P_r\left((\gamma P_r + \gamma_t N_t) - \gamma P_r\right)}{E_t \beta (\gamma P_r + \gamma_t N_t)^2}\right\}^{-1}, \quad (4)$$

где b – некоторый параметр, I – интенсивность пика ТСЛ, $\gamma,\gamma_t$ – коэффициенты рекомбинации и захвата, $P_{r0}$ – концентрация дырок на центрах свечения, $W_0$ – частотный фактор, $k_b = 1{,}38\times10^{-23}$ Дж / К, $N_t$ – концентрация центров захвата, $T_p$, $T_m$ – температура, взятая в произвольной части пика и температура максимума пика ТСЛ и им соответствующие концентрации дырок на центрах свечения $P_{r_p}$ и $P_{r_m}$, $E_t$ – энергетический уровень центра захвата, p – параметр, определяемый экспериментально, β - скорость нагрева кристаллофосфора.

Целью данной работы было экспериментальное исследование ТСЛ цинк – сульфидных люминофоров, анализ и расшифровка энергетической структуры исследованных образцов с использованием полученных соотношений.

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ.

Термолюминесценция была исследована с помощью установки "Альфа – кварц 02", которая была создана на кафедре ФТТ и ФМ под руководством проф. А.И. Бажина. Образцы подвергались облучению УФ – излучением с λ=365 нм, затем производился разогрев исследуемого люминофора с заданной скоростью нагрева и регистрация спектров ТСЛ. Также изучались спектры отражения образцов, для которых проводилось изучение ТСЛ, с помощью установки, смонтированной на основе спектрофотометра СФ – 4 с приставкой зеркального отражения ПЗО – 1. Измерения спектров отражения производились относительно BeO, который использовался в качестве эталона, с поправкой на спектральную чувствительность установки.



©Кривошеев Я.М., Бажин А.И., Петренко А.Г., Дмитренко В.Ю.

**ВЫБОР ОБРАЗЦОВ КРИСТАЛЛОФОСФОРОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ.**

В качестве объектов исследований были выбраны поликристаллические образцы кристаллофосфоров ZnS, ZnS – CdS с различными условиями приготовления, причем особенности получения позволяют сделать вывод о том, что во – первых, они имеют преимущественно n – тип проводимости, во – во – вторых, кислород является обязательной примесью в кристаллической структуре исследуемых соединений. Проведенный рентгеноструктурный анализ показал, что исследуемые образцы, полученные из "НИИ люминофоров и особо чистых веществ", Ставрополь, Россия , имеют преимущественно структуру сфалерита. Основания этих фосфоров обладают решеткой смешанного ионно-ковалентного типа; в связи с наличием различных дефектов решетки и остаточных примесей они имеют довольно сложную энергетическую структуру. Сложность избранного класса соединений позволяет, варьируя состав и условия получения, синтезировать фосфоры с резко различающимися свойствами, но одновременно сильно затрудняет теоретические расчеты, требующие в общем случае учета многих факторов.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.**

На рис.1 представлены спектры ТСЛ системы полупроводниковых твердых растворов $Cd_xZn_{1-x}S$ – Cu с концентрацией атомов меди $N_{Cu} \cong 10^{-4}$ вес. %. Максимум пика ТСЛ по мере возрастания процентной доли кадмия смещается в сторону инфракрасных длин волн, что соответствует увеличению доли вюрцитной фазы в решетке раствора по мере увеличения процентного содержания Cd. Данный факт также подтверждается литературными данными [10] и результатами рентгеноструктурного анализа, которые свидетельствуют об образовании политипного ряда, который по мере возрастания процентного содержания кадмия пополняется политипами типа 2H, 4H, для которых авторами [11] была оценена доля гескагональности α с учетом соотношения a/c=1,633 для идеальной гексагональной решетки ZnS.

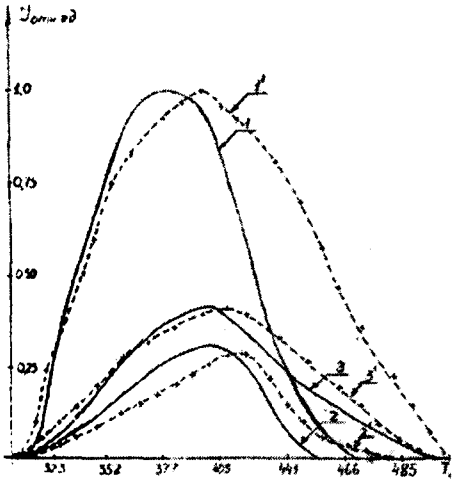


Рис.1 Спектры ТСЛ твердых растворов 1 - $Cd_{0,2}Zn_{0,8}S$ – Cu($\lambda_m$=600нм), 2 - $Cd_{0,4}Zn_{0,6}S$ – Cu($\lambda_m$=690нм),3 - $Cd_{0,6}Zn_{0,4}S$ – Cu($\lambda_m$=700нм), *кривые 1', 2',3' – рассчитаны теоретически.*

Рис.2 иллюстрирует степень зависимости ТСЛ двух образцов ZnS различного стехиометрического состава от условий приготовления. Видно, что с их изменением существенно уменьшается максимальная интенсивность пика ТСЛ, что, с одной стороны, может быть вызвано, на наш взгляд, с увеличением давления кислорода в процессе синтеза ZnS и соответствующей перестройкой энергетической структуры. С другой стороны, это может быть связано с тем, что уровни отдельных дефектов при изменении препаративных условий незначительно изменяют свое положение в запрещенной зоне образца, что, в свою очередь, приводит к образованию новых дефектных комплексов (кластеризация дефектов). Это также подтверждается измерениями спектров отражения(рис.3) и более ранними исследованиями их фотолюминесценции (ФЛ)[12].

**СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ.**

Для оценки частотного фактора $W_0$ в [11] предложено соотношение следующего вида :

$$W_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{m\nu(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)}}(\varepsilon_\infty + 2)Z^*, \qquad (5)$$

где $\varepsilon_\infty$, $\varepsilon_0$ – высокочастотная и статическая диэлектрическая проницаемости, ν - объем, отнесенный к одной формульной единице AB, $z^*$ - эффективный заряд иона, m – приведенная масса ионов A и B Оценка частотно фактора с помощью этого соотношения, проведенная в [11] для ZnS и CdS, дает значение $W_0 \approx 10^{11}$ $c^{-1}$причем получено хорошее согласие с литературными данными по исследованию распределения электронной плотности в ZnS и CdS.

Дополним полученную систему уравнений, соотношением для определения энергетического положения дефекта в запрещенной зоне исследованного полупроводника $E_t$ :

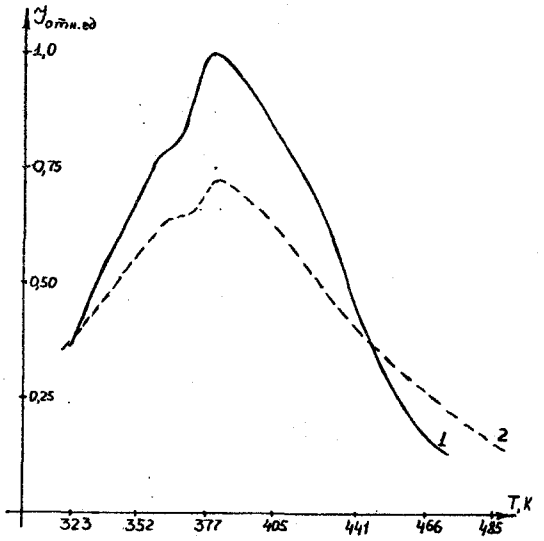



Рис.2 Кривые ТСЛ двух образцов ZnS с различной стехиометрией и условиями приготовления $\lambda_m$ = 525 нм.

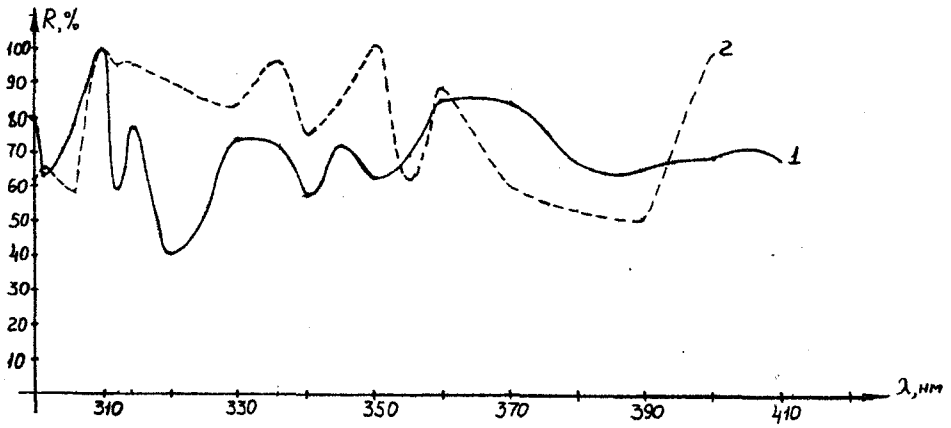



Рис.3 Спектры отражения двух образцов ZnS с различной стехиометрией и условиями приготовления.

$$E_t = k_b \ln\{\frac{P_{r_p}}{P_{r_m}}\}/(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p}) \qquad (6)$$

Для вычисления величин $\gamma$, $\gamma_t$ используем соотношения [13] :

$$\frac{W_0}{\gamma_t} = (\frac{2\pi m_n^* k_b T}{h^2})^{3/2} \sqrt{\frac{3k_b T}{m_n^*}}; \qquad (7)$$

$$\frac{W_0}{\gamma} = (\frac{2\pi m_p^* k_b T}{h^2})^{3/2} \sqrt{\frac{3k_b T}{m_p^*}}. \qquad (8)$$

Скорость разогрева всех образцов $\beta$=4,5 К / сек. Причем кинетический параметр b будет определять долю процессов повторного захвата в общей динамике ТСЛ исследуемого образца. Результаты расчета для $E_t$ = 1,3 эВ (образец $Cd_{0,2}Zn_{0,8}S$ - Cu); $E_t$ =0,9 эВ (образец $Cd_{0,4}Zn_{0,6}S$ - Cu); $E_t$ = 0,8 эВ (образец $Cd_{0,6}Zn_{0,4}S$ - Cu) представлены на рис.1. Отклонение рассчитанных значений от наблюдаемых экспериментально следует отнести к возможному вкладу в ТСЛ исследуемых составов не одного преобладающего типа дефектов, ответственных за наблюдаемую форму пика, а нескольких, что говорит о необходимости учета их взаимодействия и совместного вклада в кинетику происходящих в кристалле процессов. Расчет по заданным параметрам произведен с использованием пакета MathCAD 2000 Professional. Анализ формулы (6) и проведенных расчетов позволяет сделать вывод об относительном изменении степени заполнения центров рекомбинации при двух температурах $T_p$, $T_m$. Проведенный расчет (рис.4) демонст-

рирует принципиальную применимость полученных ранее формул. Более точную информацию о величине сечения захвата $\gamma_t$ можно получить при совместном измерении кривых спадания индуцированной примесной фотопроводимости :

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0 V \gamma_t t}; \tag{9}$$

$$\gamma_t = \frac{n_0 - n}{nVt}. \tag{10}$$

Кривая 2, представленная на рис.4, рассчитана в предположении наличия квадратичной кинетики свечения ТСЛ образца, кривая 3 – в предположении линейной кинетики свечения.

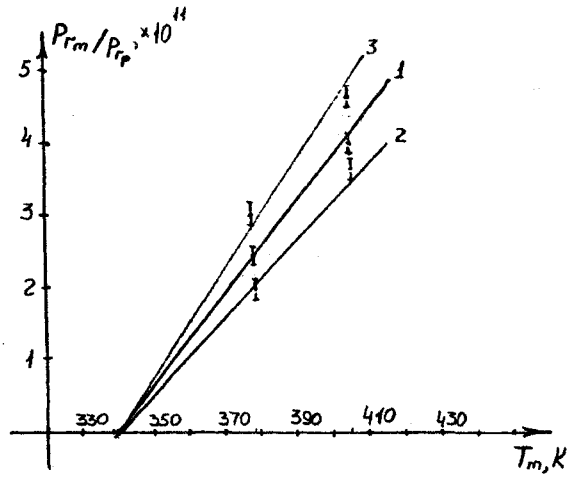



Рис.4 Зависимость параметра $\frac{P_{r_m}}{P_{r_p}}$ от температурного максимума для $E_t$=1,3 эВ (образец $Cd_{0,2}Zn_{0,8}S$ - Cu); $E_t$ =0,9 эВ (образец $Cd_{0,4}Zn_{0,6}S$ - Cu); $E_t$ = 0,8 эВ (образец $Cd_{0,6}Zn_{0,4}S$ - Cu), параметр p -2. Кривые 2,3 рассчитаны на основе теории, развитой в [8]

Анализ взаимного положения трех полученных кривых говорит о возможности применения развиваемой точки зрения для случая общей кинетики ТСЛ для количественных расчетов различных кинетических параметров происходящих при ТСЛ процессов. Однако, для более точного соответствия теории и эксперимента требуется обобщение данной теории в случае общей кинетики свечения на случай наличия большего количества уровней ловушек в запрещенной зоне полупроводника.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.**

1.Экспериментальное изучение ТСЛ группы образцов полупроводниковых твердых растворов $Cd_xZn_{1-x}S$ – Cu с $N_{Cu} \cong 10^{-4}$ вес. %, ZnS с различными условиями приготовления, сопоставление результатов с исследованиями спектров отражения и ФЛ, а также теоретический расчет пиков ТСЛ и сравнение расчетов с экспериментом позволило проиллюстрировать степень соответствия развиваемой теории эксперименту.

2.В исследуемой группе твердых растворов $Cd_xZn_{1-x}S$-Cu наблюдался концентрационный дрейф максимума пика ТСЛ в ИК – область по мере роста процентного содержания Cd в решетке раствора, что можно объяснить пропорциональной деформацией энергетической структуры образца и возможным образованием политипных модификаций при переходе от сфалерита к вюрциту.

3.Обоснована необходимость дальнейшего обобщения теории для общей кинетики свечения ТСЛ на случай наличия большего количества уровней дефектов в запрещенной зоне полупроводника.

**РЕЗЮМЕ**

В роботі експериментальним шляхом досліджена термостимульована люмінесценція ряду твердих розчинів $Cd_XZn_{1-X}S$ – Cu та зразків ZnS, спектр відбиття ZnS з різними умовами отримання без передбачень про характер кінетики свічення. Проведені теоретичні розрахунки та співставлення теорії та експерименту та зроблені обґрунтовані висновки про узагальнення розвинутої точки зору на загальну кінетику свічення ТСЛ на випадок наявності більшої кількості рівнів захвату та рекомбінації у напівпровіднику.

**SUMMARY**

In activity the experimental way investigates termostimuleted luminescence (TSL) of a series of solid solutions $Cd_XZn_{1-X}S$ – Cu and samples ZnS, a spectrum of reflection ZnS with different conditions of obtaining without what - or simplifying assumptions about nature of a kinetics of glow the idealized calculations both confrontation of the theory and experiment Are conducted and the substantiated conclusions about generalizing of the developed point of view on a general

kinetics of glow TSL on a case of presence of a lot of levels of traps and recombination in a forbidden region of the semiconductor are made.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ковалев Б.А., Дмитриев Б.П., Меркулова В.В. Исследование изменения концентрации центров захвата и поверхностных свойств при старении электролюминофоров. // В сб.: Вопросы физики электролюминесценции. – Днепропетровск. Изд.-во ДГУ, 1979. – С.152-158.
2. Семенов В.Н, Сушкова Т.П., Клюев В.Г., Кушнир М.А. Фотолюминесцентные свойства легированных пленок $Cd_xZn_{1-x}S$.// Поверхность: Физика, химия, механика. – 1994. – №7– С.60-64.
3. Гарягдыев Г., Джумаев Б.Р., Любченко А.В., Пащенко Г.А. О природе центров рекомбинации и свечения в рекристаллизированных слоях $Zn_xCd_{1-x}S$ ($0 \le x \le 1$), легированных медью. // Изв. АН СССР. Неорг. материалы. – 1991, т.27, №8. – С.1586-1590.
4. Dohler G/H/ The kinetics of Donor – Acceptor transitions in ZnS Type phosphors.// Phys. stat. sol.(b). – 1971, v.45 – P.705-709.
5. Квинт А.В., Медведев С.А., Клевков Ю.В. и др.. Оптическая спектроскопия глибоких состояний в ZnTe.// ФТТ. – Т.40. – №6, 1998. – С.1010-1017.
6. Mahmoud Said Rasheedy. On the general order kinetics of thermoluminescence glow peak .// Journal of Physics : Condens. Matter. –1993, v.5. – P.633-636.
7. Чмырев В.И. Расчет одиночного пика термостимулированной проводимости в приближении слабого и сильного перезахвата. // Неорганические материалы. – 1999. – Т.35. – №10. – С.1159-1160.
8. Сердюк В.В., Ваксман Ю.Ф. Люминесценция полупроводников. – Киев – Одесса: Вища школа, 1989. – С.139-151.
9. Кривошеев Я.М., Бажин А.И., Сунцов Н.В. Модель одиночного пика термостимулированной люминесценции в случае общей кинетики свечения.// Вестник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2002. – №1. – С.229-231.
10. Дмитренко А.О., Князев Ю.В. О закономерностях образования твердых растворов в системе ZnS – CdS. – В кн. : Исследования в области неорганической и аналитической химии. Саратов: Изд.-во Саратовского университета, 1975. – С.7-9.
11. Сунцов А.Н., Милославский А.Г., Петренко А.Г. Дефектная структура, оптические и радиационные свойства твердых растворов ZnS – CdS. // Вестник ДонНУ. Сер. А.: Природничі науки. – 2002. – №1. – С.272-276.
12. Милославский А.Г., Сунцов Н.В. Дефектная структура и центры свечения цинк - сульфидных люминофоров.// Физика и техника высоких давлений. – 1997. – Т.7. – №2. – С.94-103.
13. Левшин В.Л., Митрофанова Н.В., Тимофеев Ю.П., Фридман С.А., Щаенко В.В. Применение кристаллофосфоров для регистрации электромагнитных излучений. // Труды ФИАН им. П.Н.Лебедева. – 1972. – Т.59. – С.65-123.


*Надійшла до редакції 21.01.2003 р.*

УДК 539.1

# СОЛИТОНЫ В КАРТИНЕ ТЕПЛОВОГО РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК

*Ю.В.Еремейченкова, Л.С.Метлов, А.Ф.Морозов*
*Донецкий физико-технический институт НАН Украины*

Введение. При исследовании колебательного движения атомов в системах при высоких температурах становится актуальным выход за рамки гармонического приближения. Традиционно ангармонизмы учитываются путем включения в межатомный потенциал высших степеней смещений атомов из положений равновесия. Простейшим видом потенциала является учет 3-й и 4-й степеней (потенциалы 2-4 [1-4] и 2-3-4 [5,6]). Также существует ряд работ по реалистическим потенциалам, напр. [6,7].

В [1-7] исследуется (аналитически и методом молекулярной динамики) распад π-сигнала в нелинейных моноатомных цепочках. Это – гармоника с волновым вектором $k=\pi/a$ и частотой, лежащей на верхней границе фононного спектра. Смещения атомов в $\pi$-сигнале имеют вид

$$u_n(t) = A\,(-1)^n \cos(\omega t). \qquad (1)$$

Периодичность по времени исходного сигнала подсказала выбор приближения для поиска аналитических решений нелинейных уравнений движения атомов. В [1-7] использовалось так называемое "rotating wave approximation" – RWA, в котором решение ищется в виде, периодическом во времени

$$u_n = \xi_n(t)\, exp(-i\omega t) + c.c. \qquad (2)$$

где $\xi_n(t)$ –функция, медленно меняющаяся во времени (не периодическая). Затем исходная система уравнений линеаризуется по множителю $exp(-i\omega t)$. Таким образом, почти вся зависимость от времени сосредоточена в периодическом множителе

Солионоподобные решения впервые были аналитически предсказаны (и обнаружены путем численного эксперимента) в [1] в цепочке с потенциалом 2-4 в пределе сильной ангармоничности. Это – бризеры (другое название – внутренние локализованные моды). Смещения атомов в бризерах имеют вид

$\xi_n(t) = A(\ldots, 0, -½, 1, -½, 0, \ldots)$ и $\xi_n(t) = A(\ldots, 0, -1, 1, 0, \ldots)$

для четных и нечетных бризеров соответственно.

Бризеры обладают следующими свойствами [3-4]

- Образуются в результате амплитудной модуляционной неустойчивости (π-сигнала).
- Их частоты всегда выше частоты гармонического π-сигнала.
- Их скорости на порядок меньше гармонической скорости звука.
- Распадаются необратимо с установлением теплового равновесия.

В [5,6] исследовались существование и устойчивость бризеров в цепочках с потенциалом 2-3-4 (а в [6] - и в реалистических потенциалах Леннарда-Джонса и Морзе). В [6] показано, что добавление малой кубической поправки в потенциал 2-4 практически не влияет на распад $\pi$-сигнала и образование бризеров. Однако увеличение кубического слагаемого стабилизирует $\pi$-сигнал. При дальнейшем увеличении меняется тип неустойчивости – появляется «удваивающая период неустойчивость». На исходный сигнал накладывается быстро растущее возмущение с периодом, вдвое большим периода невозмущенного сигнала. Новый тип неустойчивости не приводит к образованию бризеров, а сразу ведет к тепловому равновесию. В цепочках с реалистическими потенциалами удваивающая период неустойчивость является единственным типом нестабильности, и бризеры в них не образуются [6].

Таким образом, в [1-7] исследовались процессы, приводящие к установлению теплового равновесия в системе. Это – либо распад $\pi$-сигнала на бризеры (а затем распад самих бризеров), либо распад π-сигнала, минуя стадию бризеров. Процессы, происходящие в системе после установления теплового равновесия в системе, и возможность существования там солитонов не исследовались.

Целью настоящей работы является исследование поведения нелинейной системы после установления теплового равновесия.

Методы и приближения. Решались точные уравнения движения атомов

$$m\ddot{r}_i = -\partial/\partial r_i\,[\,½\,\Sigma_{ij}\,V(x_{ij})\,]. \qquad (3)$$

в цепочке из 100 частиц с периодическими граничными условиями в приближении ближайших соседей (учет шести координационных сфер дал аналогичные результаты).

Расчет выполнялся в системе единиц, в которой энергия измеряется в [K], масса – в [а.е.м.], расстояние - в единицах равновесного межатомного расстояния [$d_0$]. Единица измерения времени равна периоду гармонического $\pi$-сигнала $T_0=8.3716\cdot10^{-13}$с (соответствует случаю неона с массой атома $m$=20.18 а.е.м.).

©Еремейчикова Ю.В., Метлов Л.С., Морозов А.Ф.

Для численного решения уравнений (3) применялся алгоритм Йошиды шестого порядка [8]. Шаг дискретизации по времени равен $\tau=0.008T_0$, что дает сохранение энергии с точностью до $10^{-4}$ % в течение всего численного эксперимента ($t=10^5\ T_0$).

Использовался реалистический межатомный потенциал Exp-6

$$V^{exp\text{-}6}(r_{ij}) = A_0 exp(-\alpha(x_{ij} - 1)) - \alpha A_0/6\ x_{ij}^{-6};\quad x_{ij}=r_{ij}/d_0. \qquad (4)$$

Параметры $A_0$ = 35.9335 К, $\alpha$ = 13.6519, $d_0$ = 3.091 Å соответствуют случаю димера неона. Они определялись следующим образом. Отталкивающая часть потенциала рассчитывалась из первых принципов в приближении Хартри-Фока в базисе атомных орбиталей, точно (по Левдину) ортогонализованных на разных узлах [9] и аппроксимировалась экспоненциальной зависимостью от межатомного расстояния. Единственный эмпирический параметр $d_0$ находился из условия равенства расчетного межатомного расстояния в димере неона с экспериментальным [10].

Для исследования роли различных порядков ангармоничности при движении атомов проводились численные эксперименты по цепочкам со степенными потенциалами. Они определялись как результаты разложения потенциала Exp-6 по степеням отклонений атомов из положений равновесия

$$V^{exp\text{-}6}(r_{ij}) = V_0 + K_2/2\ (x_{ij};- 1)^2 + K_3/3\ (x_{ij};- 1)^3 + K_4/4\ (x_{ij};- 1)^4 + .... \qquad (5)$$

Накладывались три вида начальных условий путем задания скоростей атомов $V_0$

- π-сигнал. $V_0$=3 [(К/а.е.м.)$^{1/2}$].
- Ударные волны. Моделировались заданием шести атомам (трем с одного конца цепочки, трем – с другого) начальных скоростей, равных по модулю и направленных внутрь цепочки ($V_0$=12.25 [(К/а.е.м.)$^{1/2}$]).
- Белый шум. Моделировался заданием случайных начальных скоростей.

Во всех трех случаях в систему закачивалась одна и та же кинетическая энергия, равная 90 К/атом, что вдвое превышает энергию связи димера неона. Это соответствует сжатому кристаллу в условиях реального эксперимента.

Результаты. *π*-сигнал. При $t\approx50T_0$ π-сигнал распадается под действием численного шума (вызванного погрешностью счета) через удваивающую период неустойчивость. С течением времени движение атомов все более хаотизируется. Одновременно идет обратный процесс – пространственная концентрация энергии, а при $t\approx600T_0$ образуются хорошо локализованные в пространстве солитоны.

На рис.1 приведен один из моментов, когда в солитонах сконцентрирована наибольшая энергия. Даны диаграммы энергий атомов в последовательные моменты времени. Энергии показаны короткими вертикальными линиями с длиной, пропорциональной величине энергии (положительное направление – вниз). Форма солитонов дана на рис.2 (увеличенная нижняя часть рис.1). Даны диаграммы скоростей (рис.2а) и энергий (рис.2б). Скорости также показаны короткими вертикальными линиями. Видно, что внутри солитона несколько атомов движутся в одну и ту же сторону, передавая свой импульс впереди покоящимся соседям (как в ударной волне).

На рис.3 дано распределение атомов по энергиям $n(\varepsilon)$ (нижний график). Оно определяется так, что величина $dn(\varepsilon)=n(\varepsilon)d\varepsilon$ имеет смысл числа атомов, чьи энергии лежат в интервале $(\varepsilon,\ \varepsilon+d\varepsilon)$. Верхний график - распределение $E(\varepsilon)=\varepsilon n(\varepsilon)$, имеющее смысл суммарной энергии атомов, лежащих в энергетическом интервале $(\varepsilon,\ \varepsilon+d\varepsilon)$. Сплошные кривые $n(\varepsilon)$ и $E(\varepsilon)$ соответствуют стандартному распределению Гиббса, полученному в предположении о хаотическом движении атомов в цепочке. Кружками обозначены распределения $n(\varepsilon)$ и $E(\varepsilon)$, найденные в численном эксперименте.

Упорядоченному движению атомов в солитонах соответствуют локальные максимумы на графике E(ε) при энергиях, в 5-8 раз больших средней энергии атома в системе. Согласие «экспериментального» распределения $E(\varepsilon)$ с гиббсовским в области малых ε говорит о том, что атомы, не входящие в солитоны, движутся хаотически.

Солитоны, полученные при распаде π-сигнала, обладают свойствами:

1.Слабо взаимодействую друг с другом.

2.По форме аналогичны ударным волнам.

3.Являются однопараметрическими солитонами. Параметр – скорость $v$=2-2.3$v_s$ в зависимости от амплитуды ($v_s$=12.72(К/а.е.м)$^{1/2}$– гармоническая скорость звука).

4.Перемещаясь по цепочке, каждый солитон набирает энергию, а затем ее теряет, расплываясь в пространстве. Между процессами набора энергии и распада устанавливается динамическое равновесие, так что в системе всегда имеется конечное число высокоэнергетических солитонов.

5.За время, пока солитон имеет наибольшую энергию, он успевает пройти 2000-3000 постоянных решетки

6.Периоды времени, когда в солитонах сконцентрирована наибольшая энергия, чередуются с периодами, когда солитоны относительно слабы, а распределение атомов по энергиям согласуется с гиббсовским. Это свойство имеет место также для нелинейных цепочек с потенциалом взаимодействия Леннарда-Джонса [11].

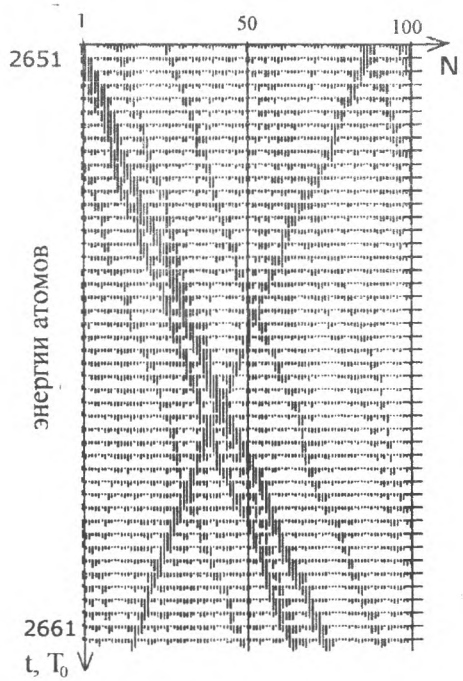
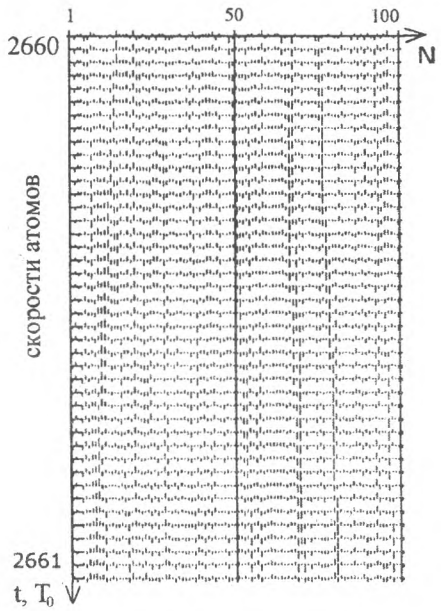
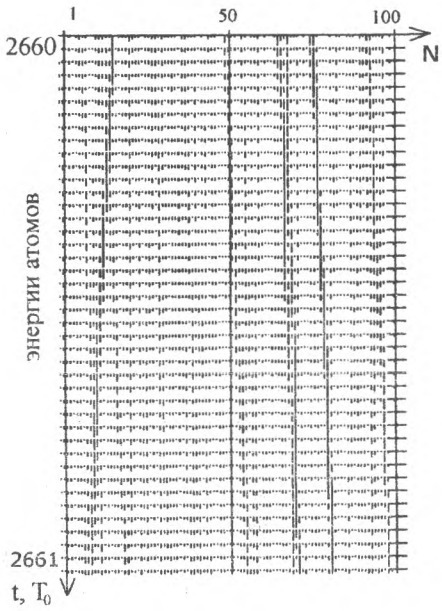



Рис.1. Диаграммы энергий атомов.




а




б

Рис.2. Диаграммы скоростей (а) и энергий (б) атомов.

Численные эксперименты по эволюции π-сигнала с энергиями исходного сигнала 300К/атом и 1000К/атом показали, что количество солитонов практически не

меняется с ростом энергии. Энергия, накапливаемая в каждом солитоне, растет, однако отношение этой энергии к средней энергии атома в цепочке не меняется.

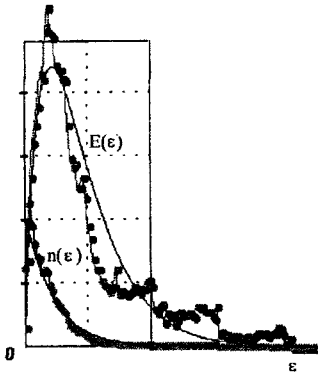



Рис.3. Распределения атомов по энергиям.

**Ударные волны.** Сразу же после начала численного эксперимента каждая исходная волна, охватывающая три атома, распалась на три ударных волны, движущихся со скоростями $v$~$4.5 \div 5 v_s$. В каждой из волн в соударениях участвуют по два атома – один передает весь свой импульс впереди лежащему, покоящемуся, и т.д.

С течением времени ($t \approx 1100\ T_0$) ударные волны расплываются в пространстве (в соударениях уже участвуют по 3-5 атомов, движущихся в одном направлении). Они теряют энергию и превращаются в однопараметрические солитоны, аналогичные по форме и свойствам солитонам, полученным при распаде $\pi$-сигнала. При $t \approx 2000\ T_0$ наступает хаотизация движения атомов в цепочке, «экспериментальное» распределение $E(\varepsilon)$ согласуется с гиббсовским. Затем вновь образуются однопараметрические солитоны со свойствами 1-6.

Таким образом, ударные волны являются предельно локализованной в пространстве (и поэтому неустойчивой) версией однопараметрических солитонов, наблюдаемых при распаде $\pi$-сигнала.

**Белый шум.** После распада любого упорядоченного сигнала и перед образованием однопараметрических солитонов существует стадия хаотического движения атомов. Поэтому для исследования процесса образования солитонов целесообразно использовать в качестве начального условия белый шум

В начале численного эксперимента атомы движутся хаотически, однако распределение $E(\varepsilon)$ еще отличается от гиббсовского. Сразу же начинается процесс локализации энергии. При $t$=80 $T_0$ распределение $E(\varepsilon)$ выходит на гиббсовское. При $t$=400$T_0$ образуются однопараметрические солитоны, хорошо локализованные в пространстве. Их свойства идентичны свойствам 1-6 солитонов, полученным при распаде π-сигнала и ударных волн.

Таким образом, для образования однопараметрических солитонов не требуется специального вида начального сигнала. Независимо от вида начальных условий, нелинейная цепочка с реалистическим потенциалом Exp-6 приходит в одно и то же стационарное состояние, в котором все величины, усредненные за достаточно большой промежуток времени, постоянны. Оно характеризуется наличием конечного числа долгоживущих высокоэнергетических солитоноподобных возмущений.

**Степенные потенциалы. $\pi$-сигнал.** Рассматривались следующие ситуации.

- Потенциалы 2-4 и 2-3-4. π-сигнал распадается через модуляционную неустойчивость на бризеры, аналогичные полученным в [1-6]. В цепочке с потенциалом 2-4 время жизни бризеров составило 120 $T_0$ (в потенциале 2-3-4 - 50$T_0$). После распада бризеров движение атомов хаотизируется, распределение $E(\varepsilon)$ выходит на гиббсовское. Затем в цепочке образуются однопараметрические солитоны со свойствами 2-6. Однако эти солитоны живут очень недолго (≈50 $T_0$), успевая за это время пройти цепочку из 100 атомов 3-4 раза. Столь короткое время жизни обусловлено тем, что в цепочке с потенциалами 2-4 и 2-3-4 солитоны намного сильнее взаимодействуют друг с другом.
- Потенциалы 2-3-4-5-6 и 2-3-4-5-6-7-8. $\pi$-сигнал стабилен.
- Потенциал 2-3-4-5-6-7-8-9-10. $\pi$-сигнал распадается через удваивающую период неустойчивость. Образуются однопараметрические солитоны со свойствами 1-6 (слабо взаимодействующие друг с другом и имеющие большие времена жизни).

Таким образом, добавление кубической ангармоничности дает в картине распада $\pi$ сигнала и образования солитонов лишь количественные изменения по сравнению с потенциалом 2-4. Учет 5-6 и 7-8 порядков стабилизирует π сигнал. При учете 9-10 степеней происходит смена типа неустойчивости, а свойства солитонов полностью совпадают со свойствами солитонов, полученных в цепочках с полным по-

тенциалом Exp-6. Таким образом, малые в количественном отношении поправки дают качественное изменение поведения атомов. Чтобы избежать подобных осложнений в реальных кристаллах, необходимо использование реалистических межатомных потенциалов.

**Выводы.** В настоящей работе исследовано поведение нелинейной системы в состоянии термодинамического равновесия. Обнаружены солитоны, по свойствам сильно отличающиеся от бризеров – единственных солитонов (кроме темных солитонов [1]), на сегодняшний день предсказанных и наблюдавшихся в численном эксперименте в дискретных цепочках.

Отличия в свойствах следующие.

- Бризеры характеризуются двумя параметрами – частотой и скоростью. В однопараметрических солитонах нет периодичности во времени, единственный параметр - скорость.
- Скорость бризера – дозвуковая и на порядок меньше скорости однопараметрического солитона (сверхзвуковой).
- В бризере соседние атомы движутся в противофазе. В однопараметрическом солитоне несколько соседних атомов движутся в одном направлении. Поэтому в бризере накапливается большая энергия, чем в однопараметрическим солитоне.
- Бризеры образуются в специальных условиях – только в потенциалах 2-4 и 2-3-4 при распаде $\pi$-сигнала. Однопараметрические солитоны образуются как в степенных, так и в реалистических потенциалах, причем самопроизвольно, из хаотического движения атомов.
- Бризеры имеют малое время жизни и распадаются необратимо. Для однопараметрических солитонов между процессами образования и распада устанавливается динамическое равновесие.

Таким образом, в состоянии теплового равновесия нелинейная цепочка характеризуется наличием конечного числа долгоживущих высокоэнергетических возмущений. Можно ожидать, что подобные возмущения могут существовать в трехмерном случае и давать заметное увеличение теплопроводности кристалла при высоких температурах, а также влиять на длительную прочность твердых тел.

**РЕЗЮМЕ**

Методом молекулярної динаміки проведені чисельні експерименти по довгостроковій еволюції різних типів початкових сигналів у нелінійних ланцюжках з реалістичним міжатомним потенціалом Exp-6, а також зі степеневими потенціалами. Знайдено, що в тепловій рівновазі система характеризується кінцевим числом довгоживучих солітоноподібних збурювань, причому між процесами їхнього росту і розпаду встановлюється динамічна рівновага

**SUMMARY**

Molecular dynamic numerical simulations are performed to investigate a long-time evolution of different type initial signals in nonlinear chains with realistic Exp-6 potential and with powers ones. It is found that in thermodynamical equilibrium there is a finite number of long-lifetime soliton-like excitations in the system, with dynamical equilibrium being between the processes of their growing and decaying.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. А.С.Долгов О локализации колебаний в нелинейной кристаллической структуре./ ФТТ. – 1986. – Т.28. – №6. – С.1641-1644.
2. V.M.Burlakov, S.A.Kiselev, V.I.Rupasov Localized vibrations of homogeneous anharmonic chains / Phys. Lett. A. – 1990, v. 147, №2-3. – P.130-134.
3. K.W.Sandusky, J.B.Page, K.E.Schmidt Stability and motion of intrinsic localized modes in nonlinear periodic lattices / Phys. Rev. – 1992, B 46, N. 10 – P.6161-6168.
4. T.Cretegny, T.Dauxois, S.Ruffo, A.Torchini Localization and equipartition of energy distribution in the FPU chain: chaotic breathers / Physica D. – 1998, 121. – P.109.
5. S.R.Bickham, S.A.Kiselev, A.J.Sievers Stationary and moving intrinsic localized modes in one-dimensional monatomic lattices with cubic and quartic anharmonicity / Phys. Rev. –1993, B 47, N. 21.– P. 14206-14211.
6. K.W.Sandusky, J.B.Page Interrelation between the stability of extended normal modes and the existence of intrinsic localized modes in nonlinear lattices with realistic potentials / Phys. Rev. – 1994, B 50, N.2. – P.866-887.
7. T.Rossler, J.B.Page Intrinsic localized modes in driven anharmonic lattices with realistic potentials / Phys. Lett. – 1995, A 204, №5-6. – P.418-426.
8. H.Yoshida Construction of higher order symplectic integrators / Phys. Lett. – 1990, A 150, No 5-7. – P.262-268.
9. Еремейченкова Ю.В. Теория энергетической структуры изоляторов при сверхвысоких давлениях. Автореф. дисс. к. ф.-м. н. – Донецк, 1999. – 139 с.
10. J.F.Ogilvie, F.J.Wang Thermal properties of neon dimer gas / J.Mol. Struct.– 1992, v.273. – P.277.
11. L.S.Metlov Soliton organization of thermal field in a chain at high temperatures / ФТВД. – 2001. – Т.11. – №3. – С.121-127.

*Надійшла до редакції 21.01.2002 р.*

УДК 539.12

# ГРАДУИРОВАННОЕ НЕПОЛНОЕ АФФИННОЕ РАСШИРЕНИЕ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА В *B*-МОДЕЛИ ОБЪЕДИНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

*В.Т.Березин*
*Донецкий физико-технический институт НАН Украины*

**1. Введение.** Применим канонические правила весовых знаков **(R1)** – **(R3)** из [1] и определения основных понятий LINAG (линейной градуированной алгебры над алгеброй Грассмана **AG**) в исследовании трансформационных свойств базы $B$ расслоений [2], слои которых преобразуются по представлениям группы

$$G = GL(B)\times L\times U(1)\times SU(2)\times SU(3)\,. \qquad (1)$$

Эти расслоения ($G$-bundle) описывают все кинематические и динамические свойства гравитации, $G$-метрики, элементарных частиц и их взаимодействий в теории, называемой *bundle model* или, короче, *B-моделью* [3]. Современные данные по частицам наиболее полно отражены в *стандартной модели* Глэшоу - Вайнберга - Салама, по отношению к которой для $B$-модели выполняется принцип соответствия. Согласно им $B$-модель не нуждается в суперсимметрии и супергравитации. Последние означают, что бозоны и фермионы в равном числе по своим возможным типам преобразуются по одному и тому же представлению некоторой градуированной группы. Поэтому наше расширение группы Лоренца будет отличаться от стандартного суперсимметричного, и это отличие оказывается разительным по числу новых генераторов групп. Основной целью градуированного неполного аффинного расширения группы Лоренца является кинематическое объяснение причин существования экспериментально наблюдаемых трёх поколений элементарных частиц.

В $B$-модели фермионы и бозоны никогда не преобразуются по одному и тому же неприводимому представлению группы $G$, так как бозоны реализуют структуру дифференциальной связности в векторных расслоениях и метрическую структуру над главным $G$-расслоением, а фермионы - только векторные расслоения, причём не все, а лишь спинорные по группе Лоренца $L$ и векторные по группе $U(1)\times SU(2)\times SU(3)$ (прямое произведение их). Например, к касательным расслоениям над $B$ и к главному $G$-расслоению фермионы не имеют прямого отношения, а только через взаимодействия с бозонами. Поэтому трансформационные свойства фермионов и бозонов в $B$-модели (как и в стандартной модели Глэшоу - Вайнберга - Салама) никогда напрямую не пересекаются в соответствии с наблюдениями и в отличие от суперсимметричных и супергравитационных теорий. По нашему мнению $B$-модель исключительно хорошо приспособлена для устранения известных сингулярностей в квантовой теории поля.

**2. $G(B)$-линейные координаты.** Переформулируем сначала некоторые положения статьи [2]. Пусть $B$ есть 9-мерное градуированное многообразие, которое играет роль пространства-времени и которое всегда является пространством значений аргументов при задании сечений расслоений. Пусть $\varphi: U\to B_c$ есть подходящее отображение координатной окрестности $U\subset B$ *в линейное* пространство $B_c$ той же размерности и градуировки, что и $B$. Образ $z(b)\in B_c$ точки $b\in U$ имеет следующие координаты:

$$z(b) = z = (z^{\Pi}) = (r = z^{\varnothing}, x^{\mu} = z^{\mu}, \theta^{\alpha} = z^{\alpha}) \in B_c, \qquad (2)$$

т.е. $\Pi = (\varnothing, \mu, \alpha)$. Пустое множество $\varnothing$ используется в качестве скалярного индекса, индексы $\mu, \nu, \ldots$ = 0,1,2,3 (а также вариант с чертой сверху, — см. ниже) из середины алфавита считаются чётными в смысле градуировки (2) из [1], как и индекс $\varnothing$. Индексы $\alpha, \beta, \ldots$ = 1,2,3,4 (а также вариант с чертой сверху) из начала алфавита нечётны. В определённых ниже формулами (4) $G(B)$-линейных координатах все индексы нагружаются чертой сверху, чтобы подчеркнуть преобразуемость соответствующих величин по представлениям группы Лоренца $L$. Пара $(B, B_c)$ вместе с покрытием $\{U_A\}$, $A\in\tau$, пространства $B$ и отображениями $\{\varphi_A\}$ называется *градуированным многообразием размерности (5,4) = (1,4,4)*. В терминах раздела 2 из [1] можем написать: $B = B^{m|n}$, $B_c = B_c^{m|n}$, где $m = 5$, $n = 4$. Топология пространства $B$, вообще говоря, неизвестна. Но в видимой части вселенной (и $B$) она совпадает с топологией максимально симметричного пространства (ср. [4, гл. 13, §3]). Предполагается, что существует хотя бы одна система координат $z^{\overline{\Pi}}$, в которой метрика над $B$ имеет вид

$$\eta = \left\|\eta_{\overline{\Pi}\overline{\Lambda}}\right\| = \mathrm{diag}\,(1, \eta_M, C), \qquad \eta^{-1} = \left\|\eta^{\overline{\Pi}\overline{\Lambda}}\right\| = \mathrm{diag}\,(1, \eta_M, -C^{-1}). \qquad (3)$$



©Березин В.Т.

Единица соответствует скалярному измерению градуированного пространства $B_c$. Диагональный $(4\times4)$-блок $\eta_M = \left\|\eta_{\bar\mu\bar\nu}\right\| = \eta_M^{-1} = \left\|\eta^{\bar\mu\bar\nu}\right\| = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ есть метрика Минковского для векторных измерений $B, B_c$. Лоренц-форминвариантная $(4\times4)$-матрица зарядового сопряжения $C = \left\|C_{\bar\alpha\bar\beta}\right\|$ отвечает спинорным (нечётным) измерениям $B$ и $B_c$. Она антисимметрична в обычном смысле, но одновременно симметрична в градуированном смысле. Знак минус в (3) обусловлен ковариантной модификацией определения обратной градуированной матрицы [1]. Определим группу $G(B)$, выражающую максимально возможное неполное аффинное расширение группы Лоренца $L$ в классе, определяемом градуировкой пространства $B$. Элементы $g \in G(B)$ зададим как преобразования в $B_c$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r'(b) = r' \\ x'(b) = (x'^{\bar\mu}) \\ \theta'(b) = (\theta'^{\bar\alpha}) \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r(b) = r \\ x(b) = (x^{\bar\mu}) \\ \theta(b) = (\theta^{\bar\alpha}) \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho & M & 0 & K \\ a & A & \Lambda & B \\ \varepsilon & 0 & 0 & S(\Lambda,P) \end{pmatrix} = \left\|g^i{}_j\right\|, \tag{4}$$

с $i,j \in \{\varnothing,\varnothing,\bar\mu,\bar\alpha\}$. $(4\times4)$-блок $\Lambda = \left\|\Lambda^{\bar\mu}{}_{\bar\nu}\right\|$ есть элемент общей группы Лоренца со всеми (четырьмя) связными компонентами;

$$S(\Lambda,P) = (-1)^{\forall} S(\Lambda)\exp(-Pi\gamma_5), \tag{4a}$$

где $S(\Lambda) = \left\|S(\Lambda)^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}\right\|$ --- матрица спинорного представления. Параметр $\forall = 0$ или 1 в LINAG подробно обсуждён в статье [1]. В экспоненциальной матрице фигурирует псевдоскалярная матрица Дирака $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left\|\gamma_5{}^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}\right\|$, $i = \sqrt{-1}$, и вещественный или комплексный параметр $P$. Другие блоки в (4) индексируются так: $\rho, M \in \mathbf{R}$, $a = (a^{\bar\mu})$, $\varepsilon = (\varepsilon^{\bar\alpha})$, $A = (A^{\bar\mu})$ (столбцы), $K = (K_{\bar\beta})$ (строка); $B = \left\|B^{\bar\mu}{}_{\bar\alpha}\right\|$. Доказательство того, что множество элементов $g$ из (4) образует группу, будет дано чуть позже. Верхние нулевые блоки в $g$ обеспечивают аффинность преобразований координат $z^{\bar\Pi} = (r,x,\theta) = z^{\bar\Pi}(b)$, которые необязательно совместимы с (3). Координаты $z'^{\bar\Pi} = (r',x',\theta') = z'^{\bar\Pi}(b)$ соответствуют той же самой точке $b \in B$, что и координаты $z^{\bar\Pi}$ (ясно, что в (4) речь идёт о разных системах координат, даже произвольных). Если координаты $z^{\bar\Pi}$ совместимы с (3), а элементы $g$ пробегают всю группу $G(B)$, то координаты $z'^{\bar\Pi}$ будем называть *G(B)-линейными.* Заметим, что метрика (3) задаётся не в любой ситуации, а лишь в связи с динамическими уравнениями движений физических систем (и тогда всегда существующий геометрический произвол исключается детерминизмом природы). Мы будем говорить, что динамические уравнения движений с метрикой (3) записаны в *инерциальной* системе координат. Класс $G(B)$-линейных координат шире класса инерциальных. Экспонента $\exp(-Pi\gamma_5)$ коммутирует с $S(\Lambda)$:

$$S(\Lambda)\exp(-Pi\gamma_5) = \exp(-Pi\gamma_5)S(\Lambda). \tag{4b}$$

Чтобы убедиться в этом, нужно лишь обратить внимание на свойство $\gamma^{\bar\mu}\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^{\bar\mu}$ матриц Дирака $(\bar\mu = 0,1,2,3)$ и на то, что каждый член выражения $S(\Lambda)$, представленного в виде ряда по степеням своих генераторов, содержит только чётное число матриц $\gamma = (\gamma^{\bar\mu}) = (\left\|(\gamma^{\bar\mu})^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}\right\|)$ в качестве сомножителей. Отсюда и из позиций нулевых блоков в (4) следует, что блочная структура элементов $g \in G(B)$ всегда остаётся форм-инвариантной при групповых операциях. Действительно, согласно правилам умножения градуированных матриц [1], при умножении элемента $g$ на элемент $g_1$ (блоки с индексом 1)

важно, что: (а) число и расположение нулевых блоков произведения не изменяется по сравнению с $g$, (б) структура блоков $\Lambda_{gg_1} = \Lambda\Lambda_1$ и

$$S(\Lambda_{gg_1}, P_{gg_1}) = (-1)^{\forall} S(\Lambda\Lambda_1)\exp[-(P + P_1)i\gamma_5] \tag{5a}$$

сохраняется. Свойство (б) нарушилось бы, если бы мы заменили в (4) хотя бы один из нулевых блоков во втором и четвёртом рядах на что-то другое. Поэтому аффинное расширение (4) группы Лоренца называется *максимально* возможным, хотя и неполным. Другие блоки произведения $gg_1$ имеют вид:

$$\rho_{gg_1} = \rho + M\rho_1 + (-1)^{\forall} K\varepsilon_1,\ M_{gg_1} = MM_1,\quad a_{gg_1} = a + A\rho_1 + \Lambda a_1 + (-1)^{\forall} B\varepsilon_1, \tag{5b}$$

$$\varepsilon_{gg_1} = \varepsilon + (-1)^{\forall} S(\Lambda, P)\varepsilon_1,\ A_{gg_1} = AM_1 + \Lambda A_1,\ K_{gg_1} = MK_1 + (-1)^{\forall} KS(\Lambda_1, P_1), \tag{5c}$$

$$B_{gg_1} = AK_1 + \Lambda B_1 + (-1)^{\forall} BS(\Lambda_1, P_1). \tag{5d}$$

Поскольку знак $(-1)^{\forall}$, $\forall = 0$ или 1, уже учтён согласно правилам из [1], выписанные произведения блоков рассматриваются как обычные произведения матриц. Свойства (а) и (б) произведения относятся также к элементу $g^{-1}$. Действительно, с помощью правил из [1] и одного из двух соотношений, $g^{-1}g = 1_{(6,4)}$ и $gg^{-1} = 1^{\mathrm{T}}_{(6,4)}$, где

$$1_{(6,4)} = \mathrm{diag}(1, 1_\eta) \quad \text{с} \quad 1_\eta = \mathrm{diag}\left(1, \left\|\delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}}\right\|, \left\|(-1)^{\forall}\delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}\right\|\right) = \mathrm{diag}(1_5, (-1)^{\forall} 1_4),$$

находим:

$$M_{g^{-1}} = \frac{1}{M},\quad \Lambda_{g^{-1}} = \Lambda^{-1},\quad S_{g^{-1}}(\cdot,\cdot) = S(\Lambda^{-1}, -P),\quad \varepsilon_{g^{-1}} = -S(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5)\varepsilon, \tag{6a}$$

$$A_{g^{-1}} = -\frac{1}{M}\Lambda^{-1}A,\qquad K_{g^{-1}} = -\frac{1}{M}KS(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5), \tag{6b}$$

$$B_{g^{-1}} = -\Lambda^{-1}AK_{g^{-1}} - \Lambda^{-1}BS(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5), \tag{6c}$$

$$\rho_{g^{-1}} = -\frac{\rho}{M} - (-1)^{\forall} K_{g^{-1}}\varepsilon,\quad a_{g^{-1}} = -\rho A_{g^{-1}} - \Lambda^{-1}a - (-1)^{\forall} B_{g^{-1}}\varepsilon. \tag{6d}$$

Градуированный определитель $\mathrm{Det}\, g$ выражается через обычные определители диагональных блоков:

$$\mathrm{Det}\ \Lambda = \pm 1,\ \det S(\Lambda) = \pm 1,\ \det\exp(-Pi\gamma_5) = \exp\mathrm{tr}(-Pi\gamma_5) = 1,$$

так как матрица $\gamma_5$ имеет нулевой след, $\mathrm{tr}\ \gamma_5 = 0$. Отсюда, согласно определению [1] градуированного определителя, $\mathrm{Det}\, g = \pm M$.

**2. Подгруппы максимального неполного аффинного расширения группы Лоренца.** Из (5c) и (6b) видно, что если в группе $G(B)$ выбрать множество элементов с нулевыми блоками типа $A$ и/или $K$, то оно образует подгруппу. Пусть $G_3(B)$ есть пересечение подгрупп $G_1(B)$ (с $A = 0$) и $G_2(B)$ (с $K = 0$). Во всех трёх подгруппах $G_i(B)$, $i = 1,2,3$, первые слагаемые в правых частях равенств (5d) и (6c) исчезают. Это обстоятельство позволяет сузить класс блоков $B$, получая таким образом новые подгруппы. Именно, в общем элементе (4) с $A = 0$ и/или $K = 0$ блок $B$ допускает форминвариантное представление вида

$$B = (-1)^{\forall} bS^{\mathrm{t}}(\Lambda, P)C\gamma\varepsilon = b[S(\Lambda)\exp(-Pi\gamma_5)]^{\mathrm{t}}C\gamma_5\varepsilon. \tag{7}$$

Это мы вскоре докажем. А пока пояснения. В каждой новой подгруппе параметр $b \in \mathbf{R}$ (или даже $\mathbf{C}$), так что по этому параметру мы получаем три семейства подгрупп $G_i(B;b)$. $C$ — матрица зарядового сопряжения, как и в (3), $\gamma$ — матрицы Дирака; $\varepsilon$ — блок из (4), так что в $g \in G_i(B;b)$ одни и те же элементы $\varepsilon^{\bar{\alpha}}$ появляются в двух блоках. Индекс t означает обычное транспонирование. [Не следует путать обозначение $B$ блока из (4) и (7) с таким же в символах типа $G_i(B)$, где $B$ означает базовое физическое пространство $G$-расслоений.]

**Теорема.** *Множество элементов* (4) *при условии* $A=0$ *и/или* $K=0$, *а также* (7) *образуют подгруппы* $G_i(B;b)$ $(i=1,2,3;\ b\in\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C})$, *подчинённые цепочкам включе-ний:* $G_{1\,or\,3}(B;b)\subset G_1(B)\subset G(B);\quad G_{2\,or\,3}(B;b)\subset G_2(B)\subset G(B).$

Доказательство. Нам потребуются формулы (5c), (6a) для блоков типа $\varepsilon$ и

$$B_{gg_1}=\Lambda B_1+BS(\Lambda_1)\exp(-P_1i\gamma_5),\qquad B_{g^{-1}}=-\Lambda^{-1}BS(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5) \tag{8}$$

вместо (5d) и (6c), соответственно. Рассмотрим сначала произведение $\Lambda B_1$ в (8). Здесь $\Lambda$ действует на векторный индекс матриц Дирака из (7) (при $B\to B_1$), так что согласно известным формулам

$$(\Lambda\gamma)^{\bar\mu}=\Lambda^{\bar\mu}_{\bar\nu}\gamma^{\bar\nu}=S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\bar\mu}S(\Lambda),\qquad S^{t}(\Lambda)CS(\Lambda)=C \tag{9}$$

находим:

$$\Lambda B_1=b[S(\Lambda_1)\exp(-P_1i\gamma_5)]^{\dagger}C(\Lambda\gamma)\varepsilon_1=b[S(\Lambda_1)\exp(-P_1i\gamma_5)]^{\dagger}C[S^{-1}(\Lambda)\gamma S(\Lambda)]\varepsilon_1=$$
$$=b[S(\Lambda_1)\exp(-P_1i\gamma_5)]^{t}[S^{t}(\Lambda)C\gamma\exp(Pi\gamma_5)][\exp(-Pi\gamma_5)S(\Lambda)\varepsilon_1], \tag{9a}$$

Учтём теперь коммутацию (4b) экспоненты и $S(\Lambda)$, и свойства

$$\gamma\exp(Pi\gamma_5)=\exp(-Pi\gamma_5)\gamma,\qquad C\gamma_5=\gamma_5^{t}C \tag{10}$$

матриц Дирака. Тогда для (9a) пишем продолжение

$$\Lambda B_1=b[S(\Lambda\Lambda_1)\exp(-(P+P_1)i\gamma_5)]^{\dagger}C\gamma[S(\Lambda)\exp(-Pi\gamma_5)\varepsilon_1]. \tag{11a}$$

Второе слагаемое в первой формуле из (8) принимает вид

$$b[S(\Lambda\Lambda_1)\exp(-(P+P_1)i\gamma_5)]^{\dagger}C\gamma\varepsilon. \tag{11b}$$

Объединяя два последних результата и учитывая (5c), в итоге находим

$$B_{gg_1}=b[S(\Lambda\Lambda_1)\exp(-(P+P_1)i\gamma_5)]^{t}C\gamma\varepsilon_{gg_1}, \tag{11}$$

что согласуется с (7) для элемента $gg_1$. Иными словами, в произведениях элементов из $G_i(B;b)$ вид формулы (7) остаётся форминвариантным. Нам осталось проверить это утверждение при обращении элементов из $G_i(B;b)$. Подставляя по-прежнему (7) во второе уравнение (8) и пользуясь формулами (9) и (10), находим подтверждение:

$$B_{g^{-1}}=-b\Lambda^{-1}C\gamma\varepsilon=-bC(\Lambda^{-1}\gamma)\varepsilon=-bCS^{-1}(\Lambda^{-1})\gamma S(\Lambda^{-1})\varepsilon=$$
$$=-bS^{t}(\Lambda^{-1})C\gamma\exp(-Pi\gamma_5)[S(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5)\varepsilon]=b[S(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5)]^{\dagger}C\gamma\varepsilon_{g^{-1}}. \tag{12}$$

**4. Условие форминвариантности метрики.** В матрице (4) вычеркнем первую строку и первый столбец. Остаток, (9×9)-матрицу, обозначим символом $\bar g\in G(B)/N$, т.е. $\bar g\in$ факторгруппе по нормальной группе $N$ с множеством элементов вида

$$n=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ \rho&1&0&0\\ a&0&1_4&0\\ \varepsilon&0&0&(-1)^{\nabla}\mathrm{I}_4\end{pmatrix}=\left\|n^{i}_{\ j}\right\|\in N. \tag{13}$$

Здесь $\mathrm{I}_4$ — единичная матрица с нечётными индексами [1]. Для простоты введём обозначения $\bar G(B)=G(B)/N$, $\bar G_i(B,b)=G_i(B,b)/N$. Эти группы допускают дальнейший конструктивный анализ. В терминах LINAG и в $G(B)$-линейных координатах (4) метрика (3) принимает вид

$$\eta'_{\bar\Delta\bar\Gamma}=(-1)^{\nabla(\bar\Pi+\bar\Lambda)+\bar\Delta\bar\Pi}\eta_{\bar\Pi\bar\Lambda}(\bar g^{-1})^{\bar\Lambda}_{\ \bar\Delta}(\bar g^{-1})^{\bar\Pi}_{\ \bar\Gamma}. \tag{14}$$

В общем случае $\eta'_{\bar\Delta\bar\Gamma}\neq\eta_{\bar\Delta\bar\Gamma}$. Поэтому, как уже отмечалось, класс $G(B)$-линейных координат шире множества тех $G(B)$-линейных координат (назовём их *ортолинейными)*, в которых метрика остаётся

форминвариантной: $\eta'_{\bar{\Delta}\bar{\Gamma}} = \eta_{\bar{\Delta}\bar{\Gamma}}$. Подгруппа $\bar{G}(B,\eta)$ группы $\bar{G}(B)$, относительно которой метрика остаётся форминвариантной, есть множество решений уравнений

$$\eta_{\bar{\Delta}\bar{\Gamma}} = (-1)^{\bar{\nabla}(\bar{\Pi}+\bar{\Lambda})+\bar{\Delta}\bar{\Pi}} \eta_{\bar{\Pi}\bar{\Lambda}} (\bar{g}^{-1})^{\bar{\Lambda}}{}_{\bar{\Delta}} (\bar{g}^{-1})^{\bar{\Pi}}{}_{\bar{\Gamma}}. \tag{15}$$

относительно $\bar{g}^{\bar{\Lambda}}{}_{\bar{\Delta}}$ или, что равносильно, $(\bar{g}^{-1})^{\bar{\Lambda}}{}_{\bar{\Delta}}$. Эти матрицы связаны соотношениями $\bar{g}\bar{g}^{-1} = 1^{T}_{\eta}$, $\bar{g}^{-1}\bar{g} = 1_{\eta}$. Мы не станем здесь искать все решения уравнений (15). Вместо этого попытаемся явно указать подгруппу, совместимую с (15).

Рассмотрим подгруппу $G_0(B)$ группы $G(B)$ (а также подгрупп $G_i(B)$ и $G_i(B;b)$, $i = 1,2,3$) с элементами

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & \Lambda & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & (-1)^{\nabla} S(\Lambda)\exp(-Pi\gamma_5) \end{pmatrix} \in G_0(B). \tag{16}$$

Обратная матрица легко вычисляется по общим формулам (6). Выясним, будет ли факторгруппа $\bar{G}_0(B) = G_0(B)/N$ подмножеством решений уравнений (15). Для этого нужно лишь проверить в (15) единственно нетривиальное равенство

$$C = (-1)^{2\nabla+1}[CS(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5)]^{t} S(\Lambda^{-1})\exp(Pi\gamma_5) \tag{17}$$

для блоков. Учитывая коммутацию (4b) экспоненты и $S(\Lambda)$, а также свойства $C^{t} = -C$ и $CC^{-1} = \mathrm{I}_4^{\mathrm{T}} = \left\| \delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} \right\| = \left\| -\delta^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} \right\|$, соотношение (17) может быть переписано в виде

$$C = S^{t}(\Lambda^{-1})C\exp(-PiC^{-1}\gamma_5^{t}C)\exp(Pi\gamma_5)S(\Lambda^{-1}). \tag{18}$$

Это равенство принимает вид тождества $C = C$ в силу формул (4b), (9) и (10). Поэтому группа $G_0(B)$ является подгруппой группы движений $G(B,\eta)$. У нас все группы и подгруппы заданы явно в виде множеств матриц. По стандартной схеме можно явно найти все генераторы, (анти-)коммутационные соотношения для них и структурные константы.

**5. Контуры *B*-модели.** Читатель, вероятно, желает понять, с какими конкретно физическими явлениями связано фундаментальное представление (4) группы $G(B)$. Это представление реализует, что важно, *базу B* расслоений, с которыми ассоциируется динамика физических систем. Однако и в структуре расслоений, и в динамике акценты смещаются (но не переключаются полностью) от группы $G(B)$ к структурной группе $G$ (см. (1)). Состояния известных элементарных частиц преобразуются по представлениям группы $G$ таким образом, что одни и те же фермионные представления реализуются трижды. Этот факт отображён в таблице I. В теории исходим из того естественного требования, что интеграл действия $A$ не *должен* автоматически обращаться в нуль, если лагранжиан $L(x)$ не зависит от нечётных аргументов $\theta$, — условие, реализуемое при игнорировании градуировки в (2) и (4). Это требование мы назовём *интегральным принципом соответствия (с градуированными аргументами)*. Будем использовать грассманову алгебру **AG**, образующими элементами в которой являются решения трёх уравнений: $x^2 = 1$, $x^2 = -1$ и $x^2 = 0$. Первые два уравнения имеют линейно независимые решения $x = 1$ и $x = i = \sqrt{-1}$. Третье уравнение допускает счётное множество линейно независимых решений $x = \iota_n$, $n \in \mathbf{N}$, которые широко используются при описании фермионных состояний в теории поля ещё до процедуры квантования. В качестве *пробного* варианта, для задания координат (2) пространства $B$ будем использовать наименьшую нетривиальную числовую алгебру **AG** с двумя независимыми нечётными образующими: $x = \iota$ и $x = \iota'$ (см. таблицу II).

**Таблица I. Известные элементарные фермионы.**

| $GL(B)$ - singlets, $L$ - spinors | I generation | II generation | III generation |
|---|---|---|---|
| $SU(2)$ - singlets, $SU(3)$ - singlets | $e_R$ right electron | $\mu_R$ right muon | $\tau_R$ right $\tau$ - lepton |
| $SU(2)$ - doublets, $SU(3)$ - singlets | $L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ left electronic leptons | $L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$ left muonic leptons | $L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$ left $\tau$ - leptons |
| $SU(2)$ - singlets, $SU(3)$ - triplets | $u_R$, $d_R$ right $(u,d)$ - quarks | $c_R$, $s_R$ right $(c,s)$ - quarks | $t_R$, $b_R$ right $(t,b)$ - quarks |
| $SU(2)$ - doublets, $SU(3)$ - triplets | $Q_{ud} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ left $(u,d)$ - quarks | $Q_{cs} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$ left $(c,s)$ - quarks | $Q_{tb} = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$ left $(t,b)$ - quarks |

Для данного $\alpha$ (= 1,2,3,4) одномерное множество координат $\{\theta^\alpha\}$, соответствующее одному из четырёх измерений нечётного подпространства $B^{\mathrm{od}} \subset B$, может быть параметризовано с помощью вещественного параметра $t^\alpha \in \mathbf{R}$, так что имеем

$$\theta^\alpha(t^\alpha) = \theta_1^\alpha(t^\alpha)\, \imath + \theta_2^\alpha(t^\alpha)\, \imath' \tag{19}$$

Таким образом, четыре измерения $B^{\mathrm{od}}$ параметризуются точками четырёх траекторий в двумерном подпространстве $\mathbf{R}(\imath,\imath') = (\mathbf{R}\imath, \mathbf{R}\imath') \subset \mathbf{AG}$ или $\mathbf{C}(\imath,\imath') = (\mathbf{C}\imath, \mathbf{C}\imath') \subset \mathbf{AG}$, в котором принимают значения координаты $\theta^\alpha$. Подчеркнём при этом, что 4-мерие $B^{\mathrm{od}}$ не сводится к двумерию; речь идёт о *числовом* пространстве значений *координат* без изменения количества базисных векторов в $B_c^{\mathrm{od}}$. Выбор траекторий соответствует выбору системы координат в $B^{\mathrm{od}} \subset B$. Сечения $\psi(z)$ $G$-расслоений, соответствующих левой колонке в таблице I, зависят от вещественных параметров $t^\alpha$ только через суммы (19). Следовательно, $\psi(z) = \psi(x,\theta) \equiv \Psi(x, t^1, \ldots, t^4)$ есть **AG** - значная функция.

**Таблица II. Умножение образующих элементов в AG.**

| **AG** | 1 | $i$ | $\imath$ | $\imath'$ | $\imath_{ev}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $i$ | $\imath$ | $\imath'$ | $\imath_{ev}$ |
| $i$ | $i$ | $-1$ | $i\cdot\imath$ | $i\cdot\imath'$ | $i\cdot\imath_{ev}$ |
| $\imath$ | $\imath$ | $i\cdot\imath$ | 0 | $\imath_{ev}$ | 0 |
| $\imath'$ | $\imath'$ | $i\cdot\imath'$ | $-\imath_{ev}$ | 0 | 0 |
| $\imath_{ev}$ | $\imath_{ev}$ | $i\cdot\imath_{ev}$ | 0 | 0 | 0 |

Интегрирование по нечётным переменным $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^4)$ мы отождествляем, по определению, с римановым интегрированием по вещественным переменным $t^\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha = \overline{1,4}$. Данная процедура совместима с интегральным принципом соответствия. Это — наилучшее определение из всех возможных [3]. Разложение $\psi(z)$ в ряд Тейлора по степеням $\theta^\alpha$ и, понятно, по степеням $\imath$ и $\imath'$ даст результат

$$\psi(z) = \psi_{\mathrm{I}}^{\mathrm{free}}(x) + \psi_{\mathrm{II}}(x,t)\, \imath + \psi_{\mathrm{III}}(x,t)\, \imath' + \psi_{\mathrm{IV}}(x,t)\, \imath_{ev}, \tag{20}$$

где $\imath_{ev} = \imath \cdot \imath'$. Римские индексы здесь означают нумерацию *поколений* (семейств) элементарных частиц. Первое и четвёртое поколения, как имеющие одинаковые свойства чётности, можно, вероятно, объединить в одно, от которого второе и третье поколения отличаются принципиально. Очевидно, эта неравноценность лежит в основе наблюдаемой в природе асимметрии в реализации всех трёх поколений: наш мир состоит в основном из частиц первого поколения. В принципе, не исключено, что в будущем четвёртое поколение может быть обнаружено как самостоятельное.

Что касается наблюдаемого различия масс элементарных частиц, то нужно иметь в виду следующее: наряду с градуированным аналогом механизма Хиггса (который легко укладывается в групповой анализ бозе- и ферми-систем) существует конкурирующий механизм, связанный с разной зависимостью функций ряда Тейлора от скалярного аргумента $r = z^{\varnothing}$ из (2). Заметим, что расширение таблицы II привело бы к увеличению числа поколений элементарных частиц. Выбор — через наблюдения. О деталях *B*-модели, в частности, о групповом анализе, дифференциальной связности и проблемах объединения взаимодействий элементарных частиц, см. [3].

**РЕЗЮМЕ**

Знайдено нові градуйовані групи, що є неповними аффіинними розширеннями групи Лоренца над зовнішньою алгеброю (кільцем) Грассмана. Розширення задаються як дії в 9-мірному градуйованому базовому фізичному просторі, що грає важливу роль у *B-моделі* об'єднання елементарних часток і фундаментальних взаємодій. Групові властивості погоджені з новими правилами вирахування в градуйованій лінійній алгебрі. Дається належне пояснення існування трьох поколінь елементарних часток.

**SUMMARY**

New graded groups are found being incomplete affine extensions of the Lorentz group over the exterior Grassmann's algebra (ring). The extensions are specified as actions in the 9-dimensional base physical space playing the important role in the *B*-model union of elementary particles and fundamental interactions. The group properties of the extensions are consistent with the new rules in graded linear algebra. The proper explanation is given for the existence of three elementary particle generations (families).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Березин В.Т. Ковариантные знаковые модификации в градуированном исчислении. // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2003. – Вип.1. – С.40-47.
2. Березин В.Т. Геометрическая структура базы и скрученность градуированных расслоений, используемых в моделировании гравитации и элементарных частиц. // ТМФ. – 1996. – Т.108. – №1. – С.16-35.
3. Berezin V.T. Mathematical and Physical Principles of the B-Model Union of Elementary Particles and Fundamental Interactions: Free Fields. // УФЖ. – 1999. – Т.44. – №10. – С.1185-1197.
4. Вейнберг С. Гравитация и космология. – М: Мир, 1975. – 295 с.

*Надійшла до редакції 21.01.2002 р.*

УДК 539.2.535

# ГИРОТРОПИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КРИСТАЛЛОВ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

*С.А.Федоров, В.В.Румянцев*
*Донецкий физико-технический институт НАН Украины,*

**Введение**

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных теоретическому изучению гиротропных свойств (эффектов пространственной дисперсии) молекулярных кристаллов (см. [1-13] и все приведенные в них ссылки). Основное внимание в этих работах уделено разработке и развитию микроскопического описания гиротропии, выявлению различных ее механизмов, анализу их связи с микропараметрами среды и частотной дисперсии. Такие исследования дают возможность использовать явление гиротропии в качестве тонкого экспериментального метода изучения структурных особенностей кристаллических сред. Они позволяют также с высокой точностью проводить поляризационные измерения спектральных характеристик нелинейных оптических процессов в пространственно-диспергирующих молекулярных кристаллах. Вместе с тем, хорошо известно, что для кристаллов определенных классов симметрии некоторые из эффектов пространственной дисперсии (например, оптическая активность) возможны лишь при наличии внешних полей или механических напряжений (т. н. индуцированная гиротропия), [14]. Поэтому, наряду с [1-13], представляет значительный интерес микроскопическое рассмотрение гиротропных свойств молекулярных кристаллов с учетом указанных факторов. Актуальность подобных исследований тем более очевидна, поскольку гиротропия, как чувствительный индикатор внешних воздействий, часто является единственно возможным способом определения целого ряда стерео- и кристаллохимических параметров рассматриваемых кристаллов [2].

Микроскопическое рассмотрение всевозможных оптических эффектов в системах, подверженных внешним воздействиям, предполагает, очевидно, известной зависимость характеристик нормальных электромагнитных волн в кристалле от величины этих воздействий. В свою очередь, нахождение такой зависимости требует решения вопросов, связанных с перестройкой энергетического спектра рассматриваемой среды и последующим расчетом оптических материальных тензоров, определяющих указанные характеристики. В настоящей работе эти вопросы решены для однородно деформированных (внешними механическими напряжениями) молекулярных кристаллов с использованием экситонной модели. В рамках этой модели получено микроскопическое выражение для поперечного тензора диэлектрической проницаемости и с помощью последнего найдена важнейшая в теории гиротропии количественная характеристика - вращательная способность $\rho(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ кристалла с произвольным числом подрешеток (здесь $\hat{\varepsilon}$ - тензор деформаций, ω - частота света, $\vec{s}=\vec{k}/k$, $\vec{k}$ .- волновой вектор).

Полученные в работе результаты позволяют провести детальный анализ частотной дисперсии вращательной способности для всех возможных типов однородных деформаций. Ниже такой анализ выполнен в случае одноосно деформированных кристаллических систем с примитивной решеткой.

**Вращательная способность однородно деформированных молекулярных кристаллов**

При известном характере деформаций гамильтониан молекулярных кристаллов (как следует из [1,15]) имеет вид:

$$\hat{H}=\sum_{\vec{n}\alpha}\hat{H}_{\vec{n}\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\alpha,\vec{m}\beta}{}'\hat{V}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\ . \qquad (1)$$

В (1) $\vec{n},\vec{m}$ - целочисленные вектора решетки, $\alpha,\beta$ - номера подрешеток, $H_{\vec{n}\alpha}$ -гамильтониан изолированной молекулы $\vec{n}\alpha$, $V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})$ - зависящий от тензора деформаций $\hat{\varepsilon}$ оператор кулоновского взаимодействия молекул $\vec{n}\alpha$ и $\vec{m}\beta$ (явный вид $V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})$ в диполь-дипольном приближении приведен в Приложении); штрих в знаке суммы (1) означает, что в сумме отсутствует слагаемое с номером $\vec{n}\alpha$ равным $\vec{m}\beta$. Микроскопический расчет оптических характеристик, отвечающих экситонной области спектра, предполагает известным явный вид соответствующего гамильтониана $H^{(ex)}(\hat{\varepsilon})$. Для молекулярных кристаллов выделение $H^{(ex)}(\hat{\varepsilon})$ из (1) удобно осуществить, используя поэтапный метод приближенного вторичного квантования [16]. Согласно последнему, необходимые для выполнения указанной процедуры волновые функции $\varphi^{f}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon})$ молекул в кристаллическом поле удовлетворяют системе

©Федоров С.А., Румянцев В.В.

самосогласованных интегро-дифференциальных уравнений, вытекающей из решения соответствующей вариационной задачи. Легко показать (пользуясь результатами [11, 12, 16]), что в рассматриваемом случае вышеназванная система уравнений и экситонный гамильтониан имеют вид соответственно:

$$\left[\hat{H}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon})+\hat{W}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon})\right]\varphi^{f}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon})=\varepsilon_{f\alpha}(\hat{\varepsilon})\varphi^{f}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon}), \qquad (2)$$

где $\hat{W}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon})=\sum_{\vec{m}\beta}\left\langle\varphi^{0}_{\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\middle|\hat{V}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\middle|\varphi^{0}_{\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\right\rangle$, а

$$H^{(ex)}(\hat{\varepsilon})=\sum_{\vec{n}\alpha f}E_{f\alpha}(\hat{\varepsilon})B^{+}_{\vec{n}\alpha f}B_{\vec{n}\alpha f}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\alpha f,\vec{m}\beta g}V^{fg}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})(B^{+}_{\vec{n}\alpha f}+B_{\vec{n}\alpha f})(B^{+}_{\vec{m}\beta g}+B_{\vec{m}\beta g})=$$
$$=\sum_{\vec{k}}H^{(ex)}(\hat{\varepsilon},\vec{k}), \qquad (3)$$

Причем $V^{fg}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})=\left\langle\varphi^{f}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon})\varphi^{0}_{\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\middle|\hat{V}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\middle|\varphi^{0}_{\vec{n}\alpha}\varphi^{g}_{\vec{m}\beta}\right\rangle$, $E_{f\alpha}(\hat{\varepsilon})=\varepsilon_{f\alpha}(\hat{\varepsilon})-\varepsilon_{0\alpha}(\hat{\varepsilon})$,

$B^{+}_{\vec{n}\alpha f}, B_{\vec{n}\alpha f}$ - Бозе-операторы рождения и уничтожения молекулярных возбуждений.

Гамильтониан (3) определяет состояния кулоновских экситонов, необходимые для вычисления поперечного тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\chi}^{\perp}(\hat{\varepsilon},\vec{k},\omega)$, а с его помощью и всех основных оптических характеристик, включая искомую вращательную способность деформированной среды. Так как $H^{(ex)}(\hat{\varepsilon}\neq 0)$ и $H^{(ex)}(\hat{\varepsilon}=0)$ по форме совпадают (в силу сохранения трансляционной инвариантности кристалла при однородных деформациях), то тензор $\hat{\chi}^{\perp}(\hat{\varepsilon},\vec{k},\omega)$ можно найти с помощью формул (3), (5)-(7) работы [5] путем замены: $\varphi^{f}_{\vec{n}\alpha}\to\varphi^{f}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon}), \varepsilon^{f}_{\vec{n}\alpha}\to\varepsilon^{f}_{\vec{n}\alpha}(\hat{\varepsilon}), v_0\to v_0(1+Sp\hat{\varepsilon})$, где $v_0$ - объем элементарной ячейки свободного кристалла. В результате выполнения этой простой процедуры для зависящей от $k$ части $\hat{\chi}^{\perp}(\hat{\varepsilon},\vec{k},\omega)$ и $\rho(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=-\frac{i\omega^2}{4c^2}\left[\partial\chi^{\perp}_{il}(\hat{\varepsilon},\vec{k},\omega)/\partial\left|\vec{k}\right|\right]_{\left|\vec{k}\right|=0}e_{ill}S^{l}$ (по дважды повторяющимся декартовым индексам подразумевается суммирование, $e_{ill}$ - полностью антисимметричный единичный тензор), соответственно получим:

$$\Delta\chi^{\perp}_{il}(\hat{\varepsilon},\vec{k},\omega)=\frac{8\pi}{v_0(1+Sp\hat{\varepsilon})\omega^2}\sum_{\mu}\frac{E_{\mu}(\hat{\varepsilon},\vec{k})\left\langle\psi_0(\hat{\varepsilon})\middle|I^{i}(-\vec{k})\middle|\psi_{\vec{k}\mu}(\hat{\varepsilon})\right\rangle\left\langle\psi_{\vec{k}\mu}(\hat{\varepsilon})\middle|I^{l}(\vec{k})\middle|\psi_0(\hat{\varepsilon})\right\rangle}{E^2_{\mu}(\vec{k},\hat{\varepsilon})-\hbar^2\omega^2}, \qquad (4)$$

$$\rho(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=\frac{-2\pi i\omega^2 e_{ilt}S^{t}}{c^2v_0(1+Sp\hat{\varepsilon})}\left\{2\hbar\sum_{\mu}\frac{\left\langle\psi_0(\hat{\varepsilon})\middle|P^{i}\middle|\psi_{\vec{s}\mu}(\hat{\varepsilon})\right\rangle\left\langle\psi_{\vec{s}\mu}(\hat{\varepsilon})\middle|S^{j}Q^{jl}\middle|\psi_0(\hat{\varepsilon})\right\rangle}{E^2_{\mu}(\hat{\varepsilon},\vec{s})-\hbar^2\omega^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\mu_1\mu_2}\frac{E_{\mu_1}(\hat{\varepsilon},\vec{s})E_{\mu_2}(\hat{\varepsilon},\vec{s})\left\langle\psi_0(\hat{\varepsilon})\middle|P^{i}\middle|\psi_{\vec{s}\mu}(\hat{\varepsilon})\right\rangle\left\langle\psi_{\vec{s}\mu}(\hat{\varepsilon})\middle|P^{l}\middle|\psi_0(\hat{\varepsilon})\right\rangle\left[i\partial H^{(ex)^2}(\hat{\varepsilon},\vec{k})/\partial\left|\vec{k}\right|\right]_{\left|\vec{k}\right|=0}}{\left[E^2_{\mu_1}(\hat{\varepsilon},\vec{s})-\hbar^2\omega^2\right]\left[E^2_{\mu_2}(\hat{\varepsilon},\vec{s})-\hbar^2\omega^2\right]}\right\}. \qquad (5)$$

Здесь $\psi_{\vec{k}\mu}(\hat{\varepsilon})$ и $E_{\mu}(\hat{\varepsilon},\vec{k})$ - волновая функция и энергия экситона, $I(k)$ и $P$ соответственно операторы плотности тока и дипольного момента кристалла, смысл остальных обозначений в (4), (5) - тот же, что и в [5, 6].

Из формул (2)-(5) следует, что в общем виде зависимость вращательной способности от $\hat{\varepsilon}$ не представима в аналитическом виде и формально вопрос о нахождении этой зависимости для произвольных деформаций может решаться в каждом конкретном случае с учетом специфики рассматриваемой системы с использованием наиболее подходящей аппроксимации (с подгоночными параметрами) $V^{fg}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})$. В то же время, очевидно, что при достаточно малых деформациях кристалла (какими являются упругие деформации, не приводящие к необратимым изменениям его структуры) вращательная способность с достаточно хорошей точностью может быть записана в линейном по $\hat{\varepsilon}$ приближении при использовании стандартных формул теории возмущений (см. Приложение). В этом случае соответствующее (приближенное) микроскопическое выражение для $\rho(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\cong\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)+\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ имеет универсальный вид для каждого класса кристаллических систем с одинаковым числом подреше-

ток. При этом $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, как видно из (5), представляется суммой слагаемых, математическая структура каждого из которых отражает соответствующий механизм индуцированной гиротропии.

Из сказанного следует, что наиболее важный в экспериментальных исследованиях анализ частотной дисперсии вращательной способности сводится к анализу каждого из этих слагаемых и проще всего осуществляется для систем с примитивной решеткой (для которых второе слагаемое в (5) равно нулю [6]). В последнем случае функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ записывается следующим образом:

$$\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega) = -Sp\hat{\varepsilon}\rho^{(0)}(\vec{s},\omega) + \rho_M^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega) + \rho_C^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega) \qquad (6)$$

Первое слагаемое в (6) обусловлено изменением постоянных решетки при деформации кристалла и для оптически неактивных свободных сред оно равно нулю для ***s***, направленном вдоль оптической оси. Функция $\rho_M^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ связана с разложением по $\hat{\varepsilon}$ молекулярных характеристик, она определяется, в основном, гиротропией молекул. Третье слагаемое в (6) обусловлено зависимостью от $\hat{\varepsilon}$ экситонных характеристик - в модели ориентированного газа оно также равно нулю. Более детальный анализ $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ требует конкретизации характера внешних воздействий, ниже такой анализ проведен для систем, подверженных одноосному (вдоль единичного вектора ***q***) сжатию. В этом случае тензор деформации имеет вид $\varepsilon_{il} = \sigma s_{ilpt} q_p q_t$, где $\sigma$ - напряжение, $s_{ilpt}$ - тензор коэффициентов упругой податливости [14].

*Дисперсия индуцированной гиротропии одноосноде формированных молекулярных кристаллов*

Наибольший интерес в экспериментальных исследованиях индуцированной гиротропии представляет ее поведение вблизи экситонных резонансов. Из формул (5), (6) следует, что в данной области частот для произвольных ***s*** и ***q*** функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ приближенно представима в виде линейной комбинации слагаемых Друде $\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ и Ломмеля $\rho_L^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, пропорциональных соответственно $(E_\mu^2(\vec{s}) - \hbar^2\omega^2)^{-1}$ и $(E_\mu^2(\vec{s}) - \hbar^2\omega^2)^{-2}$. Легко показать, что первый тип слагаемых (при указанных ***s*** и ***q***) обусловлен всеми тремя функциями, входящими в (6), в то время, как второй тип – возникает только из $\rho_C^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$. Для $H^{(ex)}(\hat{\varepsilon},\vec{s})$, обладающего определенной симметрией, вид функции $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ существенно зависит от ***q*** и при определенных его значениях (как будет видно из конкретных примеров) $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ может обращаться в нуль. В этом случае выявление микроскопической структуры $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ требует теоретико-группового анализа входящих в (5) матричных элементов. Очевидно, что наибольшую актуальность такой анализ имеет для тех кристаллических классов, симметрия которых допускает существование индуцированной (механическими напряжениями) оптической активности. Как показано в [2-4], *такими кристаллическими классами являются классы симметрии* $C_{3v}$, $C_{4v}$, $C_{6v}$, $C_{3h}$, $D_{3h}$, $T_d$. Ниже для каждой из перечисленных групп выявлены симметрийные условия обращения в нуль функции $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ и детально исследован вклад $\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)$, $\rho_M^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ и $\rho_C^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ в слагаемые Друде и Ломмеля.

1. Группа $C_{3v}$

1.1. Вектор ***s*** направлен вдоль оси третьего порядка.

В этом случае $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ обращается в нуль при: 1) $\vec{q}\|\vec{s}$, 2) $\vec{q}$ перпендикулярном одной из плоскостей симметрии, 3) $\vec{q}$ перпендикулярном $\vec{s}$ и лежащем в одной из трех плоскостей симметрии. В случае произвольных $\vec{q}$ для вырожденных экситонных энергий функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega) \approx \rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega) + \rho_L^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, а для энергий всех остальных типов симметрий $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega) \approx \rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$. При этом вклад в $\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ дают как $\rho_L^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, так и $\rho_C^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

1.2. Вектор ***s*** расположен в одной из трех плоскостей симметрии ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

Для таких ***s*** $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ равна нулю при тех же ***q***, что и в предыдущем случае. Для произвольных ***q*** эта функция всегда описывается слагаемыми лишь типа Друде.

1.3. Вектор ***s*** перпендикулярен одной из трех плоскостей симметрии.

Этот случай аналогичен рассмотренному в п.п. 1.2.

2. Группа $C_{4v}$

2.1. Вектор *s* направлен вдоль оси четвертого порядка ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

При таком *s* $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=0$ для любых *q*. Во втором порядке по $\hat{\varepsilon}$ $\rho(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\neq 0$ в случае деформаций вдоль произвольных направлений.

2.2. Вектор *s* перпендикулярен одной из плоскостей симметрии ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

Функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=0$ при $\vec{q}\perp\vec{s}$. Для произвольных *q* $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, причем вклад $\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ обусловлен как $\rho_M^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, так и $\rho_C^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$.

3. Группа $C_{6v}$

3.1. Вектор *s* направлен вдоль оси шестого порядка ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

Функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ равна нулю при 1) $\vec{q}\|\vec{s}$, 2) $\vec{q}$ перпендикулярном одной из плоскостей симметрии, 3) $\vec{q}$ лежащем в одной из шести плоскостей симметрии. Для произвольных *q* в случае вырожденных экситонных состояний $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)+\rho_L^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, и $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ - во всех остальных случаях.

3.2. Вектор *s* перпендикулярен одной из плоскостей симметрии ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

Функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ равна нулю при тех же *q*, что и в пп.3.1. Для произвольных направлений оси сжатия всегда $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$.

4. Группа $C_{3h}$

4.1. Вектор *s* направлен вдоль оси третьего порядка ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

В этом случае $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=0$ при $\vec{q}\perp\vec{s}$. Для произвольных *q* в случае дипольно-активных (комплексно-сопряженных) экситонных состояний, которым соответствуют одинаковые энергии, $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)+\rho_L^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, а во всех остальных случаях $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$.

4.2. Вектор *s* расположен в плоскости симметрии ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

Функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ равна нулю при тех же *q*, что и в пп.4.1. Для произвольных *q* всегда $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$.

5. Группа $D_{3h}$

5.1. Вектор *s* направлен вдоль оси третьего порядка ($\rho^{(0)}(\vec{s},\omega)=0$).

В этом случае $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=0$ при 1) $\vec{q}\perp\vec{s}$ и 2) *q*, лежащем в любой из трех вертикальных плоскостей симметрии. Для произвольных *q* в случае вырожденных экситонных состояний $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)+\rho_L^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$, и $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ - в любом другом случае.

5.2. Вектор *s* направлен вдоль одной из трех осей симметрии второго порядка

Функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ в этом случае равна нулю при тех же *q*, что и в пп.5.1, однако вблизи экситонных резонансов всегда апроксимируется слагаемыми типа Друде.

5.3. Вектор *s* расположен в любой из трех вертикальных плоскостей симметрии

В этом случае функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ равна нулю при $\vec{q}\perp\vec{s}$. Для произвольных *q* $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$.

5.4. Вектор *s* расположен в горизонтальной плоскости симметрии.

Функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$ в этом случае равна нулю при тех же *q*, что и в пп.5.1. Для любых других *q* $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)\approx\rho_D^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)$.

6. Группа $T_d$

Для любых $s$ и $q$ функция $\rho^{(1)}(\hat{\varepsilon},\vec{s},\omega)=0$. Во втором порядке по $\hat{\varepsilon}$ вращательная способность отлична от нуля для произвольных $q$.

**Заключение**

В работе представлен микроскопический анализ гиротропии молекулярного кристалла, индуцированной одноосной деформацией. Для иных типов однородной деформации тензор $\hat{\varepsilon}$ имеет отличный от приведенного выше вид и, следовательно характер частотной дисперсии вращательной способности отличается от рассмотренного случая. Тем не менее, разработанная методика позволяет осуществить микроскопический анализ гиротропии молекулярных кристаллов в экситонной области спектра и для остальных типов однородной деформации: всестороннего сжатия и сдвигового напряжения. Способ экспериментальной проверки слагаемых Друде и Ломмеля описан в работе [6], полезной в поиске подходов экспериментального изучения индуцированной однородной деформацией оптической активности кристаллов является также работа [17].

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

Из [1, 15] следует, что оператор кулоновского взаимодействия молекулы $\vec{n}\alpha$ с молекулой $\vec{m}\beta$ в однородно деформированном кристалле имеет следующий вид:

$$V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})=\frac{(\vec{P}_{\vec{n}\alpha}\vec{P}_{\vec{m}\beta})\left|\vec{r}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\right|^2-3(\vec{P}_{\vec{n}\alpha}\vec{r}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon}))(\vec{P}_{\vec{m}\beta}\vec{r}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon}))}{\left|\vec{r}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})\right|^5}, \qquad (\text{П.1})$$

$$\vec{r}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})=\vec{r}^{(0)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}+\hat{\varepsilon}\vec{r}^{(0)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}.$$

В (П.1) $\vec{P}_{\vec{n}\alpha}$ - оператор дипольного момента молекулы $\vec{n}\alpha$, $\vec{r}^{(0)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}$ - радиус-вектор, соединяющий узлы решетки $\vec{n}\alpha$ и $\vec{m}\beta$ свободного кристалла. В линейном по $\hat{\varepsilon}$ приближении

$$V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon})=V_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(0)+P^i_{\vec{n}\alpha}P^l_{\vec{m}\beta}\left[-3\frac{\delta_{il}r^{(0)t}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}+\delta_{it}r^{(0)l}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}+\delta_{lt}r^{(0)i}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}}{\left|\vec{r}^{(0)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}\right|^5}+\right.$$

$$\left.+15\frac{r^{(0)i}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}r^{(0)l}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}r^{(0)t}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}}{\left|\vec{r}^{(0)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}\right|^7}\right]r^{(0)p}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}\varepsilon_{tp}\equiv V^{(0)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}+V^{(1)}_{\vec{n}\alpha\vec{m}\beta}(\hat{\varepsilon}). \qquad (\text{П.2})$$

Равенство (П.2) может быть использовано для расчета молекулярных волновых функций и соответствующих энергий в линейном по $\hat{\varepsilon}$ приближении с помощью теории возмущений. Для этого волновые функции $\varphi^f_{n\alpha}(\hat{\varepsilon})$ представим в виде разложения по молекулярным волновым функциям $\varphi^f_{n\alpha}$, соответствующих свободному кристаллу:

$$\varphi^f_{n\alpha}(\hat{\varepsilon})=\sum_g C_{fg}(\hat{\varepsilon})\varphi^g_{n\alpha}. \qquad (\text{П.3})$$

После подстановки формул (П.2) и (П.3) в равенство (2) и выделения линейных по $\hat{\varepsilon}$ слагаемых получим для коэффициентов $C^{(1)}_{fg}(\hat{\varepsilon})$, представляющих первый порядок теории возмущений, следующее выражение:

$$C^{(1)}_{f(\alpha)g(\alpha)}(\hat{\varepsilon})=\frac{1}{E_{f(\alpha)}-E_{g(\alpha)}}\sum_{m\beta}\left[\left\langle\varphi^{g(\alpha)}_{n\alpha}\varphi^{(0)}_{m\beta}\left|V^{(1)}_{n\alpha m\beta}\right|\varphi^{f(\alpha)}_{n\alpha}\varphi^{(0)}_{m\beta}\right\rangle+\right.$$

$$\left.+2\sum_{h(\beta)}C^{(1)}_{0h(\beta)}\left\langle\varphi^{g(\alpha)}_{n\alpha}\varphi^{(0)}_{m\beta}\left|V^{(0)}_{n\alpha m\beta}\right|\varphi^{f(\alpha)}_{n\alpha}\varphi^{h(\beta)}_{m\beta}\right\rangle\right], \qquad (\text{П.4})$$

$$C^{(1)}_{0h(\alpha)}=\sum_{g(\alpha)}\left[\hat{A}^{-1}\right]_{h(\alpha)g(\alpha)}B_{g(\alpha)}(\hat{\varepsilon}),$$

$$\left[\hat{A}\right]_{h(\alpha)g(\alpha)}=(E_0-E_{h(\alpha)})\delta_{h(\alpha)g(\alpha)}-2\sum_{m\beta}\left\langle\varphi^{g(\alpha)}_{n(\alpha)}\varphi^{(0)}_{m\beta}\left|V^{(0)}_{n\alpha m\beta}\right|\varphi^{(0)}_{n\alpha}\varphi^{h(\beta)}_{m\beta}\right\rangle,$$

$$B_{g(\alpha)}(\hat{\varepsilon})=\sum_{m\beta}\left\langle\varphi^{g(\alpha)}_{n\alpha}\varphi^{(0)}_{m\beta}\left|V^{(1)}_{n\alpha m\beta}(\hat{\varepsilon})\right|\varphi^{(0)}_{n\alpha}\varphi^{(0)}_{m\beta}\right\rangle.$$

С помощью (П.4) легко находится молекулярная энергия первого порядка по $\hat{\varepsilon}$ :

$$E^{(1)}_{f(\alpha)} = \sum_{m\beta} \Big[ \Big\langle \varphi^{f(\alpha)}_{n\alpha} \varphi^{(0)}_{m\beta} \Big| V^{(1)}_{n\alpha m\beta} \Big| \varphi^{f(\alpha)}_{n\alpha} \varphi^{(0)}_{m\beta} \Big\rangle +$$

$$+ 2 \sum_{h(\beta)g(\beta)} \Big[ \hat{A}^{-1} \Big]_{g(\beta)h(\beta)} B_{h(\beta)}(\tilde{\varepsilon}) \Big\langle \varphi^{f(\alpha)}_{n\alpha} \varphi^{(0)}_{m\beta} \Big| V^{(0)}_{n\alpha m\beta} \Big| \varphi^{f(\alpha)}_{n\alpha} \varphi^{g(\beta)}_{m\beta} \Big\rangle \Big].$$

**РЕЗЮМЕ**

Досліджено особливості характеристик нормальних електромагнітних хвиль у молекулярному кристалі, обумовлені зовнішньою механічною напругою. Розрахунок виконаний з перших принципів з урахуванням просторової дисперсії для однорідно деформованого (зовнішньою механічною напругою) молекулярного кристала. У рамках екситонної моделі отримане мікроскопічне вираження для обертальної здатності кристала з довільним числом підграток. У випадку одноосьової деформації проведений детальний аналіз дисперсії обертальної здатності для систем із примітивними гратами.

**SUMMARY**

Features of characteristics of normal electromagnetic waves in the molecular crystal, caused by an external mechanical pressure are investigated. Calculation is executed from the first principles in view of a spatial dispersion for homogeneously deformed (an external mechanical pressure) a molecular crystal. The questions connected to energy spectrum transformation of homogeneously deformed molecular crystal, and also with calculations (with the help of corresponding quantum-mechanical states) of optical material tensors, determining characteristics of normal electromagnetic waves are solved. Thus basically the problem about a presence of dependence of the crystal characteristics on value of the external influence is solved in case of axial compression. In framework of an exciton model microscopic expression for dielectric permeability tensor of the axially deformed crystal is received and with it help rotational ability of a crystal with any number sublattice is found.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Агранович В.М. Теория экситонов. – М.: Наука, 1968. – 384 с.
2. Кизель В.А., Бурков В.И. Гиротропия кристаллов. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. Ранганат Г,С., Рамасшан С. Пьезовращательные коэффициенты и оптическая активность, индуцированная механическим напряжением // Труды АН Индии. – 1969. – Т.А70, N6. – С.275-291.
4. Thapliyal H.V., Stefanacos E.K. Effect of elastic stress on optical properties of crystals // J.Phys. – 1976. – V.C9, N5. – P.857-865.
5. Овандер Л.Н., Тю Н.С., Федоров С.А. К теории естественной оптической активности молекулярных кристаллов. I Тензор гиротропии // УФЖ. – 1983. – Т.28, №10. – С.1476-1480.
6. Овандер Л.Н., Тю Н.С., Федоров С.А. К теории естественной оптической активности. II Дисперсия оптической активности // УФЖ. – 1983. – Т.28, №11. – С.1674-1677.
7. Кочергин Е.В., Тю Н.С., Федоров С.А. Об оптической активности кристаллов, образованных их негиротропных молекул // Опт. и спектр. –1988. – Т.64, №2. – С.450-452.
8. Пашкевич Ю.Г., Федоров С.А. Микроскопическая теория естественной оптической активности смешанных молекулярных кристаллов // Опт. и спектр – 1991. – Т.71, вып. 6. – С.979-984.
9. Федоров С.А. Учет недиагонального беспорядка в теории естественной оптической активности смешанных молекулярных кристаллов // Опт. и спектр. – 1992. – Т.73, вып. 5. – С.980-982.
10. Федоров С.А. Микротеория естественной оптической активности ориентационно-разупорядоченных органических кристаллов// Опт. и спектр. – 1995. – Т.79, вып. 3. – С.495-498.
11. Федоров С.А. Электрооптическая активность смешанных молекулярных кристаллов // Кристаллография. – 1997. – Т.42, вып.2. – С.206-209.
12. Федоров С.А. Электрогирация ориентационно-разупорядоченных молекулярных кристаллов // Опт. и спектр. – 1998. – Т.85, №5. – С.790-793.
13. Пашкевич Ю.Г., Федоров С.А. Гиротропия молекулярных кристаллов с вакансиями // Опт. и спектр. – 2000. – Т.88, вып. 3. – С.499-503.
14. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1972. – 584 с.
15. Бир Г.Л., Пикус Г.Е. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. – М.: Наука, 1972. – 584 с.
16. Боголюбов Н.Н. Избранные труды в 3-х томах. – К.: Наукова думка, 1970. – 654 с.
17. Соловьев Л.Е., Чайка М.О. Оптическая активность кристаллов *InSe, GaAs, CdTe*, индуцированная одноосной деформацией // ФТТ. – 1980. – Т.22, №4. – С.970.

*Надійшла до редакції 21.01.2003 р.*

УДК 620.193.27.

# О КОРРОЗИОННОЙ СТОЙКОСТИ СТАЛИ 20 ПОСЛЕ АЗОТИРОВАНИЯ И ПОСЛЕДУЮЩЕГО ЕЕ ОБЕЗВОДОРОЖИВАНИЯ

*М.П.Кушнир*

Известно, что высокая коррозионная стойкость азотированных в аммиаке сталей, связана с образованием на их поверхности слоя $(1\text{-}4)\cdot10^{-5}$ м нитрида $Fe_3N$ (ε-фаза) [см., напр., 1-2]. Кроме того, при химико-термической обработке сталей в аммиаке диффузионная зона содержит не только азот, но и водород, основное количество которого распределено в тонком поверхностном слое ($\sim5\cdot10^{-5}$ м) [3-5], что может привести к существенным изменениям его физико-химических свойств [6].

Поэтому представляет научный и практический интерес исследование влияния обезводороживания азотированных сталей на их коррозионную стойкость.

В связи с вышеизложенным, прежде всего, необходимо исследовать структуру и фазовый состав обезводороженной стали после ее химико-термической обработки в атмосфере аммиака.

Азотирование образцов стали 20 в атмосфере аммиака и их последующее обезводороживание в аргоне, определение их коррозионной стойкости и фазового состава диффузионной зоны проводится по общеизвестным методикам [2, 7, 8].

Результаты исследования структуры поверхности в азотированной в аммиаке стали 20 (500-700°С, 10 ч) после остывания до комнатной температуры вместе с печью, а также дополнительного отжига в атмосфере аргона (500 °С, 5ч) и остывания свидетельствуют, что отжиг в аргоне азотированной в аммиаке при данных температурах стали 20 не приводит к заметному измерению структуры пористой поверхности образцов. В обоих случаях количество и размер пор примерно одинаково (16±5 пор/мм$^2$, 0,2 ±0,03 мм).

Исследования фазового состава образцов показывают, что при азотировании стали 20 при температурах 500-700°С в аммиаке диффузионная зона состоит из внешнего слоя-нитрида $Fe_3N$ (ε-фаза) и внутреннего – твердого раствора азота в альфа-железе (азотистый феррит). Дополнительный отжиг в атмосфере аргона азотированных в аммиаке образцов стали 20 (500-700°С, 10 ч) приводит к уменьшению количества водорода, содержащегося преимущественно в диффузионной зоне [3-5], примерно на порядок величины [4]. Фазовый состав образцов не изменяется.

Следует отметить, что кратковременный высокотемпературный отжиг стали 20 (1000°С, 0,25 ч) в среде аргона, азотированной в аммиаке в течение 5 ч при 800-900°С, приводит к снижению концентрации водорода в диффузионной зоне и к отсутствию слоя ε-фазы в ее составе. Это связано с достаточно интенсивно протекающим одновременно с обезводороживанием азотированной стали процессом ее деазотирования [9].

Результаты исследования зависимости потенциала стали 20 от плотности поляризующего тока в 3%-ном растворе хлористого натрия при комнатной температуре представлены на рис. 1 .

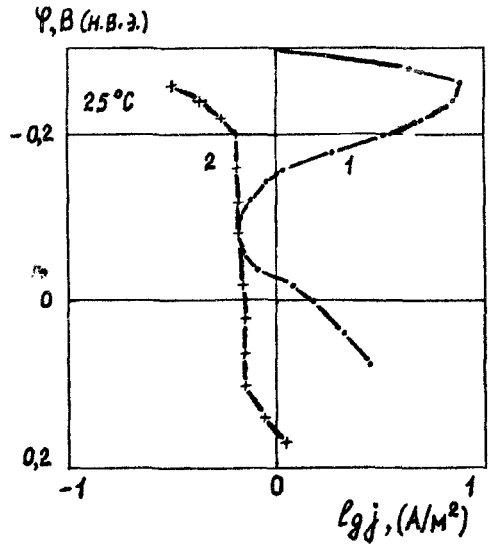



Рис. 1. Анодные поляризационные кривые коррозии в 3%-ном растворе хлористого натрия при комнатной температуре азотированной (700 °С, 10 ч) в атмосфере аммиака (1) и дополнительно обезводороженной (500 °С, 5 ч) в аргоне (2) стали 20.

©Кушнир М.П.

Как видно из этого рисунка, анодная поляризационная кривая для азотированной стали 20 отличается от аналогичной кривой для обезводороженной после химико-термической обработки стали: во-первых, пологим ходом кривой в области активного растворения материала, что связано с малой поляризацией электрода; во-вторых, сильным сужением области пассивного потенциала (от 0,3 до 0,004 В). Это, очевидно, вызвано поступлением, в процессе анодного растворения стали, в коррозионный раствор хлористого натрия или пассивирующую пленку водорода [10], который затрудняет наступление пассивности.

Таким образом, обезводороживание в аргоне азотированной в атмосфере аммиака (500-700°С) стали 20 приводит к образованию на ее поверхности качественной пассивной пленки.

**РЕЗЮМЕ**

Проведено електрохімічне дослідження зневодненої азотованої сталі 20. Показано, що зневоднення приводить до утворення на поверхні азотованої сталі якісної пасивної плівки.

**SUMMARY**

The electrochemical research of dehydrogenized nitrated steel has been carried out. The present investigation shows that dehydrogenization leads to the formation of passive film on the surface of the nitrated steel of high quality.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лахтин Ю.М., Коган Я.Д. Азотирование стали. – М.: Машиностроение, 1976. – 256 с.
2. Теория и технология азотирования / М.Ю.Лахтин. Я.Д.Коган, И.Г.Шпис, З.Бемер. – М.: Металлургия, 1991. – 320 с.
3. Минкевич А.Н. Химико-термическая обработка металлов и сплавов. – М.: Машиностроение, 1965. – 331 с.
4. Черкис Ю.Ю., Крутогина Н.А., Савинков Р.А. Насыщение водородом нержавеющих и конструкционных сталей при азотировании / Металловедение и термическая обработка металлов. – 1981, № 3. – С.14-19.
5. Кушнир М.П. Исследования распределения водорода по сечению Армко-железа после химико-термической обработке водородосодержащих средах / Праці наукової конференції Донецького національного університету (секція фізичних і комп'ютерних наук). – Донецьк: ДонНУ, 2001. – С.59-60.
6. Водород в диффузионных процессах химико-термической обработки металлов и сплавов/ В.Г.Барьяхтар, Ю.М.Буравлев, А.Г.Милославский, М.П.Кушнир. – К.: Наукова думка, 1977. – 256 с.
7. Фокин М.Н. Жигалова К.А. Методы коррозионных испытаний металлов. – М.: Металлургия, 1986. – 80 с.
8. Миркин Л.Н. Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов. – М.: Физматгиз, 1961. – 863 с.
9. Фаст. Дж.Д. Взаимодействие металлов с газами. Т.2. Кинетика и механизм реакций / Перев. с англ. под ред. Л.А.Шварцмана. – М.: Металлургия, 1975. – 352 с.
10. Жук М.П. Курс теории коррозии и защиты металлов. – М.: Металлургия, 1976. – 472 с.

*Надійшла до редакції 21.01.2003 р.*

УДК 621.396.969

# J–КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ПЕЛЕНГАЦИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ПСЕВДОШУМОВОГО СИГНАЛА

*А.Г.Сорочан*
*Донецкий научно-исследовательский институт комплексной автоматизации*

**Введение.** В [1] предложен J-корреляционный метод ( ЈКМ ) пеленгации, а в работах [2,3] проводится анализ этого метода, реализованного двумя способами ЈКМ-1 и ЈКМ-2. В указанных работах при условии приема сигнала, модулированного по частоте гармоническим колебанием, определены пеленгационные характеристики метода, их крутизна. Интерес представляет поведение пеленгационных характеристик ЈКМ при приеме сигнала, модулированного по частоте сложным напряжением. Цель работы анализ J-корреляционного метода пеленгации при приеме псевдошумового сигнала.

**Основной раздел.** Структурная схема устройства, реализующего ЈКМ пеленгации, приведена на рис. 1, где РЛЗ и ФЛЗ – калиброванная и фиксированная линии задержки; СМ – смеситель; Г – высокостабильный генератор; ЛЗ – линия задержки ; Х1,Х2 и Х3 – первый, второй и третий перемножители; РПФ1 и РПФ2 – первый и второй режекторно – полосовые фильтры; УПФ – узкополосный полосовой фильтр; ЛУ – логарифмический усилитель; АД – амплитудный детектор.

Псевдошумовой сигнал можно представить в виде

$$U_c(t) = U_c \cos\left[ Wt + \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin(\Omega_k t + \varphi_k) \right];$$

где $U_c$ – амплитуда сигнала; $W$ – несущая частота сигнала; $N$ – число гармонических составляющих модулирующего напряжения; $\beta_k$ – индекс модуляции гармонического колебания с частотой $\Omega_k$; $\varphi_k$ – начальная фаза к-ой гармонической составляющей сигнала.

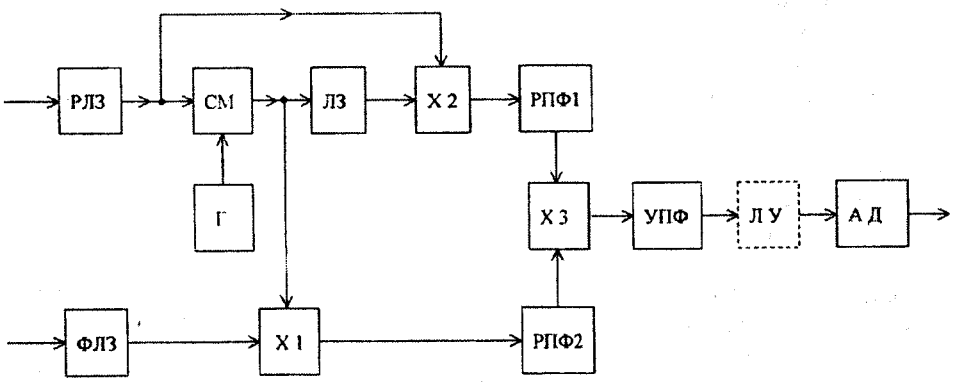



Рис. 1

Сигнал $U_c(t)$, пройдя двумя каналами распространения, на входах устройства запишется в виде

$$U(t) = U \cos\left[ Wt + \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin(\Omega_k t + \varphi_k) \right];$$

$$U(t+\tau) = U \cos\left[ W(t+\tau) + \sum_{k=1}^{N} \beta_k \sin[\Omega_k (t+\tau) + \varphi_k] \right];$$

где $U$ – амплитуда сигнала; $\tau$ – пространственная временная задержка входных сигналов.

В результате обработки напряжений $U(t)$ и $U(t + \tau)$ в опорном ( РЛЗ, СМ, Г, ЛЗ и Х1) и регулируемом ( РЛЗ, ФЛЗ, СМ, Г, ЛЗ и Х2 ) каналах их выходные сигналы запишутся в виде

$$U'(t) = U_1 \cos\left[ W_2 t + \sum_{k=1}^{N} \beta_k' \cos\left[ \Omega_k \left( t - \theta - \frac{\tau_1}{2} \right) + \varphi_k \right] + \varphi' \right],$$

©Сорочан А.Г.

$$U''(t) = U_1 \cos\left[ W_г t + \sum_{k=1}^{N} \beta_k'' \cos\left[ \Omega_k t + \frac{\Omega_k}{2}(\tau - \theta_1 - \theta - \tau_1) + \varphi_к \right] + \varphi'' \right],$$

где $U_1$ – амплитуда сигнала; $W_г$ – частота генератора Г; $\beta_k'$ и $\beta_k''$ – парциальные индексы модуляции , соответственно, сигналов опорного и регулируемого каналов; $\theta$, $\theta_1$ и $\tau_1$ – соответственно временные задержки в РЛЗ, ФЛЗ и ЛЗ; $\varphi' = (W - W_г)\tau_1$ ; $\varphi'' = = W(\theta + \tau_1 + \tau - \theta_1) - W_г(\theta + \tau_1)$ ;

Парциальные индексы модуляции определяются следующими равенствами [ 1 ]

$$\beta_к' = 2\beta_к \sin\left[\frac{\Omega_k \tau_1}{2}\right], \qquad (1)$$

$$\beta_k'' = 2\beta_к \sin\left[\frac{\Omega_k}{2}(\theta + \tau_1 + \tau - \theta_1)\right]. \qquad (2)$$

В опорном канале поведение парциальных индексов модуляции определяется синусоидальной зависимостью от произведения $\Omega_k \cdot \tau_1$. Так как $\tau_1$ = const, то для каждого значения $\Omega_k$ опорным каналом формируется свой парциальный индекс модуляции $\beta_k'$ .

В регулируемом канале поведение индекса модуляции также связано синусоидальной зависимостью от произведения модулирующей частоты $\Omega_k$ на относительную временную задержку $\tau_{отн.}=(\theta+\tau_1+\tau-\theta_1)$. Отсчет пространственной временной задержки $\tau$ производится при $\tau_{отн.} = 0$. Установление этого равенства осуществляется перестройкой временной задержки $\theta$ в калиброванной РЛЗ по разработанному алгоритму. Полагая, что $\tau_{отн.} = 0$ наступает при значение $\theta = \theta_ц$, тогда $\tau = (\theta_1 - \theta_ц - \tau_1)$. Изменение $\theta$ влечет за собой изменение $\tau_{отн.}$ и, как следствие, парциального индекса модуляции сигнала регулируемого канала $\beta_к''$ в пределах от 0 ( при $\tau_{отн.}= 0$ ) до некоторого максимального значения $\beta_k'' = 2\beta_k$ ( при $\sin(\Omega_к \tau_{отн.}) = 1$ ). При выполнении равенства $\Omega_k \cdot \tau_{отн.} = n\pi$ ( где $n$ – натуральное число ) парциальный индекс модуляции к-ой модулирующей составляющей обращается в ноль. Одновременное обращение в ноль всех индексов модуляции $\beta_k''$ возможно в двух случаях: первый, когда $\tau_{отн.}= 0$, и второй, когда все парциальные модулирующие частоты связаны зависимостью $\Omega_{k+1} = n\Omega_k$ , т.е. модулирующее напряжение входного сигнала – периодическая последовательность.

После разложения сигналов $U'(t)$ и $U''(t)$ в ряд, в виде суммы гармонических составляющих с коэффициентами разложения по функциям Бесселя и последующего исключения в этих выражениях составляющих с частотой $W_г$, как результат их режекции в РПФ фильтрах, получим выражения описывающие сигналы на выходах каналов. На выходе опорного канала ( выход РПФ1 )

$$U_2'(t) = U_2 \sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1') J_r(\beta_2') \cdot \ldots \cdot J_m(\beta_N') \cdot \cos\left[\left(W_г + p\Omega_1 + r\Omega_2 + \ldots + m\Omega_N\right)t + \varphi_1' + \varphi'\right]$$

при $p = r = \ldots = m \neq 0$, где $U_2$ - амплитуда сигнала; $\varphi_1' = p\varphi_1 + r\varphi_2 + \ldots + m\varphi_N$.

Спектр входного сигнала образован парциальными частотами $\Omega_k$, каждая из которых имеет свой индекс модуляции $\beta_k$. Опорным каналом для каждого значения модулирующей частоты $\Omega_k$ формируется в соответствии с равенством (1) новый индекс модуляции $\beta_k'$. Вновь сформированные парциальные индексы модуляции определяют ширину спектра выходного сигнала опорного канала, его состав, уровень спектральных составляющих. Указанные параметры спектра сигнала варьируются выбором временной задержки $\tau_1$ в ЛЗ.

На выходе регулируемого канала ( выход РПФ2 ) сигнал описывается выражением

$U''_2(t,\tau,\theta) = U_2 \cdot$

$$\sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1') J_r(\beta_2') \cdot \ldots \cdot J_m(\beta_N') \cdot \cos\left[\left(W_г + p\Omega_1 + r\Omega_2 + \ldots + m\Omega_N\right)t + \varphi_1' + \varphi''\right],$$

при $p = r = \ldots = m \neq 0$.

Выходной сигнал регулируемого канала описывается функционалами Бесселя вида $J_n(2\beta_к \sin[0{,}5\Omega_к \tau_{отн.}])$ (здесь $n$ – порядок функции Бесселя). Особенности поведения функционалов Бесселя отражены на рис. 2, из которого очевидно их существенное отличие от функций Бесселя. Функционал Бесселя имеет строгую периодическую зависимость, амплитуда которой постоянна. Увеличение порядка функционала ведет к понижению его амплитудного значения (рис. 2б и рис. 2в). При изменении индекса модуляции поведение функционала на периоде его действия существенно меняется, приобретая несколько экстремумов на периоде его действия, имеющих одинаковую амплитуду (рис. 2г) из этих составляющих при $\tau_{отн.} \rightarrow 0$ первыми убывают те, у которых индекс модуляции ниже. Из рис. 2а-2г следует, что при $\tau_{отн.} \rightarrow 0$ первым исчезает функционал, у которого ниже модулирующая частота или выше порядок функционала.

Полагаем, что выполняется условие $\Omega_{k+i} \neq n\Omega_k$, при этом $\tau_{отн.}$ не ограничено сверху, велико и равно $\tau_{отн.max}$, тогда при уменьшении $\tau_{отн.}$ от $\tau_{отн.max}$ до нуля парциальные индексы модуляции $\beta_k$", и как следствие функционалы Бесселя $J_n(\beta_k")$, изменяются периодически. На интервале изменений относительной временной задержки от $\tau_{отн.max}$ до некоторого значения $\tau_{отн.1}$ ширина спектра сигнала на выходе регулируемого канала остается практически постоянной, мощность боковых полос неизменной . Сохранение мощности боковых полос сигнала объясняется перераспределением мощностей составляющих спектра между собой. При $\tau_{отн.} < \tau_{отн.1}$ в спектре сигнала начинается процесс исчезновения спектральных составляющих. Первыми исчезают составляющие, описываемые функционалами более высокого порядка, мощность которых невелика. По мере дальнейшего приближения $\tau_{отн.}$ к нулю в спектре сигнала происходит понижение уровня составляющих первого порядка $J_1(\beta_k")$ до бесконечно малого значения, причем в первую очередь понижаются составляющие с наименьшим значением парциальной модулирующей частоты $\Omega_k$ . Такой процесс ведет к сужению спектра сигнала и, как следствие, к уменьшению мощности боковых полос. Уменьшение мощности боковых полос сопровождается перераспределением ее к соответствующим составляющим нулевого порядка $J_0(\beta_k")$. При установлении $\tau_{отн.} = 0$ все парциальные индексы модуляции $\beta_k" = 0$. Выходной спектр регулируемого канала преобразуется в единственную спектральную составляющую, расположенную на несущей частоте $W_г$ , которая в дальнейшем подавляется фильтром РПФ.

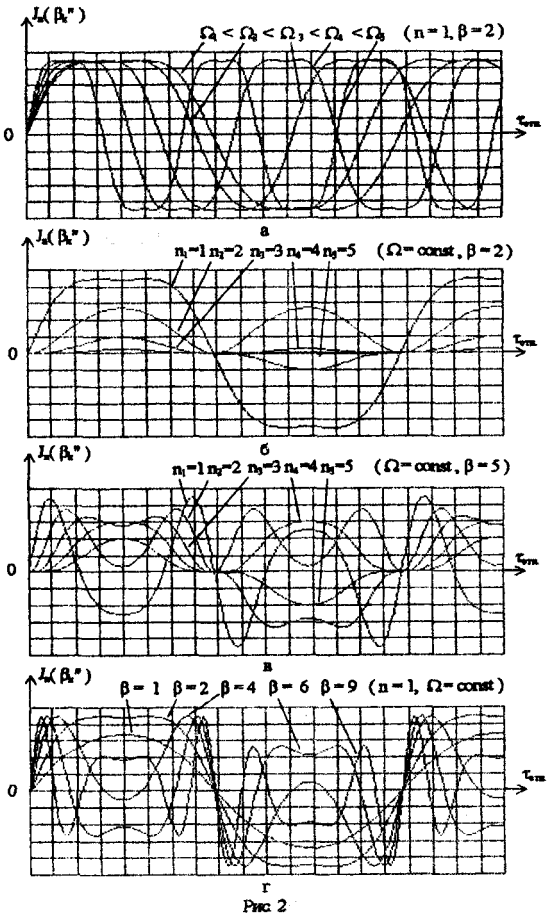



Рис 2

Из результата перемножения сигналов $U_2'(t)$ и $U_2"(t,\tau,\theta)$ третьим перемножителем Х3 узкополосным фильтром УПФ с центральной частотой $2W_г$ выделяется гармонический сигнал как результат свертки спектров боковых полос симметрично расположенных относительно несущей частоты $W_г$. Выделенный сигнал описывается выражением

$$U_3(t,\tau,\theta) = U_3 \sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot \sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty} J_p(\beta_1")J_r(\beta_2")\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N")\cdot x$$

$$x\ \cos[2W_г t + \varphi' + \varphi"],$$

где $U_3$ – амплитуда сигнала; и так как $\beta_k'$ = const, то амплитуда каждого слагаемого сигнала $U_3(t,\tau,\theta)$ определяется $J_n(\beta_k'')$ его парциальным индексом модуляции $\beta_k''$, значение которого зависит от относительной временной задержки $\tau_{отн.}$

Относительное значение огибающей сигнала $U_3(t,\tau,\theta_o)$ к ее максимальному значению $U_{3max}(\tau,\theta_o)$ определяет пеленгационную характеристику. Устройство рис. 1 без логарифмического усилителя реализует второй способ J-корреляционного метода пеленгации ( JKM-2 ) [ 3 ], пеленгационная характеристика которого описывается выражением

$$f_2(\tau,\theta_o) = \frac{U_3(\tau,\theta_0)}{U_{3\max}(\tau,\theta_0)} =$$

$$= K_2 \sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot \sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty} J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N''),$$

где $\theta_o$ – значение временной задержки РЛЗ, определяющей положение цели при равносигнальном направлении ($\tau$=0) ; $U_{3max}(\tau,\theta_o) = K_2/U_3$;

$$K_2 = \frac{1}{\sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot \sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty} J_p(\beta_1''_{\max})J_r(\beta_2''_{\max})\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N''_{\max})},$$

$\beta_k''_{max}$ – значения индексов модуляции, при которых $U_3(\tau,\theta_o)$ максимально.

С учетом выше изложенного поведение пеленгационной характеристики $f_2(\tau,\theta_o)$ при изменении $\tau_{отн.}$ в области больших значений остается равномерным, со значением равным единице. При приближении $\tau_{отн.}$ к нулю за счет свертки спектра сигнала регулируемого канала и перераспределения мощности его боковых полос к нулевой составляющей, расположенной на частоте $W_z$, значение $f_2(\tau,\theta_o)$ непрерывно уменьшается, причем скорость уменьшения уровня по мере приближения $\tau_{отн.}$ к $\tau_{отн.1}$ возрастает. При понижении $\tau_{отн.}$ от $\tau_{отн.1}$ до нуля характеристика $f_2(\tau,\theta_o)$ уменьшается по линейному закону до нуля, формируя при $\tau_{отн.} = 0$ экстремальную точку.

Точность определения пространственной временной задержки, и как следствие местоположение источника излучения, оценивается крутизной пеленгационной характеристики, которая в данном случае имеет вид

$$S_2(\tau) = \frac{df_2(\tau,\theta_o)}{d\tau} = K_2 \sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot x$$

$$x\cdot \sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty} \Big\{ \left[J_{p-1}(\beta_1'') - J_{p+1}(\beta_1'')\right]\cdot J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_1\Omega_1\cos(0{,}5\Omega_1\tau_{отн.}) +$$

$$+\left[J_{r-1}(\beta_2'') - J_{r+1}(\beta_2'')\right]\cdot J_p(\beta_1'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_2\Omega_2\cos(0{,}5\Omega_2\tau_{отн.}) + \ldots +$$

$$+\left[J_{m-1}(\beta_N'') - J_{m+1}(\beta_N'')\right]\cdot J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_{m-1}(\beta_{N-1}'')\cdot\beta_N\Omega_N\cos(0{,}5\Omega_N\tau_{отн.})\Big\}.$$

В окрестности экстремальной точки, где $\tau_{отн.}$ мало выражение, определяющее крутизну, упрощается и приобретает вид

$$S_2(\tau) = K_2 \sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty} J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot \sum_{p,r,\ldots m=1}^{-1} \Big\{ J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_1\Omega_1 +$$

$$+ J_p(\beta_1'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_2\Omega_2 + \ldots +$$

$$+ J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_{m-1}(\beta_{N-1}'')\beta_N\Omega_N \Big\} =$$

$$= 2\cdot K_2 \sum_{p,r,\ldots m=-1}^{1} J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot(\beta_1\Omega_1 + \beta_2\Omega_2 + \ldots + \beta_N\Omega_N).$$

Крутизна пеленгационной характеристики вблизи экстремальной точки постоянна и определяется суммой произведений модулирующей частоты спектральных составляющих на соответствующий ей индекс модуляции. Следовательно, пеленгационная характеристика в этой области значений $\tau_{отн.}$ имеет линейную зависимость, тогда при уменьшении $\tau_{отн.}$ в характеристике формируется экстремальная точка при $\tau_{отн.} = 0$, в этом случае $(\theta+\tau_1+\tau)=\theta_1$. При $(\theta+\tau_1+\tau) < \theta_1$ значение $\tau_{отн.} < 0$, следовательно, производная пеленгационной характеристики отрицательна, при $( \theta +\tau_1 + \tau ) > \theta_1$ – производная положительна, что указывает на наличие в пеленгационной характеристика способа JKM-2 разрыва первого рода [4 с. 297].

Включением в устройстве рис. 1 на выходе фильтра УПФ логарифмического усилителя реализуется первый способ J-корреляционного метода пеленгации (JKM-1) [3]. В этом случае сигнал на выходе усилителя ЛУ описываться выражением

$$U_4(\tau,\theta)=U_4\cdot\log\left[K_0\sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty}J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot\sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty}J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\right]\times$$

$$\times\ \cos[2W_2t+\varphi'+\varphi''],$$

где $U_4$ амплитуда сигнала; $K_0$ – коэффициент пропорциональности.

Пеленгационная характеристика способа JKM-1 имеет вид

$$f_1(\tau,\theta_o)=\frac{U_4(\tau,\theta_0)}{U_{4\max}(\tau,\theta_0)}=$$

$$=K_1\cdot\log\left[K_0\sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty}J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\cdot\sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty}J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\right],$$

где $U_{4max}(\tau,\theta_o) = K_1/U_4$;

$$K_1=\frac{1}{\log\left[K_o\sum_{p,r,\ldots,m=-\infty}^{\infty}J_p(\beta_1')J_r(\beta_2')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N')\sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty}J_p(\beta_1''_{\max})J_r(\beta_2''_{\max})\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N''_{\max})\right]}$$

ее крутизна описывается выражением

$$S_1(\tau)=\frac{1}{4{,}6\cdot K_o\sum_{p,r,\ldots m=-\infty}^{\infty}J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\ldots J_m(\beta_N'')}\cdot x$$

$$x\cdot\sum_{p,r,\ldots,m=\infty}^{-\infty}\left\{\left[J_{p-1}(\beta_1'')-J_{p+1}(\beta_1'')\right]\cdot J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_1\Omega_1\cos(0{,}5\Omega_1\tau_{отн.})+\right.$$

$$+\left[J_{r-1}(\beta_2'')-J_{r+1}(\beta_2'')\right]\cdot J_p(\beta_1'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_2\Omega_2\cos(0{,}5\Omega_2\tau_{отн.})+$$

$$\left.+\left[J_{m-1}(\beta_2'')-J_{m+1}(\beta_2'')\right]\cdot J_p(\beta_1'')\cdot J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_{m-1}(\beta_{N-1}'')\cdot\beta_N\Omega_N\cos(0{,}5\Omega_N\tau_{отн.})\right\}$$

В окрестности экстремальной точки, где $\tau_{отн.}$ мало полученное выражение упрощается и принимает вид

$$S_1(\tau)=\frac{1}{9{,}2\cdot\sum_{p,r,\ldots m=-1}^{1}J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\ldots J_m(\beta_N'')}\cdot x$$

$$x\cdot\sum_{p,r,\ldots,m=1}^{-1}\left\{J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_1\Omega_1+J_p(\beta_1'')\cdot\ldots\cdot J_m(\beta_N'')\cdot\beta_2\Omega_2+\right.$$

$$\left.+J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\cdot\ldots\cdot J_{m-1}(\beta_{N-1}'')\cdot\beta_N\Omega_N\right\}=$$

$$= \frac{\beta_1\Omega_1 + \beta_2\Omega_2 + \ldots + \beta_N\Omega_N}{9{,}2 \cdot \sum_{p,r,\ldots m=-1}^{1} J_p(\beta_1'')J_r(\beta_2'')\ldots J_m(\beta_N'')} = \frac{\beta_1\Omega_1 + \beta_2\Omega_2 + \ldots + \beta_N\Omega_N}{4{,}6 \cdot \tau_{\text{отн.}}}.$$

Из полученного выражения следует, что крутизна пеленгационной характеристики пропорциональна сумме из произведений модулирующих частот спектральных составляющих сигнала на соответствующие им индексы модуляции. При $( \theta + \tau_1 + \tau ) < \theta_1$ значение $\tau_{\text{отн.}} < 0$, следовательно, производная пеленгационной характеристики отрицательна. При $\tau_{\text{отн.}} \to 0$ производная стремится к бесконечности. при $( \theta + \tau_1 + \tau ) > \theta_1$ – производная положительна, что указывает на наличие в пеленгационной характеристика способа JKM-1 разрыва второго рода [ 4 с.298 ].

**Выводы.** В J-корреляционном методе пеленгации при приеме псевдошумового сигнала, образованного не периодическим модулирующим напряжением, пеленгационная характеристика содержит одну экстремальную точку. В способах пеленгации JKM-1 и JKM-2 крутизна пеленгационной характеристики повышается на сумму из произведений модулирующих частот спектральных составляющих сигнала на соответствующие им индексы модуляции.


## РЕЗЮМЕ

Розглядається два способи J-кореляційного методу пеленгації при обробці псевдошумового сигналу, отримані вираження, що описують їх пеленгаційні характеристики, визначена крутість характеристик. Отримано умову, що забезпечує неперіодичну характеристику пеленгатора. Показано, що при ускладненні спектра прийнятого сигналу крутість пеленгаційної характеристики в J-кореляційному методі пеленгації підвищується.

## SUMMARY

Two methods of the J-correlation method of the direction finding under processing of the pseudo-noise signal are considered, the expressions describing their direction finding curves are obtained, the slope of the curves is determined. The condition ensuring nonperiodic curve of the direction finder is obtained. It is shown, that when a complicating of the received signal spectrum the slope of the direction finding curve in the J-correlation method of the direction finding is increased.


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Патент UA 42816. Сорочан А.Г., Литвиненко В.І. Лігінов С.М. Спосіб вимірювання тимчасової затримки модульованого сигналу при його проходженні окремими каналами розповсюдження та пристрій для його здійснення. Опубл. 15.11.2001. Офіційний бюлетень України. Промислова власність, №10.
2. Сорочан А.Г. J – корреляционный метод пеленгации // Изв. высш. учебн. Заведений. Радиоэлектроника. – 2001 .– №11. – С.57-65.
3. Сорочан А.Г. Второй способ J – корреляционного метода пеленгации // Изв. высших учебных заведений. Радиотехника. – 2003. – №10. – С.53-60.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть I. / Под ред. А.Н.Тихонова, В.А.Ильина, А.Г.Свешникова. – М.: Наука, 1980. – 616 с.


*Надійшла до редакції 21.06.2003 р.*

УДК 669.234.017.3:669.788

# ВЫЯВЛЕНИЕ ГРАНИЦ ЗЕРЕН НА ПОВЕРХНОСТИ β– И α–ГИДРИДОВ ПАЛЛАДИЯ ВСЛЕДСТВИЕ УСКОРЕННОГО НАСЫЩЕНИЯ ГАЗООБРАЗНЫМ ВОДОРОДОМ

*Г.И.Жиров, М.В.Гольцова, Е.А.Каримова*
*Донецкий национальный технический университет*

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение взаимодействия водорода с металлами остается актуальнейшей задачей физики твердого тела, физического материаловедения и металловедения. Это обусловлено тем, что водородное воздействие может приводить как к деградации материалов [1], так и к улучшению их структуры и свойств в результате их водородной обработки [2]. При этом многие аспекты взаимодействия водорода с металлами остаются до сих пор детально не изученными.

В работе [3] было описано явление выделения границ зерен на предварительно полированной поверхности образца β–$PdH_x$, имеющее место при ускоренном насыщении данного сплава водородом в монофазной β–области на равновесной диаграмме состояния Pd-H. Было описано, что причиной такого эффекта является релаксация внутренних водородных напряжений в объеме всего образца путем сдвига зерен друг относительно друга.

В настоящей работе продолжено систематическое изучение процессов выделения границ зерен в α– и β–$PdH_x$ палладия при их дополнительном и ускоренном насыщении водородом.

## МАТЕРИАЛ, МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

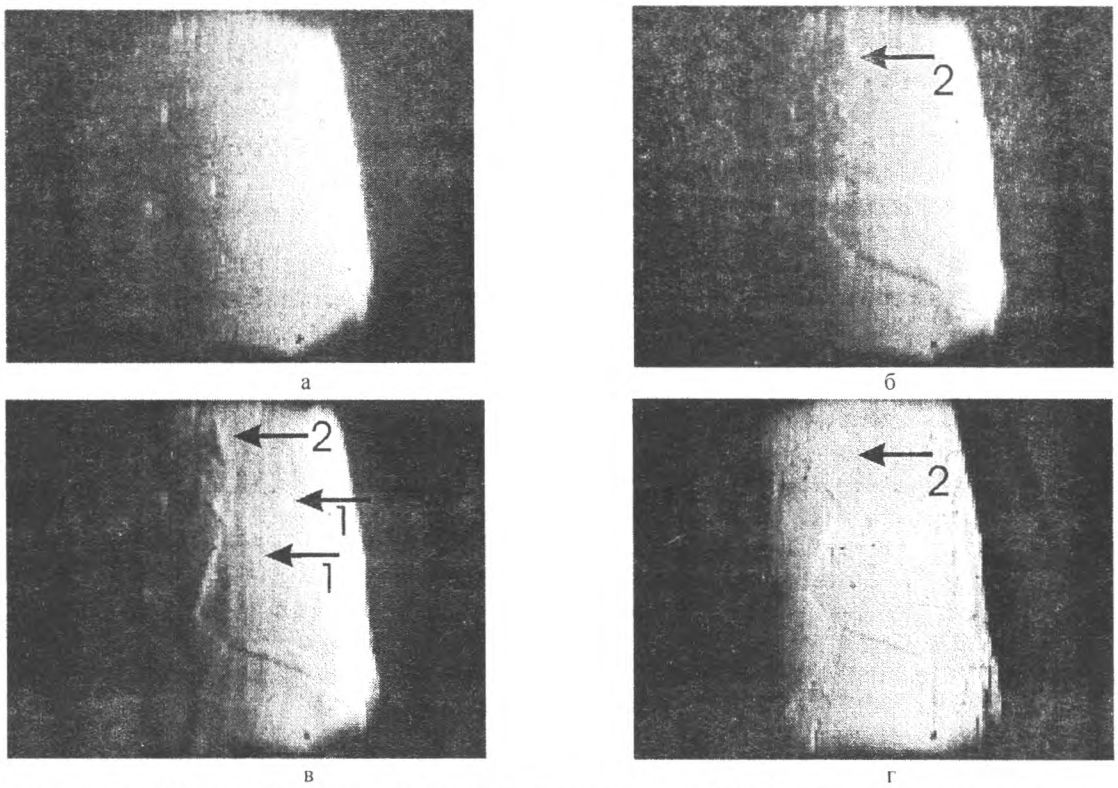
В работе проводили оптические видео-исследования плоской полированной поверхности палладиевого образца при его насыщении водородом в области однофазного β–твердого раствора. Исходными образцами служили проволочные образцы палладия чистоты 99,98%, длиной 23 мм, диаметром 0,5 мм, предварительно отожженные при 1000°С в вакууме ~ 1 Па в течение 1 часа. Затем на верхней части образцов готовили металлографические шлифы размерами ~ 0,45×2,6 мм, по специально разработанной методике, сводящей к минимуму наклеп в приповерхностных слоях образца. В работе использовали водородо-вакуумную установку ВВУ-2, которая была подробно описана в [3]. Установка позволяет реализовать одновременно на одном образце две методики изучения процессов, протекающих на поверхности и в объеме палладиевого образца при его насыщении водородом и дегазации. А именно: проводить исследования изменений поверхностного рельефа по методике оптической видео-микроскопии in situ с регистрацией протекающих процессов в приповерхностных слоях образца на видеопленку, и одновременно исследовать кинетику абсорбции-десорбции водорода палладием с помощью измерения удельного электросопротивления. После эксперимента проводили покадровый анализ микро-видеозаписи на компьютере Pentium III с использованием специальной платы видеомонтажа. Эта видеоплата позволяет переводить аналоговый сигнал видеокамеры в цифровой без потери кадров и просматривать затем видеозапись как непрерывно, так и кадр за кадром. Точность покадрового анализа по времени составляет 0,04 с. Характерные видеокадры изменений на шлифе распечатывали затем в программах Photo Paint или CorelDraw.

Эксперименты были проведены в следующем порядке. Образец помещали в рабочую камеру установки, которую затем вакуумировали и нагревали до 350°С со скоростью ~ 38°С/мин. После этого в рабочую камеру напускали газообразный водород с повышенной скоростью 0,4 МПа/мин до давления 2,3 МПа. Процесс сорбции водорода образцом контролировали по изменению электросопротивления, которое пропорционально концентрации водорода в образце. В условиях (350°С, $PH_2$ = 2,3 МПа) образец выдерживали в течение 10 минут до полной стабилизации его удельного электросопротивления, что свидетельствовало об окончании процесса поглощения водорода. Важно, что условия (350°С, $PH_2$ = 2,3 МПа) значительно превосходят критическую точку системы Pd-H (292°С, $PH_2$ = 1,97 МПа) [4]. После выдержки образца в данных условиях (350°С, $PH_2$ = 2,3 МПа) его охлаждали со средней скоростью, превосходившей равновесную скорость охлаждения 1°С/мин, а именно, со скоростью 4°С/мин. Согласно фазовой диаграмме состояния Pd–H [4, с. 606], в процессе охлаждения происходит дополнительное поглощение образцом водорода, что экспериментально фиксируется по увеличению его удельного электросопротивления. При этом фигуративная точка образца переходит в однофазную β–область, т.е. при таком насыщении по всему объему образца образуется β–твердый раствор водорода в палладии (β–$PdH_x$). По достижении 282°С скорость охлаждения понизили до 1°С/мин и при охлаждении образца ниже 277°С на полированной поверхности образца начали необратимо выявляться границы зерен. Этот процесс длился в течение 1 мин 40 с и представлен на рис. 1.

Рис. 1а демонстрирует предварительно полированную поверхность образца палладия в процессе насыщения водородом. На рис. 1б представлено начало выявления границ зерен: первые границы начали

©Жиров Г.И., Гольцова М.В., Каримова Е.А.

выявляться в нижней видимой части шлифа. Затем этот процесс продолжался и усиливался (рис. 1в). Очевидно, что в момент времени, представленном на рис. 1в, напряжения достигли максимального значения, и вся поверхность образца оказывается как бы «стянутой»: на ней видны полосы, пересекающие шлиф от нижнего до верхнего края (рис. 1в, показано стрелкой 1). Далее происходит релаксация напряжений, при этом сглаживаются не только пересекающие весь шлиф полосы, но и практически полностью сглаживается одна из границ в верхней части образца (рис. 1в,г, показано стрелками 2). Этот экспериментальный факт позволяет сделать вывод о том, что возникающая система напряжений является весьма сложной и не все напряжения релаксируют путем сдвига зерен: некоторые генерированные напряжения ослабляются, не успев превысить предел упругости материала, вследствие чего отдельные зерна сдвигаются обратимо, так что выделившиеся ранее границы этих зерен затем почти полностью исчезают.




а б в г

Рис. 1. Процесс выявления границ зерен на поверхности образца β–$PdH_x$ в результате его ускоренного насыщения водородом

Таким образом, выявление границ зерен в β–твердых растворах водорода в палладии при их ускоренном дополнительном насыщении водородом является не случайным, а стабильно повторяющимся явлением. В этом случае логично было предположить, что ускоренное насыщение водородом чистого палладия и α–твердых растворов (α–$PdH_x$) будет также вызывать выявление их границ зерен на предварительно полированной поверхности этих образцов.

Поэтому, в следующей серии экспериментов проводили исследование процесса выявления границ зерен в чистом палладии и сплавах α–$PdH_x$ при резком насыщении образцов водородом. Ускоренное насыщение водородом теперь осуществлялось путем резкого повышения давления водорода в рабочей камере ВВУ-2 в изотермических условиях. В этом случае, когда скорость подачи водорода в установку была максимальной, а нагружение образца водородом далеким от равновесия, будем называть такое нагружение «водородным ударом». Очевидно, что этот термин аналогичен широко используемому термину «тепловой удар» [5].

Эксперименты проводили в следующем порядке. Исследуемые образцы помещали в рабочую камеру установки ВВУ-2, затем рабочую камеру вакуумировали и образец нагревали в вакууме до 350°С. После изотермической выдержки при этих условиях до стабилизации удельного электросопротивления образца, проводили серии экспериментов с «чистыми» образцами (т.е. образцами без водорода) и образцами, содержащими некоторое количество растворенного водорода (α–$PdH_x$). В случае образцов чистого палладия, в рабочую камеру резко, со средними скоростями напуска водорода $v_{нап\ ср}$ от 0,1 до 1,0 МПа/с, подавали газообразный водород (проводили «водородный удар»). В случае сплава α–$PdH_x$, проводили

вначале медленное насыщение «чистого» образца водородом до состава α–$PdH_x$, для чего давление водорода в рабочей камере поднимали со скоростью 0,05 – 0,1 МПа/мин до некоторого давления, выбранного из интервала 0,15 ÷ 0,6 МПа, после чего так же проводили водородный удар (□$PH_2$). После водородных ударов камеру дегазировали, а образцы охлаждали до комнатной температуры.

Анализ видеозаписи изменений морфологии и удельного электросопротивления образцов после водородных ударов выявил отдельные закономерности процесса сдвига зерен.

В первой серии экспериментов, проводимых с образцами, не содержащими растворенный водород, не было отмечено практически никаких видимых изменений на поверхности образца при параметрах водородного удара $v_{нап\ ср} < 1{,}0$ МПа/с, □$PH_2 < 0{,}5$ МПа (рис. 2а), где □$PH_2 = P_{H_2\ КОН} - P_{H_2\ НАЧ}$. При достижении $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/с, □$PH_2 = 0{,}5$ МПа на полированной поверхности образца были замечены слабо выраженные выделившиеся границы зерен. Даже при $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/с, □$PH_2 = 1{,}4$ МПа (максимально возможных параметрах водородного удара для нашей установки) не было замечено ясно видимого сдвига зерен на предварительно полированной поверхности чистого палладия (рис. 2б). Можно только говорить об отсутствии сдвига зерен или о слабо выраженном проявлении эффекта сдвига зерен в данных условиях.

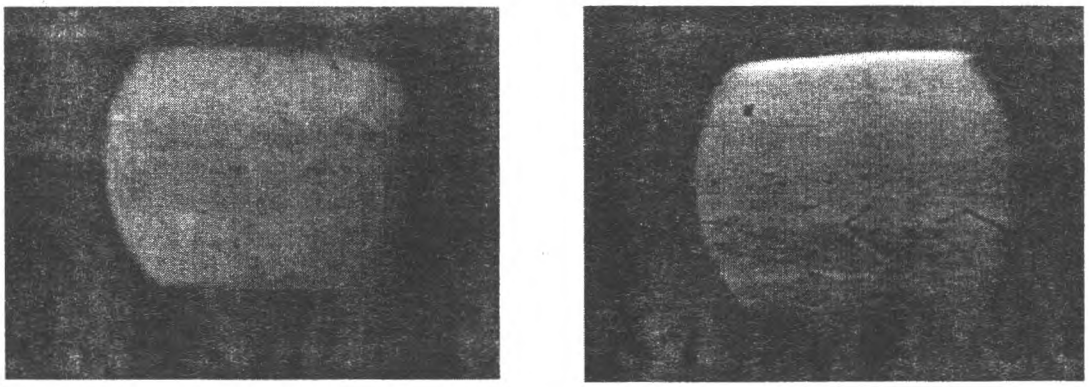


Рис. 2. Формоизменения предварительно полированной поверхности чистого палладия после водородных ударов: а – отсутствие формоизменений при $v_{нап\ ср} = 0{,}7$ МПа/*с*, □$PH_2 = 0{,}9$ МПа; б – слабые формоизменения при $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/*с*, □$PH_2 = 1{,}4$ МПа.

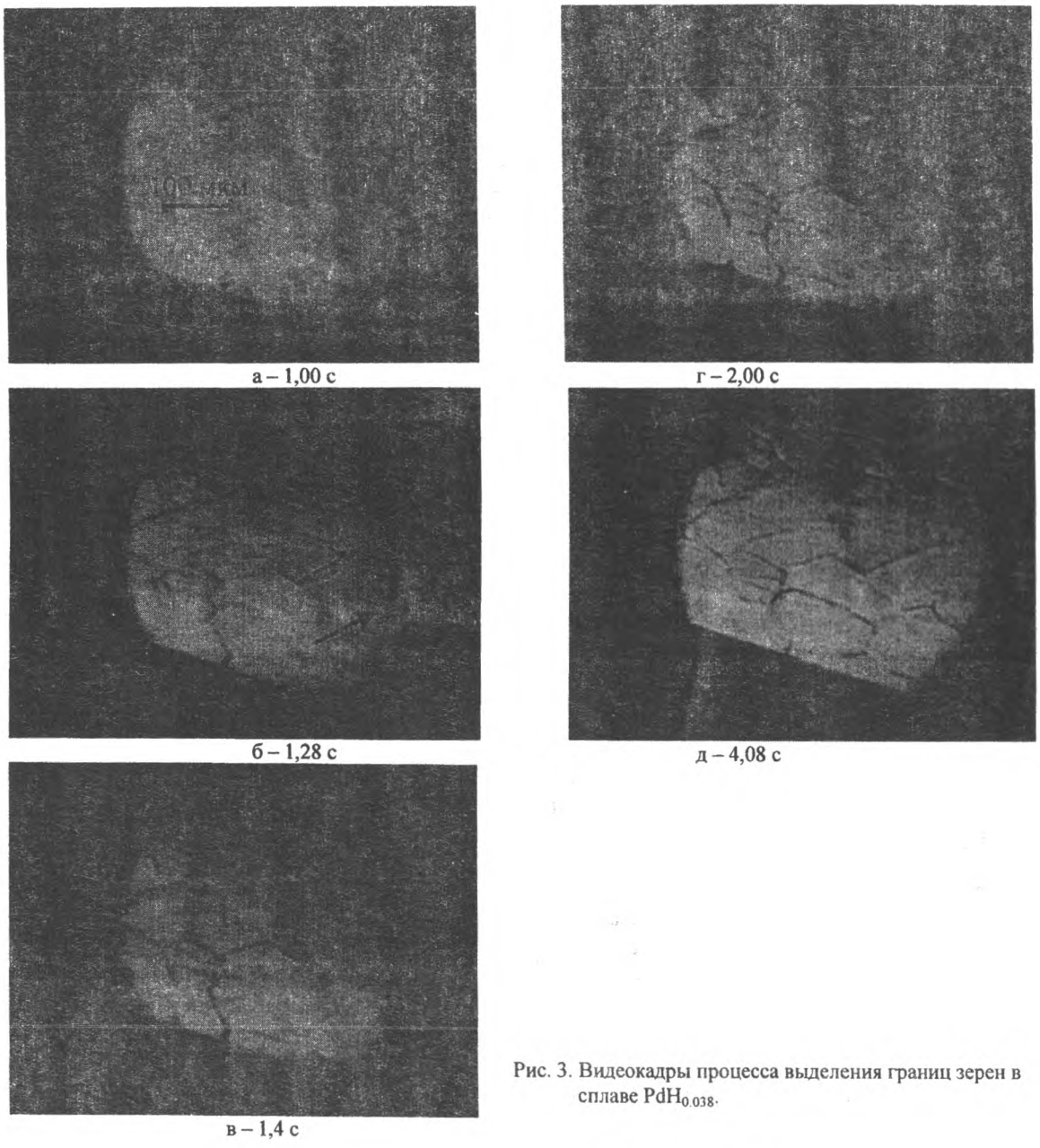
Во второй серии экспериментов водородные удары проводили на палладиевых образцах, насыщенных водородом до сплавов состава $PdH_x$ (где x = H/Pd = 0,019; 0,027; 0,031; 0,038). В случае сплавов состава $PdH_{0.019}$ при $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/с, □$PH_2 < 0{,}45$ МПа эффект был слабо выражен. Но в случае сплава того же состава с большим значением водородного удара □$PH_2 > 0{,}6$ МПа при $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/с был отмечен ярко выраженный сдвиг зерен на полированной поверхности образцов. В остальных экспериментах при водородных ударах на сплавах $PdH_{0.027}$, $PdH_{0.031}$, $PdH_{0.038}$, при $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/с постоянно отмечался сдвиг зерен на полированной поверхности сплавов α–$PdH_x$.

Рассмотрим подробнее процесс сдвига зерен в сплаве исходного состава $PdH_{0.038}$ при условиях $v_{нап\ ср} = 1{,}0$ МПа/с, □$PH_2 = 0{,}8$ МПа, представленный на рис. 3.

На рис. 3а представлены начальные этапы выделения границ зерен на полированной поверхности образца, видно появление отдельных фрагментов границ зерен. Рис. 3б демонстрирует тот момент времени, при котором выявленных границ зерен становится больше, и, очевидно, возникающие водородные напряжения становятся сильными настолько, чтобы вызвать дополнительное искажение поверхности. Стрелками на рис. 3б показаны полосы, образовавшиеся на поверхности образца в поперечном направлении под наклоном ≈ 30° к краю шлифа. Эти полосы весьма ярко видны при просмотре видеозаписи и хуже на фотографии.

Через 0,12 с количество выделившихся границ зерен увеличивается (рис. 3в). Водородные концентрационные напряжения продолжают нарастать, образуются новые границы зерен и картина достигает своего максимума через 2,00 с от начала водородного удара (рис. 3г). Далее происходит перераспределение ВК – напряжений, их величина уменьшается, происходит сглаживание «выпуклостей» и «углублений» на поверхности шлифа, и поверхность приобретает окончательный вид после релаксации водородных напряжений (рис. 3д). Такой остаточный рельеф, показанный на рис. 3д, сохраняется до конца эксперимента и после полной дегазации камеры установки, поэтому можно говорить о характерном необратимом сдвиге зерен в сплаве $PdH_{0.038}$.

Очень важным моментом является то, что в отличие от результатов работы [3], в данном эксперименте (рис. 3) не все зерна сохранили свою плоскую полированную поверхность. Следовательно, в данных экспериментальных условиях возникают не только макроскопические напряжения I-го рода, действующие в пределах всего образца, но и водородные напряжения II-го рода, действующие в объеме отдельных зерен.



а – 1,00 с

г – 2,00 с

б – 1,28 с

д – 4,08 с

в – 1,4 с

Рис. 3. Видеокадры процесса выделения границ зерен в сплаве $PdH_{0.038}$.

Рассмотрим теперь причины выявления границ зерен в сплавах α– и β–$PdH_x$.

Первопричиной смещения зерен палладия и сплавов палладия с водородом при водородном ударе, как это впервые было сформулировано в работе [3], являются водородные концентрационные (ВК –) напряжения, возникающие в металле при резком насыщении водородом. Как установлено в настоящей работе, есть некоторые минимальные параметры водородного удара (и минимальные ВК – напряжения), ниже которых воздействие водорода не вызывает сдвига зерен металла друг относительно друга. В условиях нашего эксперимента, при скорости подачи водорода меньше 1,0 МПа/с и (или) при величине ударов $\Delta P_{H_2} < 0{,}45$ МПа, сдвиг зерен в палладии не наблюдается. При параметрах водородного удара больше указанных значений в палладии, исходно не содержащем водорода, имеет место сдвиг зерен, но эффект проявляется весьма слабо.

В настоящей работе систематическими экспериментами впервые показано, что вторым важным фактором, усиливающим проявление изучаемого эффекта сдвига зерен, является наличие в палладии исходно растворенного водорода. Другими словами, сплавы палладия с водородом в значительно большей степени подвержены эффекту сдвига зерен при водородном ударе, нежели собственно палладий как металл. В связи с этим различием в поведении палладия и его сплавов с водородом могут обсуждаться две причины.

Первая причина обсуждалась в работе [6] в связи с явлением обратимых когерентных выпучиваний, вызванных дополнительным насыщением водородом β–гидрида палладия. Эта причина состоит в том, что вследствие водородного удара, исходное формирование первоначального градиента концентрации водорода сопровождается затем его восходящей диффузией из глубины образца к поверхности. Эта восходящая диффузия вызывается полем ВК – напряжений, порожденных собственно водородным ударом. Этот сложный суммарный самоорганизующийся синергетический процесс переформирования водородных концентрационных полей и полей ВК – напряжений, по-видимому, может вызвать суммарный рост внутренних напряжений и соответственно, усиление процесса сдвига зерен. Именно он, по-видимому, ответственен за то, что процесс сдвига зерен происходит не моментально, а длительно. При этом временные интервалы этого процесса (секунды) вполне соизмеримы со временем, необходимым для диффузионного перераспределения водорода в приповерхностных слоях палладия толщиной порядка микронов.

Возможно, что именно эти процессы перераспределения водорода в приповерхностных слоях металла в результате «прямой» и восходящей диффузии ответственны также за «игру» приповерхностной зеренной структуры, (когда экспериментально на поверхности наблюдаются сдвиги зерен и их «проседание» назад на место так, что они исчезают из поля видимости на плоском полированном шлифе).

Эти же процессы могут вызвать возникновение не только ВК – напряжений I рода в объеме всего образца, но еще и ВК – напряжений II рода, т.е. напряжений в масштабах одного зерна или его частей. Последняя возможность делает понятным наблюдавшиеся экспериментальные выпучивания поверхности некоторых зерен.

Итак, первая причина большей чувствительности сплавов палладия с водородом к водородным ударам по сравнению с палладием, исходно не содержащим водород, состоит в следующем: в случае сплава ($PdH_x$) это восходящая диффузия водорода из глубины образца к его поверхности после водородного удара, в случае чистого металла (Pd) – восходящей диффузии водорода нет, вследствие отсутствия водорода в глубине образца.

Рассмотрим теперь другую возможную причину большей чувствительности сплавов $PdH_x$ к водородным ударам. Не исключено, что водород, растворенный в палладии, ослабляет границы его зерен. Действительно, водород, растворяясь в металлах, расширяет их кристаллическую решетку. Именно с этим влиянием водорода связано возникновение ВК – напряжений. Можно полагать, что границы зерен, потенциально являясь местами предпочтительного скопления водорода, расширяются даже сильнее, чем регулярная решетка палладия. Силы связи в них ослабевают, и они становятся более легко подвержены сдвигам, при возникающих соответствующим образом ВК – напряжениях, которые действуют в масштабе всего образца.

К сожалению, нам не известны прямые экспериментальные данные о влиянии растворенного в палладии водорода на сдвиговую прочность его границ зерен. Однако, среди специалистов, работающих в области влияния водорода на механические свойства металлов, воззрения о предпочтительной сегрегации водорода по границам зерен, негативно изменяющей их свойства, широко распространены [1,7].

Таким образом, влияние водорода на границы зерен палладия, как одну из возможных причин большей чувствительности сплавов $PdH_x$ к водородным ударам, нельзя не учитывать.

**ВЫВОДЫ**

1. Подтверждено, что ускоренное насыщение водородом β–гидрида палладия в области однофазного твердого β–раствора приводит к выделению границ зерен на предварительно полированной поверхности образца.

2. Выделение границ зерен в сплаве β–$PdH_x$ происходит в результате частичной релаксации внутренних водородных концентрационных напряжений, генерированных в образце градиентами концентрации водорода. При этом возникающая система напряжений является весьма сложной.

3. В сплавах α–$PdH_x$ предварительно растворенный водород в палладии многократно усиливает выделение границ зерен в этих образцах при последующем ускоренном насыщении образца водородом (водородных ударах).

4. Смещение границ зерен в сплавах α–$PdH_x$, инициированное водородными ударами, является сложным процессом, в котором участвуют не только напряжения I-го рода, приводящие к сдвигу зерен друг относительно друга, но и напряжения II-го рода. Действие последних проявляется в необратимом искажении поверхности отдельных зерен в пределах своих границ.

5. Если локальные ВК – напряжения, соответствующие сдвигу зерен друг относительно друга и выделению границ зерен, не превышают предел упругости материала, то их дальнейшее перераспределение и релаксация приводит к обратному сдвигу зерен и полному исчезновению ранее выделившихся границ.

6. Явление выделения границ зерен в результате ускоренного насыщения водородом является важным как для водородной обработки, так и для проблем прочности материалов и требует дальнейшего систематического изучения.

**РЕЗЮМЕ**

У роботі описане явище виділення границь зерен на попередньо полірованій поверхні сплавів α– і β–$PdH_x$ паладію, що має місце при їх прискореному насиченні газоподібним воднем. Для порівняльного аналізу представлені результати вивчення виділення границь зерен у α– і β–області, проаналізовані подібності і відмінності процесу виділення границь зерен у α– і β–областях системи Pd-H. Показано, що причина виникнення явища - внутрішні водневі концентраційні (ВК) напруги, генеруємі в зразку виникаючими при прискореному насиченні градієнтами концентрації водню. Доведено, що в описаних експериментальних умовах ВК - напруги являються макроскопічними і діють у межах усього зразка. Коли величина цих напруг перевершує макроскопічну границю пружності, відбувається їхня релаксація шляхом зрушення зерен друг щодо друга протягом 1,5–2 с. У результаті цього зрушення границі зерен виникають на поверхні зразка. Експериментально зафіксовано, що зрушення окремих зерен має оборотний характер, і деякі з границь, що раніше з'явилися, знову пропадають протягом наступних 2 с.

**SUMMARY**

Systematic investigations of grain boundary appearance on the pre-polished surface of α– and β–$PdH_x$ alloys in result of accelerated hydrogen saturation have been continued with the present work. It has been shown, that appearing during rapid cooling of alloys in the α–phase and β–phase regions of the Pd-H equilibrium diagram hydrogen concentration gradients lead to the emergence of internal hydrogen concentration (HC) stresses. Relaxation of these HC-stresses is carried out by grain shifting relative to each other. Grain shifting duration lasts 1,5 – 2 s. As a result of the shifting, grain boundaries become visible on the preliminary polished surface of a sample examinated. The very interesting experimentally registered fact is that few grain shiftiness are reversible and some of appeared grain borders become invisible in following 2 s.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Колачев Б.А. Водородная хрупкость металлов. – М.: Металлургия, 1985. – 216 с.
2. Progress in Hydrogen Treatment of Materials. / V.A.Goltsov, ed. Donetsk-Coral Gables, Kassiopeya Ltd. – 2001. – 544 p.
3. M.V.Goltsova, Yu.A.Artemenko and V.I.Zaitsev. Kinetics of reverse hydride transformation in thermodynamically open palladium-hydrogen system.// J. of Alloys & Compounds. – 1999. – Vol.293-295. – P.379-384.
4. Е.Фромм, Е.Гебхардт. Газы и углерод в металлах. – М.: Металлургия, 1980. – 711 с.
5. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1965. – Т.7. – Теория упругости. – 204 с. – С.27-30.
6. Гольцова М.В., Жиров Г.И., Артеменко Ю.А. Когерентные и некогерентные изменения предварительно полированной поверхности гидрида палладия при дополнительном насыщении водородом// Физ. мет. и металловед. – 2001. – Т.93, №3. – С.1-5.
7. В.И.Ткачев, В.И.Холодный, И.Н.Левина. Работоспособность сталей и сплавов в среде водорода. – Львов: Вертикаль, 1999. – 255 с.

*Надійшла до редакції 21.01.2002 р.*

# Х І М І Я

УДК 541.6:620.18

## К ВОПРОСУ ВЗАИМОСВЯЗИ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ УГЛЯ. СООБЩЕНИЕ 2. ИК-СПЕКТРОСКОПИЯ ИСХОДНОГО БУРОГО УГЛЯ, МАТРИЦЫ И ГУМАТОВ

*А.В.Бутюгин, Ю.Н.Зубкова, Н.Б.Узденников, М.В.Гнеденко*

В сообщении 1 [1] была высказана гипотеза о том, что матрица бурого угля является продуктом внутримолекулярных превращений гуминовых веществ. Целью настоящей работы являлось получение доказательств соответствия химических структур исходного бурого угля, матрицы и гуминовых веществ. Одним из методов, позволяющих провести сравнительный анализ химических структур, является метод инфракрасной спектроскопии (ИКС). Одновременно было проведено сравнение адсорбционных свойств исходного бурого угля (БУ), остаточного угля после 28-и стадий отмывок-экстракций (ОУ-28) и матрицы угля после 46-и стадий отмывок-экстракций (М), а также влияние низкотемпературного жидкофазного окисления на адсорбционные свойства и структуру угля.

Исходный уголь отмывали от водорастворимых гуминовых веществ с помощью 3%-ных щелочных растворов при комнатной температуре (всего 46 стадий экстракций при соотношении уголь: раствор = 1:30). Окисление угольной матрицы проводили 0,1%-ным пероксидом водорода в 3%-ных гидроксидах натрия и аммония при тех же соотношениях уголь: раствор 1:30 и при комнатной температуре. Адсорбцию гексана, бензола, изобутилового спирта и уксусной кислоты проводили из парогазовой фазы при температуре 50°С в течение 5 часов. ИК-спектры снимали в таблетках 0,5%-ного KBr на спектрофотометре «75IR».

На рисунке 1 приведены ИК-спектры исходного бурого угля (БУ) и гуминовой кислоты (ГК). Можно отметить, что в области 2800-3500 $см^{-1}$ спектры практически идентичны, а в области 600-1700 $см^{-1}$ наблюдаются видимые различия: в спектре гуминовой кислоты возрастают интенсивности пиков кислородсодержащих групп (1140, 1610 и 1700 $см^{-1}$) и уменьшается интенсивность полос $CH_3$-, $CH_x$- групп (1360-1440 $см^{-1}$), что соответствует более высокой гидрофильности и растворимости в воде гуминовых кислот.

В целом же видно, что общий характер ИК-спектров подобен и соответствует близким по химической структуре веществам.

На рис.2 приведены спектры исходного бурого угля, остаточного угля после 28-и отмывок-экстракций и матрицы (М после 46-и отмывок-экстракций). Сравнение ИК-спектров показывает, что по мере отмывки исходного бурого угля от гуминовых веществ возрастает различие ИК-спектров исходного угля, остаточных углей и матрицы в области 1100 –1700 $см^{-1}$, отвечающей колебаниям С=О феноксигрупп (1150 $см^{-1}$ и 1700 $см^{-1}$), С=О, Н-О-, ароматических С-С групп (1610 $см^{-1}$), а в области 3400$см^{-1}$ наблюдается уменьшение интенсивности колебаний ОН-групп при увеличении интенсивности полос 2860-2950 $см^{-1}$, отвечающих колебаниям $CH_3$-, $CH_x$- групп. То есть наблюдается относительная гидрофобизация остаточного угля в результате удаления гуминовых веществ.

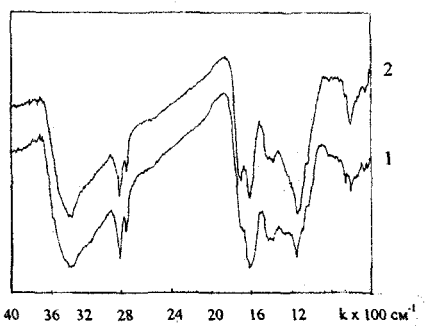



Рис. 1. ИК-спектры: 1 – БУ; 2 – ГК.

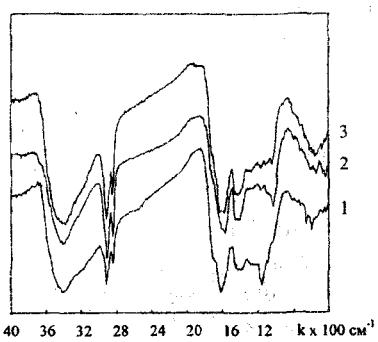



Рис. 2. ИК-спектры: 1 – БУ; 2 – ОУ-28; 3 – М.

Данные ИК-спектров, свидетельствующие об относительном увеличении гидрофобности остаточных углей и матрицы после удаления гуминовых (гидрофильных) веществ, подтверждаются данными по адсорбции (таблица 1).

©Бутюгин А.В., Зубкова Ю.Н., Узденников Н.Б., Гнеденко М.В.

Таблица 1

Зависимость адсорбции органических веществ на исходном буром угле, на остаточном угле после различных стадий отмывок-экстракций и на матрице (мг/г)

| Адсорбат | 1-й опыт (0-340 мкм ) | | 2-й опыт (0-340 мкм ) | | 3-й опыт (70-125 мкм ) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | БУ | ОУ-7 | БУ | М | БУ | ОУ -28 |
| Гексан | 56,7 | 102,5 | 53,1 | 63,3 | 154,4 | 160,0 |
| Бензол | 32,3 | 107,7 | 123,3 | 166,7 | 127,7 | 129,7 |
| Изобутиловый спирт | 89,4 | 123,9 | 103,9 | 103,7 | 129,2 | 131,8 |
| Уксусная кислота | 272,7 | 299,8 | 283,1 | 306,6 | 203,9 | 240,2 |

На рис.3 приведены ИК-спектры исходного бурого угля, остаточного угля после 28-и отмывок-экстракций и остаточного угля после 28-и отмывок-экстракций окисленного 0,1%-ным пероксидом водорода в 3%-ных гидроксидах натрия (ОУ-28/1ок) и аммония (ОУ-28/2ок). Видно, что окисление остаточного угля не приводит к видимым изменения ИК- спектра в диапазоне 2800-3500 $см^{-1}$, но приводит к изменениям спектра в области 1100 –1700 $см^{-1}$, что свидетельствует об образовании различных кислородсодержащих групп (С-О-С-, СООС-, С=О, Н-О-) и некоторого увеличения ароматичности (800 $см^{-1}$). Увеличение ароматичности в процессе окисления подтверждает вероятность внутримолекулярных преобразований.

На рис. 4 приведены ИК-спектры гуминовой кислоты из исходного угля (ГК) и гумата из окисленного остаточного угля после 28-и отмывок-экстракций (Г ОУ-28/1ок). Если ИК- спектр гумата из исходного бурого угля имеет достаточно большое сходство со спектром исходного угля, то ИК- спектр гумата из окисленного остаточного угля имеет сильные отличия от спектров гуматов из исходного угля во всем диапазоне частот. Видно, что при окислении практически исчезают полосы $CH_3$- и $CH_x$- групп (2860-2950 $см^{-1}$ ), а в области 1100-1700 $см^{-1}$ произошло расщепление спектра, что свидетельствует об изменении химической структуры (возрастает ароматичность).

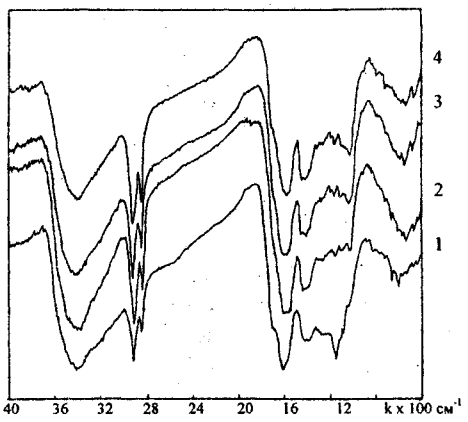



Рис. 3. ИК-спектры: 1 – БУ; 2 – ОУ-28; 3 – ОУ-28/1ок; 4 – ОУ-28/2ок.

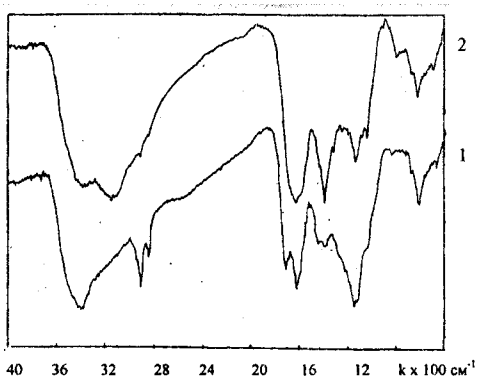



Рис. 4. ИК-спектры:1 – ГК; 2 – Г ОУок.

На рис. 5 и 6 приведены ИК-спектры исходного бурого угля и остаточного угля после 28-и отмывок-экстракций после адсорбции на них гексана и бензола. Четко видно, что адсорбция неполярных углеводородов приводит к усилению интенсивности полос 2860-2950 $см^{-1}$, отвечающих колебаниям $CH_3$- и $CH_x$- групп, что подтверждает факт адсорбции.

На рис. 7 приведены ИК-спектры адсорбции уксусной кислоты на исходном буром углей, на остаточном (после 28-и отмывок-экстракций) и окисленном остаточном углях. Изменения ИК-спектров в результате адсорбции уксусной кислоты имеют сложный характер: возрастает интенсивность полос, отвечающих колебаниям $CH_3$- и $CH_x$- групп, и несколько уменьшается интенсивность полос в области 1100-1700 $см^{-1}$, отвечающих колебаниям собственных функциональных групп угля и остаточного угля. Подобное явление также отмечается в работе [2]: там адсорбция фенола на угле привела к уменьшению интенсивности полос ИК-спектров, отвечающих колебаниям собственных ОН- групп.

Уже после 7-и стадий отмывок-экстракций (фракция 0-340 мкм) адсорбция гексана возросла на 80% , бензола - на 233%, изобутанола – на 58%, уксусной кислоты – на 9,9%. Но на матрице (после 46-и отмывок-экстракций) адсорбция гексана увеличилась всего на 19%, бензола – на 35%, уксусной кислоты

– на 8%, а изобутанола уменьшилась на 0,2% по сравнению с исходным углем. При этом адсорбция уксусной кислоты в абсолютном исчислении больше, чем адсорбция других органических соединений.

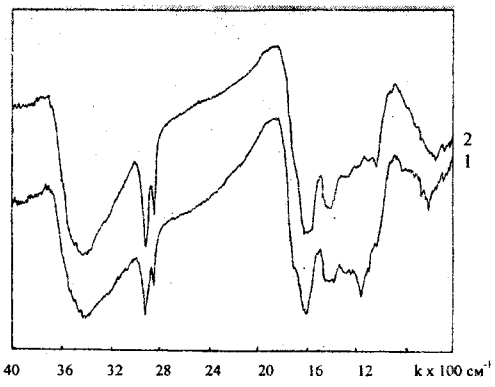



Рис. 5. ИК-спектры после адсорбции гексана на: 1 – БУ; 2 – ОУ-28.

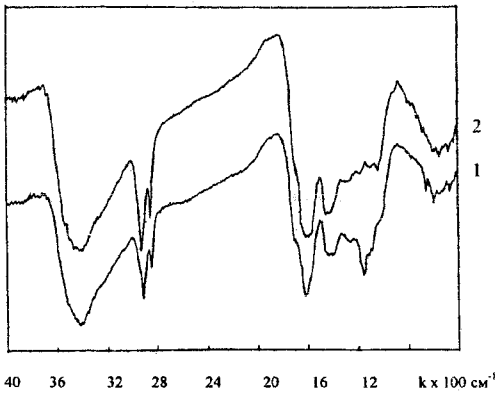



Рис. 6. ИК-спектры после адсорбции бензола на: 1 – БУ; 2 – ОУ-28.

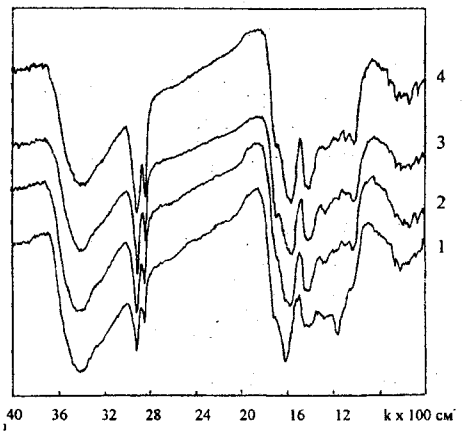



Рис. 7. ИК-спектры после адсорбции уксусной кислоты на: 1 – БУ; 2 – ОУ-28; 3 – ОУ-28/1ок; 4 – ОУ-28/2ок.

Окисление остаточного угля и матрицы приводит к уменьшению адсорбции. Такое явление свидетельствует о том, что происходит снижение адсорбционного потенциала при хемосорбции (окисление – это химическая адсорбция). Снижение адсорбционного потенциала с одновременным относительным повышением гидрофобности (лиофобности) уже отмечалось ранее [3]. Вероятно, что в процессе отмывок-экстракций, которые проводились длительное время на воздухе, происходит окисление поверхности угольного вещества и снижение его адсорбционного потенциала.

Следует отметить, что в ИК- спектрах исходного бурого, остаточных углей, гуматов произошло смещение полосы колебаний ОН- групп с частоты 3300 $см^{-1}$ до 3400 $см^{-1}$ по сравнению со спектрами других ископаемых углей, что, возможно, является особенностью бурых гуматсодержащих углей.

Таким образом, данные ИК- спектроскопии исходного бурого угля, остаточных углей и матрицы, гуминовых веществ свидетельствуют о возможности формирования (образования) матрицы из гуминовых веществ в результате внутримолекулярных превращений (самоокисления, конденсации).

**РЕЗЮМЕ**

Вивчено ІЧ- спектри вихідного та залишкового бурого вугілля, матриці та гуматів. Встановлено взаємозв'язок структур цих об'єктів з їх адсорбційними властивостями.

**SUMMARY**

IR-spectrums of initial and residual coal, matrix and humates are investigated. The interrelation of chemical structure of this objects with their adsoptional properties are established.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Бутюгин А.В., Узденников Н.Б., Гнеденко М.В. К вопросу о взаимосвязи структуры и свойств угля. Сообщение 1. Установление соответствия структуры землистого бурого угля теоретическим моделям // Вісник Донецького національного університету, сер. А: Природничі науки, вип. 1, 2002. – С.362-363.
2. Симонова В.В., Шендрик Т.Г. Адсорбция фенола из водных растворов модифицированными солеными углями// Химия твердого топлива, 2002. – №5. – С.52-64.
3. Зубкова Ю.Н., Бутюгин А.В. Окисленность и свойства поверхности ископаемых углей// Химия твердого топлива, 1984. – №1. – С.55-57.

*Надійшла до редакції 21.01.2003 р.*

УДК 542.952.6:547.391:1-31

# КИНЕТИКА СОПОЛИМЕРИЗАЦИИ МЕТИЛМЕТАКРИЛАТА С ФТОРСОДЕРЖАЩИМ МОНОМЕРОМ

*В.И.Мельниченко, К.И.Манько, О.П.Бовкуненко*

Сополимеры на основе высокофторированых и акриловых мономеров нашли применение для материалов специального назначения. Присутствие фтора в полимерных материалах обеспечивает их высокую кислородную проницаемость, термическую и химическую стойкость, низкие температуры стеклования [1, 2]. В литературе описаны рецептуры синтеза полимеров оптического назначения на основе полифторированных мономеров. Фторакриловые мономеры способны к термической и инициированной органическими пероксидами полимеризации [3, 4], тетрафтордихлоризопропилакрилат и метакрилат полимеризуются спонтанно уже при 293 К [5]. Некоторые из фторсодержащих мономеров активно вступают в реакцию деполимеризации с виниловыми и акриловыми мономерами [6]. В то же время сведения о кинетических параметрах реакции их сополимеризации с акриловыми мономерами весьма ограничены. В связи с этим представляет целесообразным проведение исследований сополимеризации этих мономеров с другими мономерами и установления взаимосвязи условий синтеза и свойств полученного полимера.

В работе исследована инициированная сополимеризация 1,1,5-тригидроперфторамилметакрилата (ГФМА) с метилметакрилатом (ММА) на начальных стадиях. В качестве инициатора использовали лаурилпероксид (ЛП). Скорость процесса определяли методом дилатометрии. Для этого были измерены плотности исходных мономерных смесей и полимеров на их основе. Установлена неаддитивная зависимость плотности мономерных смесей от их состава. Во всех случаях плотности мономерных смесей выше расчетных. Причиной этого может быть либо образование ассоциатов между полифторированным мономером и ММА вследствие электроотрицательных свойств фтора, либо структурное расположение малых молекул ММА внутри молекул фторированного мономера.

Кинетические исследования сополимеризации ГФМА и ММА проводили при различном исходном соотношении мономеров в температурном интервале 328-348 К, концентрация ЛП=$5\cdot10^{-4}$ моль на моль мономерной смеси. На начальных стадиях наблюдается период ингибирования. Причина его появления возможно заключается в особенностях полимеризации фторированного мономера (так как с увеличением его доли период ингибирования растет). Также можно предположить, что полифторированный мономер содержит некоторые примеси, которые ингибируют процесс полимеризации.

На основе полученных экспериментальных данных рассчитана скорость полимеризации на линейных участках зависимостей «конверсия-время». Расчеты представлены в таблице. В интервале температур 328-348 К скорость сополимеризации ГФМА и ММА составляет $\approx10^{-4}$ кмоль/м$^3$с и сопоставима со скоростью гомополимеризации ММА при одинаковых условиях инициирования. С увеличением доли фторированного компонента скорость сополимеризации несколько снижается.

Таблица

Зависимость скорости инициирования и сополимеризации от состава исходной мономерной смеси.

| Состав смеси в молях | Т, К | $V\cdot10^4$, кмоль/м$^3$с | $V_{ин}\cdot10^7$, кмоль/м$^3$с |
|---|---|---|---|
| ММА | 348 | 6,47 | 5,24 |
| | 338 | 2,76 | 0,94 |
| | 328 | 0,99 | 0,18 |
| ГФМА : ММА 1 : 10 | 348 | 6,39 | 0,14 |
| | 338 | 2,68 | 0,97 |
| | 328 | 0,95 | 0,12 |
| 1 : 2 | 338 | 2,60 | 0,39 |
| 1 : 1 | | 2,46 | 0,2 |
| 2 : 1 | | 2,05 | 0,09 |

Методом ингибиторов была определена скорость инициирования при сополимеризации ГФМА и ММА с целью определения кинетических параметров реакции. В качестве ингибиторов использовали п-бензохинон (БХ) и 2,2-дифенил-1-пикрилгидразил (ДФПГ). Было установлено, что в данной системе БХ проявляет свойства слабого ингибитора, вызывая снижение скорости полимеризации, но не прекращая процесса (рис.1). При введении в исследуемую систему ДФПГ (рис.2) наблюдается соответствующий период индукции, в течение которого полимеризация практически не наблюдается. При соотношении



©Мельниченко В.И., Манько К.И., Бовкуненко О.П.

мономеров 1 моль ГФМА и 10 моль ММА этот период составляет от 42 до 80 мин для концентрации ДФПГ $(1,5\text{-}4,5)\cdot10^{-5}$ моль на моль мономерной смеси. Зависимость периода ингибирования от концентрации носит линейный характер, что указывает на количественное взаимодействие первичных радикалов с молекулами ингибитора. По истечении периода ингибирования скорость сополимеризации ГФМА с ММА достигает стационарного значения. Однако скорость установившаяся после израсходования ДФПГ примерно на 10% ниже скорости в отсутствие ингибитора. Это объясняется тем, что продукт присоединения дифенилпикрилгидразила к радикалам сам является ингибитором полимеризации данных мономеров, хотя и гораздо более слабым, чем ДФПГ.

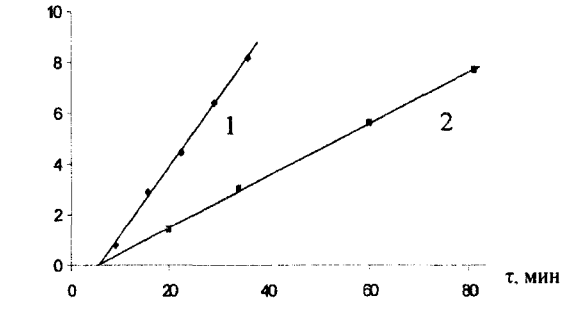



Рис.1. Кинетика сополимеризации ГФМА с ММА (1:10) в присутствии п-бензохинона Температура 338 К. Концентрация БХ, моль/моль: 1 – 0; 2 - $1\cdot10^{-4}$.

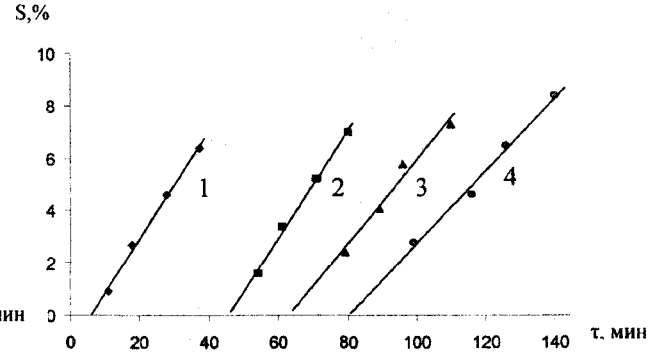



Рис. 2. Кинетика сополимеризации ГФМА с ММА (1:10) в присутствии ДФПГ. Температура 338 К. Концентрация ДФПГ, моль/моль: 1 – 0; 2 – $1,5\cdot10^{-5}$; 3 - $3\cdot10^{-5}$; 4 - $4,5\cdot10^{-5}$.

Используя значения скорости инициирования при различной температуре, установлена температурная зависимость отношения константы обрыва ($k_0$) и константы роста ($k_p$), которая описывается уравнением:

$$\frac{k_0}{k_p^2} = (2{,}02\times10^{10} \pm 0{,}2\times10^{10})\exp\left[-(52200\pm1100)/RT\right]$$

Полученные $\frac{k_0}{k_p^2}$ сопоставимы со значениями для гомополимеризации ММА, но активность ГФМА в реакции роста цепи ниже.

В результате проведенных исследований получена зависимость скорости инициирования от состава исходной мономерной смеси (рис.3) . Из рисунка видно, что с увеличением доли ГФМА скорость инициирования, как и общая скорость сополимеризации, уменьшается. Это указывает на меньшую активность фторированного мономера по сравнению с ММА.

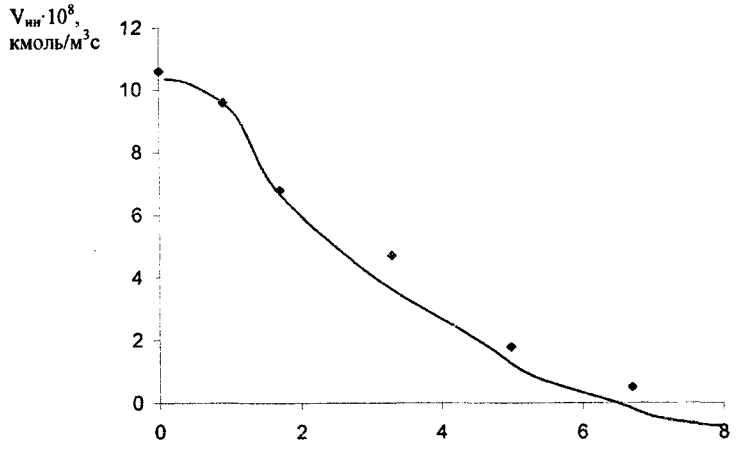



Рис. 3. Зависимость скорости инициирования от состава исходной мономерной смеси при сополимеризации ГФМА и ММА. Температура 338 К.

С целью получения полимеров различной степени прозрачности варьировался состав исходной мономерной смеси. Установлено, что увеличение доли фторированного мономера не влияет на прозрач-

ность готовых полимеров. Определены температуры стеклования исследуемых сополимеров, которые меняются от 352 до 322 К при увеличении фторированного компонента в 2 раза.

Полученные экспериментальные данные позволяют наметить пути оптимизации процесса получения оптически прозрачных, однородных по составу сополимеров с необходимыми физико - механическими свойствами.

**РЕЗЮМЕ**

Досліджена ініційована сополімерізація 1,1,5-тригідро-перфторамілметакрилату с метилметакрилатом на початкових стадіях. Визначено швидкості ініціювання та сополімерізації в температурному інтервалі 328 – 348 К при різному початковому співвідношенні компонентів.

**SUMMARY**

It has been studied initiated by benzoyl peroxide 1,1,5-trihydroperfluoroamylmetacrylate with metilmetacrylate copolymerization on the initial stages. The initiation and copolymerization rates in the temperature range 328 – 348 K under different initial component ratio was determined.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Пономаренко В.А., Круковский С.П., Алыбина А.Ю. Фторсодержащие гетероцепные полимеры. – М.: Наука, 1973.
2. Богуславская Л.С., Пантелеева И.Ю., Морозова Т.В. и др. // Усп. Химии. – 1990. – 59, №9. – С.1555-1575.
3. Пат. №20466, Япония, кл. 26 В 151 / К. Ацуи, Х. Ивао, С. Танэоми. – Опубл. 02.09.68.
4. Пат. №1118007, кл. С 2С, В 2Е, В 2К, С 3Р,DIP (С 07с) / Fieldind Brian Crosbie. – Опубл. 26.06.68.
5. Пат. №3,177,187 США, кл.260-89.5 / Hollander J., Woolf C. – Опубл. 06.04.65.
6. Докукина А.Ф., Питеркин Б.Д., Смирнова З.А. // Тез. докл. Всесоюз. конф. «Радикальная полимеризация». – Горький. – 1989. – С.41-42.

*Надійшла до редакції 21.01.2003 р.*

УДК 691.175:678.747:547.665:547.728

# ИНДЕН-КУМАРОНОВЫЕ СМОЛЫ И СИНТЕТИЧЕСКИЕ ЖИРНЫЕ КИСЛОТЫ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПРОТИВОКОРРОЗИОННЫХ ПЛЕНКАХ

*Е.В.Горохов, Ю.Б.Высоцкий, В.П.Королев, С.И.Сохина, О.Н.Шевченко, Ю.В.Селютин*
*Донбасская государственная академия строительства и архитектуры*

Неблагоприятная экологическая ситуация в регионе Донбасса и в целом на Украине вызвана возрастающими масштабами накопления промышленных отходов. Загрязнение окружающей среды, повышение ее агрессивности наносит, кроме того, огромный ущерб экономике страны. В частности, в результате коррозии сталебетонных и металлических конструкций нередки аварийные ситуации, которые усугубляют опасность возникновения экологической обстановки с несчастными исходами.

В связи с этим, поиск способов утилизации отходов в качестве противокоррозионных материалов, в том числе ингибиторов коррозии и защитных покрытий, одновременно снизит экологическую напряженность и даст экономический эффект в результате ресурсосбережения и расширения сырьевой базы народнохозяйственного комплекса. Решение этих вопросов и предопределило цель настоящей работы.

Так в качестве основы при получении противокоррозионных композиций нами использована фракция $C_{20}$ и выше синтетических жирных кислот (СЖК), а также полимеризат инден-кумароновых смол (ИКС), полученный термополимеризацией смолообразующих тяжелой фракции бензола коксохимического производства. В качестве ингибирующих добавок использованы амино-нитросодержащие смолистые отходы Крымского ПО «Химпром»

В качестве модельных соединений исследована антикоррозионная активность функционально-замещенных производных стирола в механических смесях с пленкообразующим, а также их высокомолекулярных аналогов (бинарных и тройных сополимеров), моделирующих по структуре и функциональному набору химически активных групп исследуемые отходы.

Исследования проводились на потенциостате П-5827. Долговечность покрытий оценивалась путем определения обобщенного показателя качества покрытия (Аз) по методу Карякиной в 3% растворе хлорида натрия (ускоренный метод) и по программе «Промышленная атмосфера» в камере искусственной погоды ИП-3.

В оценке защитных свойств ингибиторов особое значение имеет выявление связи структуры их молекул (в частности электронной плотности на функциональных группах, определяющей характер и прочность адсорбционных связей с подложкой) с параметрами ингибирующего действия, вызываемого данными соединениями на катодных и анодных участках металла. При этом электронные эффекты заместителей в коррозионных процессах обычно рассматривают с помощью корреляций с σ– константами Гаммета или с величинами $pK_a$. В настоящей работе катодная (Рк) и анодная (Ра) поляризуемости стали Ст.3 под пленками синплеза, содержащего добавки замещенных стиролов, сопоставлены с π– электронными зарядами на реакционных центрах, σ–константами заместителей и величинами рКа.

Экспериментальные значения Рк и Ра для изучаемых замещенных стирола представлены в таблице 1. Статистическая обработка данных показала, что кинетическое торможение катодной и анодной реакции (Рк и Ра) удовлетворительно коррелирует с величиной химического сдвига Нв протонов винильной группы для всех исследованных замещенных стиролов

$$Рк = (-0{,}636 \pm 0{,}032)\cdot\delta_{Нв} + (4{,}973 \pm 0{,}016) \quad (1)$$
$$n = 31;\ S_0 = 0{,}033;\ R = 0{,}964$$
$$Ра = (0{,}306 \pm 0{,}018)\cdot\delta_{Нв} + (1{,}203 \pm 0{,}094) \quad (2)$$
$$n = 31;\ S_0 = 0{,}019;\ R = 0{,}950$$

Видим, что со смещением химического сдвига Нв в сильное поле поляризуемость на катодных участках увеличивается, а на анодных – уменьшается. Поскольку электронодонорные заместители повышают электронную плотность на винильной группе стирола, а акцепторные понижают, то не исключена возможность участия винильной группы в адсорбционных процессах и, как следствие, в торможении коррозии. Об этом свидетельствует и факт ингибирования анодного растворения и катодной деполяризации чистым стиролом (табл.1)

Еще одним реакционным центом, благодаря которому может ингибироваться катодный процесс, является аминогруппа с не поделенной парой электронов у атома азота в замещенных аминостиролах. Действительно, наблюдается хорошая корреляция величин Рк с химическим сдвигом протонов $NH_2$ группы (табл. 1):

$$Рк = (-0{,}294 \pm 0{,}001)\cdot\delta_{NH2} + (2{,}838 \pm 0{,}003) \quad (3)$$

©Горохов Е.В., Высоцкий Ю.Б., Королев В.П., Сохина С.И., Шевченко О.Н., Селютин Ю.В. 

$n = 9;\ S_o = 0{,}001;\ R = 0{,}999$

Видно, что изменение химического сдвига протонов $NH_2$ – группы под влиянием электронодонорных заместителей в кольце сопровождается увеличением катодной поляризуемости; электроноакцепторные заместители, наоборот, понижают ее.

Таблица 1.

Катодная и анодная (Рк и Ра) поляризуемости по Ст. 3 под пленками «синплеза»* с 2% замещенных стиролов в 0,05 н растворе KCl при комнатной температуре (≈ 22° С)

| № п/п | Нв, На, Нс, C = C | Рк | | Ра | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Расчет по 5 | Эксперимент | Расчет по 6 | Эксперимент |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 3 – H, 4 – H | 1,710 | 1,700 | 0,366 | 0,330 |
| 2 | 2 – $NO_2$ | - | 1,567 | - | 0,426 |
| 3 | 3 – H, 4 – $NO_2$ | 1,547 | 1,506 | 0,431 | 0,470 |
| 4 | 3 – $CH_3$, 4 – $NO_2$ | 1,561 | 1,533 | 0,425 | 0,450 |
| 5 | 3 – $NO_2$, 4 – H | 1,561 | 1,544 | 0,425 | 0,442 |
| 6 | 3 – $NH_2$, 4 – H | 1,744 | 1,821 | 0,353 | 0,320 |
| 7 | 3 – H, 4 - $NH_2$ | 1,849 | 1,800 | 0,311 | 0,350 |
| 8 | 2 - $NH_2$ | - | 1,818 | - | 0,342 |
| 9 | 3 – H, 4 – $N(CH_3)_2$ | 1,884 | 1,899 | 0,297 | 0,330 |

Торможение катодной реакции, видимо, сводится к блокирующей специфической адсорбции за счет донорноакцепторных связей неподеленных пар азота и вакантных d–орбиталей железа, а также π–электронов двойной связи винильной группы или бензольного кольца. Не исключено одновременное участие в адсорбционном процессе всей молекулы, что способствует образованию более плотной барьерной пленки. В кислых средах в условиях водородной деполяризации на катоде может идти связывание катионов водорода аминогруппами (солеобразование) с появлением органических катионов, адсорбируемых на отрицательно заряженных катодных участках и тем ослабляющих катодный разряд.

Торможение анодной реакции растворения железа существенно возрастает при участии в адсорбции сильно электроноакцепторной $NO_2$-группы (табл. 1). Локализация электронной плотности на атомах кислорода $NO_2$-группы должна способствовать электростатической адсорбции молекул нитростирола на положительно заряженных анодных участках металла. Таким образом, выявленные закономерности помогают прогнозировать влияние природы функциональных групп в низкомолекулярных модельных соединениях на их ингибирующие свойства и на этой основе направленно регулировать противокоррозионные свойства механических смесей этих соединений с пленкообразующими.

Наиболее подходящей моделью высокомолекулярной структуры являются бинарные и тройные сополимеры, например, бутилакрилата или бутилметакрилата с амино-, нитростиролами.. В частности, исследованы противокоррозионные свойства пленок из сополимеров бутилметакрилата с n–аминостиролом и n–нитростиролом и тройного сополимера бутилметакрилата с n-амино- и n-нитростиролами (табл. 2) с содержанием последних в количестве 7%.

Таблица 2.

Сравнительная характеристика ингибирующего действия полимерных покрытий по поверхности стали Ст. 3 в 0,05 н растворе KCl при температуре 22° С.

| Вид поверхности | Покрытие | 7 % | |
|---|---|---|---|
| | | Ра | Рк |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Опескоструенная | Сополимер БМА-n-АС | 0,31 | 1,216 |
| -"- | Сополимер БМА-n-НС | 0,511 | 1,08 |
| -"- | Терполимер БМА-n-АС- n-НС | 0,559 | 1,24 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Ржавая:слой 100 мкм | Сополимер БМА-n-АС | 0,302 | 1,58 |
| -"- | Сополимер БМА-n-НС | 0,448 | 1,42 |
| "- | Терполимер БМА-n-АС- n-НС | 0,600 | 1,87 |
| Хим.преобразованная | Сополимер БМА-n-АС | 0,575 | 1,50 |
| -"- | Сополимер БМА-n-НС | 0,614 | 1,56 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| -"- | Терполимер БМА-n-АС- n-НС | 0,790 | 1,68 |

Как и ожидалось, аминогруппы оказывают ингибирующее действие на катодный процесс. Нитрогруппы оказывают ингибирующее действие одновременно на анодный и частично катодный процессы при оптимальном их содержании 7%. Терполимер, содержащий в цепи и амино- и нитрогруппы ингибирует анодный и катодный процессы одновременно, причем влияние нитрогрупп и аминогрупп усиливается при их одновременном присутствии в макромолекуле.

Использование бинарных и тройных сополимеров указанного типа сдерживается, так как они малодоступны и относительно дорогостоящи. Это обстоятельство заставляет искать дешевые аналоги этих продуктов, среди которых в первую очередь следует назвать кубовые смолистые остатки производства «оксиамина» Крымского ПО «Химпром». Отходы представляют собой маслообразную смолистую массу, близкую по содержанию азота (13,20%) к аминостиролу (11,76 %) и содержащую (по данным ИК-спектроскопии) $NO_2$ – (1360; 1520 $см^{-1}$) и $NH_2$ – (3450 $см^{-1}$) группы, и являющуюся смесью первичных, вторичных и третичных нитроаминов. Определенный гравиметрическим и потенциостатическим методом ингибирующий эффект смолы в растворе HCl достигает 70 %. Амино-нитросодержащие смолистые отходы в качестве ингибирующей добавки были введены в противокоррозионные композиции на основе инден-кумароновой фракции. Результаты испытаний показали, что при этом повышаются защитные свойства пленок (рис.1).

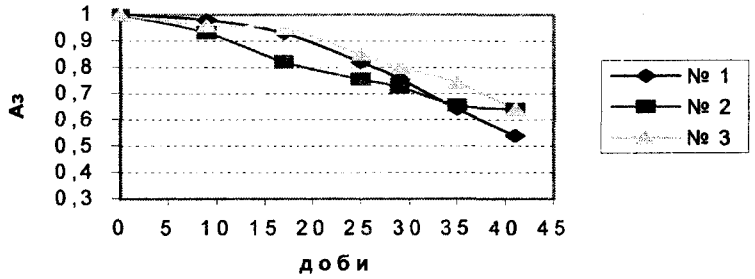



Рис.1 Зависимость Аз от времени испытаний: №1 – полимеризат ИКФ; №2 – полимеризат с добавками амино-нитросодержащей смолы; №3 - полимеризат с добавками амино-нитросодержащей смолы и х отходов мартеновского производства.

На основе СЖК (фракция $C_{20}$ и выше) разработана противокоррозионная мастика (табл.3, 4). Ингибирующие свойства в составах композиций определяются присутствием карбоксильных групп в молекулах СЖК.

Таблица 3.

Составы противокоррозионной мастики.

| № п/п | Составные компоненты | Содержание компонентов (% масс.) в составах | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 |
| 1 | Кубовая фракция СЖК $C_{20}$ и выше* | 20 | 25 | 30 | 43 | 45 | 47 |
| 2 | Отходы мартеновского производства ММК** | 22 | 20 | 18 | - | - | - |
| 3 | Алюминиевая пудра | - | - | - | 8 | 10 | 13 |
| 4 | Каменноугольный сольвент | 58 | 55 | 52 | 49 | 45 | 40 |

Таблица 4

Характеристика основных показателей.

| № п/п | Наименование показателя | Составы антикоррозионной мастики | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | №1 | №2 | №3 | №4 | №5 | №6 |
| 1 | Внешний вид | Коричневая суспензия | Коричневая суспензия | Коричневая суспензия | Серебристо-корич-невая суспензия | -"- | -"- |
| 1 | Аз (3% NaCl), через 10 суток, не менее | 0,390 | 0,395 | 0,390 | 0,474 | 0,500 | 0,482 |
| 2 | Аз (ИП-1-3), через 28 суток | 0,386 | 0,406 | 0,402 | 0,612 | 0,636 | 0,628 |

Утилизация отходов в виде противокоррозионных грунтовочных композиций позволила, с одной стороны, рекомендовать их для широкого использования для зон с малоагрессивной средой, и с другой – улучшить экологическую чистоту производства, которая в нынешних условиях работы завода требует безотлагательного решения из-за большого количества уже скопившихся отходов, сбрасываемых в воды Сиваша.

**РЕЗЮМЕ**

Розроблено протикорозійні матеріали з використанням інден-кумаронових смол, отриманих полімеризацією смолоутворюючих компонентів важкої фракції бензолу при переробці кам'яного вугілля, а також кубових залишків (фракція $C_{20}$ і вище) синтетичних жирних кислот, отриманих при переробці нафти. З матою підвищення захисних і фізико-хімічних властивостей покрить в якості інгібіруючих добавок використані смолисті відходи Кримського ВО «Хімпром», які схожі за будовою з нітро- і аміностиролами та нагадують за консистенцією олігомірну нітроаміноутримуючу смолисту масу.

**SUMMARY**

As basis fundamentals for obtaining antirust stuffs the indenes - coumarone resins obtained by a polymerization of vesininfícational components of last cut of benzole at processing of hard coals utilised and also the distillation residues (fraction C20 and are higher) than synthetic fatty acids (SFA), obtained at petroleum refining.

With the purpose of increase of protective and physico-chemical properties of covers of composition as the inhibiting components the tarry waste of the Crimean software "Chimprom", similar on a constitution to nitro and styryl amines and resembling according to the consistence oligomeric nitro-aminocontaining tarry weight utilised.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Противокорозійна мастика ПК. Пат. Украины №25041, Бюл. №6 от 25.12.98, Е.В.Горохов, А.П.Доня, Ю.Б.Высоцкий, В.П.Корлоев, С.И.Сохина.
2. Е.В.Горохов, А.П.Доня, Ю.Б.Высоцкий, В.П.Корлоев, С.И.Сохина. О прогнозировании времени жизни антикоррозионных покрытий по стали Ст.3. 2. Покрытия на основе кубовых остатков производства СЖК. Защита металлов. – 1995. – Т.31. – №1. – С.63-66.
3. Е.В.Горохов, Ю.Б.Высоцкий, В.П.Королев, С.И.Сохина, О.Н.Шевченко / Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск №1. Проблеми корозії та протикорозійного захисту металів. – Львів, 2000. – Т.2. – С.520-524.
4. Ю.Б.Высоцкий, А.П.Доня, Е.Ю.Балабанов, Н.А.Барба, С.И.Сохина / Защита металлов. – 1990. – Т.26. – №4. – С.591-597.
5. Е.В.Горохов, Ю.Б.Высоцкий, В.П.Королев, С.И.Сохина, О.Н.Шевченко / Фізико-хімічна механіка матеріалів. Спеціальний випуск №2. Електрохімічний захист і корозійний контроль. – Львів-Сєвєродонецьк. 2001. – С.142-149.

*Надійшла до редакції 21.01.2002 р.*

УДК 628.34:661.183

# СОРБЦИОННЫЕ СПОСОБНОСТИ БУРОГО УГЛЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К АНИОННЫМ КРАСИТЕЛЯМ

*М.В.Гнеденко*

Важной проблемой, стоящей в настоящее время перед различными отраслями народного хозяйства, является ликвидация отрицательных факторов воздействия на окружающую среду. Большой и невосполнимый экологический урон наносится водным ресурсам при сбросе в водоемы воды, прошедшей технологический цикл и содержащий широкий спектр примесей. Это в полной мере относится и к окрашенным сточным водам предприятий текстильной промышленности, в частности, к красильно-отделочным производствам, промстоки которых содержат красители, поверхностно-активные вещества, вспомогательные вещества, способствующие процессу крашения и много других веществ. В связи с этим, задачей нашего исследования являлось изучение возможности использования бурого угля в качестве сорбента текстильных анионных красителей с целью осветления окрашенных сточных вод.

Поставлена задача – изучить изменение концентрации текстильных красителей в ходе адсорбционной очистки, причем, в отличие от поставленного ранее эксперимента [1, 2, 3], поглощение красителей в слое сорбента решено было наблюдать в динамических условиях. С этой целью были изготовлены стеклянные колонки с площадью поперечного сечения 2,55 $см^2$ со съемным дренажным сетчатым дном, которым служили: латунная сетка, капроновая сетка и сетка из нержавеющей стали. Эксперимент позволил отдать предпочтение латунной сетке, на которую наносился различной высоты слой воздушно-сухого бурого угля различной степени дисперсности, а именно, ≤ 90 мкм; ≤ 340 мкм; ≤ 1000 мкм, а также 90 ÷ 340 мкм; 340 ÷ 1000 мкм. Выбор оптимальной степени дисперсности обусловлен необходимостью отмывки угля минимальным количеством воды от угольной пыли, наличие которой в фильтрате мешает определению концентрации красителя. Определена также оптимальная величина загрузки бурого угля, от которой зависит скорость протекания раствора через слой сорбента. Скорость протекания раствора, исходя из литературных данных [4, 5], должна составлять 1÷6 $м^3/м^2$·час.

В работе изучено поглощение из водных растворов анионных (прямых и кислотных) красителей различной концентрации, а также их смеси, что соответствует реальным стокам предприятий текстильной промышленности, которые, как правило, характеризуются наличием смеси красителей концентрации от 15 мг/л до 250 мг/л [4-9].

Объектами исследования служили анионные красители: кислотный оранжевый, прямой черный 3, прямой бордо и прямой коричневый КХ, имеющие различные структурные формулы [10].

В качестве сорбента использовали природный кислый бурый уголь Днепровского бассейна Александрийского месторождения Константиновского разреза с хорошо развитой пористой структурой и с высоким содержанием активных кислых функциональных (карбоксильных и гидроксильных) групп, водная вытяжка которого имела pH 4÷5.

В динамических условиях проведена серия опытов по поглощению красителя кислотного оранжевого фильтрацией через слой бурого угля дисперсностью 340÷1000 мкм высотой 65 мм. Масса угля в каждой колонке – 8 г. Скорость фильтрации – 3,5 $м^3/м^2$·час. В опыте 1 концентрация красителя в модельном растворе 20 мг/л, в опыте 2 – 100 мг/л. В опыте 3 в аналогичных условиях изучено поглощение смеси красителя кислотного оранжевого и прямого черного С, концентрация – 50 мг/л. Изучено изменение концентрации красителя в фильтрате в ходе адсорбционной очистки при многократном пропускании раствора красителя объемом 80 мл через один и тот же слой угля.

В таблице 1 представлены полученные экспериментальные данные, причем, приняты следующие условные обозначения: Q, $м^3/м^2$·час – скорость фильтрации; $С_{нач.}$ и $С_{кон.}$ – начальная и конечная концентрация красителя в растворе; А, % - степень адсорбции красителя, которую определяли по формуле:

$$A = (C_{нач} - C_{кон} / C_{нач}) \cdot 100\%.$$

Из данных, приведенных в табл. 1, следует, что в ходе адсорбционной очистки при повышении продолжительности сорбционной очистки наблюдается, как и следовало ожидать, повышение степени адсорбции красителя, несмотря на то, что насыщенность угля красителем растет и достигает при шестикратной обработке максимального значения, а именно, 90,0% ($С_{кон.}$=2,0 мг/л), 94,7% ($С_{кон.}$=5,3 мг/л) и 80,0% ($С_{кон.}$=10,0 мг/л) в сравнении с первоначальной концентрацией кислотного оранжевого 20 мг/л и 100 мг/л, а смеси красителей до 50 мг/л. Следует отметить, что поглощение красителя углем идет более интенсивно при его начальной концентрации 100 мг/л, вероятно, за счет образования в растворе крупных

©Гнеденко М.В.

мицелл склонного к ассоциированию красителя, имеющего сложное строение и осаждающегося на угле с хорошо развитой мезопористой поверхностью.

Таблица 1

Адсорбция красителей на буром угле в динамических условиях

| Кратность обработки | Опыт 1.$C_{нач}$=20 мг/л | | | | Опыт 2.$C_{нач}$=100 мг/л | | | | Опыт 3.$C_{нач}$=50 мг/л | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | τ, мин | Q | $C_{кон}$ | A | τ, мин | Q | $C_{кон}$ | A | τ, мин | Q | $C_{кон}$ | A |
| 1 | 1,7 | 3,54 | 9,0 | 55,0 | 5,4 | 2,9 | 46,730, | 53,3 | 2,0 | 2,48 | 31,7 | 36,6 |
| 2 | 3,9 | 2,73 | 7,7 | 61,5 | 10,7 | 2,9 | 7 | 69,3 | 3,5 | 2,15 | 25,4 | 49,2 |
| 3 | 6,7 | 2,13 | 5,7 | 71,5 | 15,7 | 2,2 | 22,3 | 77,7 | 4,0 | 2,00 | 21,3 | 57,5 |
| 4 | 9,7 | 2,01 | 4,5 | 77,5 | 19,0 | 1,8 | 13,3 | 86,7 | 6,0 | 1,92 | 15,8 | 68,4 |
| 5 | 12,9 | 1,90 | 3,5 | 82,5 | 22,4 | 1,8 | 9,3 | 90,7 | 8,5 | 1,80 | 12,9 | 74,2 |
| 6 | 16,3 | 1,83 | 2,0 | 90,0 | 25,7 | 1,8 | 5,3 | 94,7 | 11,7 | 1,70 | 10,0 | 80,0 |

Расчет количества адсорбированного бурым углем красителя показал, что оно составило в опыте 1 – 0,18 мг/г, в опыте 2 – 0,95 мг/г, в опыте 3 – 0,40 мг/г. Следует отметить снижение скорости фильтрации при повышении кратности обработки, что особенно характерно для опыта 1, когда оно составило 48,3% (от 3,54 до 1,83 $м^3/м^2$·час), в опыте 2 оно несколько меньше и составляет 37,9% (от 2,9 до 1,8 $м^3/м^2$·час), а в опыте 3 – 31,5% (от 2,48 до 1,7 $м^3/м^2$·час). Это, вероятно, может быть связано с насыщаемостью угля красителем и приводит, естественно, к росту времени протекания раствора через слой угля.

Интересная закономерность отмечена при анализе изменения концентрации красителя в зависимости от времени протекания раствора через слой угля. Для всех трех опытов отмечен одинаковый характер этой зависимости.

Проведены сравнительные исследования поглощения красителя кислотного оранжевого концентрации 20 мг/л бурым углем фракции 90 ÷ 340 мкм как в динамических условиях (Т:Ж=1:100; V=500 мл; m=10 г; τ =30 мин), так и в статических, то есть при интенсивном перемешивании на лабораторном встряхивателе типа М-К (Т:Ж=1:100; V=50 мл; m=0,5 г; τ =30 мин) в две стадии. При этом после проведения первой стадии очистки модельного раствора фильтрат обработан с использованием свежей порции угля в тех же условиях. Количество адсорбированного углем красителя – В (мг/г) определяли по формуле:

$$B = (C_{нач} - C_{кон}) \cdot V / 1000 \cdot m,$$

где $C_{нач}$ – начальная концентрация красителя, мг/л; $C_{кон}$ – равновесная концентрация красителя, мг/л; V – объем водного раствора красителя, мл; m - навеска бурого угля, г.

В табл. 2 приведены полученные экспериментальные данные.

Таблица 2

Адсорбция кислотного оранжевого на буром угле

| Стадия обработки | Адсорбция в условиях | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | динамических | | | статических | | |
| | С, мг/л | А, % | В, мг/г | С, мг/л | А, % | В, мг/г |
| 1-я стадия | 4,9 | 75,5 | 0,76 | 9,7 | 51,5 | 0,49 |
| 2-я стадия | 0,6 | 97,0 | 0,45 | 4,0 | 80,0 | 0,23 |

Полученные экспериментальные данные позволяют отдать предпочтение обработке окрашенных водных растворов в динамических условиях, поскольку очевидно преимущество в степени очистки в сравнении с обработкой в статических условиях. Кроме того, анализ данных табл. 1 и 2 позволяет утверждать, что нет необходимости в использовании на 2-ой стадии свежей порции угля, так как последовательное пропускание фильтрата через тот же слой угля, то есть увеличение кратности обработки (см. табл. 1) также приводит к повышению эффекта очистки, чего нельзя сказать о статическом способе, где эффект очистки значительно ниже.

Как уже отмечалось, реальные стоки текстильной промышленности характеризуются, как правило, наличием смеси красителей одного или различного классов, поэтому нами проведен эксперимент по изучению поглощения смеси красителей из водных растворов. Так, был приготовлен водный раствор смеси анионных красителей, а именно, прямого бордо, прямого коричневого и прямого черного С. Опыт по поглощению смеси красителей проводили в динамических условиях: раствор фильтровали с начальной скоростью Q=6 $м^3/м^2$·час через слой бурого угля дисперсностью 90 ÷ 340 мкм высотой 25 мм, масса угля

в колонке 11 г. Объем каждой пробы модельного раствора составлял 20 мл. Изучено изменение концентрации красителя в фильтрате в ходе адсорбционной очистки, а также скорости фильтрации от пробы к пробе очищаемого модельного раствора. В таблице 3 представлены полученные экспериментальные данные.

Таблица 3

Адсорбция на буром угле смеси прямых красителей

| Номер пробы | τ фильтрации, мин | Q, $м^3/м^2 \cdot час$ | $С_{кон}$, мг/л |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,08 | 5.55 | 3,79 |
| 2 | 1,17 | 5,13 | 3,72 |
| 3 | 1,32 | 4,56 | 3,62 |
| 4 | 1,40 | 4,29 | 3,45 |
| 5 | 1.67 | 3,60 | 3,10 |
| 6 | 1,83 | 3,27 | 2,59 |
| 7 | 2,67 | 2,25 | 2,24 |

Показано, что по мере увеличения количества фильтруемого модельного раствора наблюдается одновременное снижение как качества очистки, характеризуемое содержанием красителя в фильтрате ($С_{кон}$, мг/л), так и скорости фильтрации (Q, $м^3/м^2 \cdot час$).

Этот факт необходимо учитывать при проведении очистки окрашенных стоков в производственных условиях, что обусловлено недостатком бурых углей – такой механической прочностью, что приводит к образованию угольной пыли и, как следствие, к снижению скорости фильтрации [11].

**РЕЗЮМЕ**

Досліджено сорбційні можливості бурого вугілля відносно до ряду аніонних барвників в статичних та динамічних умовах, а також поглинання з водних розчинів аніонних барвників різної концентрації та їх суміші.

**SUMMARY**

Adsorption abilities of the brown coals regarding for anionic dyes series in static and dynamic condition are studied. The extraction anionic dyes from different concentration water solutions and their mixes are researched.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Богатырева Г.М., Волкова М.В., Зубкова Ю.Н. Очистка окрашенных промстоков углеродсодержащими сорбентами// Сб. научн. тр. Межд. научн.-практ конф. «Экологическая и техногенная безопасность». – Харьков: ХИСП, 2000. – С.20-24.
2. Модифицированные сорбенты для извлечения красителей из водных растворов/ Богатырева Г.М. – Донецк, 1997. – 10 с. – Деп. В ГНТБ Украины 09.01.97. №35-Ук97.
3. Зубкова Ю.Н., Басенкова В.Л., Гнеденко М.В. Извлечение некоторых красителей модифицированными буроугольными сорбентами / Хімічна промисловість України, №6. – 2002. – С.20-23.
4. Клименко Н.А., Мамонтова А.А., Ермаков Ю.С. Утилизация угля АГ-3 – отхода производства бутадиена – для очистки сточных вод текстильных предприятий // Химия и технология воды. – 1998. – №4. – С.315-317.
5. Суринова С.И., Воронина Т.Б., Клинкова В.В., Хотулева В.Н. Использование бурых углей для очистки окрашенных сточных вод// Химия и технология воды. – 1983. – №2. – С.78-82.
6. Фазуллина Э.П., Назаров Б.Г., Неклюдова Т.Г. Удаление соединений хрома в процессе коагуляционной очистки сточных вод красильно-отделочных производств шерстяной промышленности// Химия и технология воды. – 1988. – №5. – С.444-447.
7. Мамонтова А.А., Клименко Н.А. Органический коагулянт для извлечения красителей из сточных вод// Химия и технология воды. – 1988. – №2. – С.177-179.
8. Рязанцев А.А. Сорбент для очистки сточных вод анионных красителей// Химия и технология воды. – 1994. – №1. – С.99-102.
9. Бондарь В.Г., Зима С.В., Пивторак А.И., Ткаченко Л.И. Обесцвечивание сточных вод красильно-отделочного производства предприятий текстильной промышленности// Химия и технология воды. – 1983. – №5. – С.450-452.
10. Чекалкин М.А. Химия и технология органических красителей. – М.: Госхимиздат, 1956. – 575 с.
11. Казначеев Ю.Д., Воронина Т.Б., Суринова С.И. и др. Применение природных углей для очистки промышленных маслоэмульсионных сточных вод// Химия твердого топлива. – 1978. – №1. – С.52-56.

*Надійшла до редакції 21.06.2003 р.*

# Б І О Л О Г І Я

УДК 57.013 + 539.214.9

## СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛОГО БИОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА IN VITRO

*О.К.Зенин*, А.Г.Цитрин**, В.В.Белоусов, Г.С.Кирьякулов*, Е.А.Неудачина**
**Донецкий государственный медицинский университет,*
***ЗАО «ДОРИС», г. Донецк*

Предлагаемый способ определения величины остаточных деформаций полого биологического объекта in vitro, относиться к области экспериментальной биологии и медицины, в частности – к лабораторным методам определения остаточных деформаций, как величины, количественно характеризующей пластичность биообъекта in vitro, например, сердца, матки, сосуда и т.д.

Известен способ определения величины остаточных деформаций биологического объекта in vitro [1], путем воздействия на исследуемый биообъект внешней деформирующей нагрузкой. При этом измеряют величины нагрузки и деформации исследуемого объекта.

Недостатком известного способа является то, что механические испытания проводят не на целом органе, а на его части, поэтому концевые эффекты очень велики, а их теоретический анализ, ввиду сложности, до сих пор не проведен.

Наиболее близким по технической сущности к заявляемому способу является способ определения остаточных деформаций сердечной мышцы in vitro [2], путем введения в полость сердца несжимаемой жидкости и измерения величин ее объема. При этом величину остаточных деформаций (количественно характеризующую пластические свойства исследуемого органа) определяли по формуле:

$$\varepsilon=(V^{1/3} - V_0^{1/3})/V_0^{1/3} \qquad (1)$$

где ε – показатель, количественно характеризующий величину остаточных деформаций исследуемого биологического объекта, V – объем несжимаемой жидкости, вошедшей в полость биообъекта в момент видимого его разрушения, $V_0$ – объем несжимаемой жидкости, вошедшей в полость биообъекта при P=100 мм Hg.

Недостатком известного способа является невозможность точно определить момент, когда биологический объект отвечает на деформацию как упругое тело, а когда как пластическое. Иными словами, невозможно точно определить начало разрушения биообъекта, т.е. предел его упругости. Последнее не позволяет точно установить $V_0$, а, следовательно, рассчитать величину остаточных деформаций биологического объекта, что препятствует пониманию сущности процессов происходящих при деформации и разрушении живой материи.

В основу данного способа поставлена задача исследования величины остаточных деформаций полого биологического объекта. Это достигается путем введения в полость биообъекта несжимаемой жидкости, измерения величин ее давления и объема, с одновременной регистрацией сигналов акустической эмиссии (АЭ), по которым определяют предел упругости биообъекта (момент начала разрушения), что дает возможность сравнительно точно рассчитать величину остаточных деформаций.

Сущность способа заключается в том, что определение параметра количественно характеризующего величину остаточных деформаций полого биологического объекта осуществляют путем введения в полость биообъекта несжимаемой жидкости, измерения величин ее давления и объема, с одновременной регистрацией сигналов АЭ, по которым определяют предел упругости биообъекта (начало его разрушения), а величину остаточных деформаций рассчитывают по формуле:

$$\varepsilon=(V^{1/3} - V_{ae}^{1/3})/V_{ae}^{1/3} \qquad (2)$$

где: ε – показатель количественно характеризующий величину остаточных деформаций исследуемого биологического объекта, V – объем несжимаемой жидкости, вошедшей в полость биообъекта в момент видимого его разрушения, $V_{ae}$ – объем несжимаемой жидкости вошедшей в полость исследуемого биообъекта в момент появления сигналов АЭ, т.е. в момент достижения им предела упругости – начала разрушения.

Новым в заявляемом способе является то, что дополнительно регистрируют сигналы АЭ, по которым определяют предел упругости биообъекта (момент начала его разрушения). Это позволяет использовать для расчетов величины остаточных деформаций биообъекта, показания приборов измеряющих деформацию непосредственно в момент, когда объект ведет себя как пластическое тело.


©Зенин О.К., Цитрин А.Г., Белоусов В.В., Кирьякулов Г.С., Неудачина Е.А.

Известно, что биологический объект реагирует на деформацию вначале как упругое, а потом, после достижения предела упругости, как пластическое тело [1]. Поэтому для более точного определения величины количественно характеризующей пластические свойства биообъекта очень важно определить конец упругой деформации и начало пластической. При этом под упругостью подразумевают – свойство исследуемого объекта восстанавливать (после снятия нагрузки) первоначальные размеры и форму, под пластичностью – свойство исследуемого объекта сохранять полностью или частично получившуюся под действием внешних сил деформацию по прекращении действия этих сил. Исследуемый объект с достаточной точностью можно считать упругим до тех пор, пока возникающие в нем, наведенные внешними силами напряжения не превзошли определенного значения – предела упругости [3].

В способе – прототипе в качестве исходного объема ($V_0$) использовали показатель когда объект еще не достиг своего предела упругости и ведет себя как упругое тело т.е. без остаточных деформаций, количественно характеризующих пластичность. И расчет величины остаточных деформаций – пластичности, основывался на показателях объема в момент, когда исследуемый объект реагирует на деформацию как упругопластическое тело, что приводит к существенным неточностям. Для повышения точности расчетов очень важно определить момент достижения исследуемым объектом своего предела упругости и начало разрушения без видимых признаков этого. И использовать для расчета величины остаточных деформаций в качестве исходного объема показатель, когда объект достиг предела упругости и начал разрушаться, когда логично ожидать остаточных деформаций. Это стало возможным благодаря недавно обнаруженному факту появления сигналов АЭ при достижении исследуемым биообъектом предела упругости (в начале разрушения), еще до появления визуально определяемых признаков разрушения [4].

На рисунке 1 представлено устройство, реализующее действие способа.

Устройство включает: резервуар – 1, который служит для помещения исследуемого биообъекта, заполненный физиологическим раствором, являющимся также средой для распространения сигналов АЭ; насос – 2, создает положительное давление в полости исследуемого объекта, за счет введения в нее несжимаемой жидкости; прибор – 3, измеряет объем несжимаемой жидкости введенной в полость исследуемого объекта; датчик – 4, регистрирует сигналы АЭ; прибор – 5, регистрирует момент появления сигналов АЭ. По показаниям прибора 3, судят о величине деформации, а датчика 4 и прибора 5, точно определяют момент достижения исследуемым биообъектом предела упругости.

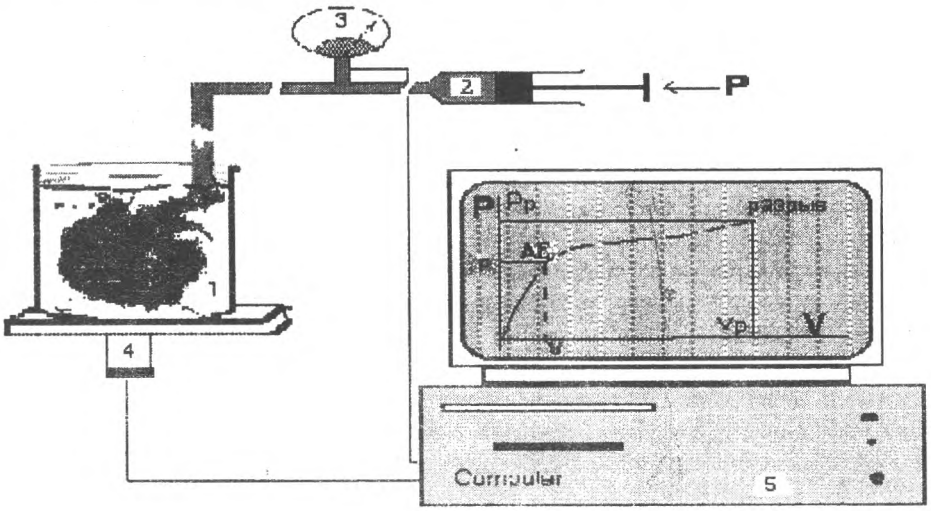



Рис. 1.

Способ реализуют следующим образом. Перед началом работы резервуар 1 заполняют физиологическим раствором. В полость исследуемого органа вводят эластический баллончик и помещают его в резервуар 1. Соединяют баллончик с насосом 2, перекачивающим несжимаемую жидкость. Включают приборы 3, 5 и датчик 4, а также насос 2 при этом баллончик, а, следовательно, и полость исследуемого биообъекта заполняются несжимаемой жидкостью. В момент появления первых сигналов АЭ т.е. в момента достижения биообъектом предела упругости – перехода упругой деформации в пластическую определяют Vae. Жидкость продолжают вводить до момента видимого разрушения исследуемого объекта. Величину остаточных деформаций рассчитывают по формуле:

$$\varepsilon = (V^{1/3} - V_{ae}^{1/3}) / V_{ae}^{1/3} \quad (3)$$

где: ε – величина остаточных деформаций, V – объем полости исследуемого биообъекта, в момент его разрушения, $V_{ae}$ – объем полости исследуемого биообъекта, в момент появления сигналов АЭ.

Данный способ мы использовали для определения величины остаточных деформаций левого и правого желудочков сердца лабораторной крысы, а также левой наружной сонной артерии человека in vitro.

Пример 1. Определение величины остаточных деформаций левого желудочка крысиного сердца Перед началом исследования резервуар 1 заполняют 12 мл физиологического раствора. В полость левого желудочка крысиного сердца вводят эластический баллончик и помещают его в резервуар 1. Соединяют баллончик с насосом 2. Включают приборы 3, 5, датчик 4 и насос 2 при этом баллончик, а следовательно и полость левого желудочка крысиного сердца заполняются физиологическим раствором. За $V_{ae}$ принимают объем физ.раствора вошедший в полость левого желудочка крысиного сердца в момент появления сигналов АЭ. Жидкость продолжают вводить до момента появления видимого разрушения исследуемого объекта. По показаниям датчика 4 и прибора 5, регистрируют момент появления сигналов АЭ тем самым определяют начало разрушения, т.е. момент достижения предела упругости. Величину остаточных деформаций рассчитывают по формуле (3), где: ε – величина остаточных деформаций, V – объем полости левого желудочка крысиного сердца, в момент видимого разрушения, $V_{ae}$ – объем полости левого желудочка крысиного сердца в момент появления сигналов АЭ.

Пример 2. Определение величины остаточных деформаций правого желудочка крысиного сердца. Перед началом исследования резервуар 1 заполняют 12 мл физиологического раствора. В полость правого желудочка крысиного сердца вводят эластический баллончик и помещают его в резервуар 1. Соединяют баллончик с насосом 2, перекачивающим физиологический раствор. Включают приборы 3, 5, датчик 4 и насос 2 при этом баллончик, а, следовательно, и полость правого желудочка крысиного сердца заполняются физиологическим раствором. За $V_{ae}$ принимают объем физ.раствора вошедший в полость правого желудочка крысиного сердца в момент появления сигналов АЭ. Жидкость продолжают вводить до момента видимого разрушения стенки объекта. По показаниям датчика 4 и прибора 5, регистрируют момент появления сигналов АЭ, тем самым определяют начало разрушения, т.е. момент достижения предела упругости. Величину остаточных деформаций рассчитывают по формуле (3), где: ε – величина остаточных деформаций, V – объем полости правого желудочка крысиного сердца, в момент видимого разрушения стенки объекта, $V_{ae}$ – объем полости правого желудочка крысиного сердца, в момент появления сигналов АЭ.

Пример 3. Определение величины остаточных деформаций левой наружной сонной артерии человека. Перед началом исследования резервуар 1 заполняют 12 мл физиологического раствора. Берут участок левой наружной сонной артерии человека длиной 4-5 см. В полость участка левой наружной сонной артерии человека вводят эластический баллончик, завязывают концы и помещают его в резервуар 1. Соединяют баллончик с насосом 2, перекачивающим физиологический раствор. Включают приборы 3, 5, датчик 4 и насос 2 при этом баллончик, а, следовательно, и полость участка левой наружной сонной артерии человека заполняться физиологическим раствором. За $V_{ae}$ принимают объем физ.раствора вошедший в полость участка левой наружной сонной артерии человека в момент появления сигналов АЭ. Жидкость продолжают вводить до момента видимого разрушения стенки артерии. По показаниям датчика 4 и прибора 5, регистрируют момент появления сигналов АЭ, тем самым определяют начало разрушения, т.е. момент достижения предела упругости. Величину остаточных деформаций рассчитывают по формуле: (3), где: ε – величина остаточных деформаций, V – объем полости участка левой наружной сонной артерии человека, в момент видимого разрушения стенки артерии, $V_{ae}$ – объем полости участка левой наружной сонной артерии человека, в момент появления сигналов АЭ.

Таким образом, можно точно определить момент достижения исследуемым биообъектом предела упругости, что дает возможность, сравнительно точно, рассчитать величину остаточных деформаций биообъекта.

**РЕЗЮМЕ**

Описано спосіб визначення величини залишкових деформацій порожнього біологічного об'єкта in vitro, шляхом введення в порожнину біооб'єкту нестисливої рідини, виміру величин її обсягу, а про величину залишкових деформацій судять по співвідношенню обсягів у момент руйнування біооб'єкту відрізняється тим, що додатково одночасно реєструють сигнали акустичної емісії, по яких визначають межу пружності біооб'єкту, або точний момент початку пластичних деформацій.

**SUMMARY**

This work describes the way of definition of size of residual deformations of hollow biological object in vitro by introduction in a cavity of bioobject of an incompressible liquid and measurement of sizes of its volume. About size of residual

deformations judge from a ratio of volumes at the moment of destruction of bioobject. A distinctive property of this way is that in addition simultaneously register signals of acoustic emission, on which define a limit of elasticity of bioobject and exact moment of a beginning of plastic deformations.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Биомеханические свойства венечных артерий сердца и их изменения с возрастом человека / Пуриня Б.А., Касьянов В.А., Озоланта И.Л., и др. // Биомеханика. – София. – 1981. – №11. – С.3-13.
2. Яблучанский Н.И., Шляховер В.Е., Даниленко А.В. Прочностные свойства миокарда при ишемической контрактуре в эксперименте // Кардиология. – 1987. – №3. – С.115
3. Справочник машиностроителя: В 6 томах. Т.3. / Под. ред. Серенсен С.В. – М.: Машгиз, 1956. – 563 с
4. In Vitro Identification of Angioplasty-Induced Injury by Use of Vascular Acoustic Emissions / Vonesh M.J., Mockros L.F., Davidson C.J., and other // Circulation. – 1997, Vol.95, N4. – P.1022-1028.

*Надійшла до редакції 12.06.2002 р.*

УДК 57.013 + 539.214.9

# БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЩИХ СОННЫХ АРТЕРИЙ

*В.В.Белоусов, А.Г.Цитрин**, О.К.Зенин*, А.В.Лашин**, Е.А.Неудачина*, О.Л.Метлова.*
**Донецкий государственный медицинский университет,*
***ЗАО «ДОРИС», г. Донецк*

Целью работы было исследование биомеханических свойств общих сонных артерий с дальнейшим использованием полученных данных в процессе проведения операции баллонной ангиопластики.

Баллонная ангиопластика (БА) является одним из наиболее эффективных малоинвазивных методов лечения сосудистых стенозов различной этиологии. Проведение процедуры БА заключается в следующем. С помощью катетера в поврежденный сосуд вводится эластичный баллончик и продвигается в его просвете до тех пор пока не окажется в участке стеноза. Затем в него нагнетают шприцем несжимаемую жидкость. Расширяющийся при этом баллончик приводит к локальному растяжению стенки кровеносного сосуда. Цель этой операции сводится к разрушению атеросклеротических бляшек при сохранении целостности сосудистой стенки.

Процедура БА связана с большим риском: с одной стороны при недостаточном растяжении стенки кровеносного сосуда, оперируемый участок после манипуляции принимает свои исходные размеры, с другой стороны слишком большое растяжение (когда деформации становятся пластическими), приводит к появлению трещин, размер которых трудно предугадать заранее. В первом случае говорят о неэффективности операции, второй же может привести к опасным для жизни пациента и даже смертельным результатам. Отсутствие объективного контроля за процессом разрушения стенки сосуда делает процедуру БА во многом случайной. Исход ее целиком зависит от субъективных ощущений и опыта хирурга., что превращает БА в настоящее искусство.

Поэтому перспективным является разработка системы, которая будет выполнять эту манипуляцию автоматически, под объективным контролем компьютера за процессом растяжения (точнее частичного разрушения) сосудистой стенки [1].

На кафедре анатомии человека с курсом латинского языка Донецкого государственного медицинского университета им. М.Горького, при участии специалистов Донецкого национального университета и поддержке акционерного общества “Дорис” создан аппаратно - программный комплекс (АПК) Visual, предназначенный для автоматизации процедуры БА в эксперименте in vitro с возможностью дальнейшего использования в клинических условиях . На рис. 1 представлена схема АПК Visual.

Электронно-механическая часть АПК состоит из двигателя, приводящего в движение поршень шприца насоса, манометра, показывающего давление жидкости внутри баллончика и микрофона, с помощью которого считываются сигналы АЭ. Все эти устройства подключены к компьютеру, работающему под управлением операционной системы Windows 9X/Windows NT.

Созданный нами комплекс позволяет автоматизировать процедуру БА и проводить ее под постоянным объективным контролем, за процессом разрушения сосудистой стенки. Причем контроль осуществляется в режиме реального времени. Программное обеспечение позволяет предсказать еще до операции, а также в ходе ее, наиболее возможные варианты разрушения сосудистой стенки на основе математической модели и анализа в режиме реального времени сигналов акустической эмиссии (АЭ), поступающих с места проведения операции.

Для проведения процедуры БА необходимо детальное изучение биомеханических свойств кровеносных сосудов [2, 3].

Мы использовали АПК для изучения биомеханических свойств общих сонных артерий. Отрезки артерий были взяты из трупов 26 человек, погибших от случайных причин. Возраст пострадавших колебался в пределах 18-71 года. При проведении экспериментов учитывали пол, возраст пострадавших, причину смерти, наличие или отсутствие в интиме артерий атеросклеротических бляшек. Всего было исследовано 38 участков общих сонных артерий. Перед проведением серии опытов проводился один холостой запуск АПК (без артерии), для определения внешних помех и максимального их устранения. Дело в том, что при проведении эксперимента эти помехи улавливаются микрофоном и регистрируются в виде сигналов АЭ, что может привести к искажению результатов опыта и неверному их толкованию. Помехи могут быть настолько велики, что их можно принять за сигнал разрыва сосуда. Затем переходили непосредственно к опытам с сосудами.

На рис. 1 представлена методика проведения эксперимента.

 ©Белоусов В.В., Цитрин А.Г., Зенин О.К., Лашин А.В., Неудачина Е.А., Метлова О.Л.

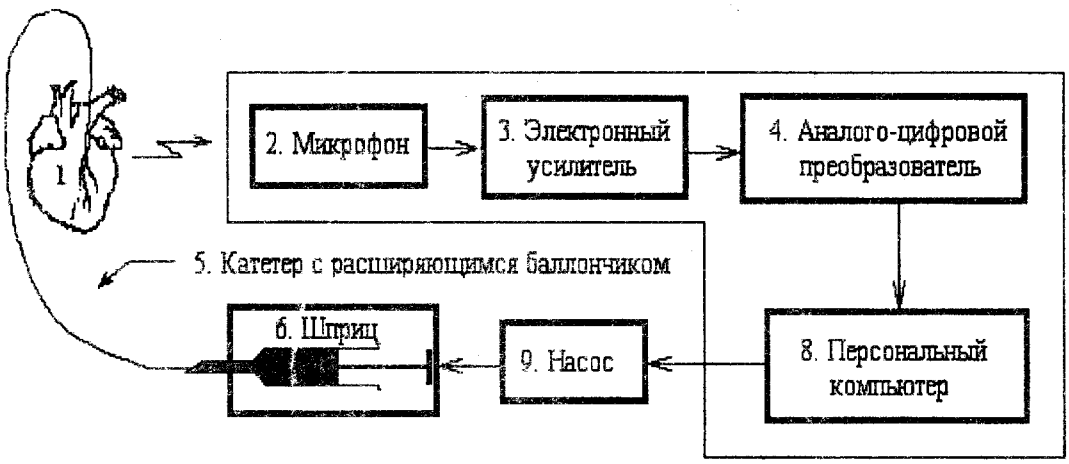



Рис. 1. Методика проведения эксперимента.

Отпрепарованный участок артерии готовили к эксперименту следующим образом: внутри артерии фиксировали эластичный баллончик, который последовательно через катетер и манометр соединяли со шприцем. Отрезок сосуда с баллоном внутри помещали в емкость, заполненную водой. Эту емкость подключали к микрофону, улавливающему колебания стенки артерии, которые возникают во время ее растяжения. Настраивали параметры работы прибора с помощью программы. После включения прибора двигатель обеспечивал движение поршня шприца и подачу жидкости в баллончик.

Регистрировали следующие параметры сосуда:

- начальный внутренний диаметр;
- толщину стенки;
- длину сосудистого сегмента, а также:
- давление жидкости внутри баллона через определенные временные интервалы в течение всего эксперимента и
- время, необходимое для разрыва артерии.

Сигналы акустической эмиссии регистрировались и обрабатывались программой и на мониторе появлялись два графика (см. рис. 2):

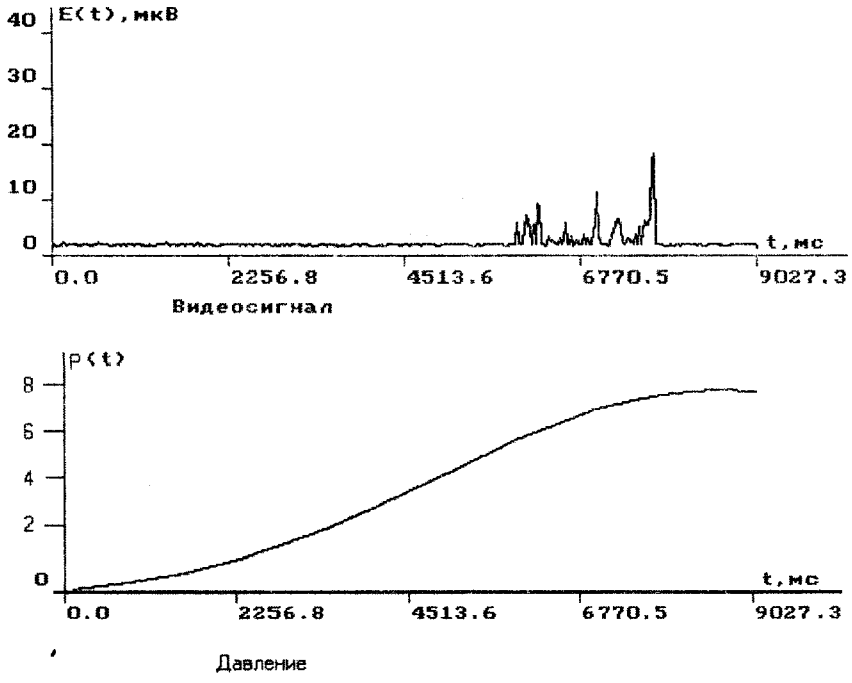



Рис. 2. Графики изменения сигналов АЭ и давления во времени.

- первый – кривая ,отражающая изменение сигналов во времени;
- второй – график зависимости давления внутри сосуда от времени в течение всего эксперимента

На основании полученных данных судили об упругих и пластических свойствах сосуда по соотношению давление – объем в момент разрушения артерии [4, 5, ]. По сигналам АЭ определяли момент разрушения сосудистой стенки, то есть предел ее упругости [6]. Регистрация сигналов АЭ позволяла точно определить момент начала пластических деформаций исследуемого объекта и тем самым повысить точность расчетов его упругих и пластических свойств.

Полученные данные обрабатывали с помощью программы Statgraf, в результате чего обнаружены следующие закономерности.

С возрастом уменьшается величина давления в сосуде в момент разрыва и показатель прочности [7]. Это означает, что в старшей возрастной группе сосудистая стенка не может адекватно реагировать на предъявляемые нагрузки, то есть повышен риск возникновения разрыва артерии при проведении процедуры БА.

Обнаружена отрицательная сильная корреляция между величиной давления в момент разрыва и диаметром сосуда. Установлено, что с увеличением диаметра сосуда растет значение показателя упругости и уменьшается показатель прочности. Выявлена зависимость между значениями величин давления при появлении сигналов АЭ и в момент разрыва в полости артерии и показателями упругости и прочности.

Выявлена положительная сильная корреляция между величиной давления в момент начала пластических деформаций и давлением в момент разрыва сосудистой стенки. Следовательно, зная величину давления при появлении первых сигналов АЭ, мы можем прогнозировать в какой момент произойдет разрыв артерии.

Таким образом исследование биомеханических свойств артерий является первой задачей в работе по автоматизации процедуры БА. Возможное применение АПК в клинических условиях, с нашей точки зрения, позволит существенно снизить риск внутриоперационных осложнений и увеличить эффективность БА.

**РЕЗЮМЕ**

Робота присвячена вивченню біомеханічних властивостей загальних сонних артерій в експерименті in vitro. За допомогою апаратно-програмного комплексу Visual, було проведено моделювання операції балонної ангіопластики. Методом рангової кореляції виявлені залежності між тиском в порожнині судини, його діаметром та показниками пружності, пластичності та міцності.

**SUMMARY**

The work is devoted to research of mechanical properties of common sleepy artery of the human in expeiment in vitro. The simulation of procedure balloon angioplastic was performed by APC Visual. The method of rank correlation finds out dependences between pressure in a cavity of a vessel, its diameter, both parameter of elasticity and durability.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Zenin O.K., Lashin A.V., Belousov V.V., Kiryakulov G.S. - Simulation of the balloon angioplastic procedure on human blood vessels // Український медичний альманах. – 1999. – №2. – С.53-56.
2. Пуриня Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. – Рига. Знатне, 1980. – 463 с.
3. Касьянов В.А., Кнетс И.В. Функция энергии деформации крупных кровеносных сосудов человека. Механика полимеров. – 1974. – №1. – С.122-128.
4. Green A.E., Adkins J.E. Large elastic deformation and non-linear continuum mechanics. – Oxford; Clarendon Press, 1960. – 492 p.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М., 1970. – Т.1. – 492 с.
6. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М., Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
7. Касьянов В.А., Крегерс А.Ф. Различия деформативных и прочностных свойств крупных кровеносных сосудов в зависимости от их локализации, направления, нагружения и возраста человека. – Механика полимеров. – 1975. – №4. – С.704-711.

*Надійшла до редакції 10.06.2002 р.*

УДК 58.08+519.237

# ВИКОРИСТАННЯ ЦЕНТРОЇДНОГО МЕТОДУ В ОРДИНАЦІЇ УГРУПОВАНЬ

*І.В.Гончаренко*
*Сумський державний педагогічний університет*

Від початку 60-х років минулого століття в розвитку фітоценології спостерігається все більше залучення різноманітних кількісних методів з метою дослідження рослинності. Їх впровадження особливо пов'язано з тими науковими школами, що стояли на позиціях континуалізму, наприклад, англо-американська школа градієнтного аналізу [1]. У вітчизняній геоботаніці цей напрямок посилено розвивався Уфимським центром, де неодноразово проводилися наради з проблем кількісної фітоценології (Уфа, 1974-1976). Цього ж часу розробляються основні алгоритми класифікації, ординації та індикації рослинності, зокрема вісконсинська [2], композиційна [3], блок-метод [4], метод аналізу скупчень [5] і т.д., обговорюються методичні аспекти використання факторного [6] та кластерного аналізів в фітоценології. З розвитком ПЕОМ ця тенденція особливо поширилася, однак з'явилися і певні ускладнення, пов'язані з тим, що тонкий інструмент складного аналізу став загальнодоступним.

Велика кількість комп'ютерних статистичних програм, що з'явилася останнього часу і дозволяє одним кроком виконати найбільш трудомісткі етапи розрахунків, не дає можливості відчути суть того чи іншого методу, тому результати постають сумою цифр, до яких початківець не знає як підійти. З іншого боку, автори різноманітних підручників зі статистики тяжіють то до складних математичних викладок, то відразу приступають до обговорення результатів. Тому, як з боку математиків, так і галузевих спеціалістів проголошуються рекомендації щодо виконання інколи нескладних розрахунків "ручним способом", щоб збагнути позитивні та негативні сторони методу, його призначення, передумови використання, альтернативи маніпуляцій даними, техніку розрахунків. Крім того, виконуючи розрахунки крок за кроком, невільно заглиблюєшся до структури експериментальних даних, тому інтерпретувати результати стає легше.

Ординація – один з найбільш вагомих для пізнання та зручних для візуалізації методів аналізу рослинності, який гармонує із континуальною властивістю ценоструктур і не потребує суб'єктивного визнання перехідних та типових угруповань. Запропоновані на початку становлення кількісної геоботаніки алгоритми ординації були спрямовані на спрощення розрахунків, з чим пов'язані, зокрема, слабкі сторони вісконсинської ординації, що спирається на евристичний відбір пари кінцевих описів градієнту. Відповіддю на це стала поява композиційної ординації, де відстані розраховуються вже відносно групи описів, протилежних за екологію. Але при цьому задіяна все ж лише частина матриці спряженості об'єктів-фітоценозів. Застосування багатовимірних статистичних методів дозволяє обійти цей недолік і врахувати всю інформацію про подібність фітоценозів, однак тоді надмірно виростає складність розрахунків. Незважаючи на це, коректна математична основа методів останньої групи, зробила її найпопулярнішою в колах кількісної фітоценології, зокрема це стосується факторного аналізу, "бум" навколо якого спостерігався від початку 70-х майже до середини 80-х.

До факторного аналізу залучається кореляційна матриця подібності об'єктів. Однак найчастіше між фітоценозами з метою їх класифікації розраховуються відстані, що, на відміну від кореляцій, враховують різницю величин рясності видів в парі угруповань, а при порівнянні флористичних списків – відносну участь спільних видів. У випадку, якщо подібність оцінена дистанційними, а не кореляційними мірами, в статистиці користуються методом багатовимірного шкалювання [7]. Застосування цього методу, що є за логікою близьким до факторного аналізу, для ординації ценотичних об'єктів є цілком придатним, хоча роботи присвячені впровадженню його в фітоценології нам не відомі. Моделлю, що образно відображає принцип багатомірного шкалювання, є астрономічна карта, де реальні відстані між "зірками", що залежать від ступеня подібності фітоценозів, передаються в площинній проекції карти.

Одним з найбільш простих для ординації у відношенні розрахунків є центроїдний алгоритм, розроблений Терстоуном (1931), і названий тому таким чином, що кожна вісь проводиться через центр поля точок-фітоценозів. Як зазначалося, щоб збагнути техніку розрахунків, слід виконати декілька нескладних прикладів "ручним способом", а центроїдний алгоритм, що може бути реалізований навіть з допомогою мікрокалькулятора, є для цього найбільш зручним. З одного боку, він, на відміну від вісконсинської ординації, не має слабких сторін при врахуванні відстаней лише до пари кінцевих фітоценозів, з іншого – є порівняно нескладним. Якщо ж автоматизувати рутину однотипних операцій на мікрокалькуляторі за допомогою електронних таблиць типу Excel, що дозволяють виконувати матричні дії, можна досягти найбільш збалансованого рішення, маючи повний контроль над кожним етапом розрахунків та уникаючи їх однотипності на МК.

©Гончаренко І.В. 

**Об'єкти та методи дослідження**

Для дослідження було взято нескладний випадок із завданням по ординації 9 асоціацій лісової рослинності. Збір фактичного матеріалу проводився протягом польових сезонів 1998-2002 рр. на території Сумського геоботанічного округу (Лівобережний Лісостеп України). Нижче подано фітоценотичні та флористичні характеристики взятих до аналізу синтаксономічних об'єктів:

class **QUERCO-FAGETEA** Br.-Bl. & Vlieger 37

**QF1.** ass. *Ficario-Ulmetum* Knapp 42 em. J. Mat. 76 (вологі неморальні угруповання глибоких тальвегів) D.s. = *Ficaria verna (dom.), Aegopodium podagraria, Chrysosplenium alternifolium, Dipsacus pilosus, Geum rivale, Stachys sylvatica, Ulmus glabra*

ass. *Lamio maculati-Quercetum roboris* Bulokhov ex Goncharenko 2001 (сціофітні гідромезофітні неморальні угруповання, найчастіше *Acereto-Tilieto-Quercetum coryloso-aegopodiosum* [8]) D.s. = *Aegopodium podagraria, Gagea lutea, Impatiens noli-tangere, Lamium maculatum, Urtica dioica, Dentaria bulbifera*

**QF2.** subass. *L.-Q. dryopteridetosum* Goncharenko 2001 D.s. = *Corydalis marschalliana, Dryopteris filix-mas*

**QF3.** subass. *L.-Q. alliarietosum* Goncharenko 2001 D.s. = *Alliaria petiolata, Galium aparine*

**QF4.** ass. *Stellario holosteae-Aceretum platanoiditis* Bajrak 96 em. Goncharenko 2001. (типові мезофітні неморальні угруповання, частіше *A.-T.-Quercetum coryloso-caricosum pilosae*) D.s. = *Carex pilosa, Galium odoratum, Lathyrus vernus, Paris quadrifolia, Ranunculus auricomus, Viola mirabilis, Stellaria holostea*

**QF5.** ass. *Melici nutantis-Quercetum robori* (Shevchyk & V. Sl. 96) em. (барвисті та злакові геліофітні судіброви та діброви) D.s. = *Acer tataricum, Convallaria majalis, Euonymus verrucosa, Melica nutans, Poa nemoralis, Adoxa moschatellina, Cystopteris fragilis*

**QF6.** ass. *Galio tinctori-Quercetum roboris* ass. nov. (термофітні полідомінантні флористично багаті діброви) D.s. = *Anthericum ramosum, Betonica officinalis, Campanula persicifolia, Geranium sanguineum, Melampyrum nemorosum, Pyrethrum corymbosum, Trifolium alpestre, Ajuga genevensis, Allium oleraceum, Carex michelii, Clematis recta, Coronilla varia, Filipendula vulgaris, Galium tinctorium*

class **VACCINIO-PICEETEA** Br.-Bl. in Br.-Bl., Siss. & Vlieger 39

**VP1.** ass. *Molinio-Pinetum*_W. Mat. & J. Mat. 73 (мезогідрофітні *Betuletum franguloso-molinioso-polytrichosum*) D.s. = *Betula pubescens, Molinia caerulea, Potentilla erecta, Vaccinium myrtillus, Deschampsia caespitosa*

**VP2.** ass. *Peucedano-Pinetum* W. Mat. (62) 73 (барвисті полідомінантні ксеромезофітні сосняки) D.s. = *Silene nutans, Fragaria vesca, Peucedanum oreoselinum, Polygonatum odoratum, Campanula rotundifolia, Calamagrostis epigeios*

**VP3.** ass. *Dicrano-Pinetum* Prsg. & Knapp ex Oberd. 57 (мезофітні олігодомінантні зеленомошні сосняки) D.s. = *Dicranum rugosum, Carex ericetorum, Orthilia secunda, Chimaphila umbellata, Dicranum scoparium, Pleurozium schreberi*

З видових списків ценофлор цих синтаксонів для подальшого аналізу було розраховано матрицю подібності між синтаксонами за коефіцієнтом Соренсена (табл. 1) [9]. Застосувати її безпосередньо для візуалізації фітоценотичної структури не вдається, оскільки в тривимірному просторі, доступному для безпосереднього сприйняття, неможливо розташувати кожен об'єкт від усіх інших саме на такій відстані, як це було розраховано в табл. 1. Завдання багатовимірного шкалювання полягає в знаходженні такої проекції, де кожен об'єкт був би максимально віддалений від інших. Розрахунки виконувалися з допомогою електронних таблиць за центроїдним алгоритмом. Таблиці, представлені на кожному з етапів, являють собою частину листа *Excel*, де латинськими літерами позначено стовпчики, а цифрами рядки.

**Результати дослідження та їх обговорення**

Визначення проекції поля синтаксонів на першу вісь починається із знаходження суми значень в кожному стовпчику матриці їх подібності (табл. 1). За простотою цієї математичної дії стоїть глибокий зміст: в просторі об'єктів, ті з них, що розташовані в центрі поля, будуть мати найбільші значення суми коефіцієнтів подібності до всіх інших об'єктів, і навпаки для тих, що розташовані на периферії.

Отже, записати техніку розрахунків першого етапу мовою *Excel* можна наступним чином L12 = СУММ (C3:K11) = СУММ (C12:K12), де [C12:K12] – запис діапазону листа *Excel*, що використовується в розрахунках, СУММ - стандартна функція сумації, включена до пакету. Надалі значення суми для кожної асоціації помножається на зворотну величину кореня з одержаної загальної суми: [C13:K13] = {C12:K12*L13}, де L13 = 1 / КОРЕНЬ (L12). Фігурними дужками позначаються в *Excel* матричні дії, що активуються одночасним натисненням *Ctrl+Shift+Enter*. Отже, масив [C13:K13] був одержаний помноженням масиву [C12:K12] на L13. Це і є навантаження (координати) об'єктів-асоціацій на перший

центроїд. При цьому вклад вісі у відтворення вихідної подібності об'єктів, образно кажучи її масштаб, визначається сумою квадратів навантажень всіх об'єктів на дану вісь. При цьому максимальне значення може складати 9, коли навантаження всіх 9 об'єктів дорівнюють лише 1 або –1. Оскільки значення суми квадратів навантажень на першу вісь складає 3,57, то вклад першої вісі 3,57 / 9 = 0,4, отже в одноосній проекції відтворено приблизно 40% інформації, що міститься у вихідній матриці (табл. 1) про ступінь відмінностей об'єктів.

Табл. 1.

Знаходження навантажень на першу центроїдну вісь (QF1, VP1 – позначення асоціацій (див. вище))

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | QF1 | QF2 | QF3 | QF4 | QF5 | QF6 | VP1 | VP2 | VP3 | |
| 3 | QF1 | 1 | | | | | | | | | |
| 4 | QF2 | 0,59 | 1 | | | | | | | | |
| 5 | QF3 | 0,49 | 0,62 | 1 | | | | | | | |
| 6 | QF4 | 0,49 | 0,68 | 0,63 | 1 | | | | | | |
| 7 | QF5 | 0,41 | 0,46 | 0,57 | 0,53 | 1 | | | | | |
| 8 | QF6 | 0,08 | 0,14 | 0,17 | 0,24 | 0,40 | 1 | | | | |
| 9 | VP1 | 0,13 | 0,11 | 0,19 | 0,11 | 0,30 | 0,21 | 1 | | | |
| 10 | VP2 | 0,14 | 0,13 | 0,23 | 0,18 | 0,38 | 0,44 | 0,47 | 1 | | |
| 11 | VP3 | 0,06 | 0,04 | 0,12 | 0,09 | 0,30 | 0,32 | 0,31 | 0,48 | 1 | |
| 12 | | *3,39* | *3,78* | *4,01* | *3,93* | *4,34* | *2,98* | *2,83* | *3,44* | *2,73* | *31,44* |
| 13 | | ***0,61*** | ***0,67*** | ***0,72*** | ***0,7*** | ***0,77*** | ***0,53*** | ***0,5*** | ***0,61*** | ***0,49*** | *0,18* |

На наступному етапі аналізу знаходиться відтворена матриця. Це відбувається через перемноження значень навантажень щодо кожної асоціації: [C14:K22]={L14:L22*C13:K13}, де [L14:L22] = {ТРАНСП (C13:K13)} – транспортований масив навантажень на перший центроїд (табл. 2).

Табл. 2.

Відтворена навантаженнями на першу центроїдну вісь матриця подібності асоціацій

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | | ***0,61*** | ***0,67*** | ***0,72*** | ***0,7*** | ***0,77*** | ***0,53*** | ***0,5*** | ***0,61*** | ***0,49*** | |
| 14 | QF1 | 0,37 | | | | | | | | | ***0,61*** |
| 15 | QF2 | 0,41 | 0,46 | | | | | | | | ***0,67*** |
| 16 | QF3 | 0,43 | 0,48 | 0,51 | | | | | | | ***0,72*** |
| 17 | QF4 | 0,42 | 0,47 | 0,50 | 0,49 | | | | | | ***0,70*** |
| 18 | QF5 | 0,47 | 0,52 | 0,55 | 0,54 | 0,60 | | | | | ***0,77*** |
| 19 | QF6 | 0,32 | 0,36 | 0,38 | 0,37 | 0,41 | 0,28 | | | | ***0,53*** |
| 20 | VP1 | 0,31 | 0,34 | 0,36 | 0,35 | 0,39 | 0,27 | 0,25 | | | ***0,50*** |
| 21 | VP2 | 0,37 | 0,41 | 0,44 | 0,43 | 0,47 | 0,33 | 0,31 | 0,38 | | ***0,61*** |
| 22 | VP3 | 0,29 | 0,33 | 0,35 | 0,34 | 0,38 | 0,26 | 0,25 | 0,30 | 0,24 | ***0,49*** |

Оскільки навантаження – це координати точок відповідної вісі, то чим більший добуток їх значень, тим меншою є проекція відстані між об'єктами на певну вісь і тим вищий рівень їх подібності. Одержаний таким чином масив даних "відтворює" конфігурацію загального поля об'єктів-асоціацій в одноосній ординаційній моделі.

Наскільки узгоджується розташування об'єктів в цій моделі в порівнянні з вихідною відстанню між ними? Для цього слугує етап знаходження т. з. залишкової матриці, що виходить відніманням відтвореної та вихідної матриці. Її елементи характеризують "залишкову" відстань між об'єктами, не відтворену першою віссю, проекція якої буде навантажувати перпендикулярну до першої другу вісь.

Однак перейти безпосередньо до виділення другої центроїдної вісі неможливо, оскільки, якщо розрахунки навантажень (табл. 1) та відтвореної матриці (табл. 2) виконані вірно, то сума елементів залишкової матриці дорівнює 0, чим користуються для перевірки правильності попередніх етапів розрахун-

ків. Для усунення цієї перешкоди існує математичний прийом віддзеркалювання, досить детально описаний К. Іберла [10].

Суть його полягає в заміні на протилежний знаків значень залишкової матриці у стовпчиках з найбільшою кількістю "мінусів" і одночасно по тій же змінній в симетричному рядку. Цей процес не випадково називають віддзеркалюванням, оскільки ми одержуємо дзеркальне відображення змінної, однак координати її мають теж абсолютне значення, але протилежний відносно поверхні уявного дзеркала знак. Це досить складний процес: після віддзеркалювання однієї змінної (об'єкту) вибирається наступна також з найбільшою кількістю "мінусів", і процес повторюється поки не досягне рівноваги. Це означає, що після віддзеркалювання наступної змінної, знаки змінюються таким чином, що надалі необхідно віддзеркалювати попередню змінну, або поки всі значення масиву не стануть позитивними. Як ми побачимо в майбутньому, це лише технічний прийом, і принципового значення кількість змінних, що віддзеркалюються, не має, оскільки конфігурація поля об'єктів при цьому не змінюється.

Нами спрощено технічну сторону процесу віддзеркалювання, продемонстровану "на папері" [10], введенням додаткового масиву, значення якого можуть дорівнювати 1 або –1 (у випадку віддзеркалювання) і на який перемножуються елементи залишкової матриці другого етапу. Отже, після процесу віддзеркалювання об'єктів Н - К залишкова матриця матиме вже відмінне від 0 значення суми елементів у стовпчиках (табл. 3). Математично процес віддзеркалювання можна записати наступним чином: [C24:K32] = {C23:K23*L24:L32*(C3:K11-C14:K22)}, де (C3:K11-C14:K22) – залишкова матриця, [L24:L32] = {ТРАНСП (C23:K23)}, [C23:K23] – масив віддзеркалювання.

Табл. 3.

Залишкова матриця, її віддзеркалювання та розрахунок навантажень на другу центроїдну вісь

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | |
| 24 | QF1 | 0,63 | | | | | | | | | 1 |
| 25 | QF2 | 0,18 | 0,54 | | | | | | | | 1 |
| 26 | QF3 | 0,06 | 0,14 | 0,49 | | | | | | | 1 |
| 27 | QF4 | 0,06 | 0,21 | 0,12 | 0,51 | | | | | | 1 |
| 28 | QF5 | -0,06 | -0,06 | 0,02 | -0,02 | 0,40 | | | | | 1 |
| 29 | QF6 | 0,25 | 0,22 | 0,21 | 0,14 | 0,01 | 0,72 | | | | -1 |
| 30 | VP1 | 0,17 | 0,23 | 0,17 | 0,24 | 0,10 | -0,06 | 0,75 | | | -1 |
| 31 | VP2 | 0,23 | 0,29 | 0,21 | 0,25 | 0,10 | 0,11 | 0,16 | 0,62 | | -1 |
| 32 | VP3 | 0,23 | 0,28 | 0,23 | 0,25 | 0,08 | 0,06 | 0,07 | 0,18 | 0,76 | -1 |
| 33 | | *1,76* | *2,03* | *1,65* | *1,78* | *0,56* | *1,66* | *1,82* | *2,15* | *2,15* | *15,56* |
| 34 | 1.85 | ***0,45*** | ***0,51*** | ***0,42*** | ***0,45*** | ***0,14*** | ***-0,42*** | ***-0,46*** | ***-0,55*** | ***-0,55*** | *0,25* |

Для віддзеркалювання певної змінної необхідно лише замінити значення масиву [C23:K23] на –1, а оскільки лист *Excel* організований динамічно за допомогою формул, відповідно зміниться на –1 значення в діапазоні [L24:L32] та значення елементів масиву [C24:K32]. До речі, така організація електронних таблиць через динамічні посилання на вхідний діапазон, коли всі інші цифри – це лише "миттєвий знімок" результатів розрахунків формул, є дуже зручною для нашого дослідження: лише замінивши дані у матриці подібності (табл. 1), ми миттєво одержуємо навантаження на кожну з 3 осей, і відповідно змінюється ординаційна діаграма.

Отже, за одержаними значеннями суми елементів віддзеркаленої залишкової матриці, подібно до першої вісі, розраховуються навантаження на другу вісь. Але при цьому не слід забути змінити знак на протилежний у тих асоціацій, що були віддзеркалені. Технічно це досягається наступним чином: [C34:K34] = {C23:K23*C33:K33*L34}, де L34 =1 / КОРЕНЬ (L33) (табл. 3). Сума квадратів одержаних навантажень на другу вісь вже помітно менша за аналогічне значення щодо першого центроїда і складає 1,85, отже вклад другої вісі дорівнює 1,85 / 9 = 0,21, а двохосна модель загалом відтворює 0,61 вихідної подібності між асоціаціями.

Аналогічно до попередніх етапів повторюється знаходження матриці подібності, відтвореної другою центроїдною віссю (табл. 4).

Після виділення другої вісі до залишкової матриці переходить та частина вихідної подібності об'єктів, що не була відтворена першим та другим центроїдом, і ця частина буде використана для виділення третьої вісі.

При наступному знаходженні залишкової матриці слід не забути врахувати "віддзеркаленість" певних об'єктів і перемножити їх на –1, тобто на масив [C23:K23*L24:L32], де записана інформація про віддзеркалення об'єктів, тобто зробити процес зворотній віддзеркаленню. Правильність розрахунків перевіряється значенням суми елементів масиву по кожному об'єкту залишкової матриці, що дорівнює 0.

Табл. 4.

Розрахунок відстаней між об'єктами, відтворених другою центроїдною віссю

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | | ***0,45*** | ***0,51*** | ***0,42*** | ***0,45*** | ***0,14*** | ***-0,42*** | ***-0,46*** | ***-0,55*** | ***-0,55*** | |
| 35 | QF1 | 0,20 | | | | | | | | | ***0,45*** |
| 36 | QF2 | 0,23 | 0,27 | | | | | | | | ***0,51*** |
| 37 | QF3 | 0,19 | 0,22 | 0,18 | | | | | | | ***0,42*** |
| 38 | QF4 | 0,20 | 0,23 | 0,19 | 0,20 | | | | | | ***0,45*** |
| 39 | QF5 | 0,06 | 0,07 | 0,06 | 0,06 | 0,02 | | | | | ***0,14*** |
| 40 | QF6 | -0,19 | -0,22 | -0,18 | -0,19 | -0,06 | 0,18 | | | | ***-0,42*** |
| 41 | VP1 | -0,21 | -0,24 | -0,19 | -0,21 | -0,07 | 0,19 | 0,21 | | | ***-0,46*** |
| 42 | VP2 | -0,24 | -0,28 | -0,23 | -0,25 | -0,08 | 0,23 | 0,25 | 0,30 | | ***-0,55*** |
| 43 | VP3 | -0,24 | -0,28 | -0,23 | -0,25 | -0,08 | 0,23 | 0,25 | 0,30 | 0,30 | ***-0,55*** |

Як і раніше, у зв'язку з цим перейти безпосередньо до виділення третьої вісі неможливо. Проводиться подальше віддзеркалення змінних: в нашому випадку воно стосувалося об'єктів C, E, I, J, K з найбільшою кількістю негативних значень масиву залишкової матриці. Отже, підрахунок навантажень на третю центроїдну вісь, проводиться з масиву [C45:K53]={C44:K44*L45:L53*(C23:K23*L24:L32* *C24:K32-C35:K43)}, де в діапазоні [C44:K44] та [L45:L53] записано інформацію про віддзеркалення об'єктів, множники [C23:K23] та [L24:L32] повертають масив [C24:K32] до стану перед його віддзеркаленням, [C35:K43] – містить дані про відстані між асоціаціями, відтворені другим центроїдом.

Табл. 5.

**Віддзеркалена залишкова матриця після виділення перших двох центроїдних осей та розрахунок навантажень на третю вісь**

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **44** | | **-1** | **1** | **-1** | **1** | **1** | **1** | **-1** | **-1** | **-1** | |
| **45** | **QF1** | **0,43** | | | | | | | | | **-1** |
| **46** | **QF2** | **0,05** | **0,28** | | | | | | | | **1** |
| **47** | **QF3** | **-0,12** | **0,08** | **0,31** | | | | | | | **-1** |
| **48** | **QF4** | **0,14** | **-0,02** | **0,06** | **0,31** | | | | | | **1** |
| **49** | **QF5** | **0,12** | **-0,13** | **0,04** | **-0,08** | **0,38** | | | | | **1** |
| **50** | **QF6** | **0,06** | **0,00** | **0,04** | **0,05** | **0,05** | **0,54** | | | | **1** |
| **51** | **VP1** | **0,03** | **-0,01** | **0,02** | **0,04** | **0,03** | **0,26** | **0,53** | | | **-1** |
| **52** | **VP2** | **0,02** | **0,01** | **0,02** | **0,01** | **0,02** | **0,12** | **-0,09** | **0,33** | | **-1** |
| **53** | **VP3** | **0,01** | **0,00** | **0,00** | **0,01** | **0,00** | **0,17** | **-0,19** | **-0,11** | **0,47** | **-1** |
| **54** | | *0,74* | *0,25* | *0,45* | *0,51* | *0,43* | *1,27* | *0,62* | *0,30* | *0,35* | *4,91* |
| **55** | | ***-0,33*** | ***0,11*** | ***-0,20*** | ***0,23*** | ***0,19*** | ***0,57*** | ***-0,28*** | ***-0,14*** | ***-0,16*** | *0,45* |

Сума квадратів навантажень на кожну наступну виділену вісь поступово зменшується, і в даному випадку складає 0,70, отже вклад третьої вісі ще менший за дві попередні 0,70 / 9 = 0,08, а загалом тривимірний ортогональний простір передає 40 + 21 + 8 = 69 % вихідної інформації про подібність асоціацій. Це досить високий показник для сукупності трьох екстрагованих осей з 9 максимально можливих, тому процес виділення центроїдних факторів можна припинити, хоча існують і більш точні тести, зокрема т. з. "критерій кам'янистого осипу" за загальним виглядом графіку залежності "вклад останньої вісі / кількість виділених осей".

В результаті розрахунків навантажень на три центроїдні вісі було одержано тривимірну ортогональну ординаційну модель для 9 асоціацій лісової рослинності (рис. 1). Модель є ортогональною оскільки

вісі перпендикулярні одна до одної. Як бачимо з рисунка, асоціації поділяються вздовж другої вісі на дві групи, що відповідають листяним (C – G) та мішаним і хвойним (H – K) лісам, причому відстані між об'єктами цих груп залежать від ступеня подібності складу ценофлор асоціацій. До речі, проблема інтерпретації одержаних абстрактних осей реальними факторами є центральною [10], і полягає вона у пошуку причинності (фактора) групування об'єктів на протилежних кінцях певних осей. В фітоценології для інтерпретації осей встановлюють кореляцію між навантаженнями об'єктів на ці вісі та результатами ординації синтаксонів по градієнтах конкретних екологічних факторів [11]. Такі дослідження, проведені нами додатково при порівнянні з даними фітоіндикації для цих же асоціацій показали, що другу центроїдну вісь можна інтерпретувати як вплив фактору кислотності, який визначає диференціацію груп C – G та H – K . Відмінності між об'єктами вздовж третьої центроїдної вісі, що має, до речі, менший за другу вісь вклад у ценотичну диференціацію (0,08 < 0,21), зумовлені впливом фактора зволоження. Це неважко зрозуміти, якщо помітити, що в області негативних навантажень на третій центроїд розташовуються і вологі неморальні угруповання (C) і вологі бореальні (I), в той час, як на протилежному боці розташувалися мезофітні та ксеромезофітні синтаксони, зокрема H, що є найбільш ксерофітним у цьому гідроряді.

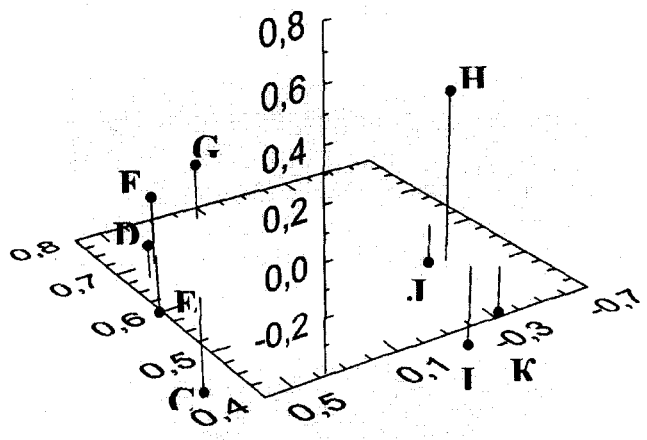



Рис. 1. Ординація 9 лісових асоціацій в ортогональному просторі трьох центроїдних факторів (C – K позначення асоціацій латинськими літерами див. табл. 1)

**Висновки**

Центроїдний алгоритм дозволяє провести непряму ординацію з урахуванням всієї інформації про ступінь подібності ценотичних об'єктів, з іншого боку, будучи відносно нескладним за технікою розрахунків, може бути автоматизований за допомогою стандартних електронних таблиць і залишає переваги контролю та гнучкого оперування в ході аналізу. Використання його при багатовимірному шкалюванні, що є непараметричним методом, знімає обмеження щодо вимоги про нормальний тип розподілу вхідних даних і тому, на відміну від факторного аналізу, застосовується до ширшого кола об'єктів та матриць подібності, основаних на будь-яких мірах спряженості таксонів чи синтаксонів. Одержані в результаті зручні для аналізу графічні ординаційні моделі дозволяють "побачити" фітоценотичну структуру рослинного покриву, а творчий пошук її причинності відбувається на етапі інтерпретації осей непрямої ординації.

**РЕЗЮМЕ**

Рассматриваются аспекты фитоценотической ординации с использованием многомерного шкалирования на примере 9 ассоциаций лесной растительности северо-восточной части Левобережной Лесостепи Украины. Показаны возможности автоматизации техники статистических расчетов по центроидному алгоритму с помощью электронных таблиц. Затронуты вопросы экологической интерпретации полученной трехмерной ординационной модели при исследовании ценотической дифференциации лесов региона.

**SUMMARY**

Aspects of phytocoenotic ordination by means of multidimensional scaling on an example of 9 associations of forest vegetation of a northeast part of Left-bank Forest-steppe of Ukraine are considered. Opportunities of automation of technique of statistical calculations by centroid algorithm with the help of spreadsheets are shown. Questions of ecological interpretation of received three-dimensional ordination model during examination of coenotic differentiation of woods of region are mentioned.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Александрова В.Д. Классификация растительности: Обзор принципов классификации и классификационных схем в разных геоботанических школах. – Л.: Наука, 1969. – 275 с.
2. *Orlóci L.* Geometric models in ecology I. The theory and application of some ordination methods // J.Ecol. – 1966. – 54. – P.193-215.
3. Миркин Б.М., Бубленко А.Н., Розенберг Г.С. Композиционная ординация: условия применения и оптимизация техники // Статистические метода анализа почв, растительности и их связи. – Уфа, 1978. – С.101-112.
4. Миркин Б.М. "Блок-метод" выделения растительных ассоциаций // Методы выделения растительных ассоциаций. – Л.: Наука, 1971. – С.151-178.
5. Фрей Т.Э.А. Обработка геоботанических описаний методом анализа скоплений с применением критерия К и фенограммы // Там. же. – С.234-249.
6. Лиепа И.Я. Математические методы в биологических исследованиях. Факторный и компонентный анализы. – Рига: Изд-во Латв. ун-та, 1980. – 104 с.
7. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование. Методы наглядного представления данных. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 348 с.
8. Продромус растительности Украины / Шеляг-Сосонко Ю.Р., Дидух Я.П., Дубына Д.В. и др. Отв. ред. Малиновский К.А. Ин-т ботаники им. Н.Г. Холодного. – Киев: Наук. думка, 1991. – С.186-200.
9. Миркин Б.М., Розенберг Г.С., Наумова Л.Г. Словарь понятий и терминов современной фитоценологии. – М.: Наука, 1989. – С.79
10. Иберла К. Факторный анализ. – М.: Статистика, 1980. – 398 с.
11. Маслов А.А. О совместном применении метода блоков и метода главных компонент для анализа мозаичности лесных сообществ. 2. Идентификация осей экологическими факторами // Бюл. МОИП. – 1985. – 90, №4. – С.107-117.

*Надійшла до редакції 02.10.2002 р.*

УДК 581.2.02

# ВОДНИЙ ОБМІН ДЕРНОУТВОРЮЮЧИХ ТРАВ, ЩО ЗРОСТАЮТЬ У ШТУЧНИХ ФІТОЦЕНОЗАХ

*Ю.В.Лихолат*
*Дніпропетровський національний університет*

## ВСТУП

Важливою ланкою в загальному метаболізмі рослин є водний обмін. Вивчаючи основні риси цього процесу можна з'ясувати стан водного балансу рослин, а також ступінь його відповідності умовам зовнішнього середовища, визначити шляхи його регулювання [1]. Пристосування рослинного організму до тиску метеорологічних чинників навколишнього середовища на тлі промислового забруднення значною мірою визначається здатністю рослини протистояти витратам води. Визначення показників обводненості та водовіддачі дерноутворюючих злаків в умовах промислового забруднення – мета нашої роботи.

## ОБ'ЄКТИ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Об'єктами наших досліджень були основні газонні злаки степового Придніпров'я – тонконіг вузьколистий (Poa angustifolia L.) та пажитниця багаторічна (Lolium perenne L.), що зростають на території заводів "Побутової хімії" та "Полімермаш" (м. Дніпропетровськ). Контролем були відповідні об'єкти, що зростали на степовій цілині (звичайний легкогумусовий чорнозем) на відстані 80-ти км від обласного центру. Для фізіологічної характеристики водного обміну цих видів визначали ступінь обводненості та водовіддачу за загальноприйнятими методиками [2].

## РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Проведені нами дослідження особливостей зміни показників водного обміну дерноутворюючих трав, що зростають в штучних фітоценозах, дозволили виявити деякі відмінності (рис.). Так, обводненість листків трав змінюється в діапазоні від 66% (тонконіг вузьколистий) до 85% (пажитниця багаторічна). В контролі ці показники відповідно становили від 69% до 87%. При цьому рослини на початку вегетації мали більшу обводненість, ніж наприкінці. Можливо, відмічене явище відбувалося за рахунок змін в клітинах та тканинах рослин протягом онтогенезу. Так, віковою особливістю рослин є ущільнення протоплазми, що супроводжується зменшенням в ній кількості води. Паралельно відмічена залежність від рівня контамінації довкілля. Найбільш висока обводненість притаманна рослинам, що зростають на території заводу побутової хімії, в викидах якого міститься менша кількість полютантів.

Зміни, які відбуваються в обводненості рослин на територіях промислових підприємств, не можуть не відбитися на рівні транспірації. Наші спостереження показали, що інтенсивність цього процесу максимально підвищувалась до 940 мг/г за годину у пажитниці багаторічної, що зростала на промислових майданчиках заводу "Полімермаш". Як нами показано раніше [3], найнижчі показники цього процесу – 459 мг/г за годину – відмічені на території коксохімічного заводу, де рівень полютантів значно вищий, ніж на інших підприємствах. Найбільша інтенсивність випаровування води з листової поверхні порівняно з контролем була характерною для рослин, які зростали на території промислових підприємств, у липні за всі роки спостережень.

При дослідженні інтенсивності транспірації знайдені індивідуальні особливості зміни інтенсивності процесу в залежності від рівня забрудненості навколишнього середовища. За нашими спостереженнями величина показника варіювала у пажитниці багаторічної від 820 мг/г за год (завод побутової хімії) до 940 мг/г за год (завод Полімермаш); тонконогу вузьколистого - від 590 мг/г за год (завод Побутової хімії) до 690 мг/г за год (завод Полімермаш); пирію повзучого, згідно наших попередніх досліджень [4], від 519 мг/г за год (завод Полімермаш) до 668 мг/г за год (завод Побутової хімії). В умовах контролю інтенсивність транспірації для відмічених вище видів становила 590-650 мг/г за год; 560-620 мг/г за год; 551-689 мг/г за год, відповідно.

Посилення інтенсивності транспірації в умовах промислового забруднення призводить до збільшення в рослинах міцно утримуваної (залишкової) компонентами клітинних структур води [3]. Відмічене явище викликає зміни конформації молекул біоколоїдів протоплазми, що порушує інтенсивність багатьох ланцюжків метаболізму в рослинному організмі.

Порушення водного обміну у рослин, що зростають в екстремальних умовах, супроводжується змінами їх водоутримуючої здатності. Так, у рослин з територій промислових підприємств відбувається посилення водовіддачі (зниження водоутримуючої здатності). Ця величина залежить від індивідуальних особливостей рослин. До видів з менш інтенсивною водовіддачею належить тонконіг вузьколистий. Водовіддача у рослин нерівномірна на протязі періоду вегетації. Так, інтенсивність процесу у тонконогу вузьколистого на території заводу Полімермаш максимально становила 21% (контроль-19%), пажитниці



©Лихолат Ю.В.

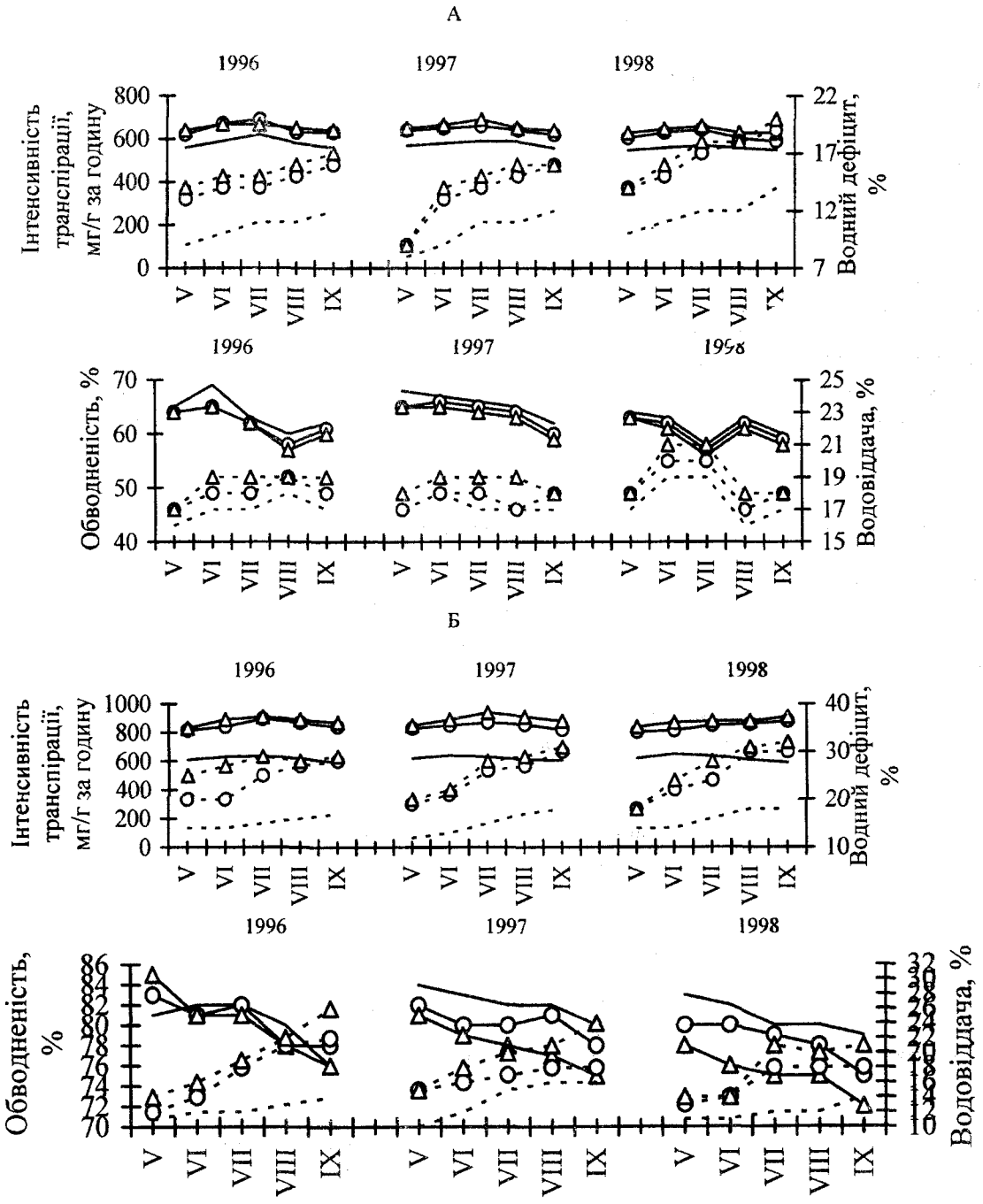



Рисунок. Обводненість, водовіддача, інтенсивність транспірації та водний дефіцит листків тонконогу вузьколистого (А) та пажитниці багаторічної (Б), що зростають в штучних фітоценозах на території промислових підприємств.

**Обводненість та інтенсивність транспірації**

——— - контроль

—o— - завод Побутової хімії

—Δ— - Полімермаш

**Водовіддача та водний дефіцит**

- - - - - - контроль

- - o - - - завод Побутової хімії

- - Δ - - - Полімермаш

багаторічної - 26% (контроль -16%). Різниця між контрольними і дослідними рослинами за відповідний період у тонконогу вузьколистого максимально складала 2%, пажитниці багаторічної - 12%.

Одним з найбільш лабільних і універсальних показників водозабезпеченості рослин є водний дефіцит листків. Ця величина знаходиться в тісній залежності від вологості повітря та кількості продуктивної вологи в ґрунті. Проведені нами дослідження водного дефіциту показали, що ця величина залежить як від видових особливостей рослин, так і концентрації полютантів в навколишньому середовищі. Так, рослини з території заводу Побутової хімії характеризуються меншими значеннями цього показника, ніж ті, що зростають в більш жорстких умовах. Наприклад, якщо в умовах заводу Полімермаш у тонконогу вузьколистого різниця між контрольними і дослідними рослинами складала 1,4 рази, то для пажитниці багаторічної - 1,8 рази, на промислових майданчиках заводу Побутової хімії ця різниця була менш суттєвою. Відмічені факти свідчать про глибокі структурні зміни у рослин з території заводу Полімермаш, де рівень забруднення є вищим.

Зміна характеру водообміну рослинного організму відбувається в залежності не лише місяця вегетації, але й від зони забруднення. В раніше проведених дослідженнях нами виявлено[4], що у пажитниці багаторічної, що росла на промислових майданчиках Баглійського коксохімічного заводу, де забруднення території відбувається за рахунок гаридину, фенолу, роданідів, сірководню, інтенсивність віддачі води листками рослин з віддаленням від джерела емісії поступово знижувалась. Найбільш високе значення цього параметра у рослин виявлено в зоні сильного забруднення (коксовий цех). В міру віддалення інтенсивність віддачі води знижувалась. Ця особливість зберігалась упродовж усього періоду вегетації. У варіанті з пирієм повзучим інтенсивність віддачі води рослинами (від зони слабкого і середнього до зони сильного забруднення) також посилювалась.

Водний дефіцит у рослинному організмі, що перебуває в умовах як хронічного, так і короткочасного забруднення, згідно з існуючою думкою [5], є наслідком, з одного боку, - обмеженого надходження води в рослину, а з іншого - підвищення інтенсивності випаровування її з листової поверхні. У наших дослідах зростання водного дефіциту у пажитниці багаторічної було більш суттєвим, ніж у тонконогу вузьколистого. Цей факт дає підставу свідчити про порівняно легке пристосування аборигенних видів (тонконіг вузьколистий ) до дії токсичних речовин.

## ВИСНОВКИ

Загальними рисами стійкості газонних трав, які зростають на території промислових підприємств в умовах степової зони України, є зниження обводненості, що супроводжується зниженням інтенсивності транспірації за високих концентрацій токсичних речовин в навколишньому середовищі та її підвищенням при низьких рівнях забрудненості довкілля, збільшенням в рослинному організмі міцно утримуваної (залишкової) води, змінами їх водоутримуючої здатності, незначним підвищенням водного дефіциту порівняно з рослинами, що зростали в екологічно чистих умовах.


## РЕЗЮМЕ

Изучены показатели водного обмена основных дернообразующих злаков в условиях промышленного загрязнения окружающей среды. Приведены данные по состоянию обводненности, интенсивности транспирации, водоотдачи и водного дефицита, характеризующие устойчивость растений в условиях штучных фитоценозов. Показано преимущество использования мятлика узколистого в связи с его большей устойчивостью к действию поллютантов в организации газонов в этих условиях по отношению к райграсу пастбищному.

## SUMMARY

Parameters of water exchange of sod-forming cereals in the condition of industrial saturation were investigated. This data were on state of watering and watergiving, characterized stable of the plants in the condition of ecological tension. It was shown advantage of using Poa angustifolia L. because of its more stability to pollutants act under lawn forming in comparison with Lolium perenne L.


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Илькун Г.М. Загрязнители атмосферы и растения. – К.: Наук, думка, 1978. – 146 с.
2. Шматько И.Г., Григорюк И.А., Шведова О.Е., Петренко Н.И. Определение физиологической реакции зерновых культур на ухудшение водообеспеченности и повышение температуры: (Метод. рекомендации). – К: Ин-т физиологии растений, 1985. – 20 с.
3. Лихолат Ю.В. Еколого-фізіологічні особливості багаторічних дерноутворюючих злаків техногенних територій. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпр, ун-та, 1999. – 188с.
4. Лихолат Ю.В. Водный режим газонных трав в условиях загрязнения окружающей среды выбросами коксохимического завода // Стійкий розвиток: забруднення оточуючого середовища та екологічна безпека. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпр. ун-та. 1999. – С. 46-48.
5. Шматько И.Г., Григорюк И.А. Реакция растений на водный и высокотемпературный стрессы // Физиология и биохим. Культ. раст. – 1992. – Т.24. – №1. – С. 3-14.


*Надійшла до редакції 30.11.2002 р.*

УДК 612.53+612.44

# ВЛИЯНИЕ АДАПТАЦИИ К ХОЛОДУ И ИЗОПРОПИЛНОРАДРЕНАЛИНА НА ЗНАЧЕНИЕ "УСТАНОВОЧНОЙ ТОЧКИ" В СИСТЕМЕ ТЕРМОРЕГУЛЯЦИИ

*Г.И.Чирва*

Длительные холодовые воздействия сопровождаются фундаментальными перестройками в функционировании ряда физиологических систем [1,2,3]. Этот процесс, естественно, должен затрагивать и систему поддержания температурного гомеостазиса с основными ее параметрами. Наиболее важной константой в системе терморегуляции является так называемая "установочная точка", которая служит эталоном внутренней температуры тела, в частности гипоталамуса [1].При отклонении фактической температуры от эталонной в центре терморегуляции вычисляется разница, от знака и величины которой зависит интенсивность включения тех или иных исполнительных терморегуляторных механизмов. Из литературных данных известно, что после наступления состояния адаптации к холоду значение температуры тела у гомойотермов повышается, что связывается прежде всего с ростом уровня основного обмена [3,4,5]. Однако можно предполагать, что повышение уровня температуры тела у адаптированных к холоду организмов связано с изменением значения "установочной точки" в центре терморегуляции, которая сдвигается вверх. Тем не менее, до настоящего времени этот вопрос остается открытым.

Второй аспект проблемы эталона в системе терморегуляции связан с возможной ролью гормональных факторов в настройке или перенастройки значения "установочной точки". Под контролем катехоламинов, гормонов щитовидной железы, надпочечников и др. эндокринных желез находятся практически все вновь сформированные адаптационные механизмы терморегуляции. Известно также, что в процессе холодовой адаптации концентрация катехоламинов крови повышается в несколько раз и остается на таком уровне в течение длительного периода времени [6,7]. В связи с этим возможно участие данной эндокринной системы в формировании новых параметров центра терморегуляции. Однако вопрос о возможной роли катехоламинов в перенастройке центра терморегуляции до настоящего времени даже не поставлен.

Целью настоящей работы явилось измерение абсолютной величины "установочной точки" в целостной системе терморегуляции и выяснение возможной роли одного из катехоламинов, изопропилнорадреналина, в настройке центрального звена терморегуляторной системы белых крыс.

**Объект и методы исследования.** Эксперименты были выполнены на белых крысах-самцах. Все животные были разделены на две группы. Крысы первой группы (n=12) в течение 25 суток находились в холодовой камере объемом 20 $м^3$ в индивидуальных клеточках при температуре +3...+5 $^0$C. Данная группа животных, следовательно, адаптировалась к холоду (АХ). Использованный режим холодовой адаптации является стандартным для такого рода исследований и ранее применялся в многочисленных работах [1].

Вторая группа (n=12) была контрольной и содержалась в условиях вивария при температуре около 24$^0$C.

Для измерения значения "установочной температуры тела" у белых крыс была разработана специальная методика. Установка представлена двумя контурами регулирования - внутренним и внешним. Первый из них включает систему терморегуляции экспериментального животного, и состоит из собственно животного с теплосодержанием $Q_i$ и теплоотдачей $-\Delta Q_e$, терморецепторного звена, центра терморегуляции и группы эффекторных механизмов. Второй, внешний, контур образован автоматической системой, работающей на основе принципа обратной пропорциональной отрицательной связи. Характер работы всей гибридной системы "организм-среда-автомат" определяется двумя предварительно заданными условиями: а) значением температуры отсчета (температура эталона, $T^0_{эт}$=38.5$^0$C); б) коэффициентом "К"(К=const.), определяющим величину корректирующего сигнала обратной связи $+\Delta Q_e$, имеющим размерность Вт/$^0$C. В нашей работе величина коэффициента обратной связи "К" была выбрана, исходя из следующего допущения: если бы ректальная температура $T^0_i$ снизилась на 3.0$^0$C, то температура камеры $T^0_e$ в результате подвода с теплоносителем корректирующей порции тепла $+\Delta Q_e$ поднялась бы на 30.0$^0$C. Следовательно, коэффициент обратной связи по температуре равнялся 10.

Система работает следующим образом. При охлаждении животного, обладающего теплосодержанием $Q_i$ и теплоотдачей $-\Delta Q_e$, его ректальная температура $T^0_i$ начинает снижаться, поскольку температура камеры намного ниже температуры тела. В одном из блоков внешней корректирующей системы значение ректальной температуры сравнивается с температурой эталона ($T^0_{эт.}$= 38.5$^0$C). Величина разбаланса между фактической температурой тела и температурой эталона ($\Delta T^0 = T^0_{эт} - T^0_i$) поступает в блок выработки компенсационного сигнала $+\Delta Q_e$, уровень которого определяется, с одной стороны, степенью температурного разбаланса ($\Delta T^0$), а с другой стороны - значением коэффициента "К", т.е. $+\Delta Q_e = K \bullet \Delta T^0$. Величина

©Чирва Г.И.

коэффициента "К" в зависимости от задач эксперимента теоретически может быть выбрана любой, но большее нуля; важно лишь чтобы в рамках какой-либо серии опытов сохранялось условие: K=const.

Порция тепла, выработанная корректирующей системой($+\Delta Q_e$), теплоносителем подается в холодовую камеру, в результате чего температура камеры $T^0_e$ начинает повышаться; ее охлаждающее действие будет ослабляться. Следовательно, корректирующий сигнал $+\Delta Q_e$ противодействует процессу снижения ректальной температуры животного. Появляющийся уровень разбаланса между фактической температурой тела и температурой эталона уменьшится; соответственно величина корректирующего сигнала обратной связи $+\Delta Q_e$ снизится, а охлаждающее действие камеры, наоборот, начнет возрастать. Регуляторный цикл завершится.

Вместе с усилением охлаждающего эффекта камеры ректальная температура животного начнет вновь падать, и цикл выработки корректирующего сигнала повторится заново, но уже на другом уровне. В конце концов, во всей системе "организм-среда-автомат" установится состояние динамического равновесия. Наблюдая динамику "выхода" системы в состояние равновесия и определив его параметры (значения $T^0_i$ и $T^0_e$), можно судить о работе целостной системы терморегуляции организма, так как "поведение" внешнего корректирующего контура отражает характер функционирования данной системы. Так как параметры, определяющие работу внешнего корректирующего контура детерминированы ($T^0_{эт.} = 38.5^0$C, K=const), то значения $T^0_i$ и $T^0_e$ в состоянии динамического равновесия определяются только особенностями работы системы терморегуляции животного. В этой связи важно подчеркнуть, что, если величина $T^0_i$ после установления состояния равновесия в гибридной системе "организм-среда-автомат" статистически достоверно выше, чем у другого, то это свидетельствует о смещении в терморегуляторной системе значения "установочной температуры тела".

Во время опыта экспериментальное животное помещается в термокамеру. Последняя представляет собой металлический цилиндр, по внутреннему диаметру которого навит змеевик из тонкостенной медной трубки. Цилиндр окружен двумя теплозащитными экранами, а между ними установлен термоэлемент и термодатчик, предназначенные для поддержания вокруг цилиндра температуры на уровне $30.0\pm0.1^0$C в течение всего опыта. В результате влияние внешней среды было сведено к минимуму. В процессе эксперимента через змеевик термокамеры могла пропускаться жидкость с заданной температурой. В качестве теплоносителя применялся этиленгликоль.

Ректальная температура измерялась термисторным датчиком, включенным в цепь моста и усилителя постоянного тока с цифровым вольтметром В7-21А. С помощью сумматора проводилось алгебраическое сложение сигналов постоянного тока от цепи ректального датчика и цепи эталона температуры. В результате такого сложения на "выходе" сумматора появлялась разность потенциалов (ΔЕ), величина которой зависела от степени расхождения температуры эталона и ректальной температуры. С помощью электронного широтно-импульсного модулятора (ШИМ) ΔЕ преобразовывалась в длительность импульсов постоянного тока (по линейному закону). Импульсы постоянного тока в свою очередь управляли импульсным регулятором мощности (ИРМ). Последний предназначен для регулировки (повышения или понижения) температуры теплоносителя, следовательно, и температуры камеры.

Таким образом, при снижении ректальной температуры по принципу обратной пропорциональной отрицательной связи в соответствии со значением коэффициента "К" температура камеры пропорционально изменялась: чем больше $T^0_{рект.}$ откланялась от $T^0_{эт.}$, тем больше нагревался теплоноситель, и наоборот.

Ход опыта был следующим. Животное фиксировалось в специальной клетке, ограничивающей его подвижность. Затем в течение 30-60 мин крыса находилась в термостате при $30^0$C, а затем помещалась в термокамеру экспериментальной установки при начальной температуре $30.0\pm0.1^0$C. После измерения значений всех регистрируемых параметров (ректальной температуры, температуры камеры и величины потребления кислорода газоанализатором "Radiometer") включалась охлаждающая система и температура камеры начинала быстро снижаться до 0°С. Скорость снижения температуры составляла $10.0\pm1.0$ $^0$C/мин, в результате чего температура камеры в течение 3 мин достигала минимального значения. Одновременно автоматически начинала работать и внешняя корректирующая система, представленная рядом блоков. Продолжительность опыта составляла 70 мин. Этого времени было достаточно для достижения в гибридной системе "организм-среда-автомат" состояния динамического равновесия.

Для исследования роли катехоламинов в системе терморегуляции после установления состояния динамического равновесия крысам всех групп внутривенно (v.dors penis) инфузировался изопропилнорадреналин. Катехоламин вводился через предварительно введенную полиэтиленовую канюлю инфузатором в течение 20 мин в дозе 2.0 мкг/кг/мин. Спустя некоторое время система "организм-среда-автомат" возвращалась в состояние равновесия, но уже на ином количественном уровне. Следовательно, весь опыт продолжался в течение 90 мин.

Результаты экспериментов обрабатывались общепринятыми методами матстатистики.

**Результаты экспериментов и их обсуждение.** Анализ экспериментальных данных позволил выявить целый ряд особенностей и закономерностей, связанных с влиянием адаптации к холоду и изопропилнорадреналина на параметры функционирования целостной системы терморегуляции (в частности, на значение "установочной точки" в данной системе). По данным таблицы видно, что исходная температура тела, измеренная у крыс контрольной и экспериментальной групп, была разной. Так, у крыс, адаптированных к холоду, она составила 38.4±0.1°С, тогда как у крыс контрольной группы соответственно 38.0±0.1°С.

Таблица

К определению значения "установочной точки" в системе терморегуляции белых крыс при адаптации к холоду и инфузии изопропилнорадреналина

| Показатель | Исходный уровень | Время охлаждения, мин | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| АДАПТАЦИЯ К ХОЛОДУ | | | | | | | | | | |
| Температура тела | 38,4±0,1 | 38,5±0,1 | 38,4±0,2 | 38,0±0,1 | 37,7±0,2 | 37,9±0,1 | 38,0±0,2 | 38,1±0,1 | ***38,0±0,1*** | ***38,7±0,2*** |
| Температура кам. | 30±0,1 | 0,2±0,4 | 0,3±0,3 | 4,3±0,3 | 9,1±0,2 | 6,5±0,4 | 6,3±0,4 | 5,7±0,5 | ***6,0±0,7*** | ***0,2±0,5*** |
| Потребление $O_2$ | 26±0,9 | 47±1,4 | 54±1,8 | 58±1,5 | 59±1,6 | 55±1,8 | 57±1,9 | 53±1,8 | ***59±1,6*** | ***65±1,9*** |
| КОНТРОЛЬ | | | | | | | | | | |
| Температура тела | 38±0,1 | 36,9±0,2 | 36,2±0,1 | 36,8±0,2 | 36,1±0,2 | 36,1±0,2 | 36,2±0,2 | 36,3±0,1 | ***36,4±0,1*** | ***36,5±0,2*** |
| Температура кам. | 30±0,1 | 15,3±0,8 | 20,4±0,6 | 16,4±0,5 | 21,2±0,8 | 21,9±0,4 | 22,2±0,9 | 21,8±0,7 | ***9,8±1,1*** | ***10,6±0,9*** |
| Потребление $O_2$ | 21±0,8 | 33±0,6 | 39±1,2 | 45±1,4 | 41±1,2 | 48±1,7 | 43±1,2 | 39±1,9 | ***39±1,3*** | ***44±1,0*** |

***Примечание:*** шрифтом "жирный подчеркнутый курсив" обозначены значения показателей, зарегистрированных на фоне инфузии адреналина

Определенные изменения произошли и со стороны скорости потребления кислорода: у крыс контрольной группы его исходный уровень составлял 21±0.8 мл/кг/мин, а у животных, адаптированных к холоду, 26±0.9 мл/кг/мин, или на 5±1,3 мл/кг/мин больше..

После измерения исходных показателей включалась система охлаждения камеры и ее температура в течение нескольких минут опускалась до 0°С. Резкое снижение температуры среды (камеры), естественно, вызывало и падение ректальной температуры, что автоматически, в зависимости от степени этого падения, приводило к немедленному росту температуры камеры. В результате в системе "организм-среда-автомат" через определенное число регуляторных циклов устанавливалось состояние динамического равновесия.

Наблюдая динамику ректальной температуры у крыс разных групп, можно увидеть, что у животных, адаптированных к холоду, температура тела 40-й мин охлаждения падала до 37,7±0,1°С, а затем несколько поднималась и начинала колебаться около определенного значения, составляя в среднем 38.0±0.1°С. Непосредственно перед инфузией изопропилнорадреналина (т.е. к 70-й мин опыта) она составляла 38.1±0.1 С при скорости потребления кислорода на уровне 53±1.8 мл/кг/мин.

Аналогичным образом можно проанализировать динамику ректальной температуры у крыс контрольной группы. По данным таблицы видно, что при включении системы охлаждения камеры температура тела у контрольных крыс также начинала быстро падать: от исходного уровня 38.0±0.1°С до 36.2±0.1°С на 20-й мин и минимального значения 36.1±0.2°С на 40-й мин. В среднем же значение ректальной температуры у крыс данной группы установилось в период стабилизации на уровне 36.2±0.1°С, а непосредственно перед инфузией изопропилнорадреналина возле уровня 36.3±0.1°С при скорости потребления кислорода 39±1.9 мл/кг/мин.

После установления динамического равновесия со стороны температуры тела животным проводили инфузию изопропилнорадреналина (с 70-й мин). По данным таблицы видно, что введение катехоламина приводила к неравнозначным изменениям со стороны регистрируемых показателей. Так, у крыс, адаптированных к холоду, ректальная температура установилась на новом уровне, равном 38.7±0,2°С при более высоком потребление кислорода (65±1.9 мл/кг/мин). У животных контрольной группы значение вновь установившейся ректальной температуры составило 36.5±0.2°С при скорости потребления кислорода 44±1.0 мл/кг/мин.. Как видно, изопропилнорадреналин смещал вверх значение "установочной точки"

в системе терморегуляции у животных обеих групп, однако у крыс, адаптированных к холоду такой сдвиг уровня эталона температуры в центре терморегуляции был существенно большим.

Полученные в настоящих экспериментах данные позволяют предполагать, что при адаптации к холоду происходит перенастройка значения эталона в центре терморегуляции, и в этом процессе, по-видимому, принимают участие катехоламины [3,5]. Такой вывод согласуется с наблюдаемом рядом авторов активации симпатоадреналовой системы при длительном воздействии холода. Кроме того, в процессе адаптации к холоду наблюдается перестройка в адренергической природе многих терморегуляторных механизмов, в том числе калоригенеза, в сторону возрастания роли β-адренергических структур [3,5]. Использованный нами изопропилнорадреналин относится к катехоламинам с выраженным β-адренергическим типом действия [3]. Следовательно, можно допустить, что в настройке центра терморегуляции в организме при адаптации к холоду принимают участие катехоламины β-адренергической природы.

**Выводы.**

1. В процессе адаптации к холоду наблюдается перестройка центра терморегуляции, которая выражается в смещении вверх значения "установочной точки"; новый уровень эталона температуры активно регулируется системой терморегуляции с помощью всех имеющихся в ее распоряжении механизмов, что выражается в активации уровня холодового калоригенеза.

2. Катехоламин β-адренергического типа действия изопропилнорадреналин обладает способностью при внутривенной инфузии смещать дополнительно вверх значение "установочной точки" в системе терморегуляции; подобное действие катехоламина проявляется в большей степени у животных, адаптированных к холоду.

**РЕЗЮМЕ**

У процесі адаптації до холоду спостерігається перебудова центра терморегуляції, що виражається в зсуві нагору значення "встановленої точки"; новий рівень еталона температури активно регулюється системою терморегуляції за допомогою всіх наявних у її розпорядженні механізмів, що виражається в активації рівня холодового калоригенезу. Катехоламін (β- адренергічного типу дії ізопропілнорадреналін має здатність при внутрішньовенної інфузії зміщати додатково нагору значення "встановленої точки" у системі терморегуляції; подібна дія катехоламіну виявляється в більшому ступені у тварин, адаптованих до холоду.

**SUMMARY**

During acclimatization to a cold the reorganization of center of a thermoregulation is observed which is expressed in shift upwards meanings "set point"; the new level of the standard of temperature is actively adjusted by system of a thermoregulation with the help of all mechanisms, available at her order, that is expressed in activation a level of cold calorigenes. The catecholamin of a β-adrenergic type of action isopropilnoradrenaline has ability at an intravenous infusion to displace in addition upwards meaning "set point" in system of a thermoregulation; the similar action of a catecholamin is shown in the greater degree at animals adapted to a cold.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Иванов К.П. Основы энергетики организма: теоретические и практические аспекты. Т.1. Общая энергетика. Теплообмен и терморегуляция. – Л.: Наука, 1990. – 307 с.
2. Орбели Л.А. Адаптационно-трофическая роль симпатической нервной системы и мозжечка и высшая нервная деятельность // Физиол. журн. СССР. – 1949. – Т.35. – С.1-22.
3. Султанов Ф.Ф., Соболев В.И. Гормональные механизмы температурной адаптации. – Ашхабад: Ылым, 1991. – 216 с.
4. Говырин В.А. Трофическая функция симпатических нервов, сердца и скелетных мышц. – Л.: Наука. – 1967. – 100 с.
5. Хаскин В.В. Энергетика теплообразования и адаптация к холоду. – Новосибирск: Наука, 1970. – 199 с.
6. Petrovic V., Davidovi V. Excretion urinaire des catecholamines apres hypothermie prolongee chez le rat // J. Physiol. (France), 1972. – V.65, N3. – P.474-480.
7. Sellers E. A., Steiner G. et. al. Activity of the sympathetic nervous system during cold exposure. – In: Nonshivering thermogenesis (Ed. L. Jansky). Prague, 1971. – P.271-286.

*Надійшла до редакції 01.04.2003 р.*

УДК 616.441-008.61:615.217.22

# СОСТОЯНИЕ $\alpha_1$-АДРЕНЕРГИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ СЕМЯВЫНОСЯЩЕГО ПРОТОКА БЕЛЫХ КРЫС ПРИ ВЫРАЖЕННОМ ТИРЕОТОКСИКОЗЕ

*Ю.А.Девяткова*

Среди многочисленных проблем нейрогуморальной регуляции физиологических функций важное место отводится проблеме взаимодействия тиреоидных гормонов и катехоламинов [3,9]. В настоящее время хорошо исследован характер влияния гипертиреоза на состояние калоригенной реакции катехоламинов, их субстратмобилизирующих свойств [3,6,10,12]. Известно, что при гипертиреозе наблюдается ряд специфических морфофункциональных нарушений реакций сердечно-сосудистой системы на эндогенные катехоламины и препараты адренергического типа действия [1,2,5,8]. Однако остается недостаточно исследованным вопрос о состоянии адренергических реакций, осуществляемых посредством $\alpha_1$-адренорецепторов, при различном тиреоидном статусе. Данный тип адренорецепторов контролирует, в частности, реакцию вазоконстрикции [1,4,12].

Целью работы явилось исследование влияния экспериментального тиреотоксикоза на ряд параметров $\alpha_1$-адренергической реакции семявыносящего протока белой крысы.

**Объект и методы исследования.** Опыты были проведены на трех группах половозрелых белых крыс. У животных первой группы (n=14) вызывался экспериментальный гипертиреоз путем однократного подкожного введения трийодтиронина в дозе 30 мкг/кг ежесуточно (10-12 инъекций). У крыс второй группы (n=14) вызывался выраженный тиреотоксикоз (20-25 подкожных инъекций трийодтиронина в дозе 100 мкг/кг). Третья группа животных (n=14) была контрольной.

После окончания подготовительного периода ректальная температура у животных 1-3-й групп составляла соответственно 39.0±0.1 $C^0$, 41.1±0.1$C^0$ и 38.1±0.1$C^0$, что свидетельствовало о развитии разной степени выраженности экспериментального гипертиреоза. В первом случае формировался легкий гипертиреоз, а во втором – тяжелая форма тиреотоксикоза. Об этом свидетельствует как степень прироста ректальной температуры по сравнению с контролем, так и величина потребления кислорода (газоанализатор "Radiometer"). У крыс 1, 2 и 3-й групп скорость поглощения кислорода была соответственно равна 26±0.4, 36±0.6 и 21±0,3 мл/кг/мин. Кроме объективных показателей, указывающих на формирование легкой и тяжелой форм экспериментального гипертиреоза, у крыс 2-й, тиреотоксикозной, группы визуально отмечалось выпадение шерсти, вялость, чрезмерное исхудание. Все эти признаки свидетельствовали о наступлении выраженного тиреотоксикоза.

В качестве объекта изучения состояния $\alpha_1$-адренергической реакции гладкомышечных клеток (ГМК) был выбран семявыносящий проток (СВП), широко используемый в такого рода исследованиях [1]. Ход опыта был следующим. Животное забивалось, после чего семявыносящий проток (СВП) отпрепаровывался и помещался в стакан для изолированных органов, заполненный физиологическим раствором Рингера-Локка при температуре 39.0±0.1$C^0$ и аэрируемый воздухом. Через 30 мин инкубации в стакан последовательно добавлялся гидротартрат норадреналина ($\alpha_1$-агонист для гладкомышечных клеток СВП) в конечной концентрации 0,25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0, 16.0 и 32.0 мкг/мл раствора, что вызывало сокращение стенки СВП. После окончания процесса сокращения СВП физиологический раствор в стакане трижды менялся и через 15 мин норадреналин добавлялся вновь, но уже в большей концентрации. О силе реакции судили по амплитуде сокращения СВП с помощью индуктивного преобразователя и цифровых индикаторов.

Полученные данные обрабатывались общепринятыми методами вариационной статистики.

Работа выполнена на кафедре физиологии человека и животных Донецкого национального университета.

**Результаты экспериментов и их обсуждение.** Результаты исследований позволяют провести анализ состояния выраженности $\alpha_1$-адренергической реакции СВП белых крыс при различном тиреоидном статусе организма. Из данных таблицы следует, что у контрольной группы животных реакция сокращения СВП была четко выражена при введении в стакан для изолированных органов минимальной из использованных доз норадреналина (0,25 мкг/мл раствора). Повышение концентрации катехоламина сопровождалось нарастанием амплитуды укорочения СВП. Такая закономерность проявлялась вплоть до дозы гормона 8,0 мкг/мл раствора (табл.), после чего амплитуда сокращения СВП падала.

У животных с экспериментальным гипертиреозом величина реакции сокращения СВП при дозе норадреналина 0,25 мкг/мл раствора была такой же, как и у контрольных крыс (соответственно 1,1±0,2 мм/см при гипертиреозе и 0,8±0,2 мм/см у контроля, P>0.05).

У животных с экспериментальным тиреотоксикозом наблюдались существенные отклонения со стороны порога реакции. Так, при дозах норадреналина 0.25 и 0,5 мкг/мл реакция СВП не проявлялась,

©Девяткова Ю.А.

так как не был достигнут ее порог. Первое статистически значимое сокращение ГМК семявыносящего протока наблюдалось при дозе норадреналина 1.0 мкг/мл (0.6±0.2 мм). Как видно, порог реакции СВП на норадреналин (по дозе гормона) у крыс с выраженным тиреотоксикозом был в 4 раза выше, чем у контрольных животных.

Представляет интерес анализ значений величины максимальной реакции сокращения СВП. Из данных таблицы видно, что у крыс контрольной группы (3-я группа) максимальная реакция развивалась при дозе норадреналина 8,0 мкг/мл при амплитуде сокращения СВП 5,1±0,2 мм/см длины протока. При экспериментальном гипертиреозе (1-я группа) максимальный эффект наблюдался также при дозе гормона 8,0 мкг/мл, но составлял 6,3±0,3 мм/см, т.е. был заметно (+25%, $P<0.05$) выше уровня контроля.

У животных с тиреотоксикозом (2-я группа) реакция СВП на норадреналин была качественно другой. Так, максимальная амплитуда сокращения СВП отмечалась при дозе норадреналина 16,0 мкг/мл, т.е. дозе в 2 раза большей, чем у контрольной и гипертиреодной групп. Кроме того, наблюдалось существенное снижение амплитуды сокращения протока. Так, по данным таблицы видно, что у крыс с экспериментальным тиреотоксикозом СВП сократился максимум на 3.1±0.3 мм, тогда как у контрольных животных амплитуда сокращения СВП составила 5.1±0.2 мм. Следовательно, максимальная амплитуда сокращения СВП у крыс тиреотоксикозной группы составляла 61% от контрольных значений.

Таким образом, тиреоидный статус оказывает выраженное влияние на ряд параметров сокращения ГМК семявыносящего протока белых крыс в ответ на адренергическую стимуляцию норадреналином, в частности порог реакции, и ее "доза зависимую" характеристику.

Анализ зависимостей между дозой норадреналина и вызываемой реакцией сокращения СВП показывает, что при экспериментальном гипертиреозе кривая "доза-эффект" сдвинута влево в сторону меньших концентраций гормона, причем параллельно кривой контрольной группы. Таким образом, характер влияния экспериментального гипертиреоза на $\alpha_1$-адренергический процесс был следующим: порог реакции не отличался от уровня контроля, максимальная реакция СВП на норадреналин была выше, но доза, вызывающая максимально возможный эффект, не изменялась. Такой тип "доза зависимой" реакции может свидетельствовать об увеличении числа $\alpha_1$-адренорецепторов в цитомембране ГМК и (или) возрастании величины элементарного постадренорецепторного ответа [4,7,8,12].

Таблица

Влияние норадреналина на амплитуду сокращения семявыносящего протока белых крыс (мм) при различном тиреоидном статусе

| Группа животных | Доза норадреналина, мкг/мл раствора | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,25 | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 4,0 | 8,0 | 16,0 | 32,0 |
| Гипертиреоз (n=14) | 1,1 ±0,2 | 2,6 ±0,1* | 3,5 ±0,2* | 3,9 ±0,2* | 5,4 ±0,3 | 6,3 ±0,3* | 4,9 ±0,5 | 4,5 ±0,4 |
| Тиреотоксикоз (n=14) | 0,1 ±0,3* | 0,2 ±0,2* | 0,6 ±0,2* | 1,9 ±0,2* | 2,2 ±0,3* | 3,0 ±0,3* | 3,1 ±0,3* | 3,0 ±0,4* |
| Контроль (n=14) | 0,8 ±0,2 | 1,1 ±0,1 | 2,1 ±0,1 | 2,9 ±0,1 | 4,8 ±0,2 | 5,1 ±0,2 | 4,7 ±0,2 | 4,4 ±0,3 |

***Примечание:*** * – различия статистически достоверны ($P<0.05$) по отношению к соответствующим показателям контроля

Качественно иная закономерность имела место у животных с экспериментальным тиреотоксикозом. Об этом свидетельствует характер расположения кривой "доза-эффект", в частности, кривая сдвинута по отношению к контролю вправо и характеризуется повышением порога реакции (в 4 раза), увеличением значения дозы, вызывающей максимальную амплитуду сокращения СВП (в два раза), и снижением (на 60%) максимальной амплитуды сокращения протока. Такой тип расположения доза зависимой реакции свидетельствует об уменьшении числа $\alpha_1$-адренорецепторов в ГМК семявыносящего протока и их сродства к α-адреноагонисту норадреналину [4,7,11]. Что же касается механизма, лежащего в основе данного явления, то он принципиально может быть реализован на уровне, начиная от процесса комплексации гормона с рецептором цитомембраны ГМК, до конечного звена в постадренорецепторном действии норадреналина в клетке[4,12].

**Выводы**

1. Экспериментальный гипертиреоз использованной модели (10-12 п/к инъекций трийодтиронина в дозе 30 мкг/кг) сопровождается повышением максимально возможной силы сокращения ГМК семявыносящего протока белых крыс на норадреналин (+25%) при неизменном пороге реакции и дозе, вызываемой данный эффект.

2. Экспериментальный тиреотоксикоз нашей модели (20-25 инъекций трийодтиронина в дозе 100 мкг/кг п/к), сопровождающийся повышением ректальной температуры до 41.1±0.1С$^0$, характеризуется повышением порога реакции (в 4 раза), увеличением значения дозы норадреналина, вызывающей максимальную амплитуду сокращения СВП (в два раза), и снижением (на 60%) максимальной амплитуды его сокращения.

**РЕЗЮМЕ**

Експериментальний гіпертиреоз використаної моделі (10-12 п/ш ін'єкцій трийодтироніну в дозі 30 мкг/кг) супроводжується підвищенням максимально можливої сили скорочення ГМК сім`явиношуючої протоки білих щурів на норадреналін (+25%) при незмінному порозі реакції і дозі, що викликає даний ефект. Експериментальний тиреотоксикоз нашої моделі (20-25 ін'єкцій трийодтироніну в дозі 100 мкг/кг п/ш), що супроводжується підвищенням ректальної температури до 41.1±0.1С$^0$, характеризується підвищенням порога реакції (у 4 рази), збільшенням значення дози норадреналіну, що викликає максимальну амплітуду скорочення СВП (у два рази), і зниженням (на 60%) максимальної амплітуди його скорочення.

**SUMMARY**

The experimental hyperthyroidism of the used model (10-12 s/c of injections triiodthyronine in a dose of 30 mkg/kg) is accompanied by rising of the greatest possible force of reduction SMC of a "ductus ejaculatorius" white rats on noradrenaline (+25 %) at a constant threshold of reaction and dose caused given effect.

The experimental thyrotoxicosis of our model (20-25 injections triiodthyronine in a dose of 100 mkg/kg, s/c), accompanying by rising of rectal temperature up to 41.1±0.1$^0$C, is characterized by rising of a threshold of reaction (in 4 times), augmentation of meaning of a dose of noradrenaline causing the maximal amplitude reduction of a "ductus ejaculatorius" (twice), and decrease (on 60 %) maximal amplitude of his reduction.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Авакян О.М., Симпатоадреналовая система. – Ленинград.: Наука. – 1977. – 184 с.
2. Бурумкулова Ф.Ф., Котова Г.А., Герасимов Г.А. Сердечно-сосудистая система при диффузном токсическом зобе // Пробл. эндокринол. – 1995. – №5. – С.41-46.
3. Гольбер Л.М., Кандрор В.И., Крюкова И.В. Гипертиреоз и симпато-адреналовая система. – Москва: АН СССР. – 1978. – 100 с.
4. Комиссаров И.В. Элементы теории рецепторов в молекулярной фармакологии. – Москва: Медицина. – 1969. – 216 с.
5. Ром-Бугуславская Е.С., Левченко Т.П. К вопросу о чувствительности тиреотоксического сердца к адренергическим влияниям // Пробл. эндокринол. – 1977. – №3. – С.34-41.
6. Соболев В.И. Некоторые особенности калоригенного действия катехоламинов у крыс с экспериментальным гипер- и гипотиреозом // Пробл. эндокринол. – 1976. – №1. – С.67-71.
7. Соболев В.И. Состояние некоторых адренергических реакций при экспериментальном гипертиреозе // Пробл. эндокринол. – 1981. – №5. – С.63-69.
8. Соболев В.И., Низар Осман. Состояние некоторых физиологических реакций, стимулируемых изадрином, в процессе развития экспериментального гипертиреоза у белых крыс // Пробл. эндокринол. – 1997. – №3 – С.43-46.
9. Султанов Ф.Ф., Соболев В.И. Гормональные механизмы температурной адаптации. – Ашхабад: Ылым. – 1991. – 216 с.
10. Чирва Г.И. Калоригенное взаимодействие тиреоидных гормонов и катехоламинов // Вісник проблем біології і медицини. – 2001. – Вип. – С.40-45.
11. Flafahan N.A., Vanhoutte P.M. $\alpha_1$-Adrenoreceptor subclassification in vascular smooth muscle // Trends Pharmacol. Sci. – 1987. – V.7. – N9. – P.347-349.
12. Soboiev V.I. Influence of alpha- and beta-adrenoblockers on the calorigenic effect of epinephrine on the rats with experimental hyperthyroidism // Neurosci. Behav. Physiol. (USA). – 1981. – V.11. – N4. – P.389-391.

*Надійшла до редакції 18.03.2003 р.*

УДК 631.811.98+544.2:635.63+64

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГУМАТА АММОНИЯ НА ОВОЩНЫХ КУЛЬТУРАХ

*И.А.Рыктор, А.Л.Антонова, Ю.Н.Зубкова*

Многолетние исследования, проведенные в научных профильных учреждениях СНГ и за рубежом, подтверждают высокую эффективность действия физиологически-активных веществ гуминовой природы на растительных культурах широкого видового состава [1, 2]. Ростстимулирующие и адаптогенные свойства гуматсодержащих препаратов в значительной степени проявляются и на овощных культурах защищенного грунта [3-7].

Сотрудниками НИО «Нетопливное использование углей и утилизация отходов энергетической промышленности» совместно с Украинским научно-исследовательским институтом овощеводства и бахчеводства в течение трех лет были проведены производственные испытания гумата аммония в качестве физиологически активного вещества. На основании этих испытаний оценено влияние препарата на урожайность и качество продукции овощных культур защищенного грунта огурца и томата. Изучена эффективность гумата аммония в зависимости от способа применения и концентрации используемых растворов, сортовая реакция овощных культур на обработку гуматом, влияние сроков хранения препарата на его биологическую активность. Использованы различные способы и комбинации обработки гуматом аммония семенного и растительного материала: замачивание семян в течение 24 часов, внекорневая обработка и полив рассады и растений в течение вегетации. Применяли следующие концентрации гумата аммония: $10^{-6}$, $10^{-4}$, $10^{-2}$%. В качестве контрольного раствора использовали воду, раствором сравнения служил $10^{-2}$ %-ный раствор гумата натрия. Постановку всех опытов осуществляли согласно методическим рекомендациям «Проведение опытов с овощными культурами в защищенном грунте». В работе представлены данные производственных испытаний, проведенные в 1991-1993 гг. Результаты, полученные в последующие годы, подтверждают выявленные закономерности ростстимулирующего и адаптогенного влияния гумата аммония.

На основании результатов, полученных на культуре огурца, установлено, что применение гумата аммония способствует ускорению роста и развития растений, увеличению количества вегетативных и генеративных органов, повышению продуктивности растений (табл. 1, 2).

Учитывая, что от сортовой реакции в значительной степени зависит эффективность применяемых агроприемов, в опыте были задействованы различные по морфологии и продуктивности гибриды огурцов Стелла, НИИОХ-412, Грибовчанка-длиннoплодные, Змиевской, ТСХА короткоплодные, Московский тепличный, Шебелинский, Зозуля.

Необходимо отметить, что существуют значительные различия в сортовой реакции культур на гумат аммония (табл. 3).Наиболее наглядно это проявилось на гибридах огурца Стелла и ТСХА-3707. Наблюдение за динамикой ростовых процессов в первый период вегетации показало, что гумат аммония при всех исследуемых способах применения и концентрациях в большей степени способствовал ускорению темпов роста и развития растений огурца гибрида Стелла. Это выразилось в значительном увеличении высоты растений, количества листьев, пасынков, площади ассимиляционной поверхности, количества репродуктивных органов: цветков и завязей. По количеству завязей растения, обработанные гуматом аммония, превосходили контроль на 46-100% (в разной степени в разные годы), по площади ассимиляционной поверхности – на 16-32%. Большая нагрузка растений плодоэлементами в этом варианте приводила к тому, что в периоды с неблагоприятными условиями опадение завязей в опыте было больше, чем на контроле. В первый месяц плодоношения наблюдалось увеличение раннего урожая до 10% в лучшем варианте с комплексной обработкой семян, рассады и растений в течение вегетации. Однако, в дальнейшем темпы отдачи урожая в опытных и контрольных вариантах выравнивались и к концу плодоношения разница по урожаю была достоверной. Таким образом, существенный стимулирующий эффект, оказываемый гуматом аммония на ранней стадии развития огурца гибрида Стелла, нивелировался во второй половине вегетации.

Противоположным образом реагировал на применение гумата аммония сорт ТСХА-3707. В течение всего периода от высадки рассады до начала плодоношения прослеживалась тенденция к ингибированию ростовых процессов. По количеству листьев опытные растения этого гибрида уступали контролю на 6-10%, по количеству пасынков на 25-36%, по количеству завязей – на 16%. Вместе с тем, по гибриду ТСХА-3707 была получена достоверная прибавка общего товарного урожая на протяжении трех лет:1991 г. – 7% ,1992 г. – 17%, 1993 г. – 15%. Большую товарную ценность также представляет существенное и стабильное снижение уровня нитратов под влиянием гумата аммония в течение периода плодоношения по данному гибриду, в среднем за сезон – на 31%.



©Рыктор И.А., Антонова А.Л., Зубкова Ю.Н.

Таблица 1

Эффективность ростостимулирующего действия гумата аммония на растения огурца в зависимости от способа обработки

| Вариант, концентрация гумата аммония, % | 8 февраля | 18 февраля | | | 28 февраля | 19 марта |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Высота, см | Кол-во пасынков, шт. | Кол-во цветков, шт. | Площадь ассимиляционной поверхности, $см^2$ | Кол-во завязей, шт. | Кол-во завязей, шт. |
| Контроль – вода (обработка семян) | 32,1 | 2,1 | – | 1330 | 2,4 | 9,3 |
| Стандартный раствор – Гумат натрия, $10^{-2}$ (обработка семян) | 32,3 | 1,9 | – | 1360 | 2,8 | 10,7 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян) | 35,0 | 2,5 | – | 1403 | 2,8 | 10,2 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян и растений) | 50,2 | 2,7 | 0,03 | 1549 | 3,5 | 10,6 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян, рассады и растений в течение вегетации) | 47,4 | 3,8 | 0,03 | 1730 | 4,0 | 11,4 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка рассады и растений в течение вегетации) | 40,2 | 3,5 | 0,07 | 1750 | 4,8 | 11,8 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка растений в течение вегетации) | 40,5 | 2,4 | 0,1 | 1417 | 3,0 | 11,4 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$+0,2%-ный р-р кристаллина (обработка растений в течение вегетации) | 47,6 | 3,0 | 0,03 | 1530 | 4,2 | 11,7 |
| Гумат аммония, $10^{-2}$ (обработка семян, рассады и растений в течение вегетации) | 38,1 | 2,6 | – | 1437 | 3,2 | 11,8 |
| Гумат аммония, $10^{-6}$ | 36,2 | 3,0 | – | 1351 | 3,6 | 10,9 |

Таблица 2

Влияние способов обработки гуматом аммония на агроэкономическую эффективность выращивания огурца

| Вариант, концентрация гумата аммония, % | Урожай с 1-го растения, кг | Урожайность | | Выручка от реализации, % |
|---|---|---|---|---|
| | | за первый месяц плодоношения, $кг/м^2$ | Общая товарная, % | |
| Контроль – вода (обработка семян) | 10,81 | 4,6 | 21,3 | 100 |
| Гумат натрия, $10^{-2}$ (обработка семян) | 11,31 | 5,1 | 22,1 | 105 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян) | 11,4 | 4,8 | 21,3 | 106 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян и рассады) | 12,41 | 4,9 | 22,7 | 107 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян, рассады и растений) | 11,41 | 4,5 | 21,3 | 102 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка, рассады и растений) | 11,1 | 4,7 | 21,4 | 102 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка растений) | 11,33 | 4,4 | 21,4 | 105 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян, рассады, растений, полив) | 11,44 | 5,1 | 22,6 | 117 |
| НСР 1,4 | | | | |

Таким образом, выявлено, что высокий стимулирующий эффект от гумата аммония в раннем периоде развития растений не сохраняется до конца вегетации в ряде случаев и лишь незначительно отражается на продуктивности культур, как наблюдалось по гибриду Стелла. В других случаях максимальная стимуляция от препарата проявляется на стадии плодоношения. Возможно, что накопленные на ранних стадиях онтогенеза внутренние ресурсы гибрида реализуются при переходе растения к репродуктивной стадии развития. В результате этого достигаются высокие показатели совокупного товарного урожая.

Положительное влияние гумата аммония на культуру огурца проявляется в ускорении цветения и плодоношения большинства изученных гибридов на 1-3 дня. Значительное повышение продуктивности растений под влиянием гумата аммония получено по гибридам: НИИОХ-412 и ТСХА-3707 (1991 г. – 1,3-1,5 кг/м$^2$); по гибриду Московский тепличный в условиях 1992 г. достоверная прибавка урожая составила 2,3кг/м$^2$, в 1993 г. урожай с одного растения был на 16%, а общая товарная урожайность на 9% выше, чем на контроле. Повышение продуктивности растений по гибриду Шебелинский с одного растения составило 26%, общая товарная урожайность возросла на 15% (1992 г.); в 1993 г. также получена достоверная прибавка урожая: 1,2-2,1 кг/м$^2$. По гибриду Зозуля повышение продуктивности в 1992 г. составило 1,2кг/м$^2$, в 1993г.–1,7кг/м$^2$. Установлено, что по гибридам Московский тепличный и Зозуля под действием гумата аммония отдача урожая возросла с начала плодоношения, а по гибриду Шебелинский – со второй половины периода плодоношения. Увеличение урожайности растений в вариантах с применением гумата аммония способствовало повышению экономической эффективности выращивания культуры огурца в защищенном грунте (табл.3). Выручка от реализации по гибридам Московский тепличный, Шебелинский и Зозуля в 1992 г. была на 10-12% выше в опытных вариантах, чем в контроле.

Таблица 3

Влияние гумата аммония на агроэкономическую эффективность выращивания различных сортов огурца

| Вариант, сорт | Урожай с 1-го растения, кг | Урожайность | | Выручка от реализации, % |
|---|---|---|---|---|
| | | за первый месяц плодоношения, кг/м$^2$ | общая товарная, кг/м$^2$ | |
| Сезон 1991г. | | | | |
| Стелла, контроль | 14,04 | 15,14 | 23,9 | 100 |
| Стелла, гумат аммония | 14,21 | 5,64 | 24,3 | 102 |
| НИИОХ – 412, контроль | 16,78 | 5,67 | 26,8 | 100 |
| НИИОХ – 412, гумат аммония | 17,67 | 5,78 | 28,1 | 107 |
| Змиевской, контроль | 14,19 | 1,77 | 21,9 | 100 |
| Змиевской, гумат аммония | 13,69 | 2,19 | 21,7 | 98 |
| ТСХА – 3707, контроль | 15,99 | 3,46 | 25,8 | 100 |
| ТСХА – 3707, гумат аммония | 17,39 | 3,17 | 27,3 | 108 |
| НСР $_{0,5}$ кг/м$^2$ 1,3 | | | | |
| Сезон 1992 г. | | | | |
| Стелла, контроль | 11,23 | 4,8 | 22,2 | 100 |
| Стелла, гумат аммония | 11,55 | 4,9 | 22,7 | 102 |
| Московский тепличный контроль | 14,94 | 3,8 | 22,8 | 100 |
| Московский тепличный, гумат аммония | 16,51 | 4,2 | 25,1 | 110 |
| Шебелинский, контроль | 12,86 | 3,9 | 21,0 | 100 |
| Шебелинский, гумат аммония | 16,16 | 4,1 | 24,2 | 113 |
| Зозуля, контроль | 9,13 | 0,8 | 16,0 | 100 |
| Зозуля, гумат аммония | 10,01 | 0,8 | 17,2 | 111 |
| НСР $_{0,5}$ кг/м$^2$ 1,1 | | | | |

Применение препарата оказывало существенное положительное влияние на биохимический состав плодов огурца почти для всех изучаемых гибридов (табл. 4). Повышалось содержание сухих веществ на 7-25% (НИИОХ-412, Шебелинский, Зозуля, Змиевской), сахаров и аскорбиновой кислоты – на 11-20% (Московский тепличный, НИИОХ-412, Зозуля, Змиевской, ТСХА-3707). Наиболее существенное и стабильное снижение уровня нитратов в плодах в течение периода плодоношения наблюдалось у гибридов ТСХА-412 и Московский тепличный в среднем за сезон на 31% и 15% соответственно.

На основании оценки совокупных данных определен наиболее эффективный способ применения гумата аммония на культуре огурца – это комплексная обработка семян, рассады и растений в течение вегетации, оптимальная концентрация используемого раствора $10^{-4}$%.

Применение гумата аммония на культуре томата также выявило высокую эффективность действия указанного препарата на испытанных сортах и гибридах, возделываемых в условиях защищенного грунта. Сортовую реакцию растений томата на гумат аммония изучали на различных по морфологии и продуктивности сортах и гибридах: Украинец, Верлиока, Гамаюн, Каштан, Русич, Золотой Рог. Препарат применяли, используя различные способы и комбинации обработки семенного и растительного материала: замачивание семян, внекорневая обработка и полив растворами концентрации $10^{-6}$, $10^{-4}$ и $10^{-2}$%.

Полученные данные свидетельствуют об ускорении процессов роста и развития растений под

влиянием гумата аммония. Наблюдение за динамикой нарастания вегетативных и генеративных органов в период от высадки рассады до начала плодоношения показало, что воздействие гумата направлено прежде всего на генеративное развитие. Применение гумата способствовало более раннему дружному переходу растений к репродуктивной стадии развития: массовое цветение первых и последующих кистей наступило на 2-3 дня раньше, чем на контроле, сокращался период от всходов до начала плодоношения. Биометрический анализ растений, проведенный в период вегетации, показал, что по количеству кистей опытные растения превосходят контрольные на 9-40% (в зависимости от сортовой реакции). Максимальное влияние на продуктивность растений томата гумат аммония оказывал в первый период плодоношения. Увеличение показателей отдачи урожая на ранней стадии плодоношения связано как с улучшением завязываемости плодов на первых кистях, так и более ранним вступлением опытных растений в репродуктивную фазу развития.

Таблица 4

Влияние гумата аммония на биохимический состав плодов огурца (сезон 1992г.)

| Сорт огурца, вариант обработки | Содержание сухого вещества | | Содержание сахара | | Содержание аскорбиновой кислоты | | Содержание нитратов | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | март | | Май | |
| | % | % | % | % | мкг/% | % | мкг/кг | % | мкг/кг | % |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Стелла, контроль | 3,81 | 100,0 | 1,63 | 100,0 | 8,02 | 100,0 | 333 | 100,0 | 297 | 100,0 |
| Стелла, гумат аммония | 3,84 | 101,2 | 1,87 | 102,2 | 7,61 | 95,1 | 409 | 123,3 | 233 | 78,4 |
| НИИОХ – 412, контроль | 3,52 | 100,0 | 1,53 | 100,0 | 7,65 | 100,0 | 349 | 100,0 | 349 | 100,0 |
| НИИОХ – 412, гумат аммония | 4,41 | 125,4 | 1,82 | 119,1 | 7,54 | 99,2 | 500 | 144,3 | 385 | 110,3 |
| Московский тепличный, контроль | 3,57 | 100,0 | 1,51 | 100,0 | 7,28 | 100,0 | 349 | 100,0 | 286 | 100,0 |
| Московский тепличный, гумат аммония | 3,64 | 102,1 | 1,67 | 112,2 | 6,94 | 95,4 | 310 | 90,2 | 229 | 80,3 |
| Шебелинский, контроль | 3,69 | 100,0 | 1,82 | 100,0 | 6,72 | 100,0 | 425 | 100,0 | 275 | 100,0 |
| Шебелинский, гумат аммония | 3,95 | 107,2 | 1,82 | 100,0 | 6,86 | 102,1 | 425 | 100,0 | 280 | 102,1 |
| Зозуля, контроль | 3,67 | 100,0 | 1,53 | 100,0 | 6,02 | 100,0 | 552 | 100,0 | 166 | 100,0 |
| Зозуля, гумат аммония | 4,19 | 114,2 | 1,70 | 111,2 | 6,84 | 97,0 | 522 | 96,2 | 220 | 133,1 |

Наиболее отзывчивыми к гумату среди задействованных в опыте были сорта Украинец, Каштан и гибриды Гамаюн, Русич, Верлиока. На сорте Украинец получены достоверные прибавки урожая на протяжении 3-х лет: в 1991 г. прибавка раннего урожая составила 17%, общего товарного – 8%; в 1992 г. ранний урожай в опыте возрос на 10-13%, общий товарный на 6-7%; в 1993 г. получена прибавка общего товарного урожая 1,0-1,4кг/м$^2$.Максимальная прибавка урожая на сорте Каштан была получена в первый месяц плодоношения и составила 17%, в дальнейшем темпы отдачи урожая постепенно приближались к контрольным показателям.

По общей продуктивности и скороспелости среди гибридов выделялись Русич и Гамаюн. Для гибрида Гамаюн в 1992 г. прибавка раннего урожая составила 17 %, общего товарного – 14 %. По гибриду Русич получены стабильные достоверные прибавки на протяжении 1991-93 гг. (прибавка общего товарного урожая составляла 1,0-1,4 кг/м$^2$). Лучшие результаты по гибриду Верлиока соответствовали прибавке урожая на 1,1 кг/м$^2$ в 1993 г.

Биохимический анализ плодов томата показал, что применение гумата аммония не оказывало существенного воздействия на накопление сухих веществ и сахаров в плодах сортов и гибридов защищенного грунта, использованных в опыте. Выявлено стабильное и достоверное повышение аскорбиновой кислоты в опытных вариантах по всем изучаемым сортам и гибридам. Положительное влияние гумата аммония на накопление нитратного азота прослеживалось на большинстве изученных в опыте сортов и гибридов. Снижение уровня нитратов в плодах составляло 13 – 31 % в сравнении с контролем и 26 – 35 % в сравнении с эталоном – гуматом натрия. Однако, существуют различия в накоплении нитратов опытными растениями в зависимости от сортовой реакции на гумат аммония. Получено стабильное снижение этого показателя в плодах сортов Украинец, Каштан и гибридах Русич,

Верлиока, а по гибридам Гамаюн и Мрия – противоречивые результаты в 1992-93 гг.

На основании фенологических, биометрических и биохимических показателей определены оптимальные способы обработки и используемые концентрации растворов гумата аммония. Следует отметить, что существует некоторая нестабильность в получении максимальных урожаев в зависимости от используемой концентрации в разные годы. Так, например, по гибриду Верлиока самый высокий урожай в 1991 г. получен при использовании $10^{-4}$ %-ного раствора, в 1992 г. – $10^{-2}$ %-ного раствора, в 1993 г. – $10^{-6}$ %-ного раствора. Аналогичная тенденция наблюдалась и на других сортах и гибридах. На основании совокупных данных рекомендуется применять комплексную обработку семян и рассады с использованием $10^{-4}$%-ного раствора гумата аммония на сортах и гибридах томата, произрастающих в условиях защищенного грунта.

Исследование влияния гумата аммония на степень пораженности растений томата грибковыми и вирусными болезнями выявили существенное повышение устойчивости растений к заболеваниям. В большей степени гумат аммония препятствовал вирусным болезням, интенсивное развитие которых приходится на март-апрель. Применение препарата в концентрации $10^{-2}$% снижало поражение растений стриком в этот период почти в 3 раза. Обработка взрослых растений $10^{-4}$%-ным раствором гумата аммония оказало негативное действие, способствуя развитию заболевания.

По итогам проведенных трехгодичных научно-производственных испытаний гумата аммония на культуре томата получены результаты, представляющие большой интерес (табл. 5).

Таблица 5

Агроэкономическая эффективность выращивания томатов при обработке гуматом аммония различными способами

| Вариант, концентрация гумата аммония, % | Урожай с одного растения кг | Урожайность | | Потери урожая от болезней, % | Выручка от реализации, % |
|---|---|---|---|---|---|
| | | За первый месяц плодоношения, кг/м$^2$ | Общая товарная, кг/м$^2$ | | |
| Сезон 1991г. | | | | | |
| Контроль – вода | 4,52 | 4,1 | 12,9 | 25 | 100 |
| Стандартный раствор – гумат натрия | 4,44 | 4,5 | 13,7 | 21 | 107 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян) | 4,7 | 4,7 | 13,4 | 22 | 105 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян и рассады) | 5,04 | 5,3 | 14,8 | 25 | 118 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян , рассады и растений) | 4,78 | 4,8 | 13,9 | 21 | 111 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка рассады и растений) | 4,75 | 5,0 | 13,9 | 21 | 111 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка растений) | 5,36 | 4,1 | 13,4 | 29 | 105 |
| Гумат аммония, $10^{-2}$ (обработка растений) | 4,33 | 4,2 | 13,4 | 17 | 105 |
| Гумат аммония, $10^{-6}$ (обработка семян, рассады, растений, ) | 4,58 | 4,4 | 13,1 | 25 | 105 |
| Сезон 1992г. | | | | | |
| Контроль – вода | 3,13 | 4,1 | 10,7 | - | 100 |
| Стандартный раствор – гумат натрия, $10^{-2}$ | 3,38 | 4,4 | 10,9 | - | 102 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян) | 3,18 | 4,2 | 10,7 | - | 101 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян и рассады) | 3,46 | 4,4 | 11,0 | - | 106 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка семян , рассады и растений) | 3,37 | 4,3 | 10,7 | - | 104 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка рассады и растений) | 3,33 | 4,4 | 10,8 | - | 103 |
| Гумат аммония, $10^{-4}$ (обработка растений) | 3,38 | 4,3 | 10,9 | - | 105 |
| Гумат аммония, $10^{-2}$ (обработка семян, рассады и растений) | 3,62 | 4,5 | 11,6 | - | 111 |
| Гумат аммония, $10^{-6}$ (обработка семян, рассады, растений, ) | 3,49 | 4,3 | 11,1 | - | 106 |

Повышение урожайности растений, более раннее и дружное вызревание продукции в опытных вариантах и реализация ее по более высоким ценам способствовали повышению экономической эффективности выращивания культуры томата в защищенном грунте. Выручка от реализации в лучших

вариантах повышалась на 11-18% по сравнению с контролем и на 3-10% по сравнению с эталоном – гуматом натрия. Таким образом, применение гумата аммония на культуре томата обеспечивает высокий биологический и экономический эффект.

Кроме этого, было изучено влияние сроков хранения концентратов гумата аммония, полученных из бурых углей в Донецком национальном университете в 1991-1993 гг. Биоактивность исследуемых концентратов оценена на культурах огурца, редиса, пекинской капусты и кресс-салата по стандартным методикам. На основании фенологических и биометрических исследований, показателей общего товарного урожая по различным культурам подтверждено отсутствие достоверного влияния сроков хранения на биоактивные свойства предлагаемого гумата аммония.

Полученные научно-практические результаты свидетельствуют о высокой эффективности и перспективности использования гумата аммония на овощных культурах защищенного грунта и являются, по сути, практическим руководством для использования на задействованных в опытах сортах и гибридах огурцов и томатов с учетом сортоспецифических особенностей культур.

**РЕЗЮМЕ**

Проведені дослідження впливу гумата амонію на ріст, розвиток та продуктивність рослин огірка і томатів в умовах захищеного ґрунту. Виявлені особливості сортоспецифічної реакції рослин на гумат амонію. Встановлено найбільш ефективні засоби обробки гібридів і сортів огірка і томатів.

**SUMMARY**

Research on studying the influence of ammonium humate on growth and on productivity of cucumber and tomato plants in greenhouse has been carried out. Peculiarities of species responsiveness plant's cultures to the ammonium humate have been discovered. The most effective methods of treatment of the hybrids of the species of cucumber and of tomato have been determined.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Горовая А.И., Орлов Д.С., Щербенко О.В. Гуминовые вещества. – Киев: Наук. думка. –1995. – 365 с.
2. Гуминовые удобрения. Теория и практика их применения / Под ред. Л.П.Христевой. – Днепропетровск: Днепропетр. с.-х. ин-т. Т.1-7. – 1957-1980 гг.
3. Башуев Б.И. Влияние гумата натрия, полученного из местного торфяного сырья на рассаду, урожайность и качество плодов томата в защищенном грунте // Проблемы агрономической науки в условиях перехода производства к рынку. – Новосибирск: Наука. – 1991. – С.17-18.
4. Демьяненко В.Д. Эффективность гумофоса и гумата натрия при выращивании овощных культур в условиях юга Украины // Гуминовые удобрения. Теория и практика их применения. – Днепропетровск: Днепропетр. с.-х. ин-т. – 1983. – С.52-54.
5. Иванов К. Взаимодействие на хумусните вещества и микроелементите във формирането на добива и качеството на продукцията при оранжерийни краставици // Науч. Труди Висш. Селскостоп. Инст. В.Коларов. – Пловдив. – 1980. – Т.25, №1. – С.15-19.
6. Рачовски Г. Влияние на физиологично активните хумусни вещества върху растежа и продуктивноста на краставицита // Науч. Труды Высш. Селскостоп. Инст. В.Коларов. – Пловдив. – 1979. – Т.24, №2. – С.75-79.
7. Станчев Л., Рачовски Г. Хумусните вещества като биорегулатори при оранжерийните крастовици // Почвознание. Агрохимия. – 1980. – Т.13, 34. – С.3-9.

*Надійшла до редакції 24.02.2003 р.*

УДК 632.151

# ЗАКОНОМІРНОСТІ ПОШКОДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ВИДІВ ДЕРЕВНИХ ТА ЧАГАРНИКОВИХ РОСЛИН ЗА УМОВ КОМПЛЕКСНОГО ЗАБРУДНЕННЯ ПОВІРТЯ СПОЛУКАМИ ФТОРУ, СІРКИ ТА АЗОТУ

*Ю.Г.Приседський*

**Вступ**

Техногенез різко змінює природне середовище. Забруднене атмосферне повітря і ґрунт є серйозними екологічними факторами, які чинять безпосередній або опосередкований негативний вплив на метаболізм рослин, їх генотип. Разом з тим зелені насадження можуть відігравати значну санітарно-гігієнічну функцію, очищуючи атмосферу від шкідливих газів, диму і пилу, сприяючи підтримці постійного складу повітря.

Однак, не всі види рослин здатні протистояти дії забруднення довкілля. Поступання у повітря та ґрунт токсичних речовин позначається не тільки на окремих метаболічних процесах, а і на організмі в цілому. У забруднених регіонах відбувається зміна рослинних популяцій, їх динаміки, продуктивності, щільності та вікової структури [1, 6].

Розрізняють три види пошкоджень рослин атмосферними забруднювачами: гостре, хронічне і приховане. Гостре ураження спостерігається під час дії на рослину високих концентрацій токсичних речовин протягом декількох хвилин або годин. Необоротні порушення, які виникають під час такої дії полютантів, чітко помітні візуально у вигляді некрозів. Характерними ознаками хронічного ураження токсикантами є зменшення лінійних розмірів асиміляційних органів, передчасний листопад, часткова або повна втрата плодоносіння. За прихованого пошкодження візуально ніяких змін не спостерігається, але вони виявляються в зниженні інтенсивності життєдіяльності рослин [4]. Р. Гудеріан [2] відмічає, що пошкоджуваність рослин полютантами залежить від діючої дози і має експотенційний характер. Причому, найбільш значущий вплив чинить термін дії $SO_2$, а не його концентрація.

Аналіз стану рослин на території промислових виробництв Донбасу показує, що адаптивні зміни в ході їх онтогенезу пов'язані насамперед з хронічним ураженням. Морфогенез рослин у жорстких умовах середовища, забрудненого викидами численних промислових підприємств, розташованих у Донецькому регіоні, пов'язаний зі зменшенням їх розмірів і біомаси. [3, 5]. У зв'язку з цим особливого значення набувають дослідження стійкості рослин до забруднення довкілля, характеристик накопичення ними токсикантів та шляхів оптимізації їх росту.

**Об'єкти та методи досліджень**

Метою наших досліджень було встановлення залежності пошкоджуваності деревних та чагарникових рослин від концентрацій та терміну дії сумішей аміаку, сірчистого ангідриду, парів сірчаної кислоти та фтористого водню. В якості об'єктів досліджень використані наступні види: береза бородавчаста (*Betula verrukosa*), бузок звичайний (*Siringa vulgaris*), верба біла (*Salix alba*), в'яз гладкий (*Ulmus laevis*), гіркокаштан звичайний (*Aesculus hippocastanum*), глід колючий (*Crataegus oxyacantha*), горобина звичайна (*Sorbus aucuparia*), горобина проміжна (*S. intermedia*), клен явір (*Acer pseudoplatanus*), клен гостролистий (*A. platanoides*), клен польовий (*A. campestre*), клен татарський (*A. tataricum*), клен ясенелистий (*A. negundo*), робінія звичайна (*Robinia pseudoacacia*), садовий жасмин звичайний (*Phladelphus coronarius*), тополя Болле (*Populus bolleana*), тополя китайська (*P. simonii*), тополя пірамідальна (*P. italica*), черемшина звичайна (*Padus avium*), ясен ланцетний (*Fraxinus lanceolata*). Дослідні рослини росли у віддаленні від автомобільних комунікацій, на відстані 5-6 км від найближчих джерел промислового забруднення.

Зрізані пагони дослідних рослин поміщали в дослідний відсік фумігаційної камери [7] і піддавали фумігації сумішами забруднювачів ($NH_3$, HF, $SO_2$ та пари $H_2SO_4$) за схемою повного трьохрівневого чотирьохфакторного експерименту. Контрольні рослини знаходилися в контрольному відсіку камери і дії газів не піддавалися. Через добу після закінчення фумігації у рослин визначали пошкоджуваність листя у відсотках некротизованої площі листової пластинки. Виміри проводилися в п'ятнадцятикратній повторності. Отримані дані оброблені статистично методами багатофакторного регресійного аналізу [8]. Розрахунки проводилися на ПЕОМ за спеціальними програмами.

**Результати та їх обговорення**

Результати проведених досліджень показали, що з вивчених нами двадцяти видів рослин, тільки два види (клен гостролистий та черемха звичайна) характеризуються відсутністю пошкоджень листових пластинок. Інші вісімнадцять видів пошкоджуються вивченими сумішами газів. Ступінь ураження листя залежить від видової специфіки рослин, складу, концентрацій та терміну дії забруднювачів, що дозволяє



©Приседський Ю.Г.

Таблиця

Рівняння пошкоджуваності деревних та чагарникових рослин залежно від складу, концентрацій ($X_1$-$X_5$) забруднювачів та терміну їх дії ($X_4$)

| Вид рослини | Рівняння регресії |
|---|---|
| 1 | 2 |
| *Бузок звичайний* | **Стійкі та слабкопошкоджувані види** |
| | $Y = 0{,}932 - 0{,}316 \cdot X_1 + 0{,}030 \cdot X_1^2 + 0{,}190 \cdot X_2 - 0{,}071 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}145 \cdot X_3 - 0{,}045 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0{,}120 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}045 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}008 \cdot X_3^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 + 0{,}006 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}169 \cdot X_4 + 0{,}041 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 0{,}164 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}138 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}012 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}096 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}099 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}009 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}027 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}018 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}064 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}011 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}080 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}007 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}002 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_4^2 - 0{,}027 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}023 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}015 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}015 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}010 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}013 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2$ |
| *В'яз гладкий* | $Y = -0{,}574 + 0{,}444 \cdot X_1 - 0{,}037 \cdot X_1^2 - 0{,}744 \cdot X_2 + 0{,}040 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0{,}200 \cdot X_2^2 - 0{,}042 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 - 0{,}104 \cdot X_3 - 0{,}043 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 0{,}150 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}010 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}027 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}004 \cdot X_3^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 - 0{,}005 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}124 \cdot X_4 + 0{,}539 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}045 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 0{,}553 \cdot X_2 \cdot X_4 - 1{,}096 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}091 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}157 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}375 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}031 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}027 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}070 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}006 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}028 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + +0{,}094 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}008 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}030 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}023 \cdot X_4^2 - 0{,}023 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 - 0{,}050 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}050 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}016 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}016 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}005 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2$ |
| *Глід колючий* | $Y = 0{,}071 - 0{,}034 \cdot X_1 + 0{,}002 \cdot X_1^2 + 0{,}038 \cdot X_2 + 0{,}126 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}026 \cdot X_2^2 - 0{,}049 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}033 \cdot X_3 - 0{,}008 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0{,}061 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}034 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}002 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}018 \cdot X_4 + 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 0{,}015 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}010 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}006 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}007 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}006 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4$ |
| *Робінія звичайна* | $Y = -0{,}475 + 0{,}093 \cdot X_1 - 0{,}008 \cdot X_1^2 + 0{,}235 \cdot X_2 + 0{,}123 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}010 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}117 \cdot X_2^2 - 0{,}062 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 - 0{,}002 \cdot X_3 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}068 \cdot X_4 + + 0{,}048 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_1 + 0{,}378 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}179 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}015 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}187 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}049 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}023 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}021 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - - 0{,}007 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 - 0{,}034 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}013 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}017 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2$ |

Продовження табл.

| 1 | 2 |
|---|---|
| *Садовий жасмин звичайний* | $Y = -0,052 + 0,006 \cdot X_1 + 0,005 \cdot X_1^2 - 0,875 \cdot X_2 + 0,225 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,032 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0,616 \cdot X_2^2 - 0,163 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0,018 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 + 0,214 \cdot X_3 - 0,060 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0,003 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0,066 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,007 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,065 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0,017 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0,002 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0,012 \cdot X_3^2 + 0,003 \cdot X_1 \cdot X_3^2 + 0,009 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0,002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0,058 \cdot X_4 + 0,001 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0,003 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 0,202 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0,072 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0,013 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0,007 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0,061 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0,008 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0,121 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,027 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,095 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,003 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,001 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,006 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,005 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,003 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,003 \cdot X_4^2 + 0,002 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0,019 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0,002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0,009 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,009 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2$ |
| **Середньопошкоджувані види** | |
| *Гіркокаштан звичайний* | $Y = -0,163 - 0,211 \cdot X_1 + 0,011 \cdot X_1^2 + 0,749 \cdot X_2 + 0,056 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,011 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0,219 \cdot X_2^2 - 0,002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0,008 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 + 0,196 \cdot X_3 + 0,025 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 0,254 \cdot X_3 \cdot X_3 - 0,154 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,296 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0,080 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0,011 \cdot X_3^2 - 0,026 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0,010 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0,021 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0,005 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0,669 \cdot X_4 + 0,2955 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0,016 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 1,110 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0,966 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0,065 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0,549 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0,477 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0,032 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0,313 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,060 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,004 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 1,110 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,367 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,026 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,523 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,176 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,013 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,016 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,055 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,016 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,022 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,008 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,050 \cdot X_4^2 - 0,020 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 - 0,097 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0,085 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0,006 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0,049 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0,043 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0,003 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0,029 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,008 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,124 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,048 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,057 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,024 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,002 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,002 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0,006 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0,002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0,003 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0,001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| **Види із змінною стійкістю** | |
| *Береза бородавчаста* | $Y = 0,411 - 0,417 \cdot X_1 + 0,044 \cdot X_1^2 - 0,272 \cdot X_2 + 0,710 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0,084 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0,102 \cdot X_2^2 - 0,321 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0,039 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 + 0,284 \cdot X_3 - 0,214 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0,002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0,456 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0,088 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,015 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0,206 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0,066 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0,009 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0,015 \cdot X_3^2 + 0,001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 + 0,026 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0,002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0,012 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0,002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0,264 \cdot X_4 - 0,022 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0,005 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 1,150 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0,464 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0,042 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0,551 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0,200 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0,017 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0,277 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,047 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,696 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,263 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,015 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,239 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,211 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0,014 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0,014 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,030 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,008 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0,006 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,007 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0,030 \cdot X_4^2 + 0,006 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0,108 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0,070 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0,009 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0,051 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0,031 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0,004 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0,028 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,004 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,068 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,016 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,018 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0,009 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0,001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 X_4^2 - 0,001 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0,003 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |

Продовження табл.

| 1 | 2 |
|---|---|
| *Городна промисла* | $Y = 1{,}167 - 0{,}372 \cdot X_1 + 0{,}030 \cdot X_1^2 + 0{,}616 \cdot X_2 - 0{,}289 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}027 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}412 \cdot X_2^2 + 0{,}162 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}014 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 + 0{,}003 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}031 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}026 \cdot X_3^2 + 0{,}052 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}006 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 0{,}627 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}468 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}058 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}401 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}252 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}030 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}026 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}023 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}281 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}032 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}012 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}134 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}015 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}015 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}007 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_2^3 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}008 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}055 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}055 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}008 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}33 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}029 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}047 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}022 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| *Клен польовий* | $Y = 1{,}196 - 0{,}416 \cdot X_1 + 0{,}036 \cdot X_1^2 + 0{,}694 \cdot X_2 - 0{,}125 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}319 \cdot X_2^2 + 0{,}053 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0{,}094 \cdot X_3 - 0{,}028 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0{,}393 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}079 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}183 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}033 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}005 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 + 0{,}020 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}009 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}060 \cdot X_4 + 0{,}037 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 0{,}162 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}316 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}053 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}038 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}012 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}026 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}040 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}069 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}018 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}002 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}007 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}009 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}014 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}005 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}015 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}016 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}003 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| *Клен татарський* | $Y = -1{,}762 + 0{,}709 \cdot X_1 - 0{,}057 \cdot X_1^2 + 0{,}938 \cdot X_2 - 0{,}267 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}486 \cdot X_2^2 + 0{,}145 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0{,}109 \cdot X_3 - 0{,}179 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}012 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0{,}987 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}291 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}011 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}423 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}075 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}006 \cdot X_3^2 + 0{,}010 \cdot X_1 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 + 0{,}053 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}015 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}022 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0{,}095 \cdot X_4 + 1{,}156 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}098 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 0{,}208 \cdot X_2 \cdot X_4 - 1{,}441 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}132 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}104 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}194 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}022 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}058 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}263 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}024 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}584 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}538 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}065 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}372 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}188 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}026 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}004 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}010 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}046 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}026 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}031 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}020 \cdot X_4^2 - 0{,}071 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}006 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 - 0{,}036 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}039 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}019 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}033 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}005 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}028 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}042 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}067 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}008 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}026 \cdot X_2^2 \cdot X_3 X_4^2 + 0{,}026 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2$ |
| *Клен явір* | $Y = 3{,}787 - 1{,}321 \cdot X_1 + 0{,}106 \cdot X_1^2 - 1{,}557 \cdot X_2 - 0{,}424 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}042 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0{,}626 \cdot X_2^2 + 0{,}365 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}034 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 - 0{,}327 \cdot X_3 + 0{,}300 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}025 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 0{,}219 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}093 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}007 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}013 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}076 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}007 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}016 \cdot X_3^2 - 0{,}016 \cdot X_1 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 - 0{,}010 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}010 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}002 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 1{,}097 \cdot X_4 + 0{,}292 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}020 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 4{,}154 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}114 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}028 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 2{,}097 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}714 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}082 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}210 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}116 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 1{,}708 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}054 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}012 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 1{,}287 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}012 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}018 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}094 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}077 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}051 \cdot X_4^2 - 0{,}007 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}800 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}167 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}007 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}402 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}048 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}017 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}264 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}036 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}185 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}019 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}013 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}010 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |

Продовження табл.

| 1 | 2 |
|---|---|
| *Клен ясенелистий* | $Y = -2{,}703 + 0{,}751 \cdot X_1 - 0{,}064 \cdot X_1^2 - 1{,}065 \cdot X_2 + 0{,}359 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}023 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0{,}387 \cdot X_2^2 - 0{,}34 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}065 \cdot X_3 + 0{,}20 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 0{,}307 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}038 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}138 \cdot X_3^2 \cdot X_3 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_3^3 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^3 - 0{,}012 \cdot X_2 \cdot X_3^3 + 0{,}006 \cdot X_3^3 \cdot X_3^3 + 0{,}481 \cdot X_4 - 0{,}166 \cdot X_1 \cdot X_4 + 0{,}014 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 1{,}071 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}803 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}061 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}620 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}502 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}043 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}020 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}144 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}013 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}473 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 1{,}215 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}095 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}295 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}675 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}053 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}008 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}040 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}104 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}008 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}020 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}056 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_4^2 - 0{,}054 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}024 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}078 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}145 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}011 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}051 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}086 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}007 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}006 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}011 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| *Тополя канадська* | $Y = -3{,}242 + 1{,}521 \cdot X_1 - 0{,}130 \cdot X_1^2 + 0{,}355 \cdot X_2 - 0{,}369 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}028 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0{,}207 \cdot X_2^2 + 0{,}057 \cdot X_3 - 0{,}157 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}016 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0{,}059 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}035 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_3^2 + 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 + 1{,}022 \cdot X_4 - 0{,}520 \cdot X_1 \cdot X_4 + 0{,}043 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 0{,}224 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}174 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}011 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}235 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}121 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}070 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}006 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}070 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}016 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}012 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}041 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}004 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}032 \cdot X_1 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 + 0{,}026 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}013 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}009 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}022 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}002$ |
| *Тополя пірамідальна* | $Y = 5{,}509 - 1{,}648 \cdot X_1 + 0{,}126 \cdot X_1^2 - 6{,}056 \cdot X_2 + 2{,}729 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}153 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 2{,}146 \cdot X_2^2 - 1{,}112 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0{,}056 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 - 0{,}387 \cdot X_3 - 0{,}146 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}015 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 1{,}083 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}032 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}015 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}481 \cdot X_3^2 \cdot X_3 + 0{,}071 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 + 0{,}009 \cdot X_3^3 + 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_3^3 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^3 - 0{,}052 \cdot X_2 \cdot X_3^3 - 0{,}003 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}026 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 - 1{,}373 \cdot X_4 + 0{,}173 \cdot X_1 \cdot X_4 + 0{,}010 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 1{,}151 \cdot X_2 \cdot X_4 + 5{,}268 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}507 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}698 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 2{,}522 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}236 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 1{,}877 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}513 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}028 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 3{,}728 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}359 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}073 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 1{,}055 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}477 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}056 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}094 \cdot X_3^3 \cdot X_4 + 0{,}026 \cdot X_1 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^3 \cdot X_4 + 0{,}196 \cdot X_2 \cdot X_3^3 \cdot X_4 + 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}057 \cdot X_3^4 \cdot X_4 - 0{,}020 \cdot X_1 \cdot X_3^4 \cdot X_4 + 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_3^4 \cdot X_4 + 0{,}061 \cdot X_4^2 - 0{,}010 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}436 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}516 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}048 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}234 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}264 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}024 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}075 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}041 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}202 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}008 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}052 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}029 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2 - 0{,}012 \cdot X_2 \cdot X_3^3 \cdot X_4^2 + 0{,}003 \cdot X_3^4 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^4 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| | ***Нестійки види*** |
| *Верба біла* | $Y = 2{,}612 + 0{,}663 \cdot X_1 - 0{,}065 \cdot X_1^2 - 0{,}421 \cdot X_2 - 0{,}790 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}086 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}301 \cdot X_2^2 + 0{,}789 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}069 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 + 0{,}298 \cdot X_3 - 0{,}011 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 1{,}231 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}528 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}029 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}573 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}282 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}017 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}029 \cdot X_3^2 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3^2 + 0{,}093 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}027 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}041 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0{,}013 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 0{,}852 \cdot X_4 - 0{,}677 \cdot X_1 \cdot X_4 + 0{,}079 \cdot X_1^2 \cdot X_4 - 6{,}397 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}912 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}105 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 2{,}376 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}538 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}025 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}309 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}034 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}012 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 2{,}645 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}254 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}058 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 2{,}096 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}511 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}014 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}171 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}007 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}121 \cdot X_3^3 \cdot X_4 + 0{,}022 \cdot X_1 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}048 \cdot X_4^2 + 0{,}136 \cdot X_1 \cdot X_4^2 - 0{,}012 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 + 1{,}060 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}337 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}025 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}372 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}075 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}022 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}325 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}020 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}221 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}042 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}022 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}013 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |

Закінчення табл.

| 1 | 2 |
|---|---|
| Городина задишна | $Y = 5{,}474 - 2{,}119 \cdot X_1 + 0{,}164 \cdot X_1^2 - 2{,}503 \cdot X_2 + 2{,}506 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}177 \cdot X_1^2 \cdot X_2 + 0{,}814 \cdot X_2^2 - 0{,}972 \cdot X_1 \cdot X_2^2 + 0{,}069 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 - 0{,}144 \cdot X_3 + 0{,}037 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 0{,}553 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}152 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}280 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}050 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}005 \cdot X_3^2 - 0{,}023 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}013 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}732 \cdot X_4 + 0{,}124 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}089 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}871 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}161 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}039 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}489 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}076 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 0{,}312 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}338 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}022 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}339 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}248 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}037 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}115 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}281 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}030 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}032 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}022 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}30 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}009 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}003 \cdot X_3^2 + 0{,}011 \cdot X_1 \cdot X_3^2 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 + 0{,}013 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}181 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}028 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}003 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}099 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}013 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}051 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}054 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}007 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}036 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}046 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}044 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}005 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| Томова Волле | $Y = 1{,}176 - 1{,}452 \cdot X_1 + 0{,}211 \cdot X_1^2 - 0{,}594 \cdot X_2 + 1{,}619 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}104 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}430 \cdot X_2^2 - 0{,}168 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}298 \cdot X_3 + 0{,}026 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 + 0{,}413 \cdot X_3 \cdot X_3 - 0{,}122 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}149 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}057 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}015 \cdot X_3^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_3^2 - 0{,}032 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}002 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}015 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}003 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}819 \cdot X_4 + 0{,}608 \cdot X_1 \cdot X_4 - 0{,}047 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 2{,}235 \cdot X_2 \cdot X_4 - 6{,}289 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}672 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 0{,}738 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 2{,}867 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}319 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 1{,}146 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}057 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}369 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 1{,}221 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}131 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}542 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}685 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}074 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}071 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}010 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}033 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}004 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}017 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}052 \cdot X_4^2 - 0{,}035 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}003 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 - 0{,}231 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}746 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}070 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}111 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}333 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}033 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}181 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}007 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}180 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}017 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}046 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}090 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}009 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}010 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}004 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}003 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |
| Ясен ланцетний | $Y = -0{,}849 + 0{,}608 \cdot X_1 - 0{,}035 \cdot X_1^2 + 1{,}790 \cdot X_2 - 0{,}719 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0{,}057 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0{,}399 \cdot X_2^2 - 0{,}005 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 + +0{,}234 \cdot X_3 - 0{,}243 \cdot X_1 \cdot X_3 + 0{,}020 \cdot X_1^2 \cdot X_3 - 0{,}909 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}277 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}023 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 0{,}235 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + 0{,}015 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 - 0{,}013 \cdot X_3^2 + 0{,}012 \cdot X_1 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 + 0{,}048 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}013 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 - 0{,}012 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + 1{,}572 \cdot X_4 - 0{,}325 \cdot X_1 \cdot X_4 + 0{,}013 \cdot X_1^2 \cdot X_4 + 17{,}972 \cdot X_2 \cdot X_4 - 8{,}698 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 + 0{,}559 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4 - 10{,}644 \cdot X_2^2 \cdot X_4 + 5{,}618 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}379 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4 - 0{,}950 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}048 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}006 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 4{,}664 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 1{,}695 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}083 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 2{,}601 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 - 0{,}998 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}053 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4 + 0{,}040 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}006 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}224 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}053 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 + 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4 - 0{,}123 \cdot X_3^3 \cdot X_4 + 0{,}034 \cdot X_1 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3^3 \cdot X_4 - 0{,}130 \cdot X_4^2 + 0{,}022 \cdot X_1 \cdot X_4^2 + 0{,}001 \cdot X_1^2 \cdot X_4^2 - 0{,}858 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}672 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_4^2 - 0{,}045 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_4^2 + 0{,}656 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 - 0{,}428 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}029 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_4^2 + 0{,}120 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}016 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}002 \cdot X_1^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}390 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}174 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}010 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}213 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 + 0{,}097 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}006 \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3 \cdot X_4^2 - 0{,}005 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}001 \cdot X_1 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}020 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}007 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 + 0{,}011 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2 - 0{,}004 \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^2$ |

віднести їх до наступних груп стійкості: стійки види (пошкоджується до 5% листової поверхні), слабкопошкоджувані види (пошкоджується від 5 до 20% листової поверхні), середньопошкоджувані види (пошкоджується від 20 до 40% листової поверхні), види зі змінною стійкістю (пошкоджуваність залежить від складу токсикантів) та нестійки види (пошкоджується понад 40% листової поверхні).

Використання методів багатофакторного планування експерименту дозволило нам для видів, що мали пошкодження листя, розрахувати рівняння залежності пошкоджуваності листя від концентрацій $NH_3$ ($X_1$), HF ($X_2$), $SO_2$ + пари $H_2SO_4$ ($X_3$) та терміну дії токсикантів ($X_4$). Всі отримані рівняння адекватні, тобто достатньо якісно моделюють реакцію досліджених видів на стрес, викликаний дією забруднення повітря.

Аналіз отриманих рівнянь (табл.) свідчить, що стійким та слабко пошкоджуваним видам (бузок звичайний, в'яз гладкий, глід колючий, робінія звичайна, садовий жасмин звичайний) властива низька ступінь залежності пошкоджуваності листя від концентрацій та терміну дії токсикантів, про що свідчать значення коефіцієнтів рівнянь регресії, величина яких коливається у межах від 0,01 до 0,875. Слід також звернути увагу на відносно незначну кількість вірогідних взаємодій факторів. У більшості з цих видів суттєвими виявляються лише парні взаємодії між токсикантами, тоді як кількість взаємодій більш високих порядків досить невелика і величина їх коефіцієнтів у 3-30 разів нижча, ніж для ефектів дії індивідуальних забруднювачів та їх парних взаємодій.

Види із змінною стійкістю (береза бородавчаста, горобина проміжна, клени польовий, татарський, явір та ясенелистий, тополі китайська та пірамідальна) характеризуються складною залежністю пошкоджуваності листя від складу токсикантів та часу фумігації. Суттєвий вплив на пошкоджуваність листя цих видів чинять взаємодії високих порядків (сполучення з трьох та чотирьох факторів), а також квадратичні ефекти, що свідчить про значну не лінійність процесів ушкодження листя видів із змінною стійкістю сумішами газів. Слід також зазначити, що у випадках низької чутливості цих видів до того або іншого інгредієнту забруднення повітря коефіцієнти рівнянь при цих змінних наближуються за своїми значеннями до відповідних значень рівнянь для стійких видів. Так, наприклад, аналіз рівняння пошкоджуваності горобини проміжної дозволяє зробити висновок про високу толерантність її до аміаку ($X_1$) та сірчистих сполук ($X_3$). До фтористого водню ($X_2$) цей вид проявляє досить значну чутливість. Аналогічна закономірність спостерігається і у клена польового та тополі пірамідальної. Клен ясенелистий та тополя китайська менш чутливі до сірчистих сполук, але сильно пошкоджуються аміаком та фтористим воднем.

Для нестійких видів (верба біла, горобина звичайна, тополя Боллє та ясен ланцетний) характерна значна залежність пошкоджуваності від складу і концентрації токсикантів та терміну їх дії. У більшості випадків значення коефіцієнтів при відповідних змінних коливаються від 0,3 до 10,6, що в декілька разів перевищує коефіцієнти рівнянь для стійких видів. Суттєвий вплив чинять на нестійкі види взаємодії факторів.

Слід також зазначити, що практично у всіх досліджених видів спостерігається антагонізм дії аміаку до кислих газів ($SO_2$ пари $H_2SO_4$ та HF), тобто аміак знижує пошкоджуваність рослин сумішами кислих газів. У той же час кислі гази проявляють синергізм, підсилюючи пошкоджуваність листя, якщо діють у суміші.

**Висновки**

1. Проведені дослідження свідчать про значні розбіжності у пошкоджуваності різних видів сумішами фітотоксикантів. Ці розбіжності є видоспецифічними і залежать від толерантності рослин до забруднення.

2. Отримані нами рівняння пошкоджуваності рослин токсикантами можна використовувати для прогнозування реакції відповіді рослин та їх стійкості до забруднення повітря вивченими газами та їх сумішами.

**РЕЗЮМЕ**

Изучены характеристики повреждаемости 20 видов древесных и кустарниковых растений смесями аммиака, фтористого водорода, сернистого ангидрида и паров серной кислоты. Установлены видоспецефичные особенности повреждаемости листьев. Для 18 видов получены адекватные уравнения зависимости повреждаемости растений от состава, концентраций и времени действия фитотоксикантов, которые рекомендуется использовать для прогнозирования устойчивости растений в условиях загрязнения воздуха.

**SUMMARY**

The characteristics of damage of 20 species of arboreal and bushes plants by admixtures of ammonia, fluorine hydride, sulfurous anhydrase and steams of sulfuric acid are investigated. Are determinated dependent on species feature damages of leaves. For 18 species the adequate equations of dependence damage of plants from composition, concentrations of phytotoxicants and time of exposition are obtained which are recommended to be used for prediction of stability of plants in conditions of air pollution.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Адаптация растений в антропогенных условиях // Сборник научных трудов. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1992. – С.3-12
2. Гудериан Р. Загрязнение воздушной среды. – М.: Мир, 1979. – 200 с.
3. Илькун Г.М. Загрязнение атмосферы и растения. – К.: Наукова думка, 1978. – 246 с.
4. Коршиков И.И., Котов В.С., Михеенко И.П., Игнатенко А.А., Чернышова Л.В. Взаимодействие растений с техногенно загрязненной средой. Устойчивость. Фитоиндикация. Оптимизация. – К.: Наукова думка, 1995. – 191 с.
5. Кулагин Ю.З. Древесные растения и промышленная среда. – М.: Наука, 1974. – 124 с.
6. Кулагин Ю.З. Эколого-экономическая эффективность зеленых насаждений. – М.: Наука, 1985. – 116 с.
7. Попов В.А., Негруцька Г.М. Метод штучної фумігації рослин шкідливими газами в тоці повітря // Інтродукція та експериментальна екологія рослин. - К.: Наукова думка, 1973. – Вип. 3.– С.83-89.
8. Приседський Ю.Г. Статистична обробка результатів біологічних експериментів. – Донецк: Кассиопея, 1999. – 210 с.

*Надійшла до редакції 15.03.2003 р.*

## ЕКОЛОГІЯ ТА ТЕХНОГЕННА БЕЗПЕКА

УДК 38.761:628.1

# ТЕХНОЛОГИИ ОЧИСТКИ ВОДЫ ДЛЯ СИСТЕМ ПИТЬЕВОГО И ПРОМЫШЛЕННОГО ВОДОСНАБЖЕНИЯ

*С.П.Высоцкий, А.В.Фаткулина*
*Автомобильно-дорожный институт Донецкого национального технического университета, г. Горловка*

В южных районах Украины ощущается острая недостача пресной воды для питьевого водоснабжения. Солесодержание воды в реках, протекающих на территории Донбасса, повысилась до таких величин, что вода в этих реках уже является непригодной для использования в системах хозяйственно-питьевого водоснабжения. Так, в самой крупной реке Донбасса – Северском Донце – в верховьях вода имеет гидрокарбонатно-кальциевый состав с минерализацией 350-500 мг/л, а ближе к устью гидрокарбонатно-сульфатно-хлоридно-кальциевый состав с минерализацией до 1500 мг/л. Сток реки Казённый Торец, составляющий до четверти общего стока Северского Донца, в меженный период формируется исключительно за счёт сброса шахтных вод. Среднее солесодержание воды в нём в устье составляет до 3 г/л. Для обеспечения Донбасса пресной водой проложены каналы и трубопроводы для подачи воды из Северского Донца и Днепра. При этом на строительство каналов, трубопроводов и насосных станций отводятся огромные территории. Кроме этого существенным недостатком этого решения является угроза повышения горизонта грунтовых вод и значительные затраты электроэнергии на транспорт воды.

Дефицит пресной воды может быть устранён путём опреснения солёных вод. При этом одновременно может решаться проблема предотвращения засоления поверхностных водных источников. Процесс опреснения в трёх самых распространённых в настоящее время технологиях (дистилляции, обратном осмосе и электродиализе) заключается в перераспределении солей между двумя потоками воды: обессоленной водой и концентратом или рассолом.

Применение дистилляции сопряжено с необходимостью использования относительно дешёвых энергоресурсов (которые отсутствуют на Украине) и сопряжено с вторичным загрязнением окружающей среды, обусловленным необходимостью достаточно глубокого удаления катионов жёсткости из упариваемой воды, или применения присадок диспергантов, сброс которых в поверхностные водоёмы ограничен.

При электродиализной технологии перенос ионов из обессоливаемой воды осуществляется под воздействием электрического поля через проницаемые для ионов одного знака заряда для катионов – катионитовые и для анионов – анионитовые мембраны.

Самые передовые позиции в области изготовления электродиализных аппаратов и применения технологии электролиза занимает фирма «Ionics» (США). Аппараты указанной фирмы широко используются для приготовления воды питьевого класса в ряде стран. Электродиализные аппараты обеспечивают выход обессоленной воды до 95% от расхода исходной воды. Каждый аппарат (модуль) содержит 500 пар мембранных ячеек, соединенных последовательно гидравлически и электрически. Электрическое напряжение по ступеням распределяется следующим образом 1ступень – 75В, 2-я – 69В, 3-я – 69В. размеры мембран в модулях 105,7 × 101,6 $см^2$.

Распределение затрат при использовании указанной технологии для установки производительностью около 600 т/ч следующее: расход электроэнергии на транспорт воды и технологию 46,2%, замена патронных элементов – 3,3%, реагенты – 4,4%, запасные части обвязки – 6,7%, замена мембран – 26,3%. Стоимость обессоленной воды – 0,43 долл. США/$м^3$ при исходном солесодержании воды около 200 мг/л.

В отечественной практике и в практике водоподготовки в странах СНГ до настоящего времени самой распространенной технологией очистки воды от солей, в том числе и катионов жесткости, является ионообменная технология. Недостатком этой технологии является необходимость использования значительного количества реагентов для регенерации фильтров и сброс большого количества засоленных стоков в поверхностные водоемы. При этом масса сбрасываемых солей в 3-4 раза превышает массу солей извлекаемой из обрабатываемой воды. Недостатком ионообменной технологии является также периодичность процессов взрыхления регенерации отмывки и рабочего процесса фильтрации воды, что усложняет технологические операции эксплуатации фильтров, в частности, контроль качества фильтрата и автоматизацию работы фильтров.

Обратный осмос является одной из наиболее перспективных технологий. Доля применения этой технологии в мировой практике постоянно возрастает. Одним из достоинств этой технологии является


©Высоцкий С.П., Фаткулина А.В.

возможность очистки воды от диоксинов, являющихся самыми токсичными загрязнителями поверхностных вод в техногенных регионах.

Обратноосмотические мембраны на 92-98% задерживают практически все соли и пропускают через себя, в основном, только молекулы воды. Основным преимуществом мембранных технологий является почти полное исключение потребления реагентов и резкое сокращение количества солей, сбрасываемых в поверхностные водные источники.

Преимуществом мембранных технологий является также непрерывность технологического процесса очистки воды, отсутствие необходимости периодического выполнения операции по регенерации материалов.

Несмотря на ряд указанных явных преимуществ мембранных технологий, последние имеют некоторые недостатки. Основным недостатком является необходимость более тщательной, по сравнению с ионитной технологией, предочистка воды во избежание загрязнения мембран и снижения их пропускной способности и селективности. Большая чувствительность к загрязнениям обуславливает также меньший, по сравнению с ионообменными смолами, срок службы мембран - 2-3 года по сравнению с 6-7 годами для ионообменных материалов.

В настоящее время обратноосмотические установки на основании полых волоконных или рулонных элементов ведущих фирм мира «Osmonics» и «Dupont» (обе – США) и «Hydronautics» (Япония) имеют производительность от нескольких сот до сотен тысяч $м^3$/сутки. При этом по данным фирмы «Metito» при обессоливании воды солесодержанием до 7500 мг/л и производительности установки более 20000 $м^3$/сутки стоимость обессоленной воды составляет 0,5 долл. США/$м^3$.

Распределение отдельных составляющих затрат при этом следующее: амортизационные отчисления 36% или 0,183 долл. США/$м^3$ (при 10% кредитной ставке на 10 лет), реагенты 6% или 0,03 долл. США/$м^3$, запасные части 6% или 0.03 долл. США/$м^3$, замена мембран 9% или 0,044 долл. США/$м^3$, заработная плата 12% или 0,06 долл. США/ $м^3$, электроэнергия 31% или 0,155 долл. США/$м^3$ при цене электроэнергии 0,07 долл. США/кВт ч.

Аппараты мембранной технологии являются достаточно дорогим оборудованием. При эксплуатации это оборудование необходимо использовать с одной стороны интенсивно, для возврата капитальных вложений, и с другой стороны квалифицированно, во избежание быстрой потери его служебных характеристик.

Производительность обратноосмотических элементов в значительной степени зависит от температуры. При повышении температуры обрабатываемой воды проницаемость мембран увеличивается обратнопропорционально вязкости раствора. Однако для полимерных мембран, которые склонны к размягчению при повышении температуры выше предельного значения (>40$^0$C), приводят к снижению проницаемости мембран и даже к её полному исчезновению. Это объясняется усиленной усадкой материала мембраны (релаксация внутренних напряжений) и разрушением пористой структуры.

Для мембран фирмы «Filmtec» зависимость безразмерного коэффициента проницаемости мембран «К» от температуры «t$^0$ C» выражается следующей формулой:

$$K = 0.000032 \exp [0.0347 (t + 273)]. \quad (1)$$

При этом зависимость расхода воды от температуры описывается следующим уравнением:

$$Q = Q_0\, 0.000032 \exp [0.0347 (t + 273)], \quad (2)$$

где $Q_0$ – расход воды при температуре 25$^0$C.

Повышение температуры наряду с увеличением производительности мембранных элементов несколько уменьшает селективность мембраны – их способность задерживать соли.

Действующей силой обратноосмотического обессоливания воды является давление обрабатываемой воды. Зависимость расхода воды (Q в $м^3$/год) через мембранный элемент от давления выражается следующей формулой:

$$Q = 0.00215\ P^{2.44}, \quad (3)$$

где P – давление в барах.

С другой стороны, если сравнить эксплуатационные характеристики мембранных элементов, которые используются при отличающейся минерализации исходной воды, необходимо учитывать изменение осмотического перепада давления на мембране, так как расход воды определяется следующей теоретической зависимостью:

$$Q = K(\Delta P - \Delta \pi)TMA/\delta, \quad (4)$$

где Q – расход воды через мембранный элемент; К – коэффициент проницаемости для воды; А – поверхность мембраны; $\delta$ - толщина мембраны; $\Delta$P– гидравлический перепад давления на мембране; $\Delta \pi$ - осмотический перепад давления на мембране ( в зависимости от минерализации воды по обе стороны мембраны).

По формуле (4) повышение минерализации исходной воды приводит к снижению перепада давления на мембране ($\Delta P - \Delta \pi$), что обуславливает снижение производительности установки. Например, при одинаковом давлении исходной воды 4 бар при повышении солесодержания воды от 350 мг/кг до 3500 мг/кг производительность обратноосмотической установки в последнем случае снижается в 3,74 раза. Повышение рабочего давления нивелирует производительность мембранных элементов при разных солесодержаниях.

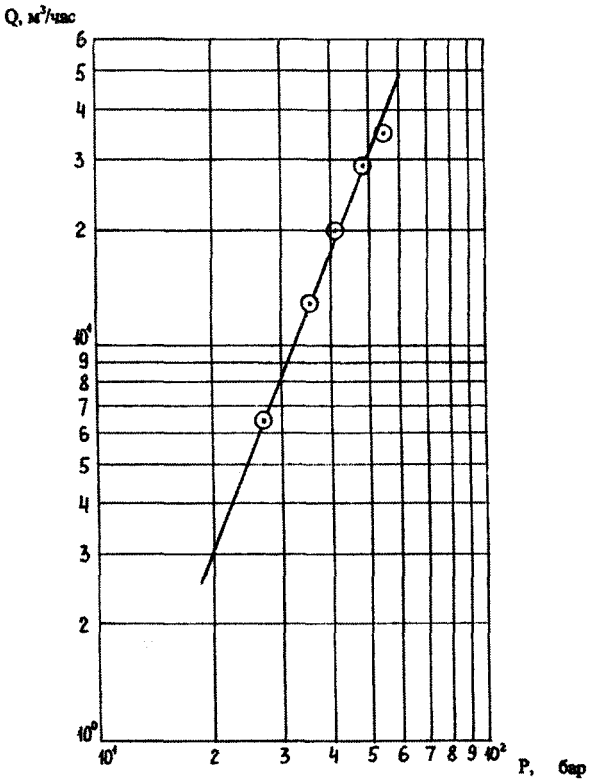



Рис. 1. Зависимость соотношения $C_0/C$ от рабочего давления

Увеличение давления обрабатываемой воды увеличивает также степень обессоливания пермиата. Зависимость параметра $C_0/C$, характеризующего степень обессоливания воды, от давления показана на рисунке 2. Она описывается формулой:

$$C_0/C = 2.87 \exp(0.079 \cdot P), \quad (5)$$

где $C_o$, С – соответственно солесодержание обрабатываемой воды и пермиата, мг/ кг; Р – давление обрабатываемой воды, бар.

Следует отметить, что при стремлении к повышению производительности обратноосмотических установок за счет увеличения давления подаваемой воды необходимо учитывать следующие ограничения. Под действием высокого давления (до 50-100 бар) в полимерных мембранах происходят значительные и необратимые деформации (усадки) и закупорка пор в мембранах. Деформация мембран имеет последствие – остаточное влияние, проявляющееся в появлении «гистерезисных петель» на кривых скорости фильтрации. Совокупность процессов, связанных с деформацией мембран под влиянием давления, получила название крипа мембран. При крипе мембран увеличивается их гидравлическое сопротивление

и уменьшается задерживающая способность мембран (степень обессоливания воды в обратноосмотических мембранах).

Используя данные эксплуатации крупнейшей в Европе обратноосмотической установки на ОАО «Концерн «Стирол» нами выполнены технико-экономические расчёты стоимости оборудования и сроков их окупаемости. При производительности обратноосмотической установки 750 т/ч и цене реагентов: серной кислоты – 165 грн/т, щёлочи – 19 грн/т, извести – 130 грн/т, поваренной соли – 69 грн/т и стоимости исходной воды 3,5 грн/м$^3$ (с учётом экологических платежей) применение обратноосмотической технологии позволило использовать для обессоливания сточные шахтные воды (практически бесплатно) и значительно снизить эксплуатационные затраты на очистку воды. Минимальные затраты на осуществление процесса очистки воды составляют $2.20 \cdot 10^5$ у.е./год ($11.7 \cdot 10^5$ грн/год).

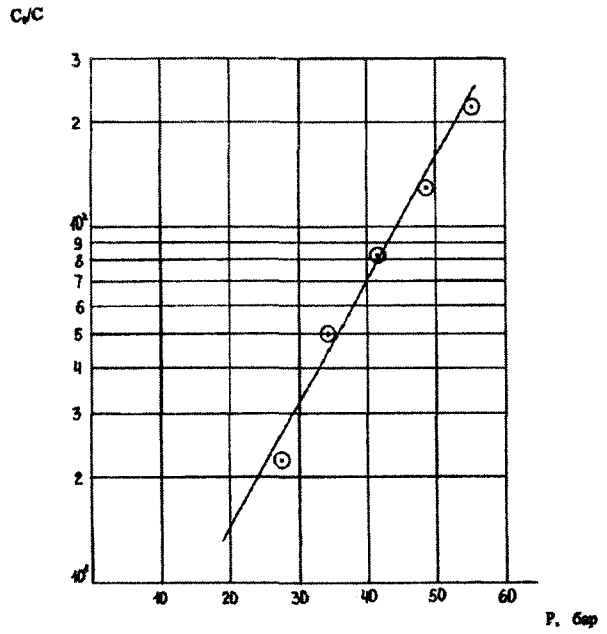



Рис. 2. Зависимость производительности мембранного элемента от рабочего давления

Анализ работы промышленных установок показывает, что давление, при котором затраты на осуществление обратноосмотического процесса минимальны, составляет 22 бар (2.2мПа).

Сброс засоленных стоков при использовании ионообменной технологии очистки воды минерализацией 650 мг/л (канал Северский Донец – Донбасс) составляет:

$$G = 750 \times 1{,}3 \times \frac{650}{50} \times (2{,}5 + 1) \times 60 \times 8500 \times 10^{-6} = 22625 \ m,$$

а сброс засоленных стоков при использовании мембранной технологии:

$$G = 750 \times 1{,}2 \times 650 \times 8500 \times 10^{-6} = 4972{,}5 \ m.$$

При этом установка окупается за срок от нескольких месяцев до нескольких лет в зависимости от стоимости исходной воды. Особенно большие преимущества мембранные технологии имеют место в случае использования вод повышенной минерализации (например, шахтных) в качестве источника водоснабжения.

Применение мембранных технологий позволяет существенно улучшить распределение отдельных компонентов солей в сбрасываемых растворах. Ирригационные показатели качества природных вод зависят от общей минерализации и соотношения концентраций основных катионов. В зависимости от ионного состава воды повышенной минерализации могут действовать на растительность более или менее отрицательно. Особенно вредно накопление в почве ионов натрия при содержании больших количеств гидрокарбонатных и карбонатных ионов.

Для полива овощных культур на чёрнозёмных почвах могут применяться сульфатные и сульфатно-хлоридные воды с минерализацией 3-4 г/л при соотношении катионов натрия и жёсткости по М.Ф.Буданову меньше 0,7.

Показатели ирригационной оценки качества вод разного ионного состава по М.Ф.Буданову определяется зависимостями:

$$\frac{[Na^+]}{[Ca^{2+}]+[Mg^{2+}]} \le 0{,}7; \qquad \frac{[Na^+]}{[Ca^{2+}]} \le 1.$$

Особенно большое преимущество в этом случае имеет место при использовании нанофильтрационных мембранных аппаратов для умягчения воды.

Материальный баланс нанофильтрационной технологии при селективности мембран по катионам жёсткости $\gamma$ и доля расхода продувки контура концентрата p может быть описан уравнениями:

$$(1+p)(Ca_O + Mg_O) = p\cdot(Ca_K + Mg_K) + (1-\gamma)(Ca_K + Mg_K);$$

$$(1+p) = p\cdot\frac{(Ca_K + Mg_K)}{(Ca_O + Mg_O)} + (1-\gamma)\cdot\frac{(Ca_K + Mg_K)}{(Ca_O + Mg_O)};$$

приняв $\frac{(Ca_K + Mg_K)}{(Ca_O + Mg_O)} = \beta$ как показатель степени концентрирования катионов жёсткости, получаем:

$$(1+p) = p\cdot\beta + (1-\gamma)\cdot\beta; \qquad \beta = \frac{1+p}{p+1-\gamma}.$$

Так, при умеренных значениях селективности нанофильтрационных мембран $\gamma$=0,9 и продувке контура концентрата p=0,3 степень концентрирования составит $\beta = \frac{1+0{,}3}{0{,}3+1-0{,}9} = 3{,}25$.

Учитывая низкую селективность нанофильтрационных мембран по натрию, значение индекса Буданова, даже для вод повышенной минерализации, сдвигается в благоприятную сторону, так как концентрация катионов натрия в концентрате практически не изменяется при существенном увеличении концентрации Ca и Mg.

**РЕЗЮМЕ**

Найбільш розповсюдженою та перспективною технологією очищення води у світовій практиці є зворотно-осмотична. Із експлуатаційних параметрів на процес очищення впливає тиск, солевміст, та температура води, що оброблюється. Виведені формули, які відображають залежність продуктивності та ступеню знесолення в зворотньо-осмотичному процесі очищення води від вказаних параметрів.

**SUMMARY**

Reverse Osmosis is the most widespread and perspective technology of water desalination from all over the world. The condition of RO and other technology operation of water disalination for different consumers is observed. The influences of pressure, total dissolvedsolids and temperature of freated water on producnivity and desolination degree of RO equipment were investigated.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Dow Liquid Separation. Filmtec membrans. Technical manual. System Design. – P.25
2. Permasep Products Engineering Manual, Du Pont company, Bulletin 4010. – P.25, 4040. – P.5.
3. Высоцкий С.П. Мембранная и ионитная технологии водоподготовки в энергетике. – К.: Техника. 1989. – 176 с.
4. Справочник по свойствам, методам анализа и очистке воды / Под ред. Пилипенко А.Т. – К.: Наукова думка, Часть 1, 1980. – 680 с.
5. С.П.Высоцкий, А.В.Фаткулина, А.С.Сивоконь Некоторые особенности эксплуатации обратноосмотических установок // Сборник статей международной конференции "Вода и здоровье". – Одесса: ОЦНТЭИ, 2001.

*Надійшла до редакції 03.06.2003 р.*

УДК 502.4 (477)

# СТРУКТУРА И ХАРАКТЕР РАЗМЕЩЕНИЯ ПЗФ УКРАИНЫ И ОТДЕЛЬНЫХ ЕЕ РЕГИОНОВ (СРАВНИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ)

## Часть II. Анализ территориальной структуры ООПТ высших категорий ПЗФ Украины согласно физико-географическому районированию ее территории.

*А.А.Блакберн*
*Донецкий институт рынка и социальной политики*

**Введение.**

Одним из условий вхождения Украины в Европейское сообщество является проведение ею четкой государственной политики в отношении сохранения ландшафтного и биологического разнообразия на своей территории. В основе такой политики лежит идея создания *национальной экологической сети Украины (національної екомережі),* которая, в свою очередь, должна стать составной частью *Паневропейской экологической сети* [1, 2].

Реализация идеи создания национальной экологической сети в Украине возможна, как уже отмечалось Ю.Р. Шеляг-Сосонко и И.Г. Емельяновым, лишь на основе выяснения и оценки репрезентативности выделяемых «ядер» экологического каркаса (так называемых ключевых природных территорий) биологическому и ландшафтному разнообразию данного территориального подразделения или природно-территориального комплекса (ПТК) [3]. Оценка такой репрезентативности может быть основана на предложенном выше названными авторами принципе биосферной бонитировке территории Земли и отдельных ее регионов, основанной на естественном физико- либо биогеографическом районировании суши. Действительно, существующая сейчас практика природоохранной политики в Украине, как правило, основана на административно-территориальном подразделении и количественном «валовом» анализе структуры природно-заповедного фонда (ПЗФ) страны и отдельных ее регионов. Показывая динамику прироста в абсолютных площадях или в % от площади ПЗФ страны (при котором уравновешиваются все категории особо охраняемых природных территорий (ООПТ), например, биосферные заповедники и национальные парки – с одной стороны, и заказники местного значения и заповедные урочища – с другой) в рамках отдельных регионов и административных областей, соответствующие местные административные органы выражают скорее формальное свое отношение к природоохранной политике государства, а отнюдь не процесс формирования национальной экологической сети. Последняя же возможна лишь на основе *естественного подразделения территории страны (или региона) и принципа иерархического соответствия категорийного состава ООПТ физико- (био-) –географическому таксону рассматриваемой территории*, согласно которому «каждая *физико-географическая (ф-г) провинция* должна иметь один *биосферный заповедник (БЗ)* – ООПТ международного значения, репрезентативный участок биосферы, а каждая *физико-географическая область* – один *природный заповедник (ПЗ)* или *национальный парк (НП)* – ООПТ общегосударственного значения, либо, как исключение, *региональный ландшафтный парк (РЛП)*» [2]. Формирование же четкой иерархической пространственной структуры *сети ООПТ* как раз и является основой создания экологического каркаса страны в виде естественной системы функционально связанных между собой природных и полуприродных ее территорий.

**Анализ структуры и характера размещения ООПТ высших категорий согласно физико-географическому районированию территории Украины.**

Как и в первой части [4], в данной работе оценивается насыщенность естественных географических подразделений Украины – на этот раз согласно ее физико-географическому (ландшафтному) районированию, - ООПТ высших категорий – биосферными заповедниками (БЗ), государственными природными заповедниками (ПЗ), национальными парками (НП), заказниками общегосударственного значения (Зак). В силу большей дробности физико-географического районирования страны по сравнению с биогеографическим районированием (территория Украины подразделяется, соответственно, на 14 физико-географических провинций, или краев и 6 биогеографических провинций) анализ насыщенности ООПТ высшего ранга ее физико-географических подразделений представляется более полным и детальным (рис.1). Кроме того, физико-географическое (ф-г) районирование в большей степени соответствует ландшафтному разнообразию территории, что во многом определяет и биологическое ее разнообразие. Впервые в анализе природоохранной структуры ф-г подразделений страны используется такой интегрированный показатель оценки насыщенности данной территории (региона) ООПТ как *природоохранный индекс территории.*

Территория Украины согласно физико-географическому районированию подразделяется на 14 ф-г провинций, из которых 12 являются зональными и 2 горными геосистемными комплексами, которые в

©Блакберн А.А.

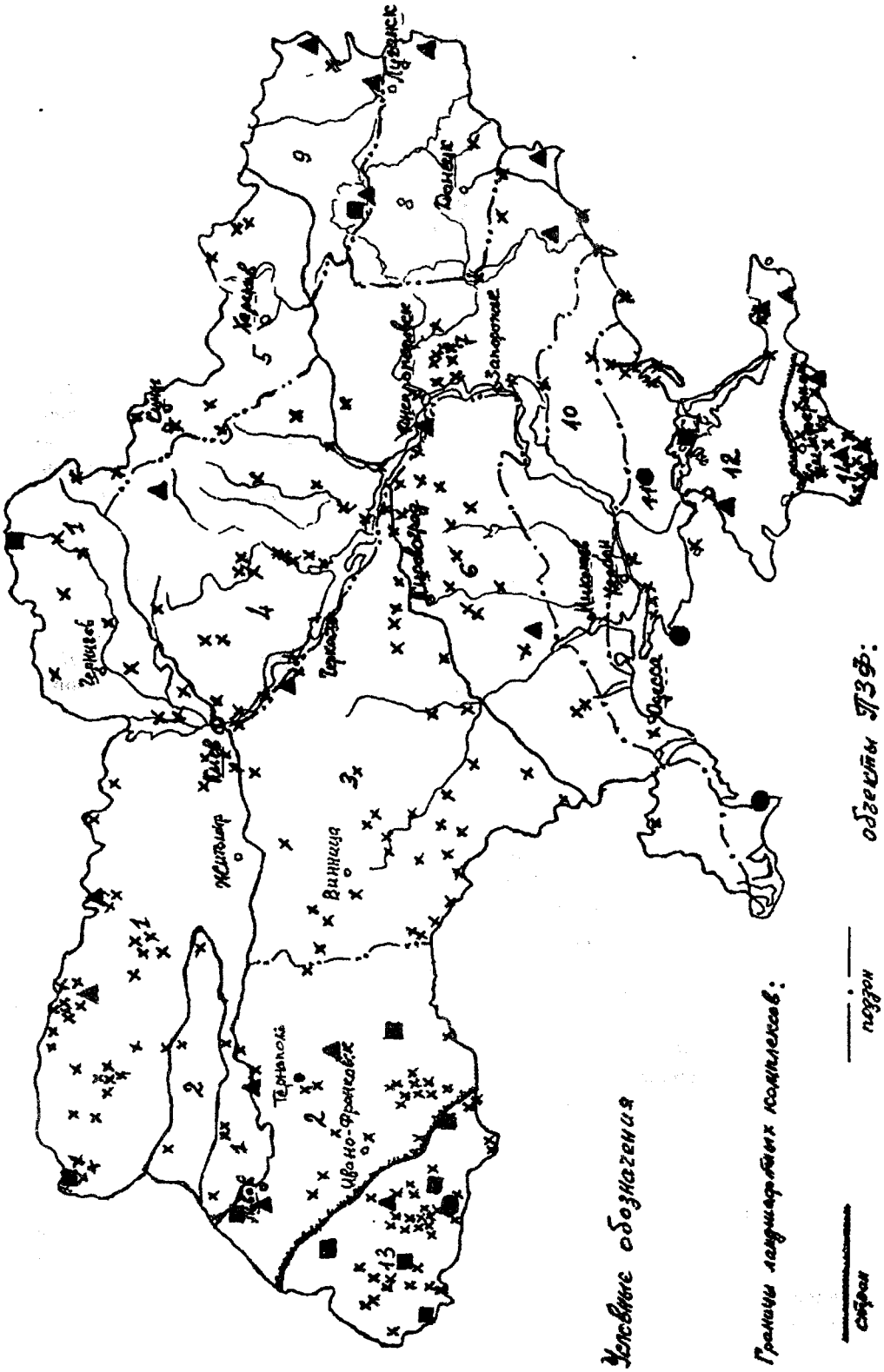



Рис. 1.Физико-географическое районирование Украины и размещение ООПТ высших категорий ПЗФ Украины. Масштаб 1 : 6 000 000

свою очередь подразделяются на 57 ф-г областей [5]. Природно-заповедный фонд Украины на сегодняшний день представлен 4 биосферными заповедниками, 11 национальными парками, 23 (включая филиалы) государственными природными заповедниками, 35 региональными ландшафтными парками и более 280 заказниками общегосударственного значения [6], т.е. более 350 ООПТ высшего ранга, большинство из которых, за исключением РЛП, являются репрезентативными природными участками своих ПТК. Региональные ландшафтные парки, напротив, представляют в своем большинстве сильно окультуренные полуприродные участки (ландшафты) и вряд ли могут считаться репрезентативными «ядрами» экологического каркаса национального уровня, хотя роль их в формировании экологических каркасов на региональном уровне должна быть существенной и даже определяющей. Таким образом, существующая сеть ООПТ высших категорий хотя и покрывает в количественном отношении территориальную структуру геокомплексов Украины, но не репрезентативна ей в отношении соответствия иерархическим ее подразделениям. Иначе говоря, далеко не каждая ф-г провинция представлена биосферным заповедником, и далеко не каждая ф-г область национальным парком или природным заповедником. Что касается «избыточного» количества заказников общегосударственного значения (> 280), то роль их как «заповедных ядер» экологического каркаса требует отдельного изучения вследствие крайне незначительных их площадей ($S_{ср}$= 1227 га), но в силу своей многочисленности они наряду с РЛП и вместе с еще более многочисленными ООПТ местного значения могли бы стать каркасными ядрами местных и региональных экологических сетей.

Национальная же экологическая сеть, т.е. экологический каркас общегосударственного уровня подразумевает, как уже говорилось выше, формирование единой пространственно-функциональной структуры относительно крупных природных территорий, где ключевыми объектами должны выступать репрезентативные ООПТ крупного размера – БЗ, НП и ПЗ.

Общий характер размещения ООПТ высших категорий в Украине уже рассматривался в первой части [4]. Общая структура физико-географического районирования Украины и ландшафтное разнообразие ее регионов представлены в таблице 1. Ландшафтное разнообразие ф-г провинций Украины определено как отношение количества видов ландшафтов в провинции [7] к ее площади ($N_{ланд}$ / $S_{терр}$).

Как и следовало ожидать, наибольшее ландшафтное разнообразие в Украине имеют горные регионы – ф-г горно-лесная провинция Горный Крым (1,54/км$^2$) и ф-г горно-лесная провинция Украинские Карпаты (0,79/км$^2$). Среди равнинных регионов относительно высоким разнообразием ландшафтов обладает Степная зона, особенно южная ее часть – Сухостепная (Южностепная) подзона (0,61/км$^2$). Остальные регионы Украины имеют близкие показатели ландшафтного разнообразия (0,30 – 0,33 / км$^2$).

Характер насыщенности физико-географических регионов Украины ООПТ высших категорий представлен в таблице 2. Распределение и насыщенность ООПТ высших категорий согласно ф-г районированию во многом повторяет неравномерность насыщенности этих категорий ООПТ согласно биогеографическому районированию, но в силу большей дробности страны показывают эту неравномерность в еще большей степени. Как по количеству, так и по совокупным и средним площадям ведущее место занимают Западные, Южные и Северо-Западные регионы Украины. Лидером по *совокупной площади* своих ООПТ является *Западно-Украинская лесная ф-г провинция*, затем по этому показателю следуют примерно с одинаковым отрывом друг за другом *Карпатско-Украинская горно-лесная провинция*, *Причерноморско-приазовская южностепная провинция* и *Полесская лесная ф-г провинция*. Все они, за исключением Причерноморско-Приазовской провинции, имеют и наибольшее количество ООПТ высших категорий (соответственно, 35, 41 и 62) по сравнению с другими регионами страны. Остальные десять ф-г провинций по показателю совокупных площадей ООПТ можно разбить на четыре категории: первая категория представлена одной *Крымской горно-лесной провинцией*, которая по совокупным площадям ООПТ в два и более раз превышает остальные девять ф-г провинции. Вторая категория, которую условно можно назвать «средним классом», последовательно по убыванию совокупных площадей ООПТ представлена рядом из 5 ф-г провинций:– *Крымская южностепная провинция – Причерноморская среднестепная провинция – Днестровско-Днепровская лесостепная провинция – Задонецко-Донская северостепная провинция – Левобережно-Днепровская лесостепная провинция*, имеющие совокупные площади ООПТ от 37 тыс. га до 61,4 тыс. га и очень неравномерный их количественный состав (от 4 в Задонецко-Донской до 42 в Днестровско-Днепровской провинции).

Третья категория - «легковесы» - *Среднерусская лесостепная, Левобережно-Днепровско-Приазовская северостепная и Днестровско-Днепровская северостепная провинции*, имеющие совокупные площади ООПТ, соответственно, 14513,4 га, 12854,5 га и 8881,6 га.

И, наконец, четвертая категория представлена единственным аутсайдером по совокупным площадям ООПТ (2171,9 га) – *Донецкой северостепной провинцией*. Последняя имеет всего 3 ООПТ высших категорий – 1 заказник общегосударственного значения и 2 крошечных степных природных заповедника.

Таблица 1

Физико-географическое районирование и ландшафтное разнообразие Украины

| Физико-географическая страна | Зоны и подзоны | Физико-географические провинции, шифр, площадь ($км^2$) | Ландшафтное разнообразие | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Количество (N) | ($N_{ланд}$ / $S_{терр}$) |
| А. Восточно - европейская равнина | А.I. Лесная зона. | 1. Полесская широколист. провинция ($Л_1$), S = 92,916; | 31 | 0,33/ $км^2$ |
| | | 2. Западно-Украинская широколист. провинция ($Л_2$), S = 61,668; | 16 | 0,26/$км^2$ |
| | А.II. Лесостепная зона. | 3. Днестровско-Днепровская лесостепная (л-с) провинция ($ЛС_1$), S = 84,960; | 22 | 0,26/$км^2$ |
| | | 4. Левобережно - Днепровская л-с провинц. ($ЛС_2$), S = 61,056; | 12 | 0,20/$км^2$ |
| | | 5. Среднерусская л-с провинция (ЛС), S = 27,792; | 14 | 0,50/$км^2$ |
| | А.III. Степная зона. | | | |
| | А.III.a. Северостепная подзона. | 6. Днестровско-Днепровская северостепн. провинция ($Са_1$), 52,920; | 9 | 0,17/$км^2$ |
| | | 7. Левобережно-Днепровско-Приазовская северостепн. провинция ($Са_2$), S = 45,684; | 13 | 0,28/$км^2$ |
| | | 8. Донецкая северостепн. провинция ($Са_3$), S = 27,684; | 10 | 0,36/$км^2$ |
| | | 9. Задонецко-Донская северостепн. провинция ($Са_4$), S = 21,672; | 8 | 0,37/$км^2$ |
| | А.III.b. Среднестепная подзона. | 10. Причерноморская среднестепн. провинция (Cb), S = 34,020; | 16 | 0,47/$км^2$ |
| | А.III.c. Южностепная подзона. | 11. Причерноморско-Приазовская провинция ($Сс_1$), S = 19,116; | 12 | 0,63/$км^2$ |
| | | 12. Крымская южностепн. провинция ($Сс_2$), S = 19,008; | 11 | 0,58/$км^2$ |
| В. Горные страны. | | 13. Украинско - Карпатская горно-лесная провинция ($Г_1$), S = 26,716; | 21 | 0,79/$км^2$ |
| В1. Украинские Карпаты. | | | | |
| В2. Горный Крым. | | 14. Крымская горно-лесная провинция ($Г_2$), S = 7,128 | 11 | 1,54/$км^2$ |

Что касается различий по показателю *средняя площадь ООПТ* высшего ранга, то здесь ф-г провинции выстраиваются в несколько иной ряд (табл.2). Повторяя в целом ту же последовательность, что и по убыванию совокупных площадей ООПТ, на первое и второе места здесь выходят *Причерноморско-Приазовская южностепная* и *Причерноморская среднестепная провинции*, что обусловлено наличием у них ООПТ самого крупного размерного ранга – БЗ и НП, при относительно малом общем количестве ООПТ на их территории (13 и 5 соответственно).

Таблица 2

Сравнительная характеристика насыщенности ООПТ высших категорий согласно физико-географическому районированию Украины (по степени убывания совокупных площадей ООПТ)

| Физико-географические провинции | $S_{об}$, га | $S_{ср}$, га | Количество ООПТ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | БЗ | ПЗ | НП | Зак* | $N_{об}$ |
| 1. Западно-Украинская широколиств. провинция – $Л_2$ | 297564,40 | 8501,8 | 0 | 3 | 2 | 30 | 35 |
| 2. Украинско-Карпатская - горно-лесная провинция – $Г_1$ | 256066,60 | 6245,5 | 1 | 1 | 5 | 34 | 41 |
| 3. Причерноморско-приазовская южностепная провинция – $Сс_1$ | 208743,80 | 16057,2 | 2 | 0 | 1 | 10 | 13 |
| 4. Полесская широколиственная провинция $Л_1$ | 170676,03 | 2752,8 | 0 | 2 | 2 | 58 | 62 |
| 5. Крымская горно-лесная провинция - $Г_2$ | 111205,60 | 6541,5 | 0 | 4 | 0 | 13 | 17 |
| 6. Крымская южностепная провинция - $Сс_2$ | 61396,60 | 8770,9 | 0 | 3 | 0 | 4 | 7 |
| 7. Причерноморская среднестепная провинция – Сb | 53998,50 | 10800,0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 5 |
| 8. Днестровско-Днепровская лесостепная провинция – $ЛС_1$ | 49574,70 | 1180,4 | 0 | 1 | 0 | 41 | 42 |
| 9. Задонецко-Донская северостепная провинция – $Са_4$ | 41967,40 | 10492,0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| 10. Левобережно-Днепровская лесостепная провинция – $ЛС_2$ | 37292,20 | 1381,2 | 0 | 1 | 0 | 26 | 27 |
| 11. Среднерусская лесостепная провинция – $ЛС_3$ | 14513,40 | 1612,6 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 |
| 12. Левобережно-Днепровско-Приазовская северостепная провинция – $Са_2$ | 12854,50 | 676,6 | 0 | 3 | 0 | 16 | 19 |
| 13. Днестровско-Днепровская северостепная провинция – $Са_1$ | 8881,60 | 522,4 | 0 | 1 | 0 | 16 | 17 |
| 14. Донецкая северостепная провинция – $Са_3$ | 2171,87 | 724,0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 3 |

Примечание - * в таблицу не вошел ряд заказников общегосударственного значения, расположенных в черте городов либо на границах ф-г провинций.

**Определение природоохранных индексов физико-географических провинций Украины.**

Наиболее информативным показателем репрезентативности пространственной структуры природоохранной сети любой территории или региона может быть так называемый *природоохранный индекс территории (Pt)*. Он представляет собой совокупную оценку насыщенности сети ООПТ любой территории относительно ее площади, что позволяет, в свою очередь, более объективно сравнивать структуру природоохранной сети различных территорий между собой. Природоохранный индекс территории оценивает как количественные параметры природоохранной сети данной территории – количество самих ООПТ и их суммарные площади относительно площади самой территории, так и качественные – категорийное разнообразие ООПТ на этой территории. Причем «качественный аспект» в данном случае представляет собой не просто перечень категоричной структуры территориальной сети ООПТ, но именно оценку его «качественного состава» через определение *коэффициентов значимости ($k_i$)* отдельных категорий ООПТ. Это понятие здесь предлагается впервые и представляет собой объективную оценку значимости любой категории ООПТ в структуре ПЗФ страны через отношение средней площади данной категории ООПТ к средней площади всех объектов ПЗФ в стране. *(Именно средняя площадь данной категории ООПТ является показателем ее значимости, так как, во-первых, с формальной точки зрения площадь любой ООПТ является показателем ее качества как функции ландшафтного и биологического разнообразия ее территории, устойчивости и длительности существования ее экосистем в естественном состоянии. Во-вторых, средняя площадь данной категории ООПТ в какой-то степени отражает степень внимания к ней государства и общественности как к объекту природоохранного и культурного (в широком смысле) значения)*. Например, коэффициент значимости биосферных заповедников – ООПТ самого высокого в стране ранга - $k_{БЗ}$ определяется через отношение средней площади биосферных заповедников в Украине ($Scp_{БЗ}$) к средней площади всех объектов ПЗФ в стране ($Scp_{ПЗФ}$):

$k_{БЗ} = Scp_{БЗ} / Scp_{ПЗФ}$ = 56679,9 га / 380,2 га = 149,1.

Аналогично определяются и коэффициенты значимости остальных категорий ООПТ, в нашем случае: национальных парков $k_{НП}$ = 143,3; государственных природных заповедников $k_{ПЗ}$ = 18,4; заказников общегосударственного значения $k_{Зак}$ = 3,2.

Природоохранный индекс какой-либо территории (любого географического подразделения Земли) с учетом коэффициентов значимости категорий ООПТ определяется по формуле:

$$Pt_i = \frac{k_A \sum S_{Ai} + k_B \sum S_{Bi} + k_C \sum S_{Ci} + \ldots + k_Z \sum S_{Zi}}{St_i},$$

где $Pt_i$ - природоохранный индекс данной территории; A, B, C, …, Z - категории ООПТ; $S_{Ai}$, $S_{Bi}$, $S_{Ci}$,…, $S_{Zi}$ - площади категорий ООПТ на данной территории; $K_A$, $k_B$, $k_C$,…, $k_Z$ - коэффициенты значимости категорий ООПТ в Украине; $St_i$ - площадь данной территории.

Таким образом, использование в определении природоохранного индекса территории коэффициентов значимости каждой категории ООПТ показывает их «относительный вес» в природоохранной сети данной территории.

Результаты расчета природоохранных индексов физико-географических провинций Украины и страны в целом приведены в таблице 3. Там же приведены количество, суммарные и средние площади (га) рассматриваемых категорий ООПТ по каждой ф-г провинции (в числителе приведены суммарные площади данных категорий ООПТ, в знаменателе – их средние площади).

Таблица 3

Структура ООПТ и природоохранные индексы физико-географических провинций Украины

| Физико-географическая провинция | S территории (га) | $P_t$ | Количество и площади ООПТ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $N_{БЗ}$ | $S_{БЗ}/S_{срБЗ}$ | $N_{НП}$ | $S_{НП}/S_{срНП}$ | $N_{ПЗ}$ | $S_{ПЗ}/S_{срПЗ}$ | $N_{Зак}$ | $S_{Зак}/S_{срЗак}$ |
| 1. Полесская широколиственная провинция – $Л_1$ | 9.291600,0 | 1,150 | 0 | | 2 | 65192,1 / 32596,1 | 2 | 67150,8/ 33575,4 | 58 | 38333,1/ 660,9 |
| 2.Западно-украинская широколиств. провинция – $Л_2$ | 6.166800,0 | 6,280 | 0 | | 2 | 268394,6 / 134197,3 | 3 | 12535,0/ 4178,3 | 30 | 16634,8/ 554,5 |
| 3. Днестровско - Днепровская лесостепная провинция – $ЛС_1$ | 8.496000,0 | 0,022 | 0 | | 0 | | 1 | 2027,0 | 41 | 47547,7/ 1159,7 |
| 4. Левобережно - Днепровская лесостепная провинция – $ЛС_2$ | 6.105600,0 | 0,020 | 0 | | 0 | | 1 | 202,4 | 26 | 37089,8/ 1426,5 |
| 5. Среднерусская лесостепная провинция – $ЛС_3$ | 2.779200,0 | 0,017 | 0 | | 0 | | 0 | | 9 | 14513,4/ 1612,6 |
| 6. Днестровско - Днепровская северостепная провинция – $Са_1$ | 5.292000,0 | 0,010 | 0 | | 0 | | 1 | 1675,7 | 16 | 7205,9/ 450,4 |
| 7. Левобережно – Днепровско - Приазовская северостепная провинция – $Са_2$ | 4.568400,0 | 0,026 | 0 | | 0 | | 3 | 5198,2/ 1732,7 | 16 | 7656,3/ 478,5 |
| 8. Донецкая северостепная провинция – $Са_3$ | 2.768400,0 | 0,012 | 0 | | 0 | | 2 | 1721,5/ 860,8 | 1 | 450,4 |
| 9. Задонецко-Донская северостепная провинция – $Са_4$ | 2.167200,0 | 2,690 | 0 | | 1 | 40589,0 | 2 | 928,0/ 464,0 | 1 | 450,4 |
| 10. Причерноморская среднестепная провинция – Cb | 3.402000,0 | 2,041 | 1 | 46402,9 | 0 | | 0 | | 4 | 7589,6/ 1897,4 |
| 11. Причерноморско-Приазовская южностепная провинция – $Сс_1$ | 1.911600,0 | 13,52 | 2 | 122436,6 / 61218,3 | 1 | 52154,0 | 0 | | 10 | 34153,2/ 3415,3 |
| 12. Крымская южностепная провинция - $Сс_2$ | 1.900800,0 | 0,473 | 0 | | 0 | | 3 | 46217,4/ 15405,8 | 4 | 15179,2/ 3794,8 |
| 13. Украинско-Карпатская горно-лесная провинция – $Г_1$ | 2.671600,0 | 12,60 | 1 | 57880,0 | 5 | 173474,7 / 34694,9 | 1 | 5344,2 | 34 | 19367,1 / 569,6 |
| 14. Крымская горно-лесная провинция – $Г_2$ | 712800,0 | 1,820 | 0 | | 0 | | 4 | 61873,2/ 15468,3 | 13 | 49332,4/ 3794,8 |
| Украина | ≈ 60.000000 | 2,110 | 4 | | 11 | | 23 | | 263 | |

Несмотря на то, что Pt является оценочным «качественно-количественным» показателем природоохранной структуры любой территории, прежде всего, относительно ее площади, что и позволяет сравни-

вать различные по площади территории между собой, еще более информативным было бы сравнение Pt отдельных регионов Украины с таковым для страны в целом. В таблице 4 представлены Pt ф-г провинций по степени их убывания и их отношения к Pt для всей Украины ($Pt_i$ / $Pt_{Укр}$). Как видно, из 14 ф-г провинций только 4 имеют Pt, превышающие Pt страны в целом. При достаточно большом диапазоне значений Pt ф-г провинций все их можно разбить условно на 7 классов.

Таблица 4.

Показатели природоохранных индексов физико-географических провинций Украины относительно страны в целом по степени их убывания

| Физико-географические провинции | $Pt_i$ | $Pt_i$ / $Pt_{Укр}$ |
|---|---|---|
| 1. Причерноморско-Приазовская южностепная – $Cc_1$ | 13,52 | 6,3 |
| 2. Украинско-Карпатская горно-лесная - $Г_1$ | 12,60 | 5,9 |
| 3. Западно-Украинская широколиственная - $Л_2$ | 6,28 | 2,95 |
| 4. Задонецко-Донская северостепная – $Ca_4$ | 2,69 | 1,26 |
| **Украина** | **2,13** | **1,00** |
| 5. Причерноморская среднестепная - $C_b$ | 2,041 | 0,96 |
| 6. Крымская горно-лесная - $Г_2$ | 1,82 | 0,82 |
| 7. Полесская широколиственная - $Л_1$ | 1,15 | 0,54 |
| 8. Крымская южностепная - $Cc_2$ | 0,473 | 0,22 |
| 9. Левобережно-Днепровско-Приазовская северостепная - $Ca_2$ | 0,026 | 0,012 |
| 10. Днестровско-Днепровская лесостепная - $ЛС_1$ | 0,022 | 0,010 |
| 11. Левобережно-Днепровская лесостепная - $ЛС_2$ | 0,020 | 0,009 |
| 12. Среднерусская лесостепная - $ЛС_3$ | 0,017 | 0,008 |
| 13. Донецкая северостепная - $Ca_3$ | 0,012 | 0,006 |
| 14. Днестровско-Днепровская северостепная - $Ca_1$ | 0,010 | 0,005 |

I класс - *Причерноморско-Приазовская южностепная ($Cc_1$)* и *Украинско-Карпатская горно-лесная ($Г_1$) провинции*, Pt которых примерно в 6 раз превышает Pt Украины ($Pt_i$ / $Pt_{Укр}$ равно 6,3 и 5,9 соответственно).

II класс – *Западно-Украинская широколиственная провинция ($Л_2$)*, Pt которой в 3 раза превышает Pt Украины.

III класс – сюда вошли сразу три ф-г провинции: *Задонецко-Донская северостепная ($Ca_4$)*, *Причерноморская среднестепная ($C_b$)* и *Крымская горно-лесная ($Г_2$)* Pt которых ($Pt_i$ / $Pt_{Укр}$ равны 1,26; 0,96 и 0,82 соответственно) близки к таковому для страны в целом, т.е. их можно назвать по этому показателю соответствующими общеукраинскому уровню.

IV класс – *Полесская широколиственная провинция ($Л_1$)*, Pt которой почти вдвое уступает Pt Украины.

V класс - *Крымская южностепная провинция ($Cc_2$)*, Pt которой почти в пять раз меньше общеукраинского.

VI класс - самый многочисленный, объединивший четыре ф-г провинции: *Левобережно-Днепровско-Приазовскую северостепную ($Ca_2$)* и все три лесостепные провинции – *Днестровско-Днепровскую ($ЛС_1$)*, *Левобережно-Днепровскую ($ЛС_2$)* и *Среднерусскую ($ЛС_3$)*, Pt которых в среднем в десять раз уступает общеукраинскому.

VII класс - две из четырех северостепных провинций - *Донецкая северостепная ($Ca_3$)* и *Днестровско-Днепровская северостепная ($Ca_1$)*, Pt которых в среднем еще в два раза меньше, чем у ф-г провинций предыдущего класса.

**Выводы.**

Таким образом, используя универсальный оценочный критерий - природоохранный индекс территории (Pt) в анализе пространственной структуры природоохранной сети физико-географических регионов Украины, еще отчетливее видна неравномерность ее территории по насыщенности и категорийному разнообразию ООПТ высшего ранга. Причем эта неравномерность имеет явно выраженный зональный характер. Высокие Pt имеют регионы юно-степных и горно-лесных и широколиственных ландшафтов крайнего Юга и Запада страны. Обширные территории Широколиственной зоны (Украинское полесье), большая часть Степной зоны и вся Лесостепная зона находятся в крайне неблагополучном положении по этому показателю. Очевидно также, что пространственная структура сети ООПТ Украины с точки зрения эталонирования ее территориальных подразделений очень неоднородна. Ее оптимизация должна осуществляться в первую очередь за счет поиска резервов еще сохранившихся природных и полуприродных территорий в Центральных, Северо-Восточных и Восточных регионах страны и придачи им соответствующего природоохранного статуса. Существующая диспропорция в представительности физико-географических подразделений страны ООПТ соответствующих категорий также требует своего пересмотра в виде перевода наиболее репрезентативных и ценных с природоохранной точки зрения заказников в ранг природных заповедников (или в случае их кластерного расположения объединять их в региональные ландшафтные парки, а при наличии больших площадей или ценных уникальных природных объектов – в национальные природные парки и биосферные заповедники). Так или иначе, формирование экологического каркаса страны как целостной структуры возможно лишь на основе достаточно плотной и равномерной пространственной сети ее ядер - особо охраняемых природных территорий.

**РЕЗЮМЕ**

На основі порівняльного аналізу територіальної структури і розміщення природних територій, що охороняються особливо (ПТОО) вищого рангу дається оцінка природно-заповідного фонду (ПЗФ) України і окремих її регіонів. Оцінюється насиченість і категорійна різноманітність ПТОО чотирнадцяти фізико-географічних провінцій України. Структура ПЗФ регіонів оцінювалась за такими критеріями: кількість ПТОО, їх загальна та середня площа, різноманітність категорій ПТОО. Вперше для порівняння структури і насиченості ПТОО фізико-географічних провінцій України і всієї країни в цілому використано універсальний показник – *природоохоронний індекс території*. Показано нерівномірний характер насиченості ПЗФ фізико-географічних провінцій України. Бідніше за все ПЗФ провінцій лісостепової зони та більшої частини північно степової підзони. Даються рекомендації щодо оптимізації ПЗФ України.

**SUMMARY**

Based upon the comparative analysis of territorial structure and location for natural areas of special protection (NASP) of the highest rank, the natural reserve fund (NRF) of Ukraine is evaluated as well as some of its regions. The estimation is given for NASP density and category variety of fourteen Ukrainian physico-geographical provinces. The criteria to estimate NRF structure are as follows: NASP number, their total and average area and NASP category variety. Universal index - *nature protection index of territory* – is used first to compare the NASP structure and density of Ukrainian physico-geographical provinces and the whole country. The uneven character of NRF density is shown for physico-geographical provinces of Ukraine. The poorest ones are the provinces of forest-steppe zone and most part of north-steppe subzone. Recommendations are given to optimize the NRF of Ukraine.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Гетьман В.І. Основні проблеми збереження й використання природно-заповідного фонду України. – Краєзнавство, географія, туризм. – №9 (254), 2000. – С.9-12.
2. Розбудова екомережі України (Програма розвитку ООН. Проект "Екомережі") / Наук. ред. Ю.Р.Шеляг-Сосонко. – Київ, 1997. – 127 с.
3. Шеляг-Сосонко Ю.Р., Ємельянов І.Г. Наукові засади збереження біологічного різноманіття в контексті сталого розвитку // Збірник наукових доповідей "Проблеми сталого розвитку України". – Київ, 1998. – С.183-193.
4. Блакберн А.А., Мороз Н.В. Структура та характер розміщення ПЗФ України і окремих її регіонів (порівняльні аспекти). Частина І. Порівняльна оцінка регіональної структури ПЗФ України відповідно біогеографічному районуванню / Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2002. – Вип.2. – С.361-365.
5. Природа Украинской ССР: Ландшафты и физико-географическое районирование / Отв. ред. А.М.Маринич. – Киев: Наукова думка, 1985. – 223 с.
6. Природно-заповідний фонд України загальнодержавного значення: Довідник – Київ, 1999. – 240 с.
7. Маринич О.М. Наукові засади дослідження ландшафтного різноманіття України // Проблеми ландшафтного різноманіття України – Збірник наукових праць. – Київ, 2000. – С.11-16.

*Надійшла до редакції 26.04.2003 р.*

УДК 577.4:54.054

# МОНИТОРИНГ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ В ХЛЕБОБУЛОЧНЫХ ИЗДЕЛИЯХ

*В.Л.Басенкова, О.Р.Курбанова, Н.А.Бориско*

Среди многочисленных загрязнителей окружающей среды тяжелые металлы (ТМ) занимают особое место. Согласно классификации Дж.Вуда [1] к особо токсичным можно отнести: Co, Ni, Cu, Zn, As, Se, Rb, Cd, Hg, Pb, Sb, Bi, Pt. Превышение содержания подобных элементов в объектах окружающей среды, а тем более в пище – факт крайне нежелательный. Поскольку для живого организма все перечисленные выше элементы необходимы, более правильным будет говорить не про токсиканты вообще, а про токсичные концентрации. Более высокими темпами идет накопление в биосфере Hg, Pb, Zn, Cd, As. Избыточное количество указанных элементов нарушает процессы метаболизма, уменьшает рост и развитие живых организмов.

Тяжелые металлы попадают в организм человека преимущественно с растительной пищей, а накопление токсикантов в растениях происходит, главным образом, из почвы. Химическое исследование почв на территориях с широко развернутой промышленностью приобретает важное значение в связи с вышеизложенным. Основными источниками загрязнения почв ТМ являются и сфера материального производства (промышленность, транспорт) и сфера потребления (сельское хозяйство, быт людей).

Наиболее потребляемыми продуктами являются хлебобулочные изделия, поэтому выбор объектов исследования не вызывает никаких сомнений. Донбасс – один из наиболее развитых промышленных районов. В течение 2001 года объем выбросов составил 60 тонн на 1 кв. км, что в 6 раз больше, чем по Украине в целом [2]. В связи с этим мониторинг тяжелых металлов приобретает первоочередное значение на территории нашей области.

Целью настоящей работы явилось проведение мониторинга загрязнений хлебобулочных изделий тяжелыми металлами. Для этого необходимо:

- установить концентрации тяжелых металлов в зерне, муке и хлебобулочных изделиях (ХБИ) и дать оценку степени их загрязненности;
- определить приоритетные загрязнители среди тяжелых металлов на территории Донецкой области;
- выявить основные источники попадания их в зерно;
- рассчитать коэффициенты биологического поглощения (КБП) этих металлов, т.е. степень биологической активности;
- предложить способы уменьшения попадания ТМ в продукты питания (ХБИ).

Длительность пребывания загрязняющих компонентов в почве намного больше, чем в других частях биосферы. Металлы, которые накопились в грунте, удаляются при выщелачивании, усвоении растениями, при эрозии и дефляции. Растения могут накапливать ТМ в тканях или на поверхности, поэтому растения являются промежуточным резервуаром, через который металлы попадают из почвы в воду, воздух, к людям и животным. Тяжелые металлы, попадая в почву, претерпевают различные трансформации. Один из главных процессов – загрязнение гумусовыми веществами. Этим в значительной мере объясняется повышенное содержание ТМ в верхнем гумусовом слое. Часть тяжелых металлов сорбируется на минеральных частичках, часть находится в межплоскостном пространстве глинистых минералов или, за счет изоморфного замещения ионов других элементов, в кристаллической решетке. В любом случае накопление ТМ техногенного происхождения в приповерхностном слое грунта объясняется тем, что основная их часть находится в труднорастворимом или нерастворимом виде. По данным Стржима [3] на долю водорастрворимых форм цинка и кадмия в почве приходится всего 6-7%, водорастворимый свинец отсутствует. Группа приоритетных тяжелых металлов значительно подвижна в кислой среде и становится практически инертной при подщелачивании [4]. ТМ, которые попадают в почву, ухудшают ее физические и химические свойства, нарушают поглотительный комплекс, понижают буферные свойства почвы. Это приводит к нарушению нормальной деятельности почвенных микроорганизмов (или их полному уничтожению), что, в свою очередь, ведет к снижению антибиотичной активности.

Следует учитывать, что растения имеют неодинаковую способность аккумулировать токсичные микроэлементы. В связи с этим они располагаются в следующие группы:

- Cd, Cs, Rb – легко поглощаются;
- Zn, Mo, Cu, Pb, Ag, As, Co – средне поглощаются;
- Mn, Ni, Cr, Re, Bi – слабо поглощаются;
- Se, Fe, Sn, Ba, Te – трудно поглощаются.

Содержание минеральных элементов в растениях зависит от целого ряда условий: доступности и концентрации макро- и микроэлементов в грунте; уровня кислотности среды; влажности; температуры;

©Басенкова В.Л., Курбанова О.Р., Бориско Н.А.

аэрации в корневой системе; возраста растений. Иногда реакция среды может оказывать более сильное воздействие, чем концентрация тяжелых металлов [5]. Устойчивость растений к токсичным элементам определяется их физиолого-биохимическими особенностями. Наблюдается такая закономерность для ТМ: по мере увеличения концентрации элемента в почвенном растворе больше других накапливается кадмий, затем цинк и медь, самая низкая скорость аккумуляции у свинца [5]. Стойкость растений к повышенному содержанию микроэлементов и их способность накапливаться в предельно высоких концентрациях может представлять огромную опасность для людей, т.к. ТМ попадают в пищевые продукты [6]. Сбалансированность химического состава живых организмов – главное условие их нормального роста и развития. Взаимодействия могут быть антагонистичными или синергитичными. Эти процессы зависят от многих факторов и их механизм до конца еще не изучен [7]. Нарушение баланса приводит к химическим стрессам у растений.

Основными источниками загрязнения продуктов питания тяжелыми металлами являются газообразные, жидкие и твердые отходы промышленности, электростанций, транспорта; коммунально-бытовые отходы, сточные воды, средства защиты растений от вредителей. Ситуация осложняется еще и тем, что отсутствует механизм самоочищения, а очистные сооружения полностью «пропускают» минеральные соли. Распределение ТМ в овощах неодинаково: в мякоти их гораздо больше, чем в поверхностных тканях. При производстве сока отмечена значительная разница содержания ТМ в соке и сырье [8].

Содержание ТМ не должно превышать установленные санитарные нормы и государственные стандарты Украины (табл. 1).

Таблица 1

ПДК тяжелых металлов в пищевых продуктах, мг/кг

| Продукты | Cd | Cu | Pb | Zn |
|---|---|---|---|---|
| Хлеб и продукты | 0,1 | 5,0 | 0,5 | 6,8 |
| Крупы (мукомольные) | 0,05 | 10,0 | 0,35 | 50 |
| Кондитерские изделия | 0,05 | 10,0 | 0,35 | 50 |

Наиболее токсичны из них: Pb и Cd (класс наиболее опасных токсинов), Cu и Zn относятся ко 2-му классу опасности [9].

Учитывая тот факт, что пищевые продукты являются основным источником попадания ТМ в организм человека важным является разработка способов по снижению ксенобиотической контаминации пищевых продуктов. Достичь этого можно путем комплексного подхода к разрешению проблемы экологической безопасности продовольственного сырья и пищевых продуктов. А это, в свою очередь, возможно только при соблюдении природоохранных мероприятий [10]. Пути достижения этой цели на Украине отмечены в Конституции стратегии уменьшения выбросов тяжелых металлов в атмосферу, разработанной Министерством экологии и природных ресурсов (утверждена Постановлением Кабинета Министров от 21.09.2000, №291).

Ни одно природно-охранное мероприятие не может обойтись без мониторинга, без систем наблюдений и контроля за состоянием окружающей среды. Нами проведен санитарно-токсический мониторинг, который позволяет обеспечить наблюдение за степенью загрязнения природных ресурсов токсикантами, влиянием этого загрязнения на людей, животных и растительный мир.

Объектами исследования в данной работе явились – зерно озимой пшеницы агрофирмы «Донецкая», ТОВ «Пригородное», КСП им. Казаченко; мука высшего качества с влажностью не более 15% с Кировского, Допропольского, Артемовского и Мариупольского хлебокомбинатов, а также хлебобулочные изделия (хала, рулет, булочки, булочки с повидлом, хлеб подовый и паляныця) с Кировского хлебокомбината, ТОВ «Интервест», мини-пекарни С. Бубки, хлебокомбинатов Артемовска.

Исследовано более 500 проб, которые готовили к анализу путем минерализации согласно ГОСТ 26929-94 «Підготовка проб. Мінералізація для визначення вмісту токсичних елементів». Анализ проводили полярографически [11] на полярографе ПУ-1 в режиме переменного тока с капающим Hg-электродом в электролизере объемом 5см$^3$. Основные растворы готовили согласно ГОСТ 26931-86; 26934-86. В зависимости от определяемого металла меняли величину напряжения относительно донной ртути (табл. 2).

Как следует из таблицы, главными загрязнителями хлебопродуктов являются медь (56%) и свинец (32%), затем идет кадмий (9%) и цинк (3%). Из таблицы видно, что сохраняется закономерность уменьшения концентрации исследованных ТМ в ряду: зерно-мука-ХБИ. В процессе переработки зерна, технологии выпечки хлеба уровень загрязнения конечных продуктов ТМ значительно уменьшился, что безусловно имеет позитивное значение для здоровья потребителей.

Приоритетными загрязнителями почв также являются свинец (51%), медь (25%) и кадмий (17%) [13]. Как видим, основным источником попадания ТМ в хлебобулочные изделия в Донецкой области является почва. Согласно [13], при изучении содержания ксенобиотиков в атмосферном воздухе, почве и питьевой воде наибольший процент проб с превышением регламентов наблюдался при исследовании почв.

Таблица 2

Условия записи полярограмм

| Элемент | Амплитуда, мВ | Диапазон тока | Начальное напряжение, В |
|---|---|---|---|
| Cu | 5 | 1 – 100 | -0,1 |
| Pb | 10 | 1 – 10 | -0,4 |
| Cd | 10 | 1 – 10 | -0,6 |
| Zn | 5 | 0,25 - 100 | -1,0 |

Расчет количества вещества проводили методом стандартной добавки [12]. Массовую долю металла (в мг/кг) рассчитывали по высоте пиков на полярограмме согласно формуле:

$$X = [[\, m_1 H_1 \cdot V_o / (H_2 - H_1) V_1] - m_x] \div m,$$

где $m_1$ - масса металла, внесенная перед вторым полярографированием, мкг; $m_x$ - масса металла в контрольном растворе, мкг; m - масса навески продукта, г; $H_1$ - высота пика при первом полярографировании, мм; $H_2$ - высота пика при втором полярографировании, мм; $V_o$ - объем раствора, приготовленный из минерализованной навески, мм; $V_1$ - объем раствора, взятый для полярографирования, мм.

Полученные результаты обработаны методом наименьших квадратов и приведены в табл. 3.

Таблица 3

Содержание определяемых тяжелых металлов в пищевых продуктах

| Наименование продукта | Количество проб | Фактическое содержание, мг/кг | | Объемная доля проб с превышением регламента, % |
|---|---|---|---|---|
| | | средний | границы колебаний | |
| Свинец (П) | | | | |
| Хлебобулочные изделия | 48 | 0,58±0,09 | 0,08 – 4,67 | 6,1 |
| Мука | 23 | 0,79±0,03 | 0,72 – 0,86 | - |
| Зерно пшеницы | 55 | 2,0±0,39 | 0,04 – 11,4 | 54,5 |
| Кадмий (П) | | | | |
| Хлебобулочные изделия | 55 | 0,05±0,01 | 0,01 – 0,5 | 5,4 |
| Мука | 36 | 0,07±0,005 | 0,0007 – 0,4 | 6,2 |
| Зерно пшеницы | 46 | 0,08±0,005 | 0,07 – 0,9 | - |
| Цинк (П) | | | | |
| Хлебобулочные изделия | 43 | 6,3±0,9 | 0,08 – 54,7 | 0,8 |
| Мука | 30 | 8,37±0,08 | 0,01 – 49,6 | 6,6 |
| Зерно пшеницы | 37 | 10,94±0,3 | 0,07 – 111,5 | 5,3 |
| Медь (П) | | | | |
| Хлебобулочные изделия | 40 | 2,35±0,7 | 0,73 – 44,9 | 17,3 |
| Мука | 30 | 5,23±0,98 | 0,13 – 62,6 | 1,3 |
| Зерно пшеницы | 67 | 7,54±0,9 | 0,28 – 92,5 | 3,4 |

С учетом найденных экспериментально концентраций ТМ в зерне и содержанию ТМ в почве рассчитаны среднестатистические коэффициенты биологического поглощения (КБП), равные отношению содержания ТМ в зерне к их содержанию в почве (табл. 4). По величине КБП изучаемые элементы можно расположить в ряд (ряд интенсивности поглощения): Cu > Zn > Pb > Cd (зерно озимой пшеницы). Для целого ряда растений КБП меняется в зависимости от элемента и экологических условий среды. Наибольшие значения КБП отмечены для меди и цинка. Это свидетельствует об их высокой биологической активности. Эти данные совпали с данными других литературных источников [13].

Таблица 4

Значение КБП для тяжелых металлов, анализируемых в пшенице

| Элемент | Pb | Cd | Zn | Cu |
|---|---|---|---|---|
| КБП | 3,8 | 0,2 | 30,6 | 188,5 |

Таким образом, уменьшения попадания ТМ в организм с ХБИ можно достичь путем:
- дальнейшего усовершенствования технологических приемов переработки с/х сырья;

- использования специальных агрохимических приемов, что определяет перевод загрязнителей из растворимых в связанные формы;
- выращивания на загрязненных территориях растений с расчетом и учетом их КБП;
- ограничения, вплоть до полного исключения из рациона питания, употребления продуктов, которые имеют повышенное содержание тяжелых металлов.

Таким образом, в настоящей работе определены концентрации ТМ в зерне, муке, ХБИ полярографическим методом; прослежена закономерность снижения концентраций ТМ в ряду зерно-мука-ХБИ; рассчитан уровень загрязнения ХБИ тяжелыми металлами; определены основные источники попадания ТМ в зерно пшеницы Донецкой области; рассчитаны КБП, которые уменьшаются в ряду: Cu > Zn > Pb > Cd; предложены пути уменьшения попадания ТМ в организм человека с ХБИ; проведен мониторинг ТМ в ХБИ на санитарно-токсическом уровне.

**РЕЗЮМЕ**

Проведено моніторинг важких металів (ВМ) в харчових продуктах на санітарно-токсичному рівні. Досліджено більш 500 проб зерна, борошна, хлібобулочних виробів (ХБВ) на вміст Pb, Cu, Zn, Cd полярографічним методом. В ряду зерно-борошно-ХБВ вміст ВМ закономірно знижується. Запропоновані шляхи зниження попадання ВМ в організм людини.

**SUMMARY**

The monitoring of heavy metals in articles of food has been carried out on the sanitarytoxical level. More than 500 samples of grain, flour, bread, rolls and buns have been studied by the polarografic method on containing Pb, Cu, Zn, Cd. In the row grain –flour-bread -rolls and buns the content of heavy metals normally low down. The ways to decrease the possibilities for heavy metals to get into the human organism have been suggested.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ильин В.Б. Тяжелые металлы в системе почва–растение. – Новосибирск.: Наука, 1991. – 367 с.
2. Газета «Труд». 13 сентября 2002 г. – С.13.
3. Стржим З. Загрязнение горных почв в Польше тяжелыми металлами как результат антропогенного процесса // Известия Рос. АН. Серия биология. – 1996, №6. – С.722-735.
4. Фатеев А.И. Миграция, транслакация и фитотоксичность тяжелых металлов при полиэлементном загрязнений почв // Агрохимия. – 2001, №3. – С.57-61.
5. Баздырев Г.И. Тяжелые металлы в системе почва-растение на склонных землях // Известия Тимиряз. с/х академии. – 2001, вып. 2. – С.81-104.
6. Кабата-Пендиас А., Пендиас Т. Микроэлементы в почвах и растениях. – М.: Мир, 1989. – 259 с.
7. Латынова М.М. Комплексные исследования влияния тяжелых металлов на развитие с/х растений // Наука производству. – 2001, №3. – С.17-18
8. Пономарьов П.Х., Сирохман І.В. Безпека харчових продуктів та продовольчої сировини. – К.: Лібра, 1999. – 270 с.
9. ПДК тяжелых металлов и мышьяка в продовольственном сырье и пищевых продуктах. – М.: Медицина, 1986. – 117 с.
10. Закон «Про охорону навколишнього середовища», 1991 р.
11. Шевченко И.Т., Городовский В.И. Полярография в медицине и биологии. – К.: Госмедиздат, 1964. – 315 с.
12. Алесковский Б.Б. и др. Физико-химические методы анализа. – М.: Химия, 1964. – 560 с.
13. Выхованец Т.А. Мониторинг ксенобиотиков в пищевых продуктах. Дисс. на соиск. ученой степени канд. мед. наук. – Донецк, ДГМУ им. Горького, 1997.

*Надійшла до редакції 23.10.2002 р.*

УДК 577.4 (466)

# ЦАРСТВА ПРИРОДЫ В СВЕТЕ УЧЕНИЯ В.И.ВЕРНАДСКОГО О БИОСФЕРЕ

*С.П.Швиндлерман*

В 2003 г. – 140 лет со дня рождения ученого планетарного масштаба Владимира Ивановича Вернадского. Его вклад в развитие науки, передовой научной мысли, невозможно переоценить. Одним из его выдающихся научных произведений, давшем толчок развитию новой науки – биосферологии – является «Биосфера» [1]. Концепция биосферы В.И. Вернадского служит неисчерпаемым источником идей, требующих своего развития.

В биологии принято, что Царство природы – высшая таксономическая категория живых организмов: Царства животных, растений, грибов, доядерных (прокариот, дробянок) и микроорганизмов. Первые три Царства, а также последнее объединяют в Надцарство эукариот и прокариот [2]. В связи с этим определением можно говорить только о клеточных формах жизни. В настоящее время существуют несколько систем их классификаций. Наиболее распространенной является макросистема акад. А.Л. Тахтаджяна, с некоторыми уточнениями представленная в табл. 1.

Таблица 1.

Макросистема клеточных живых организмов

| Надцарство | Царство | Подцарство |
|---|---|---|
| Доядерные (прокариоты) | Дробянки | Бактерии (эубактерии)<br>Архебактерии<br>Цианеи (цианобактерии или сине-зеленые водоросли) |
| Ядерные (эукариоты) | Растения | Низшие растения (водоросли)<br>Высшие растения |
| | Грибы | Миксомицеты (слизевики)<br>Грибы (высшие грибы) |
| | Животные | Простейшие<br>Многоклеточные животные |

Для сравнения дадим иную классификацию, построенную также по систематическому признаку [3]:

А. Надцарство Доядерные организмы (Прокариоты)
- Царство Бактерии
- Царство Архебактерии

Б. Надцарство Ядерные организмы (Эукариоты)
- Царство Протисты
- Царство Грибы
- Царство Растения
  - Подцарство Багрянки
  - Подцарство Настоящие водоросли
  - Подцарство Высшие растения
- Царство Животные

В эту систему живых организмов, имеющих клеточное строение, также не входят вирусы – неклеточная форма жизни.

Как и любая таксономическая систематика, данные классификации, безусловно, искусственны и носят чисто прагматический характер, но без них нельзя обойтись таким, например, таксономическим наукам как ботаника и зоология.

В первой искусственной систематике выделено четыре Царства, во второй – шесть, есть классификации и с иным количеством [4].

Перечисленные таксономические категории не следует путать с экосистемными, или биосферными. В основу выделения биосферных Царств положена их роль в функционировании Земли как целостной экологической системы. Одной из первых классификаций природы можно назвать классификацию «отца

©Швиндлерман С.П.

всех наук» Аристотеля (384-322 гг. до Р. Х.). Весь мир, всю Землю он разделил на четыре Царства. Неодушевленное Царство состоит, согласно его взглядам, из стихий огня, воздуха, воды и земли – это самое низшее Царство: оно существует. Следующее, более высокое Царство – Царство Растения: оно существует и размножается. Еще выше – Царство Животные: существует, размножается и двигается. Завершает эту пирамиду Царство Человека: существует, размножается, двигается и мыслит (табл. 2).

Таблица 2.

Царства Природы по Аристотелю (в современной интерпретации).

| Царство | Подцарство | Составляющая Подцарство группа |
|---|---|---|
| Неодушевленное | Стихия земли<br>Стихия воды<br>Стихия огня<br>Стихия воздуха | |
| Растения | Простые растения<br>Сложные растения | |
| Животные | Бескровные | Губки<br>Моллюски<br>Насекомые<br>Ракообразные<br>Спруты |
| | Краснокровные | Рыбы<br>Рептилии<br>Птицы<br>Звери |
| Человек | | |

Сейчас, по прошествии более 2-х тысяч лет, можно считать классификацию Аристотеля предтечей современной – биосферной.

К классификации живых организмов Аристотель XX века – Вернадский В.И. (1863-1945) – подходил с геохимических позиций. При этом Владимир Иванович опирался на деление организмов по способу питания, разработанное в 80-х годах XIX века немецким биологом В. Пфеффером (1845-1920): автотрофы, гетеротрофы и миксотрофы.

Среди гетеротрофов, по современной классификации Дж.М. Андерсона, выделяются три категории организмов: некротрофы, биотрофы и сапротрофы.

В развитых экосистемах существует сложная пищевая (трофическая) цепь, и потребители автотрофов – гетеротрофы – сами становятся жертвой других гетеротрофов. Организмы любого уровня трофической пирамиды питаются живым веществом нижележащего уровня. Низший трофический уровень составляют автотрофы. С одного уровня на другой передается в среднем только 10% энергии. Остальная энергия или превращается в тепло и рассеивается, или просто не усваивается. Из-за потерь энергии трофическая цепь не может быть бесконечной и включает небольшое число звеньев – не более 4-6.

В современных наземных экосистемах биомасса гетеротрофов составляет обычно десятые доли процента от биомассы автотрофов. Поэтому некротрофы и биотрофы потребляют не всю создаваемую автотрофами продукцию: значительная ее часть отмирает и достается на долю сапротрофам. Они расщепляют ее до простых минеральных соединений: углекислого газа, воды, азота и минеральных солей. Сапротрофы не только предохраняют биосферу от самоотравления (многие продукты распада отмершего органического вещества чрезвычайно ядовиты), но, расщепляя органику, возвращают углерод и азот в минеральную форму (ведь только в такой форме эти элементы могут потребляться автотрофами).

В таблице 3 представлены (по [5]) с нашими дополнениями "пищевые предпочтения" живых существ биосферы.

Формируя биосферную классификацию, попытаемся совместить два подхода к живому веществу: функциональный и систематический.

Жизнь в биосфере существует в неклеточной и клеточной формах. Неклеточную форму представляют вирусы, открытые в 1892 г. российским ученым Д.И. Ивановским (1864-1920) – сверстником и товарищем В.И. Вернадского по Петербургскому университету.

В отличие от клеточных организмов вирусы лишены раздражимости и собственного аппарата синтеза белка. Они не способны к самостоятельному существованию и развиваются только в клетках других живых организмов: бактерий, растений, животных, человека. Генетический аппарат вирусов достаточно разнообразен. По этому признаку, например, различие между вирусом полиомиелита и оспы гораздо существеннее, чем между бактериями и человеком. Описано около 500 разных вирусов, поражающих теп-

локровных животных и человека, и около 300 – растения. Как и все другие организмы, вирусы выполняют в биосфере свою особую функцию. Вызывая тяжелые заболевания живых организмов, вирусы элиминируют наиболее слабые особи и способствуют выживанию наиболее приспособленных.

Таблица 3.

Трофические «предпочтения» живых организмов в биосфере.

| Царство | Подцарство | Автотрофы | | Гетеротрофы | | Миксотрофы |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | фототрофы | хемотрофы | биотрофы | сапро- и некротрофы | |
| Микроорганизмы*) | Бактерии | + | + | + | + | + |
| | Архебактерии | + | + | - | + | + |
| | Цианеи | + | + | - | - | + |
| | Протисты | - | - | + | очень редко | + |
| Растения | Низшие растения (водоросли) | + | - | - | - | + |
| | Высшие растения | + | - | очень редко | ? | + |
| Грибы | Миксомицеты (слизевики) | - | - | + | + | - |
| | Грибы (высшие грибы) | - | - | + | + | - |
| Животные | | - | - | + | + | - |
| Человек | | - | - | + | + | - |

*) Вирусы не имеют прямых трофических связей с окружающей средой

Это позволяет выделять вирусы в биосферное Подцарство в Царстве Микроорганизмы.

Рассмотрение других микроорганизмов, клеточных, начнем с бактерий. Открыты они были в 1683 г. Антони ван Левенгуком (1632-1723). Человек начал использовать широчайшие возможности бактерий, даже не подозревая об их существовании. Еще за несколько тысяч лет до Рождества Христова появились производства, основанные на жизнедеятельности бактерий (виноделие, пивоварение, хлебопечение, сыроварение).

Роль бактерий в круговороте веществ в биосфере двоякая: 1) разложение отмершей органики и возвращение слагающих её элементов в биологический круговорот (значительную часть этой работы бактерии проделывают в пищеварительных трактах многоклеточных животных); 2) непрерывное вовлечение в биотический круговорот всё нового количества зольных элементов и азота [5].

Относительно недавно открыта группа организмов – архебактерии. Ранее известные бактерии, во избежание путаницы, стали называть эубактериями. На основании данных биохимических анализов некоторые таксономисты считают, что архебактерии – генетически самостоятельное Подцарство (или даже – Царство) прокариотов, не связанных с эубактериями узами родства.

Следующее Подцарство Царства Микроорганизмы – сине-зеленые водоросли. Цианобактериям (в системе А.Л. Тахтаджяна – цианеи) принадлежит четвертое Подцарство. Биосферная роль цианобактерий состоит в подготовке бесплодного субстрата для заселения другими живыми организмами. Цианеи – пионеры, первопроходцы нашей планеты.

Следующее Подцарство – протисты или простейшие. Учитывая роль простейших в природе, их размеры, мы решили включить это Подцарство в Царство Микроорганизмы. Известно от 40 до 70 тыс. видов простейших.

К этому Подцарству относятся одноклеточные организмы, большинство из которых является некротрофами, питающимися бактериями, одноклеточными водорослями и другими мелкими организмами, в том числе – и простейшими; встречаются среди них также сапротрофы и биотрофы. Протисты – необходимое звено биогеохимического круговорота вещества в биосфере. Их основная функция – перераспределение вещества в экосистемах, содержащих достаточное количество воды.

Царство Животные насчитывает около 1,3 млн. видов. По числу видов среди Животных резко преобладают насекомые, их около миллиона видов, затем идут моллюски и позвоночные.

Представители этого Царства выполняют в биосфере многообразные функции. Карл Линней (1707-1778) считал их «начальниками» органического мира. Многоклеточные животные обладают активной формой движения. Свобода передвижения животных определяет их основную биосферную функцию – они переводят растительную органику в дисперсное состояние, рассеивая ее достаточно равномерно от живых и погибших растений к местам роста и развития следующих поколений растительных организмов.

Важна роль животных и в качестве редуцентов. Потребляя первичное (и вторичное) органическое вещество, многоклеточные животные в процессе пищеварения минерализуют значительную часть орга-

ники и возвращают в окружающую среду в форме соединений, пригодных для усвоения автотрофами. Непереваренные остатки пищи (у млекопитающих они составляют 10-30%, у насекомых – 60-70%) также постепенно перерабатываются до полной минерализации: сначала животными – копрофагами, а затем грибами и бактериями. Так, замыкая и ускоряя биогеохимический круговорот, животные отдают свой долг биосфере. Будучи некротрофами, животные играют в биосфере роль регулятора и стабилизатора. Зоологи считают, что в принципе невозможно чрезмерное выедание первичной продукции животными: вступает в действие сложнейший механизм регуляции численности различных членов трофической цепи. В этом механизме важная роль принадлежит животным - хищникам. Пресс хищников сдерживает чрезмерное размножение представителей нижележащих трофических уровней и оздоровляет их популяции, элиминируя больные особи. Есть у животных и другая функция – средообразующая. Поглощая те или иные элементы и выделяя продукты метаболизма, животные активно воздействуют на среду своего обитания. Итак, транспорт биосферы, ее пульт управления, кондиционер и ассенизационное устройство – вот, что такое животные в биосфере [5].

Каждое Царство выполняет в биосфере свою определенную роль. Все растения, за редчайшими исключениями, относятся к автотрофам, причем среди них распространены только фотоавтотрофы. Фотосинтез осуществляется благодаря наличию в клетках растений своеобразного магнийсодержащего пигмента – хлорофилла. Усвоение солнечного света с помощью хлорофилла К.А. Тимирязев (1843-1920) назвал «космической функцией» растений.

Царство Растения делится на два Подцарства: Низшие (водоросли) и Высшие растения. С водорослями (не путать с сине-зелеными «водорослями» и водными цветковыми растениями) все обстоит довольно просто. Несмотря на огромное морфологическое разнообразие, представители этого Подцарства по своей роли в биосфере довольно однотипны: являясь фотоавтотрофами, они создают в экосистемах первичную продукцию. Впрочем, как всегда, не обходится без исключений: некоторые водоросли не пренебрегают и другими способами питания и являются, таким образом, миксотрофами.

Представители другого Подцарства – Высшие растения – также являются фотоавтотрофами и создают практически всю первичную продукцию наземных экосистем. Среди Высших растений имеется около 165 видов «извращенцев», которые могут питаться и представителями животного мира.

Высшие растения продуцируют первичное органическое вещество, в основном, из неорганического, причем приток минеральных веществ обеспечивается корневым питанием. Высшие растения обладают по преимуществу пассивной формой движения. Распространять же репродуктивное вещество высшие растения самостоятельно вообще не могут.

Следующее биосферное Царство – Грибы. Все грибы лишены способности самостоятельно синтезировать органическое вещество. Абсолютное большинство из них биотрофы и сапротрофы, хотя встречаются и некротрофы – грибы-хищники, которые поедают мелких обитателей почвы. Если биосферная функция растений – создавать органическое вещество, то биосферная функция грибов – разлагать отмершую органику и подготавливать её тем самым для реутилизации разнородным живым веществом. Сейчас известно, что именно грибам (а не бактериям, как думали раньше) принадлежит в этом отношении ведущая роль в биосфере.

Мы рассмотрели (в основном с помощью А.В. Лапо) четыре биосферных Царства Природы и девять Подцарств, но чтобы «замкнуть» биотический блок не хватает «царства человека в биосфере» (выражение Вернадского, [6]).

С точки зрения систематики, «строить» из одного вида Царство – абсурд, но с точки зрения эколога – правомочно, если его роль в воздействии на окружающую природную среду сравнима с деятельностью многих тысяч видов других организмов в течение миллионов лет.

Человек как биологический вид относится к некротрофам. Другие способы питания людям кажутся аморальными и вызывают отвращение, хотя с позиций «биосферной морали» они ничем не хуже привычки убивать все живое, идущее нам в пищу [5].

Человек изменил и продолжает изменять Лик Земли, являясь «новой геологической силой» планеты; он освоил околоземное пространство и своей разумной и неразумной деятельностью обусловил необходимость в создании и выделении из таксономического мира Животных Царства Человека.

Таким образом, на «стыке» функционального и систематического подходов определилась биотическая часть биосферной классификации со своими трофическими «привязанностями».

Рассматривая экосистему как элементарную структурную единицу биосферы, а биосферу как глобальную экосистему, можно сделать вывод о том, что выделенные Царства Природы в своем единстве являются глобальным биоценозом с микробоценозом, фитоценозом, зооценозом, микоценозом и антропоценозом.

Вместе с тем, кроме живой природы, существует и неживая. Причем и та и другая взаимозависимы и взаимообусловлены. Следовательно, Царства Природы должны охватывать и абиотические компоненты.

Абиотический блок включает Царства Минералы, Стихии и Единое поле.

Царство Минералы. Позднелатинское слово «минерал» означает рудник, ископаемое, руда. Минералами называют однородные по кристаллическому или стекловатому строению, химическому составу и физическим свойствам твердые вещества, образовавшиеся в результате природных процессов, которые протекают в литосфере и мантии Земли, а также на других планетах и в Космосе. Сегодня на Земле и в Космосе ученым известно около 700 горных пород и свыше 2000 минералов. Минералы открывают не только в горных породах, но и в почвах и даже в живых организмах. Подобными образованиями являются жемчуг, кости и зубы человека, скорлупа птичьих яиц и другие.

Современная космология утверждает, что состав других планет во многом сходен с земным и в Галактике не существует ни одного химического элемента, которого не было бы в Периодической системе элементов Менделеева [7].

Техника роста кристалла похожа на технику воспроизведения ДНК в живой клетке. Это установили два ученых независимо друг от друга – советский кристаллограф Г.Г. Лемлеин и английский кристаллограф Ф. Франк; кристалл растет из раствора тоже по спирали, словно накручиваясь сам на себя, продвигая вперед и выше одну и ту же ступеньку, тем самым, наращивая число оборотов в спирали. Отсюда следует, что кристалл способен к росту, «питанию» и самовоспроизведению, разница лишь в уровнях [8].

И хотя минеральное Царство – самое низшее, но с него начинается дальнейшее развитие жизни, ее эволюция.

Следующее Царство – Царство Стихии. Построения древнегреческой и позднейшей науки о Природе включали представления о простейших началах, элементах, из которых слагался Космос – земли, воды, воздуха, огня. Аналогичные представления, объясняющие мироздание из тех же первоначал, можно обнаружить в древнекитайских и древнеиндийских источниках.

Царство Стихии как бы «пронизывает» живую и неживую природу. Оно обусловливает и погодные явления на земном шаре. Многие из самых зловещих явлений природы представляют совместное проявление нескольких, а иногда и всех Подцарств. Примерами тому могут служить извержения вулканов.

Теперь рассмотрим Царство Единое (или Фундаментальное) поле.

Теорию Единого поля связывают с именем А.Эйнштейна. Существует мнение, что эта теория была им разработана в 20-х годах, но он отверг ее по нравственным соображениям: он считал, что человечество пока не готово их разумно использовать.

Советский ученый И.Л. Герловин в течение 35 лет (последние 12 лет в сотрудничестве с академиком М.М. Протодъяконовым) занимался решением проблем этого загадочного поля, и после многочисленных обсуждений с выдающимися современными учеными опубликовал «Основы единой релятивистской квантовой теории фундаментального поля». Согласно этой теории «*в природе существует только одно силовое поле электромагнитной природы, с помощью которого объясняются все известные природные взаимодействия и все главные свойства микрочастиц <...> природа фундаментального поля имеет электромагнитное происхождение, хотя и не сводится к уравнениям Максвелла*» (по [9]).

Нами предлагается следующая биосферная классификация:

А. Надцарство Абиотическое
- Царство Минералы
- Царство Стихии
  - Подцарство Стихия Огня
  - Подцарство Стихия Земли
  - Подцарство Стихия Воды
  - Подцарство Стихия Воздуха
- Царство Единое, или Фундаментальное поле
  - Подцарство Электрическое поле
  - Подцарство Магнитное поле
  - Подцарство Гравитационное поле
  - Подцарство Биологическое поле

Б. Надцарство Биотическое
- Царство Микроорганизмы
  - Подцарство Вирусы
  - Подцарство Бактерии
  - Подцарство Архебактерии
  - Подцарство Цианеи
  - Подцарство Протисты
- Царство Грибы
  - Подцарство Миксомицеты (слизевики)

Подцарство Высшие грибы
Царство Растения
Подцарство Низшие растения (водоросли)
Подцарство Высшие растения
Царство Животные
Царство Человека

В основу биосферной классификации положены взгляды В.И. Вернадского о единстве геохимических и биохимических процессов, происходящих на Земле [по 10].

Резюмируя сказанное о Царствах Природы, отметим следующее:

1. Между таксономической (искусственной) и биосферной (реальной) классификациями много общего. Общее заключается в выделении Подцарств, Царств и Надцарств и совпадении названий большинства Царств и Подцарств.

2. Отличия заключаются в экологическом подходе к формированию самых главных структур биосферы – Надцарств, которые известны как живая и неживая природа. Царства выделены по общим функциям в биосфере Земли, а функции Подцарств обусловливают эту общность. Самое существенное отличие в том, что «подножие» биосферной классификации составляют современные природно-антропогенные экосистемы с абиотическими и биотическими (включая и сообщества людей) компонентами, взаимозависимыми друг от друга и неразделимыми, функционирующими как единое экологическое сообщество – экоценоз [11, 12].

3. Именно Царства Природы в соответствии с биосферной классификацией в своем единстве и представляют реальную картину мира.

**РЕЗЮМЕ**

Пропонується біосферна класифікація Царств природи. Класифікація включає два Надцарства: Абіотичне та Біотичне. Це відображує реальну картину світу, де, за В.І. Вернадським, біохімічні і геохімічні процеси взаємопов'язані і взаємообумовлені.

Біосферна класифікація принципово відмінна від штучних таксономічних класифікацій і сприяє формуванню уявлення про цілісну картині світу. В основу її покладені погляди В.І. Вернадського на біосферу.

**SUMMARY**

We have offered biosphere classification of Kingdom of nature. This classification contains two Above of Kingdom: Abiotic and Biotic. It's reflected the real picture of world, where biochemical and geochemical processes is correlations and interactions (by V.I. Vernadsky).

Biospherical classification is differed from artificial tacsonomical classifications on principle and further to imagine about integrity picture of the world. The basis of this classification is view by V.I. Vernadsky about the biosphere.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Вернадский В.И. Биосфера. Т.I-II. – Л.: Научное хим.-техн. изд-во, 1926.
2. Реймерс Н.Ф. Популярный биологический словарь. – М.: Наука, 1991.– 544 с.
3. Лемеза Н.А., Камлюк Н.В., Лисов Н.Д. Биология в экзаменационных вопросах и ответах: справочник для учителей, репетиторов и абитуриентов. – Минск: Беларуская энцыклапедыя. – 1998. – 464 с.
4. Савустьяненко Т.Л., Швиндлерман С.П., Мухин В.Н. и др. Биология: Учебное пособие. – Донецк: Центр подготовки абитуриентов, 2000. – 480 с.
5. Лапо А.В. Следы былых биосфер. – М.: Знание, 1987. – 208 с.
6. Вернадский В.И. Научная мысль как планетное явление. – М.: Наука, 1991. – 271 с.
7. Супрычев В.А. Самоцветы. – К.: Наук. думка, 1981. – 215 с.
8. Ерофеев В.А. Книга сверхъестественных сил. – Донецк: Сталкер, 1997. – 349 с.
9. Швиндлерман А.П. Интегральная философия. – Донецк: Юго-Восток, 1999. – 58 с.
10. Рифкин Д. Приближение биосферного века. – К.: Информ. агенст. «Эхо-Восток», 1995. – 61 с.
11. Швиндлерман С.П. Основы общей экологии. – Донецк, Кассиопея, 1999. – 168 с.
12. Швиндлерман С.П. Эволюция экоценозов в свете учения В.И. Вернадского о ноосфере. // Творческое наследие В.И.Вернадского и современность. Сборник трудов международной научной конференции в г. Донецке. – Донецк: Донбасс, 2001. – С.298-307.

*Надійшла до редакції 23.09.2002 р.*

УДК 577.4

# ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КУЛЬТУРЫ

*С.П.Швиндлерман, Н.А.Дмитриева*
*Донецкий институт социального образования*

Культура для человеческого сообщества (антропоценоза) – защитный механизм, помогающий выжить в условиях борьбы с Природой. Формы культуры столь разнообразны, что количество определений термина давно перевалило за две тысячи. Но, так или иначе, все культурные проявления (например, одежда, жилище, обработанная пища, мораль, государство и т.п.) направлены изначально на защиту от Природы и от себе подобных.

Культура создает искусственный мир и всё дальше уводит человека от естественного существования. И вот уже человечество не живет, а выживает в условиях озоновых дыр, Чернобыльской катастрофы, наводнения Западной Европы и т.д. Если первобытные люди боялись природных явлений и боролись с ними, то цивилизованное общество боится, прежде всего, придуманных им самим схем и постулатов. В случае же природных катаклизмов страх переходит в ужас.

Однако, как бы далеко ни разошлись пути культуры и Природы, культура всё-таки проявляется в «экологическом пространстве» – среде существования человека со всем комплексом экологических факторов и в самом человеке. Теоретически человечество с этим считается: создано много организаций и движений в защиту Природы, со школьной скамьи люди знают об экономии природных ресурсов, только всё это – знания по большей части теоретические.

Культуру человека можно определить как специфический способ самоидентификации в мире. Причем мир – это и внешняя для человека среда со всем ее содержимым, включая других живых и неживых существ, и внутренний физический и духовный мир человека. Из культур отдельных людей складывается культура человеческих сообществ. Причем, тут может быть взаимовлияние. Даже если, казалось бы, все носители определенной культуры вымерли, культура продолжает существовать, действует «культурная память».

На стыке культуры и экологии человека находится **экологический аспект культуры человека**. Экологический аспект сознания есть у всех людей, следовательно, он есть и в культуре, но этот аспект может быть как экофильным, так и экофобным. Когда мы изо дня в день разрушаем свой организм сигаретами, когда селимся в мрачных клетках многоэтажных домов, когда лепим объявление на чахлое городское деревце – мы сталкиваемся с проявлением экофобного мышления в действии. Всё это – наш выбор.

Один из атрибутов любви – чувство абсолютной защищенности. Но какой уголок Природы на Земле может этим похвастать? Потеряв баланс с Природой, которую мы всё время пытаемся завоевать, а, как завоюем – переделать, человек потерял равновесие, то есть, попросту говоря, почву под ногами.

Даже если бы было место абсолютной защищенности на планете, спасение Природы, поиски гармонии с ней в отдельно взятой стране проблему не решат, ведь воздух, вода, земля общие. Экофильная культура – это культура Мира, которая не имеет границ. Тут мы подходим к **экологическому аспекту культуры антропоценоза**, который находится на стыке культуры и социальной экологии.

В научно-публицистической литературе на данный момент терминологический аппарат понятий, связанных с экологическим аспектом культуры человека и антропоценоза не определен, используется разная терминология. Например, можно услышать выражение «экологическая культура» в смысле картины мира, деятельности и предметного компонента, связанного с взаимоотношениями человека и Природы. При этом подразумевается, что взаимоотношения эти направлены на сохранение Природы. Или встречается словосочетание «экология культуры», то есть сохранение и защита памятников культуры в природной среде, или взаимовлияние культурного и цивилизационного процессов и состояние окружающей среды.

В наши дни средства массовой информации выступают в роли посредника между учеными-экологами, администрацией и населением. Причина некорректного употребления слов и выражений зачастую – в элементарной экологической безграмотности работников информационной сферы.

В случае с «экологией культуры» все понятно: экология – это наука, название которой никак не является синонимом слов «сохранение», «чистота», «защита». Что же касается «экологической культуры», тут следует отметить, что в самом прилагательном «экологический» не содержится коннотации положительного отношения к природе или ее спасения. «Экологический – относящийся к *экологии*, связанный с ней» [1]. Поэтому «экологическим» может быть и кризис – неблагоприятное изменение биосферы. А может и экологическая война случиться – «нанесение ущерба противнику путем воздействия на среду его обитания (загрязнение или заражение воздуха, воды, почвы, истребление флоры и фауны)» [2].

©Швиндлерман С.П., Дмитриева Н.А.

С нашей точки зрения правильно было бы употреблять термины «экофильная культура» и «экофобная культура». **Экофильная культура** (от греч. oikos «дом, родина» и phileo – «люблю») – это такой способ отношения к действительности, который направлен на создание гармоничной взаимосвязи с окружающей природной средой. **Экофобная культура** (от греч. oikos «дом, родина» и phobos - «страх») – это такой способ отношения к действительности, который направлен на деструкцию взаимосвязи человека (или сообщества людей) и окружающей природной среды. Причем речь идет и о тех случаях, когда человек вредит внешней для себя Природе (например, вырубает леса, жжет осенние листья в черте города, оскорбляет других людей), и о тех случаях, когда он разрушает свою внутреннюю Природу (например, не лечит кариес, употребляет наркотики, имеет негативное мышление). Понятно, что деструкция связи с внешней и внутренней Природой пагубно сказывается и на самом разрушителе и на всем сообществе людей.

Культура человека непосредственно связана с его картиной мира, а та, в свою очередь, с мышлением. Один из крупнейших экологов современности Н.Ф. Реймерс определил мышление как «процесс познавательной деятельности характеризующийся обобщением, опосредованным отражением действительности, её предвидением. Мышление позволяет получить знания о таких объектах и явлениях, которые не могут быть непосредственно восприняты на чувственной ступени познания. Мышление человека имеет общественную природу и, как правило, оно творческое. Отличают мышление практическое (постановка и достижение цели) и теоретическое (направленное на открытие законов и фундаментальных свойств объектов)» [3].

Исходя из этого определения **практическое экофильное мышление** заключается в постановке и достижении гуманных, природоохранных целей, а **теоретическое экофильное мышление** направлено на открытие законов Природы и фундаментальных свойств природных объектов.

В основе экофильного мышления, по нашему мнению, должны лежать три тезиса.

1. «Я един со всем Человечеством».
2. «Человечество едино со всеми живыми организмами».
3. «Земля – живой Организм» [4-8].

Осознание того, что судьбы отдельного человека, всего человечества и Земли едины; того, что каждая мысль рождает глобальные последствия, завершит процесс становления экофильной культуры – культуры ноосферной стадии развития Земли в понимании В.И. Вернадского.

На данный момент экофобная культура и экофобное мышление являются преобладающими в сообществе людей. Такое положение дел существует с момента возникновения Homo sapiens. Человек – существо особенное, в поведении которого много странных и необъяснимых фактов. Мы уничтожаем не только территорию, на которой живем, вместе с ее естественными обитателями, но и себе подобных. Мы сеем конфликты, разоряем Природу, хорошо понимая, что рубим сук, на котором сидим. Как выразился французский биолог Жан Батист Пьер Антуан де Моне Ламарк (1744-1829), предназначение человека как бы заключается в том, чтобы уничтожить свой род, предварительно сделав Земной шар непригодным для обитания. Но все же можно надеяться, что это – лишь специфическая программа адаптации данного вида к условиям жизни на земле, что-то вроде адаптации вирусов и т.п. «Место и роль культуры в экологической практике людей обусловлены тем, что именно данное явление выступает в качестве целостного адаптивно-адаптирующего механизма человеческой деятельности» [9]. Пугает одно – бывают случаи тупиковых ветвей, адаптация которых, в конце концов, привела к вымиранию.

Экофильное мышление вбирает в себя и ментальный, и деятельностный аспект и носит побуждающий к действию характер, обусловливая природоохранную деятельность в конкретном регионе, локусе. Трудно заботиться о том, что далеко от тебя, и о том, чего ты не знаешь. В формировании экофильной культуры Донбасса не последнюю роль могут сыграть общественные, патриотические организации. Потребительское отношение к окружающей природной среде, с одной стороны, и хищническое, разрушающее, с другой, обусловливают необходимость активного вмешательства всей общественности, всех жителей региона.

Если говорить о состоянии главной реки города Донецка – реки Кальмиус, то она вызывает, мягко говоря, чувство сострадания. Так, растительность бассейна этой реки подвержена большой антропогенной трансформации. Кальмиус испытывает влияние промышленных стоков предприятий, бытовых стоков населенных пунктов, а также шахтных вод, так как находится в центре промышленного региона. Особую опасность представляет загрязнение воды тяжелыми металлами. Это кобальт, никель, медь, хром, цинк, свинец, марганец, железо и другие химические элементы, которые ранее не были вовлечены в биологический круговорот или присутствовали, но не в таких количествах. Все эти вещества сильно влияют на растительность бассейна р. Кальмиус, что, безусловно, опосредованно воздействует и на здоровье людей.

Известно, что информационно-фазовое состояние воды таково, что полная информация, поступающая в водную среду, отражается в каждой ее молекуле, как и наоборот, - то, что знает капля, знает вся лужа, река, море, океан [10]. Если воздействие на воду постоянное, то происходят необратимые измене-

ния внутреннего расположения ее структурных элементов, что приводит к перерождению воды. Она старается выжить в сложившийся обстановке. Понятно, что это повлечет за собой изменение всего биогеоценоза и, в конечном итоге, – людей. Однако если система получит сигнал об угрозе разрушающего фактора, мутации может и не произойти.

Естественно, возникает необходимость в создании единого регионального ландшафтного парка вдоль всей реки Кальмиус. Но экологическое возрождение региона не может ограничиваться только рекой. Безусловно, здесь необходимо в целом менять экофобное технократическое отношение к Природе.

Главным условием устойчивого сохранения и развития человечества является изменение экофобного, мышления на экофильное, и формирование на этой базе экофильной культуры. Само собой стихийно такое мышление и культура возникнуть не могут. Для их появления и развития необходимо специальное воспитание человека с самого рождения (а в чем-то даже еще до появления на свет). Корни экофильной культуры – это поток энергии исторической памяти. Эта энергия питает нас, поскольку мы не только биосоциальные существа.

Экофильная культура – культура человека будущего – Homo doctus [4-8] – культура «свободно мыслящего человечества, взятого как единое целое» [11]. Правильность природоохранительной деятельности будет зависеть от знания экологии как науки и общей экологизации обучения.

**РЕЗЮМЕ**

Розмежовані поняття «екофільна культура», «екофобна культура». Розглянуті екологічні аспекти культури людини та антропоценозу.

**SUMMARY**

Concepts «ecophillian culture», «ecophobian culture» have been demarcated. Ecological aspects of culture of the person and anthropocoenosis have been considered.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Современный словарь иностранных слов. – СПб.: «Дуэт», 1994. – 752 с.
2. Советский энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М.Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1986. – 1600 с.
3. Реймерс Н.Ф. Популярный биологический словарь. – М.: Наука. 1991. – 544 с.
4. Швиндлерман С.П. Необходимость экофильного мышления //Проблемы экологий и охраны природы техногенного региона. – Донецк: Юго-Восток, 1999. – С.160-164.
5. Швиндлерман С.П. Современная концепция природоведения. – Донецк: Кассиопея, 2000.– 204 с.
6. Швиндлерман С.П. Основы общей экологии. Учебное пособие для студентов вузов. – Донецк: Кассиопея, 1999. – 168 с
7. Швиндлерман С.П. Экологизация образования: проблемы и их решения // Все. – 2001. – №5 (20).
8. Швиндлерман С.П. Фитооптимизация техногенных экосистем / Збірник наукових праць Донецької державної академії управління: Теоретичні і методологічні основи управління в сфері природокористування, охорони навколишнього природного середовища й екологічної освіти в Донбасі. Серія „Державне управління", т. III, вип.16.– Донецьк: Донбас, 2002.– С. 92-99.
9. Маркарян Э.С. Теория культуры и современная наука: логико-методологический анализ. – М.: Мысль, 1983. – 284 с.
10. Зенин С.В., Тяглов Б.В. Природа гидрофобного взаимодействия. Возникновение ориентационных полей в водных растворах // Журн. физ. химии. – 1994, т.68. – №3. – С.500.
11. Вернадский В.И. Научная мысль как планетное явление – М.: Наука, 1991. – 274 с.

*Надійшла до редакції 03.07.2003 р.*

## СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕСИ КЕРУВАННЯ

УДК 004.942+534-7

# АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИТУАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ МУКОМОЛЬНОГО ЗАВОДА

*В.Е.Борухсон*

**Введение.** Обеспечение взрыво-, пожаробезопасности и качества продукции при высоких показателях эффективности на мукомольных, крупяных и комбикормовых заводах традиционно остаётся актуальной проблемой.

В системах управления зерноперерабатывающими предприятиями, наряду с задачами, традиционными для большинства предприятий: (1) выбор оптимальных режимов подготовки зерна и режимов работы основных систем переработки зерна и (2) обеспечение стабильности выбранных режимов в течение периода переработки всей партии зерна, решается задача (3) идентификации ситуаций, приводящих к пожарам, взрывам мучной пыли и потерям качества продукции [1,2].

Решение третей задачи требует мониторинга производственных ситуаций. Автоматизация мониторинга на базе автоматизированной системы контроля (АСК) сопряжена со следующими трудностями:

-на зерноперерабатывающих предприятиях, наряду с непрерывными методами автоматического контроля, распространены методы выборочного контроля и косвенной оценки параметров путём интерпретации данных. Это звено АСК трудно поддаётся автоматизации и поэтому, до сегодняшнего дня, функции съёма и последующей переработки информации выполняет человек, что связано с определёнными недостатками.

-интерпретация производственных ситуаций может быть выполнена высококвалифицированным персоналом – экспертами, подготовка которых требует длительного периода времени. Рабочие с малым опытом не способны комплексно охватить всю ситуацию, выделить требуемые фрагменты и на их основе дать интерпретацию ситуации, что повышает угрозу взрывов, пожаров и выпуска некачественной продукции.

Совершенствование системы контроля и мониторинга может идти двумя путями [3,4]. Первый путь устранения человека из контура мониторинга производственных ситуаций - это разработка новой технологии. Второй путь – автоматизация функции мониторинга производственных ситуаций за счёт новых информационных технологий, а именно на основе методов искусственного интеллекта - интерпретации данных.

Первый путь кардинального перевооружения производства переработки зерна более длительный и более затратный: требуется проектирование и производство принципиально нового оборудования, систем автоматизации и так далее. В статье рассматриваются теоретические и методические вопросы, необходимые для реализации второго подхода.

Результаты анализа существующих систем мониторинга на зерноперерабатывающих производствах показывают, что принятие решений осуществляется на основе интерпретации ситуаций, представляющих интегрированное описание, включающее:

точные показания приборов в виде чисел;

словесное описание результатов наблюдения, воспринятых человеком на слух;

словесное описание результатов наблюдения, воспринятых человеком зрительно;

словесное описание нечётких данных результатов контроля качества продукта;

словесное описание результатов обобщения и прогнозирования развития производственной ситуации, включающее словесную формулировку степени уверенности.

Трудности, встречающиеся при интерпретации такого типа производственных ситуаций, обусловлены отсутствием универсального аппарата интерпретации данных произвольной физической природы [5,6], а тем более интерпретации производственных ситуаций [7,8], представляющих интеграцию нескольких разных по природе параметров и результатов умозаключений в стиле, свойственном человеку.

Анализ состояния затронутого вопроса по двум направлениям:

- возможность интеграции традиционных АСК с системами интерпретации данных;

- возможность интеграции систем ситуационного управления, в части представления и формирования ситуаций, с системами интерпретации данных выявил, преимущества последнего [9,10].



©Борухсон В.Е.

Ситуация – это комплексная характеристика, которая в последнее время находит всё большее распространение, как в теоретических исследованиях [10,11], так и на практике при автоматизации процессов переработки информации и управления производством.

Теоретические исследования ситуационного управления были затронуты в семиотических (знаковых) системах управления, которые способные выполнять функции, свойственные только человеку: интерпретация данных, целеполагание, приобретение знаний [10,13].

Нетрадиционные системы, с которыми столкнулась теория управления, названные впоследствии большими системами, обладают по определению Клыкова Ю.И. [13] и Поспелова Д.А. [10] следующими чертами: уникальностью, отсутствием формализуемой цели существования, отсутствием оптимальности, нестационарностью и неполнотой описания. К этому классу относится описываемый в статье объект.

Методы ситуационного управления, как методы искусственного интеллекта, подпадают под классификацию интеллектуальных систем: относятся к системам основанным на знаниях. Поэтому говорят [8,11] о точных (полностью определённых или неполных вероятностных) и нечётких моделях ситуационного управления. Для синтеза систем ситуационного управления важным фактором, определяющим технологию синтеза, является тип знаний: поверхностные или глубинные знания используются при описании проблемной области. Более того, чрезвычайно важна форма представления глубинных знаний: они могут быть представлены в словесной (вербальной) форме или в какой то компьютерной форме, являющейся моделью чувственного восприятия человеком окружения (восприятие звуковой ситуации) или в гибридной форме, интегрирующей вербальное и чувственное представление [13-15].

Точные модели ситуационного управления, предложенные и развитые в работах Клыкова Ю.И. и Поспелова Д.А. Нечёткие модели ситуационного управления, предложенные в работах [8,11] нашли применение при проектировании интеллектуальных систем управления. Известны исследования ситуационного управления, основанного на нечётких глубинных знаниях [8,16]. Здесь ключевыми проблемами являются построение моделей чувственного восприятия, как дальнейшего развития методов интерпретации данных, моделей образования понятий и мышления, как дальнейшее развитие методов концептуального умозаключения.

В статье рассматриваются гибридной модели представления производственной ситуации, интегрирующие нечёткие *перцептивные* модели с нечёткими *вербальными* моделями.

**Структура производственной ситуации**. В работе предлагается структурировать ситуацию методом фрагментации по источникам информации. Фрагментом ситуации может быть либо пространственный фрагмент - некоторая часть полного описания ситуации в пространстве первичных источников информации (параметров и свойств), либо временной фрагмент - характеристика источника информации за некоторый временной интервал, либо гибридный фрагмент - временной фрагмент некоторого пространственного фрагмента.

Полная ситуация, исходя из существующей организационной структуры производства ДКХП, разбита на фрагменты: $\Phi_1,\Phi_2$ – фрагменты ситуации, характеризующие взрыво - и пожаробезопасность, а $K_1,K_2$ фрагменты ситуации, характеризующие качество выходной продукции, соответственно, на подготовительном и размольном отделениях. Каждый фрагмент, в свою очередь, имеет сложную иерархическую структуру, например: $\Phi_2=\{\Phi_{2_1},\Phi_{2_2},..,\Phi_{2_7}\}$, где $\Phi_{2_1}$, $\Phi_{2_2}$,..., $\Phi_{2_5}$ - фрагменты, описывающие состояние взрыво - и пожаробезопасности на первой, второй и так далее пятой драных операциях, а $\Phi_{2_6}$, $\Phi_{2_7}$ - фрагменты, описывающие первую, вторую размольные операции размольного отделения. Далее, каждый из фрагментов разбивается на подфрагменты более детального представления ситуации. Например, $\Phi_{2_1}=\{\Phi_{2_1_1},\Phi_{2_1_2}$, $\Phi_{2_1_3},..,\Phi_{2_1_7}\}$, где $\Phi_{2_1_1},\Phi_{2_1_2}$ - фрагменты, описывающие безопасность обработки продукта на вальцовом и рассевном станках первой драной операции, $\Phi_{2_1_3}$ - $\Phi_{2_1_7}$ - фрагменты, описывающий транспортировку продукта нориями от вальцового станка к рассеву первой драной операции и от рассева первой драной операции до вальцевых станков следующих драных и размольных операций.

Так, $\Phi_{2_1_1}$ включает, в соответствии с выделенными при анализе источниками информации, фрагменты: $\Phi_{2_1_1_1}$ – показатели качества продукта на входе вальцового станка (крупность помола); $\Phi_{2_1_1_2}$ – показатели загрузки станка (сила тока в амперах); $\Phi_{2_1_1_3}$ – показатели равномерности подачи зерна на станок; $\Phi_{2_1_1_4}$ – показатели технического состояния вальцового станка; $\Phi_{2_1_1_5}$ – перцептивные показатели режима работы вальцового станка. Каждый из этих фрагментов в последующем детализируется на фрагменты ещё низ лежащего уровня: $\Phi_{2_1_1_4_1}$ – показатели технического состояния станины; $\Phi_{2_1_1_4_2}$ – показатели технического состояния вальцов; $\Phi_{2_1_1_4_3}$ – показатели технического состояния зубчатой передачи; $\Phi_{2_1_1_4_4}$ – показатели технического состояния механизма привала; $\Phi_{2_1_1_4_5}$ – показатели технического состояния штурвального механизма; $\Phi_{2_1_1_4_6}$ – показатели технического состояния механизма регулирования заслонки. Дальнейшая детализация ситуации, например, по фрагменту $\Phi_{2_1_1_4_2}$ даёт: $\Phi_{2_1_1_4_2_1}$ –соосность вальцов; $\Phi_{2_1_1_4_2_2}$ –износ вальцов; $\Phi_{2_1_1_4_2_3}$ –износ рифлей; $\Phi_{2_1_1_4_2_4}$ –износ подшипников вальцов.

Декомпозиция ситуации по принципу соответствия фрагментов источникам информации приводит к иерархической древовидной структуре, как показано на рис.1.

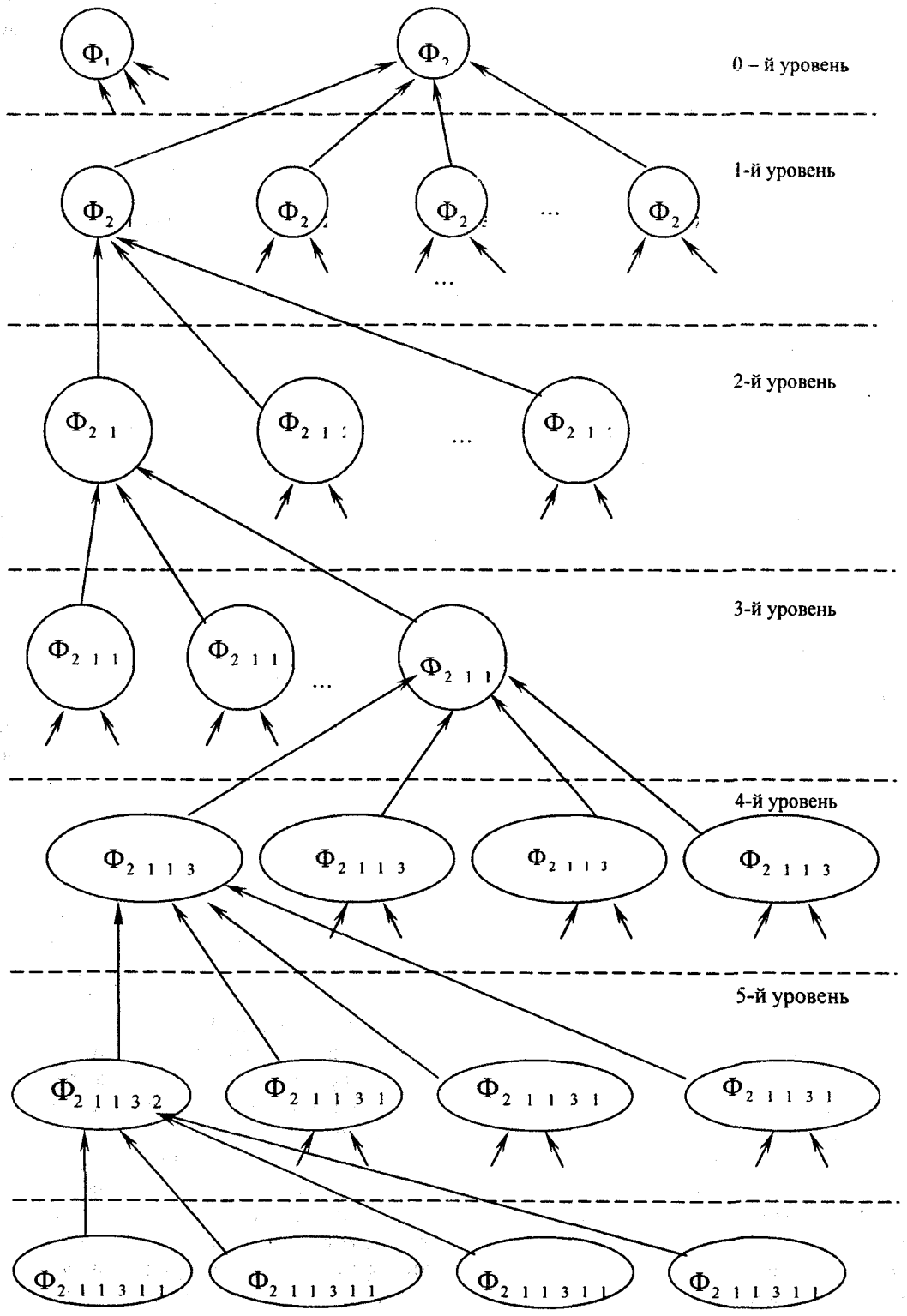



Рис. 1. Структура производственной ситуации.

Следует подчеркнуть, что фрагменты организованы иерархически в том смысле, что при описании ситуации более высокого уровня используются обобщенные показатели, входящие в описание класса или категории по сравнению с параметрами описания ситуации нижнего уровня.

**Модель представления ситуации.** Каждый из выделенных в структуре фрагментов имеет внутреннюю и внешнюю модель представления ситуации.

Внешняя модель предназначена для облегчения восприятия ситуации человеком, принимающим решение или контролирующим и обновляющим ситуацию. Поэтому предлагается использовать аппарат лингвистических переменных Л. Заде [17] для построения внешней модели фрагмента ситуации.

Внутренняя модель должна быть унифицированной и предназначена для сквозной обработки фрагментов ситуации. Предлагается в качестве такой модели нечёткие подмножества на относительной безразмерной шкале.

Таким образом, каждый фрагмент ситуации описывается:

$M_1$- моделью внешнего представления ситуации;

$M_2$- моделью внутреннего представления ситуации;

$M_3$- моделью перехода от внутреннего представления к внешнему в виде механизма решения уравнения назначения по Л. Заде;

$M_4$- моделью интерпретации, в виде механизма перехода от внутреннего представления фрагментов на нижних уровнях иерархической структуры ситуации к внутреннему представлению рассматриваемого фрагмента.

Ситуация меняется в дискретные моменты времени .. t - T, t, t + T, t + 2T,...,t + kT,... В произвольный момент времени $t$ полная ситуация описывается внешней моделью:

$$\begin{aligned}[L(S)]_t=\{&\{[L(\Phi_1)]_t,[L(\Phi_2)]_t\},\{[L(K_1)]_t,[L(K_2)]_t\}\\ &\{[L(\Phi_{1_1})]_t,..,[L(\Phi_{1_11})]_t\},\{[L(K_{1_2})]_t,..,[L(K_{1_2})]_t\},\\ &\{[L(\Phi_{2_1})]_t,..,[L(\Phi_{2_7})]_t\},\{[L(K_{2_1})]_t,..,[L(K_{2_7})]_t\},\\ &\ldots\end{aligned} \qquad (1)$$

где $L(\Phi_{i_j_..k})$ – значение лингвистической переменной L.

Задача Автоматизированной Системы Интерпретации Производственных Ситуаций (АСИПС) – для каждого момента времени на основании входной информации от источников данных, во-первых, определить значение полной ситуации, во-вторых, определить, к какой из множества известных производственных ситуаций-прототипов относится текущая и с какой уверенностью, а, в-третьих, дать человеку-оператору вербальное описание этой ситуации-прототипа в виде (1).

Для любого $\Phi_{i_j_..k}$ известно множество моделей прототипов фрагментов ситуаций в виде нечётких подмножеств, заданных на безразмерных относительных шкалах

$$\{\hat{C}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})\}_{r=1}^{R}. \qquad (2)$$

Например, для фрагмента $\Phi_{2_1_1_3_1_3}$ - износ рифлей вальцов – на универсальном множестве $C=\{c_1,c_2,..,c_n\}$, отражающем износ в процентах (отношение средней по выборке фактической высоты рифли, полученной из результатов измерений во время профилактических осмотров, к нормативному значению) заданы модели прототипы:

$$\begin{aligned}\hat{C}^1(\hat{O}_{2_1_1_4_2_2})=\{&1|\mu_{\hat{C}^1}(1)=1,\ 2|\mu_{\hat{C}^1}(2)=1,\ ...,10|\mu_{\hat{C}^1}(10)=1,\\ &11|\mu_{\hat{C}^1}(11)=0.9,\ 12|\mu_{\hat{C}^1}(12)=0.8,\ ...,19|\mu_{\hat{C}^1}(19)=0.1,\\ &20|\mu_{\hat{C}^1}(20)=0.0,\ ...,100|\mu_{\hat{C}^1}(100)=0.0\}\end{aligned}$$

Ситуация прототип $\hat{C}^1(\hat{O}_{2_1_1_4_2_2})$ описывает случай, когда вальцы практически новые, рифли не изношены, так в пределах 10% находятся допуски или допустимый разброс измерений. Аналогично определяются ситуация прототип $\hat{C}^2(\hat{O}_{2_1_1_4_2_2})$, описывающая начальную стадию износа рифлей

валков (в пределах до 20%), и так далее до ситуации прототипа $\hat{C}^5(\hat{O}_{2_1_1_4_2_2})$, описывающей состояние рифлей, при котором их эксплуатация не допускается по нормам.

**Вычисление значения текущей ситуации. Интерпретация данных.** Интерпретация применительно к фрагменту ситуации $\Phi_{i_j_..k}$ состоит в следующем:

1) для каждого момента времени на основании входной информации (значений определённых лежащих ниже фрагментов ситуации $[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k_n})]_t, \ldots, [\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k_m})]_t$) вычислить значения рассматриваемого фрагмента ситуации $[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t$;
2) представить текущую ситуацию в виде значений ситуаций-прототипов (уверенности, с какой текущая ситуация может быть отнесена к каждой из известных производственных ситуаций-прототипов);
3) представить описание текущей ситуации в вербальном виде, как ситуацию-прототип.

**Значение фрагмента, представленное нечётким подмножеством.** Первая фаза интерпретации - вычисление значения фрагмента ситуации $[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t$ - решается по-разному, в зависимости от типа фрагмента. В работе различают два типа фрагментов.

Первый тип – это фрагменты нижних уровней, характеризующие непосредственно входные данные, представляющие результаты контроля, измерения, наблюдения или специальной обработки, например, аудиальных данных о производственных шумах. Контроль качества продукции или измерения силы тока, температуры и других величин связаны с погрешностями. Эти данные представлены нечёткими числами и нечёткими интервалами. Интерпретация их решается традиционными методами фаззификации [18]. Вербальные данные, описывающие наблюдения и ощущения оператора, представлены нечёткими подмножествами. Интерпретация есть операция формирования таких нечётких подмножеств на основании априорно заданных нечётких подмножеств-характеристик нормальных значений и квантификаторов, используемых для вербального описания входной информации [18].

Второй тип – это фрагменты всех остальных уровней, лежащих выше фрагментов первого типа. Значение каждого из них представлено нечётким подмножеством, вычисляемым по модели логогена Мортона, формализованной на основе нечётких подмножеств [15].

**Значение фрагмента, представленное в виде ситуаций - прототипов**. Вторая функция – вычисление уверенности, с которой текущая ситуация $[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t$ принадлежит к ситуации прототипу – в диссертационной работе решена следующим образом.

Находится относительное расстояние Хемминга [19] между каждой парой нечётких подмножеств

$$[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t \text{ и } \hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})$$

$$\delta([\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t, \hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})) = \frac{1}{N}\sum_{n}^{N} \left| \mu_{[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t}(c_n) - \mu_{\hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})}(c_n) \right|, \tag{3}$$

где N – мощность универсального множества $\tilde{N} = \{c_1, c_2, .., c_n\}$; $\mu_{[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t}, \mu_{\hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})}(c_n)$ - функции принадлежности элемента $c_n$ нечётким подмножествам $[\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t$ и $\hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})$, соответственно.

Формируется нечёткое подмножество второго уровня

$$^{II}\hat{\underset{\sim}{C}}(\hat{O}_{2_1_1_3_1_3}) = \{c^r \mid \mu_{^{II}\hat{\underset{\sim}{C}}(\hat{O}_{2_1_1_3_1_3})}(c^r), \forall r = \overline{1,R}\}, \tag{4}$$

где $^{II}\hat{\underset{\sim}{C}}(\hat{O}_{2_1_1_3_1_3})$ - непосредственно обозначение нечёткого подмножества второго уровня; $c^r$ - элемент универсального множества, поставленный в соответствие нечёткому подмножеству $\hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})$;

$$\mu_{^{II}\hat{\underset{\sim}{C}}(\hat{O}_{2_1_1_3_1_3})}(c^r) = \delta([\underset{\sim}{C}(\hat{O}_{i_j_.._k})]_t, \hat{\underset{\sim}{C}}^r(\hat{O}_{i_j_.._k})); \tag{5}$$

$\mu_{\hat{C}(\Phi_{2_1_1_3_1_3})}(C^r)$ - функция принадлежности нечёткого подмножества второго уровня, отражающая степень уверенности в том, что для текущей ситуации $[\underset{\sim}{C}(\Phi_{i_j_\ldots_k})]_t$ характерна ситуация прототип, представленная моделью $\hat{C}^r(\Phi_{i_j_\ldots_k})$.

Третья функция механизма интерпретации – представление ситуации в виде ситуации прототипа в вербальном виде – есть процедура преобразования нечёткого подмножества (5) в лингвистическую переменную. Здесь возможны разные модели – от модели центроида до сложной логической обработки [20].

**Выводы.** В работе предложено использовать ситуационный метод фрагментации – построение структуры полной ситуации из её фрагментов. Выполненный анализ исследуемой предметной области, показал, что ситуация имеет древовидную структуру. Каждый фрагмент ситуации предложено описывать двумя моделями: внутреннего и внешнего представления. Модель внутреннего представления реализована в виде прототипов ситуаций, представленных нечёткими множествами и определённых на безразмерном универсальном множестве. Модель внешнего представления реализована в виде лингвистической переменной. Формально задача интерпретация сведена к вычислению значений фрагментов ситуации, сопоставление его с прототипами классов ситуаций, нахождение нечёткого подмножества второго уровня, универсальным множеством которого служат элементы, соответствующие классам ситуаций. Метод проектирования АСИПС использован при создании системы автоматизированного контроля аварийных режимов на мукомольном заводе ОАО «Донецкий комбинат хлебопродуктов №2». Система прошла опытную эксплуатацию. Использование системы позволяет улучшить оперативность управления производством, снизить риск появления аварийных режимов, связанных с человеческими жертвами и материальными потерями. Исследование зерноперерабатывающего производства подтвердило возможность тиражирования системы на другие мукомольные предприятия отрасли.

**РЕЗЮМЕ**

Наведено підхід що до створення автоматизованих систем інтерпретації аварійних ситуацій у промисловості, застосований на методах штучного інтелекту. Розглянуті моделі представлення та інтерпретації фрагментів ситуацій на основі нечіткої математики.

**SUMMARY**

In the technology of information processing software, the technology of interpretation o0f situation play very important role. It is used in the synthesis of intellectual systems of automatic control. In the following article the method of situation interpretation on the basis of fuzzy knowledge is studied.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Галицкий Р.Р. Оборудование зерноперерабатывающих предприятий. - М.: Колос, 1982. – 434 с.
2. Данилин А.С., Братухин А.М. Совершенствование технологических процессов на мукомольных заводах. - М.: Колос, 1976. – 274 с.
3. Куликов В.Н., Миловидов М.Е. Оборудование предприятий элеваторов и зерноперерабатывающей промышленности. - М.: Колос, 1983. – 394 с.
4. Птушкин А.Т. Автоматическое управление на мукомольных заводах. - М.: Колос, 1975. – 198 с.
5. Осуга С. Обработка знаний, М.: Мир, 1989.- 292 с.
6. Попов Э.В., Фоминых И.Б., Кисель Е.Б. Статические и динамические экспертные системы. -М.: Финансы и статистика, 1996.-320с. Шостак В.Ф. Модели и методы управления сложными технологическими комплексами в нештатных (экстремальных) режимах работы в АСУТП // Автоматика и телемеханика, 1994. - №10.
7. Базы знаний интеллектуальных систем / Т.А. Гаврилова, В.Ф. Хорошевский – СПб: Питер, 2000.–384с.
8. Каргин А.А., Каргин В.А., Петренко Т.Г. Представление и обработка знаний о динамических свойствах ситуаций в интеллектуальных машинах // Вісник Східноукраїнського державного університету, № 6(22):– Луганськ; СДУ, 1999.–С.18–24.
9. Каргин А.А. Петренко Т.Г. Модели динамических ситуационных интеллектуальных машин // Искусственный интеллект, 1999.–№2.
10. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. - М.: Наука, - 1986.- 288 с.
11. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.- М.: Наука, 1990.- 272 с.
12. Клыков Ю.И. Ситуационное управление большими системами. -М.: Энергия, 1974.- 134 с.
13. Люгер Джордж Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е изд. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.-864 с.
14. Андерсон Дж. Когнитивная психология. - СПб.: Питер, 2002. – 496с.
15. Солсо Р. Когнитивная психология - СПб.: Питер, 2002. – 592с.

16. Алексеев А.В., Попов В.А., Слядзь И.И., Фомин С.А. Концепция построения гибридных экспертных систем для решения задач исследовательского проектирования // Создание и применение ГЭС: Тез. Всес. конф., Рига, техн. ун-т, 1990. – С.3-8.
17. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
18. Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др.; под ред. Тэрано Т., Асаи К., Сугэно М. – М.: Мир, 1993. – 386 с.
19. Коффман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: 1982. – 432 с.
20. Леоненков А.В. Нечёткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб: БХВ – Петербург, 2003. – 736 с.

*Надійшла до редакції 20.06.2003 р.*

УДК 519.7

# ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ АВТОМАТОВ

*А.С.Сенченко*
*Славянский государственный педагогический университет*

**Введение**

В настоящей работе исследуется эффективное задание детерминированных, инициально-связных, частично-определенных конечных автоматов без выхода с помощью определяющей системы, аналогичной системе определяющих соотношений [1], [2]. Предлагается новая конструкция – определяющая система $\{\rho, M\}$, где бинарное отношение $\rho$ выступает аналогом системы определяющих соотношений, а множество $M$ показывает неопределенности функции переходов.

Показано, что всякий конечный частично-определенный автомат имеет хотя бы одну конечную определяющую систему. Задаются условия проверки, является ли данная система определяющей для некоторого конечного частично-определенного автомата – условия совместимости и определенности.

**1. Постановка задачи.**

Рассматривается задача распространения понятий и аппарата систем определяющих соотношений на частично-определенные автоматы. Подобная задача решена для всюдуопределенных автоматов [1], [2], и ее результаты оказались удобной техникой для анализа поведения автоматоподобных систем. Необходимость распространения этой задачи на частичные автоматы обусловлена тем, что анализ частичных автоматов находится в зачаточном состоянии [3].

**2. Основные определения.**

Под автоматом, если не оговорено противное, понимается конечный детерминированный инициальный частично-определенный (полу)автомат [3]. Все рассматриваемые автоматы имеют один и тот же входной алфавит $X$. Множество всех слов конечной длины в этом алфавите обозначается $X^*$. Пусть $p = x_1 \ldots x_k$, тогда длина слова $p$ обозначается $d(p)$ и $d(p) = k$. Через $e$ обозначаем пустое слово и полагаем $d(e) = 0$.

Пусть $A = (A, X, \delta, a_0)$ - автомат, у которого $A$ - конечное множество состояний, $a_0$ – начальное состояние, $\delta : A \times X \to A$ - (частичная) функция переходов. $\delta(a,x)$ обозначаем $ax$, если $\delta(a,x)$ определена. Слово $p = x_1 \ldots x_k \in X^*$ назовем допустимым автоматом $A$, если все $\delta(a_0, x_1), \delta(a_0 x_1, x_2), \ldots, \delta(a_0 x_1 \ldots x_{k-1}, x_k)$ определены. Множество всех допустимых автоматом $A$ слов обозначим через $X^A$. Расширим функцию переходов на множество $X^A$ обычным образом: $a \cdot e = a$, $a(px) = (ap)x$. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются инициально-связные автоматы, то есть автоматы, у которых для каждого состояния $a$ существует слово $p$ и $a_0 p = a$. Обозначим класс всех таких частично-определенных автоматов через $P(X)$, а класс всех таких всюдуопределенных автоматов через $C(X)$.

Через $\overline{A} = (\overline{A}, X, \overline{\delta}, a_0)$ обозначим свободное расширение [1] автомата $A$.

Системой $\{\rho, M\}$ назовем алгебраическую конструкцию, в которой $\rho$ - бинарное отношение на $X^*$, а $M$ - подмножество множества $X^*$.

С каждым автоматом $A \in P(X)$ свяжем систему $\{\rho_A, M_A\}$, где $\rho_A$ - правая конгруэнция на $X^A$, а $M_A \subseteq X^A \cdot X$ построенную следующим образом: $(p,q) \in \rho_A$, если $a_0 p = a_0 q$ и $wx \in M_A$, если $w \in X^A$ и $wx \notin X^A$. Ясно, что при $A \in C(X)$ $M_A = \varnothing$.

Пусть $X^* = (X^*, X, \Delta, e)$ - свободный автомат. Ясно, что $X^* / \rho_A = \overline{A}$. Из автомата $\overline{A}$ с помощью множества $M_A$ получаем автомат $A$ путем исключения из $\overline{A}$ всех свободных подавтоматов по-

©Сенченко А.С.

рожденных состояниями $a_0wx$, где $a_0$ - начальное состояние автомата $\overline{A}$ и $wx \in M_A$, а также удаления перехода из состояния $a_0w$ по $x$. Таким образом, система $\{\rho_A, M_A\}$ однозначно задает автомат $A$.

Пусть $\{\rho, M\}$- произвольная система. Через $[\rho]$ обозначим правоконгруэнтное замыкание бинарного отношения $\rho$. Через $E_p$ обозначим множество всех таких слов $p'$, что $(p,p') \in [\rho]$. Исключим из $[\rho]$ все пары, в левую или правую часть которых входят слова из $E_p xz$ для всех $px \in M$ $(x \in X)$, $z \in X^*$. Назовем получившееся множество правоконгруэнтным замыканием системы $\{\rho, M\}$ и обозначим его через $[\rho, M]$.

Пусть $\rho$ - произвольное бинарное отношение эквивалентности. Через $pr(\rho)$ обозначим множество всех таких слов $p$, что для некоторого слова $p'$ $(p,p') \in \rho$ или $(p',p) \in \rho$.

Рассмотрим правоконгруэнтное замыкание системы $\{\rho_A, M_A\}$. Из множества $[\rho_A]$ мы исключаем все пары, в левую или правую часть которых входят слова из $E_p xz$ для всех $px \in M_A$ $(x \in X)$, $z \in X^*$. Таким образом, из $[\rho_A]$ исключаются все пары, в левую или правую часть которых входят слова из множества $X^* - X^A$, так как множество всех таких слов есть множество $M_A \cdot X^*$. Следовательно, в $[\rho_A, M_A]$ содержатся все такие пары $(p,q)$, что $p,q \in X^A$ и $a_0p = a_0q$, то есть $[\rho_A, M_A] = \rho_A$.

Через $W_\rho$ обозначим множество начальных отрезков всех слов из бинарного отношения $\rho$.

**3. Определяющие системы.**

Пусть автомат $A \in P(X)$. Систему $\{\rho, M\}$ назовем определяющей системой (ОС) для $A$, если выполняются условия:

i) $[\rho, M] = \rho_A$; ii) $M \subseteq M_A$; iii) $W_\rho \subseteq X^A$; iv) Для каждого состояния $a \in A$ и каждого $x \in X$, если $\delta(a,x)$ не определена, то в $M$ существует слово $px$, где $a_0p = a$.

**Теорема 1.** Пусть $\{\rho, M\}$ - ОС для автомата $A = (A, X, \delta, a_0) \in P(X)$ и $p \in X^*$. Тогда $p \in X^A$ в том и только том случае, когда $p \in pr([\rho, M])$.

**Доказательство.** Пусть $p \in X^A$. Допустим, что пара $(p,p) \notin [\rho, M]$, следовательно существуют $x \in X$ $z, p', w \in X^*$ такие, что $p = p'xw$, $(z,p') \in [\rho]$ и $zx \in M$. Тогда из $(z,p') \in [\rho]$ следует, что $a_0z = a_0p'$. Обозначим $a_0z = a_0p' = a$. Но из $zx \in M$ следует, что $\delta(a,x)$ не определена, что неверно из-за $p'x \in X^A$. Поэтому $(p,p) \in [\rho, M]$, и, следовательно, $p \in pr([\rho, M])$.

Пусть теперь $p \in pr([\rho, M])$. Допустим, что $p \notin X^A$, следовательно, существуют $x \in X$ $p', w \in X^*$ такие, что $p = p'xw$, и $\delta(a_0p', x)$ не определена. Обозначим $a_0p' = a$. Согласно условию (iv) для некоторого $z$ такого, что $a_0z = a$, $zx \in M$. Поскольку $a_0z = a_0p'$, пара $(z,p') \in \rho_A$, и, следовательно, $(z,p') \in [\rho, M]$, поэтому $(z,p') \in [\rho]$. По определению правоконгруэнтного замыкания системы слово $p$ не входит ни в одну из пар $[\rho, M]$, что противоречит условию. Следовательно, $p \in X^A$.Теорема 1 доказана.

Пусть $\{\rho, M\}$ определяющая система для $A$. Тогда очевидно, $X^*/\rho = \overline{A}$ ввиду условия (i), а множество $M$ построенное согласно условиям (ii) и (iv), показывает все неопределенности функции переходов автомата $A$. Исключив из $\overline{A}$ все свободные подавтоматы порожденные состояниями $a_0wx$, где $wx \in M$ и удалив переход из состояния $a_0w$ по $x$, получим автомат $A$. Таким образом, определяющая система однозначно задает автомат.

Покажем, что любой автомат $A \in P(X)$ имеет хоть одну конечную ОС. Пусть $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$ и $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m$. Введем на $X^A$ лексикографический линейный порядок $\le$ обычным образом:

1) если $d(p) < d(q)$, то $p \le q$; 2) $x_1' \ldots x_s' = p \le q = x_1'' \ldots x_s''$, если $x_k' \le x_k''$ для некоторого $k \le s$, в то время как $x_1' = x_1'', \ldots, x_{k-1}' = x_{k-1}''$.

При $p \le q$ будем говорить, что $p$ предшествует $q$.

Пусть $A = \{a_0,\ldots,a_{n-1}\}$ и $v_i$ - кратчайшее по лексикографическому порядку слово, для которого $a_0 v_i = a_i$. Множество $V_A = \{v_0,\ldots,v_{n-1}\}$ называется [4] базисом достижимости автомата $A$. Через $K_A$ обозначим множество всех таких слов $v_l x$ из $V_A \cdot X$ ($v_l \in V_A$, $x \in X$), для которых $\delta(a_0 v_l, x)$ не определена. Определим теперь конечное бинарное отношение $\kappa_A$ на множестве $V_A \cup V_A \cdot X$ по правилу: пусть $\kappa_A$ вначале пусто. Для каждых $v_i, v_j \in V_A$ и $x \in X$, если $a_0 v_i x = a_0 v_j$ и $v_i x \ne v_j$, то пару $(v_j, v_i x)$ помещаем в $\kappa_A$. Заметим, что $v_j < v_i x$ по построению $V$.

**Теорема 2.** $\{\kappa_A, K_A\}$ является определяющей системой для $A$.

**Доказательство.** Из построения множества $K_A$ следует выполнение условий (ii) - (iv). Покажем, что $[\kappa_A, K_A] = \rho_A$.

Пусть $(p,q) \in [\kappa_A, K_A]$. По теореме 1 слова $p$ и $q$ входят в множество $X^A$. Из определения правоконгруэнтного замыкания системы следует, что $(p,q) \in [\kappa_A]$, следовательно, $a_0 p = a_0 q$, то есть, $(p,q) \in \rho_A$. Поэтому $[\kappa_A, K_A] \subseteq \rho_A$.

Покажем обратное включение. Пусть $(p,q) \in \rho_A$, следовательно, $a_0 p = a_0 q$. Сначала докажем, что $(p,q) \in [\kappa_A]$. Пусть $v$ - такое слово из $V_A$, что $a_0 p = a_0 v$. Индукцией по длине слова $p$ покажем, что $(v,p) \in [\kappa_A]$.

Для $d(p) = 0$ $a_0 p = a_0$. Так как $v$ - кратчайшее слово, для которого $a_0 v = a_0$, то $v \le p$ и $v = p = e$. Так как $[\kappa_A]$ рефлексивно, то $(e,e) \in [\kappa_A]$.

Пусть для всех $p$, таких, что $0 \le d(p) \le r-1$ и $a_0 p = a_0 v$ выполняется $(v,p) \in [\kappa_A]$. Пусть $d(p) = r$ и $a_0 p = a_0 v$. Пусть также $p = qx$, $a_0 q = a_0 w$, где $w \in V$. По предположению индукции $(q,w) \in [\kappa_A]$. Так как $[\kappa_A]$ правая конгруэнция, то $(qx, wx) \in [\kappa_A]$. Тогда, если $wx = v$, то $(wx, v) \in [\kappa_A]$ и в силу транзитивности $[\kappa_A]$ $(qx, v) \in [\kappa_A]$. Если же $wx \ne v$, то $(v, wx) \in \kappa_A$ и в силу симметричности и транзитивности $[\kappa_A]$ $(qx, v) \in [\kappa_A]$. Таким образом доказано, что $(p,v) \in [\kappa_A]$.

По вышесказанному $(q,v) \in [\kappa_A]$ и, значит, $(p,q) \in [\kappa_A]$.

Допустим теперь, что $(p,q) \notin [\kappa_A, K_A]$. Тогда существуют $x \in X$ $z, p', w \in X^*$ такие, что $p = p'xw$, $(z,p') \in [\kappa_A]$ и $zx \in K_A$. Обозначим $a_0 z = a$. Из $zx \in K_A$ следует, что $\delta(a,x)$ не определена. Из $(z,p') \in [\kappa_A]$ следует, что $a_0 p' = a$. Тогда из $p = p'xw$ следует, что $\delta(a,x)$ определена, чего не может быть ввиду детерминированности автомата $A$. Следовательно, $(p,q) \in [\kappa_A, K_A]$, поэтому $[\kappa_A, K_A] = \rho_A$. Теорема 2 доказана.

$\{\kappa_A, K_A\}$ назовем канонической ОС для автомата $A$.

**4. Характеризация определяющих систем.**

Выведем необходимые и достаточные условия для $\rho$ и $M$, при которых система $\{\rho, M\}$ является определяющей для некоторого автомата $A \in P(X)$.

Систему $\{\rho, M\}$ назовем несовместимой, если существуют $x \in X$, $p = p'x \in M$, $q \in X^*$ такие, что $(p', q) \in [\rho]$ и для некоторых $y \neq e$, $w \in X^*$ выполняется хотя бы одно из условий:

а) $qxw \in W_\rho$; б) $qxy \in M$.

Систему, не являющуюся несовместимой, назовем совместимой.

Справедливо утверждение

**Лемма 1.** Определяющая система совместима.

**Доказательство.** Пусть $\{\rho, M\}$ - ОС для автомата $A = (A, X, \delta, a_0) \in P(X)$. Допустим, что $\{\rho, M\}$ несовместима. Следовательно, существуют $x \in X$, $p = p'x \in M$, $q \in X^*$ такие, что $(p', q) \in [\rho]$ и для некоторых $y \neq e$, $w \in X^*$ или $qxw \in W_\rho$, или $qxy \in M$. Если $(p', q) \in [\rho, M]$, то пусть $a_0 p' = a$. Из $p'x \in M$ следует, что $\delta(a, x)$ не определена. Если же $(p', q) \notin [\rho, M]$, то по теореме 1 $p' \notin X^A$. С другой стороны, из каждого условия следует, что $\delta(a, x)$ определена, чего не может быть ввиду детерминированности автомата $A$. Лемма 1 доказана.

Пусть $\{\rho, M\}$ - произвольная система. Пару $(p, q) \in \rho$ назовем выводимой, если для некоторого слова $w \neq e$ $p = p'w$, $q = q'w$ и $(p', q') \in [\rho]$. Множество всех выводимых пар из $\rho$ обозначим через $\rho^-$. Положим $\rho^+ = \rho - \rho^-$. Из того, что $\rho^- \subseteq [\rho]$, следует утверждение.

**Лемма 2.** $[\rho, M] = [\rho^+, M]$.

Совместимую систему $\{\rho, M\}$ назовем неопределенной, если существуют $x \in X$, $p \in pr([\rho, M])$ такие, что для любых $w \in X^*$, $p' \in E_p$ выполняется $p'x \notin W_{\rho^+}$ и $p'xw \notin M$. Совместимую систему, не являющуюся неопределенной, назовем определенной.

**Лемма 3.** Определяющая система определена.

Для доказательства леммы 3 нам понадобится следующее очевидное утверждение.

**Лемма 4.** Пусть $a_1$, $a_2$ - два различных состояния автомата $A = (A, X, \delta, a_0) \in P(X)$ и для некоторых $x_1, x_2 \in X$ $\delta(a_1 x_1) = \delta(a_2 x_2) = a$. Пусть $\{\rho, M\}$ определяющая система для $A$, и $p$ - такое слово множества $X^A$, что $a_0 p = a_1$. Тогда существуют такие слова $q = q'x$ $(x \in X)$, $z \in E_p$, что $a_0 q' \neq a_1$, $a_0 q = a$ и пара $(zx_1, q)$ принадлежит $\rho$.

**Доказательство леммы 3.** Пусть $\{\rho, M\}$ - ОС для автомата $A = (A, X, \delta, a_0) \in P(X)$. Допустим, что система $\{\rho, M\}$ неопределенная. Тогда существуют $x \in X$, $p \in pr([\rho, M])$ такие, что для любых $w \in X^*$, $p' \in E_p$ выполняется $p'x \notin W_{\rho^+}$ и $p'xw \notin M$. По теореме 1 из $p \in pr([\rho, M])$ следует, что $p \in X^A$. Обозначим $a_0 p = a$. $\delta(a, x)$ определена ввиду $p'xw \notin M$. Тогда из конечности автомата $A$ следует, что существуют такие $m$ и $n$, что $m > n$ и $a_0 px^m = a_0 px^n$.

Обозначим $a_0 px = a_1$, $a_0 px^2 = a_2$, ..., $a_0 px^n = a_n$. Если существуют $a' \in A$, $x' \in X$ такие, что $a' \neq a$ и $\delta(a', x') = a_1$, то для некоторого $q$, что $a_0 q = a'$ и некоторого $p' \in E_p$ по лемме 3 пара $(p'x, qx') \in \rho$, что противоречит допущению о неопределенности системы $\{\rho, M\}$.

В противном случае, пусть $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ - минимальное число, для которого существуют $a' \in A$, $x' \in X$ такие, что $a' \neq a_{i-1}$ и $\delta(a', x') = a_i$. Такое $i$ существует ввиду $a_0 px^m = a_0 px^n$. Тогда пусть $a_0 z = a_{i-1}$. Согласно леммы 4 для некоторых $q \in X^A$, $p' \in E_z$, причем $a_0 q = a'$, пара $(p'x, qx') \in \rho$. Из минимальности $i$ следует, что $p' = yx^{i-1}$, причем $a_0 y = a$. Отсюда вытекает, что $y \in E_p$, чего не может быть по допущению о неопределенности системы $\{\rho, M\}$.

Следовательно, наше допущение неверно, поэтому система $\{\rho, M\}$ является определенной. Лемма 3 доказана.

Таким образом получены необходимые условия для строения определяющей системы. Покажем, что эти условия также будут достаточными.

**Теорема 3.** Всякая определенная система является определяющей системой для некоторого автомата из класса $P(X)$.

**Доказательство.** Пусть $\{\rho, M\}$ - определенная система. Бинарное отношение $\rho$ однозначно определяет [1] всюду определенный (бесконечный) автомат. Обозначим $X^*/[\rho] = \overline{A}$.

Разобьем доказательство теоремы на доказательство четырех утверждений.

**Лемма 5.** Для каждого слова $p = p'x \in M$ в автомате $\overline{A}$ содержится свободный подавтомат с вершиной в состоянии $a_0 p = a$.

**Доказательство.** Обозначим $a_0 p' = a'$. Допустим, что утверждение неверно. Следовательно, для некоторых $q, w, y, z \in X^*$, таких, что $a_0 q = a'$, или пара $(qxw, z)$ принадлежит $\rho$, или слово $qy$ принадлежит $M$. В первом случае, так как $a_0 p' = a_0 q$, то пара $(p', q)$ принадлежит $[\rho]$. Ввиду совместимости системы $\{\rho, M\}$ каждый начальный отрезок слов $p'$, $q$ принадлежит $[\rho, M]$, следовательно $(p', q) \in [\rho, M]$. Получили, что существуют $x \in X$, $p = p'x \in M$, $q \in X^*$ такие, что $(p', q) \in [\rho, M]$ и $qxw \in W_\rho$, чего не может быть ввиду совместимости системы $\{\rho, M\}$. Второй случай также противоречит совместимости системы $\{\rho, M\}$. Поэтому наше допущение неверно. Лемма 5 доказана.

Из совместимости системы $\{\rho, M\}$ также следует следующая очевидная лемма.

**Лемма 6.** Пусть $p = p'x \in M$. Тогда в $M$ не существует таких слов $z$, что $z = qxy$, где $(p', q) \in [\rho]$ и $y \neq e$. В $W_\rho$ не входит слово $qx$, где $(p', q) \in [\rho]$.

Далее удалим из автомата $\overline{A}$ все свободные подавтоматы с вершинами в словах $p'$ для всех $p = p'x \in M$. Получившийся автомат обозначим через $A$.

**Лемма 7.** $A \in P(X)$.

**Доказательство.** Допустим, что утверждение неверно. Из построения автомата $A$ и из допущения следует, что в $A$ существует свободный подавтомат. Пусть $p' = px$ - такое слово из $X^A$, что $a_0 p' = a'$ - вершина свободного подавтомата. Обозначим $a_0 p = a$. Из построения автомата $A$ следует, что для любого такого слова $z$, что $a_0 z = a$, пара $(p, z)$ принадлежит $[\rho]$, а из существования свободного подавтомата следует, что $zxw \notin M$ для любого $w \in X^*$ и $zx \notin W_{\rho^+}$. Получили, что существуют $x \in X$, $p \in pr([\rho, M])$ такие, что для любых $w \in X^*$, $z \in E_p$ выполняется $zx \notin W_{\rho^+}$ и $zxw \notin M$, что противоречит условию определенности системы $\{\rho, M\}$. Следовательно, наше допущение неверно. Лемма 7 доказана.

Теперь мы можем приступить к доказательству заключительного утверждения.

**Лемма 8.** $\{\rho, M\}$ является определяющей системой для автомата $A$

**Доказательство.** Из построения автомата $A$ следует, что $[\rho, M] = \rho_A$. Из лемм 5 и 6 следует, что $M \subseteq M_A$ и $W_\rho \subseteq X^A$, а из леммы 7 следует, что для каждого состояния $a \in A$ и каждого $x \in X$, если $\delta(a, x)$ не определена , то в $M$ существует слово $px$, где $a_0 p = a$. Таким образом $\{\rho, M\}$ - определяющая система для автомата $A \in P(X)$, что доказывает теорему 3.

**Заключение.**

В работе предложено задание детерминированных, инициально-связных, частично-определенных конечных автоматов без выхода с помощью определяющей системы, показан переход от такого автомата

к определяющей системе, выведены необходимые и достаточные условия, при которых данная система является определяющей для некоторого частично-определенного конечного автомата.

Автор благодарит Грунского Игоря Сергеевича за постановку задачи и помощь в ее решении.

**РЕЗЮМЕ**

Досліджується ефективне завдання детермінованих, ініціально-зв'язних, частково-визначених, скінчених автоматів без виходу за допомогою визначаючої системи, аналогічній системі визначаючих співвідношень. Показано, що будь-який скінчений, частково-визначений автомат має принаймні одну скінчену визначальну систему. Задаються умови перевірки, чи є задана система визначальною для деякого скінченого, частково-визначеного автомата.

**SUMMARY**

It is investigated an effective presentation of finite, deterministic, partial, initial-connected automata without outputs by means of defining system which is analogous to the defining relation systems. It is shown that the automaton has a finite defining system. A characterization condition of the systems is received.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Соркин Ю.И. Теория определяющих соотношений для автоматов // Проблемы кибернетики. – 1961. – Вып.9. – С.45-69.
2. Грунский И.С., Сенченко А.С. Каноническая система определяющих соотношений для автоматов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Том 7. – С.58-63.
3. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. – М.: Наука, 1997. – 368 с.
4. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов – М.: Наука, 1985. – 320 с.

*Надійшла до редакції 25.04.2003 р.*

УДК 519.95

# ПОСТРОЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

*С.В.Сапунов*
*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк*

**Введение.**

В настоящее время все большее внимание привлекает тематика, связанная с анализом графов с помощью блуждающих по ним агентов (роботов, автоматов, поисковых программ и т. д.) [1, 2, 3]. В прикладных задачах связанных с навигацией мобильных роботов представление оперативной среды в виде графа более компактно по сравнению с метрическим или вероятностным ее представлениями [1].

Блуждающий по графу агент получает некоторую локальную информацию о графе и на ее основе и на основе априорной информации делает заключения о свойствах графа.

При этом возникают следующие фундаментальные задачи. Задача исследования графа (graph exploration [4]): требуется найти множество траекторий блуждания агента по неизвестному графу $G$, которое позволило бы на основе полученной локальной информации построить граф $\hat{G}$ изоморфный графу $G$. Задача контроля графа (graph validation [4]): требуется найти множество траекторий блуждания агента по известному графу $G$, которое позволило бы на основе полученной локальной информации отличить $G$ от всех неизоморфных ему графов.

В данной работе рассматриваются конечные связные неориентированные графы с помеченными вершинами. Траектории блуждания агента порождают последовательности меток вершин, которые и являются локальной информацией о графе. Подобный подход ранее не применялся, так как во всех известных работах рассматривалась локальная разметка ребер инцидентных каждой из вершин [3]. Автором [5] введено понятие детерминированного по меткам вершин графа и найдены верхние оценки длин траекторий, различающих вершины известного графа. В данной работе рассматривается задача контроля для детерминированных графов, предложен метод ее решения.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 приведена содержательная постановка задачи. В разделе 2 вводятся основные определения. В разделах 3 и 4 формулируются основные результаты и приводится их доказательство.

**1. Постановка задачи.**

Рассматривается задача контроля конечного связного неориентированного графа с помощью блуждающего по нему агента. Блуждание состоит в перемещениях агента по ребрам графа от вершины к вершине. При этом, находясь в вершине графа, агент считывает ее метку и метки смежных с ней вершин. Таким образом, он может определить наличие или отсутствие некоторой метки в упомянутых вершинах. Задан класс всех таких графов с числом вершин не превосходящих число вершин графа-эталона и одни и тем же множеством меток. Задача заключается в том, чтобы имея полное описание графа-эталона найти множество путей по исследуемому графу, которое позволило бы определить изоморфен граф-эталон исследуемому графу или нет.

Подобная задача изучалась для конечных автоматов Мили [6] и конечных вход - выходных автоматов [7]. Оба эти типа автоматов описываются конечными ориентированными графами, дуги которых помечены входными и (или) выходными сигналами. В [8] показана двойственность между конечными ориентированными графами с отмеченными дугами и конечными ориентированными графами с отмеченными вершинами. Показано, что они порождают регулярные языки. Эта двойственность послужила основой для решения поставленной задачи при определенных ограничениях на графы.

**2. Основные определения.**

Рассмотрим множество всех конечных, простых, помеченных, связных, инициальных, неориентированных графов. Пусть $G = (G, E, M, \mu, g_0)$ - такой граф, где $G$ – множество вершин, $E$ – множество ребер, $M$ – множество меток, $\mu : G \to M$ – сюръективная функция размечивания вершин, $g_0$ – инициальная вершина.

Множество $O(g) = E(g) \cup \{g\}$ назовем окрестностью вершины $g$. Граф $G$ назовем детерминированным если для любой вершины $g \in G$ и любых вершин $s,t \in O(g)$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$. Через $M^+$ обозначим множество всех непустых слов в алфавите $M$.

©Сапунов С.В.

Последовательность меток вершин $\mu(g_1)\ldots\mu(g_k)$, соответствующую некоторому пути $g_1\ldots g_k$ в графе $G$ назовем словом, порожденным вершиной $g_1$. Определим язык $L_g$ как множество всех слов, порожденных вершиной $g \in G$. Две вершины $g,h \in G$ назовем неотличимыми, если $L_g = L_h$. Если $g = g_0$, то назовем $L_{g_0}$ языком, порожденным графом $G$ и обозначим его $L_G$. Два графа $G$ и $H$ назовем неотличимыми если $L_G = L_H$. Ясно, что если $L_G = L_H$, то для любой вершины $h \in H$ существует неотличимая от нее вершина $g \in G$.

Все неопределяемые понятия из теории графов заимствованы из [9].

**3. Идентификаторы вершин.**

В [10] было показано, что для любых отличимых вершин $g,h \in G$ существует слово $p \in L_g \oplus L_h$ длины не больше $|G|-|M|+1$. Покажем теперь, что для любых отличимых вершин $g,h \in G$ выполняется $L_g - L_h \neq \varnothing$ и $L_h - L_g \neq \varnothing$.

Определим частичную операцию $*: G * M^+ \to G$ соотношением: для любых $g,g' \in G$, $w \in M^+$, $g * w = g'$ тогда и только тогда, когда существует путь из вершины $g$ в вершину $g'$ соответствующий слову $w$. Из определения детерминированного графа следует, что таких путей может быть не более одного.

Для непустых слов $u$, $w$ определим их композицию $u \circ w$:

$$u \circ w = \begin{cases} uw', \text{если } u = u'm, w = mw', m \in M \\ \text{не определено} \end{cases}.$$

**Теорема 1.** Пусть вершины $g,h \in G$. Если $L_g \subset L_h$, то $L_g = L_h$.

Доказательство. Пусть слово $w \in L_h$ и $w \notin L_g$.

В графе $G$ существует кратчайший путь от вершины $g$ к вершине $h$. Пусть этому пути соответствует слово $u$.

Слово $u \in L_g$ и, следовательно, $u \in L_h$.

Пусть $h * u = g$. Слово $u \circ w \in L_g$ и, следовательно, $u \circ w \in L_h$. Тогда слово $w \in L_g$, что невозможно.

Пусть $h * u \neq g$. Слово $uw \in L_g$ и, следовательно, $uw \in L_h$. Тогда слово $uuw \in L_g$ и, следовательно, $uuw \in L_h$. По индукции, $(u)^k w \in L_g$ и, следовательно, $(u)^k w \in L_h$, для любого $k \geq 1$. В силу конечности числа вершин графа, путь, соответствующий слову $(u)^k \in L_h$ зацикливается при некотором $k$.

Пусть $h * (u)^k = g$. Тогда слово $w \in L_g$, что невозможно.

Пусть $h * (u)^k = t_l$, $\left(t_l \in G, l < k, h * (u)^l = t_l\right)$. Из вершины $t_l$ исходят два различных пути, соответствующие слову $u^{-1}$, что невозможно. Следовательно, эти пути совпадают и вершина $t_{l-1}$ совпадает с вершиной $t_{k-1}$. По индукции получаем, что вершина $t_{l-i}$ совпадает с вершиной $t_{k-i}$ для любого $i \leq l$. При $i = l$ получаем, что вершина $t_0$ совпадает с вершиной $t_{k-l}$. Так как $t_0 = h$, то из вершины $h$ исходят два различных пути, соответствующие слову $u^{-1}$, что невозможно. Следовательно, эти пути совпадают и вершина $g$ совпадает с вершиной $t_{k-l-1}$. Тогда слово $w \in L_g$, что невозможно.

Следовательно $L_h \oplus L_g = \varnothing$ и $L_g = L_h$.

Теорема доказана.

**Следствие.** Для любых отличимых вершин $g,h \in G$ выполняется $L_g - L_h \neq \varnothing$ и $L_h - L_g \neq \varnothing$.

Очевидна следующая теорема.

**Теорема 2.** Для любой вершины $g \in G$ существует конечное множество слов $W_g \subseteq L_g$ такое, что для любой вершины $h \neq g$, $h \in G$, существует слово $w_h \in W_g - L_g$.

Граф $G$ назовем приведенным, если $L_g \neq L_h$ для всех $g, h \in G$, $g \neq h$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются только приведенные детерминированные графы.

Слово $w^{-1} = m_{2,1} \ldots m_{2,k}$ назовем обращением слова $w = m_{1,1} \ldots m_{1,k}$ если для любого $1 \le i \le k$ выполняется $m_{1,i} = m_{2,k-i+1}$, $m_{j,i} \in M$, $j \in \{1,2\}$. Ясно, что для детерминированного графа $G$ для любой вершины $g \in G$ результатом операции $g * \left(w \circ w^{-1}\right)$ может быть только сама вершина $g$.

Слово $w$ называется идентификатором [5] вершины $g \in G$ если для любой вершины $h \neq g$, $h \in G$, $w \in W_g - L_h$.

**Теорема 3.** Слово $w^{(g)} = w_1 \circ \left(w_1\right)^{-1} \circ w_2 \circ \left(w_2\right)^{-1} \circ \ldots \circ w_n$ является идентификатором вершины $g \in G$, где $\{w_1, \ldots, w_n\} \in W_g$ и $\left(w_i\right)^{-1}$ обращение $w_i$.

Из строения слова $w^{(g)}$ очевидно, что языку никакой другой вершины графа $G$ кроме $g$ оно не принадлежит.

**4. Контрольный эксперимент.**

Пусть $K$ – класс всех приведенных детерминированных графов с числом вершин не больше $|G|$ и множеством меток $|M|$.

Будем говорить, что графы $G$ и $H$ изоморфны и обозначать это $G \cong H$, если существует биекция $\varphi : G \to H$, для которой:

1) $\varphi(g_0) = h_0$;

2) $(g_1, g_2) \in E_G \Leftrightarrow (\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \in E_H$;

3) $\mu(g) = \mu(\varphi(g))$.

В [10] показано, что для любого $H \in K$, $L_H = L_G$ тогда и только тогда, когда $H \cong G$.

Множество $P$ конечных слов в алфавите $M$ назовем контрольным экспериментом графа $G$ относительно класса $K$ (короче, для $G$ и $K$), если для любого графа $H \in K$ и неизоморфного $G$ найдется слово $p \in P$ и $p \in L_H \oplus L_G$. Очевидно, что определение контрольного эксперимента равносильно утверждению: $P$ есть контрольный эксперимент для $G$ и $K$ если для любого $H \in K$ из $L_H \cap P = L_G \cap P$ следует $G \cong H$.

Используя определение идентификаторов вершин, построим контрольный эксперимент для $G$ и $K$. Метод построения основывается на алгоритме Хенни [11] для автоматов Мили и состоит из двух частей.

В первой части проводится контроль вершин графа с помощью слова:

$$w^{(0)} \circ T\left(g^{(0)}, g_1\right) \circ w^{(1)} \circ T\left(g^{(1)}, g_2\right) \circ \ldots \circ w^{(n-2)} \circ T\left(g^{(n-2)}, g_{n-1}\right) \circ w^{(n-1)},$$

где $w^{(i)}$ – идентификатор вершины $g_i$, $T\left(g^{(i)}, g_j\right)$ – слово, соответствующее пути из вершины $g_i$ в вершину $g_j$, $g^{(i)} = g_i * w^{(i)}$.

Во второй части проводится контроль каждого ребра с помощью слов вида:

$$T\left(g^{(j)}, g_i\right) \circ w^{(i)} \circ T\left(g^{(i)}, g_i\right) \circ w^{(i)}.$$

На основании этих рассуждений можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.** Приведенный алгоритм реализует контрольный эксперимент для $G$ и $K$.

**Заключение.**

В работе на детерминированные графы (т.е. неориентированные графы с помеченными вершинами) распространен метод Хенни построения контрольного эксперимента для конечных автоматов (т.е.

ориентированных графов с помеченными дугами). Таким образом, автоматные методы удалось распространить на значительно более общий объект.

В связи теоретической и прикладной важностью рассматриваемой задачи [8] представляет интерес распространение этих методов на графы общего вида.

Автор выражает благодарность И.С.Грунскому за постановку задачи и полезные замечания.

**РЕЗЮМЕ**

Досліджується задача контролю скінченого, зв'язного, неорієнтованого графа з відміченими вершинами за допомогою активного агенту, що блукає графом.

Запропоновано метод побудови контрольного експерименту для графу-еталону відносно класу усіх таких графів.

**SUMMARY**

The paper deals with graph validation problem i. e. checking of finite, simple, connected, undirected graphs with labeled vertices by an active agent walking on it. A graph validation procedure is proposed.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Levitt T., Lawton D.T. Qualitative navigation for mobile robot. // Artificial Intelligence, 1990. – V.40. – P.305-360.
2. Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах. Дискретная математика (1992). – Т.4. – Вып.3 – С.3-28.
3. Kuipers B. The spatial semantic hierarchy // Artificial Intelligence, 2000. – V.119. – P.191-233.
4. Dudek G., Jenkin M., Milios E., Wilkes D. Map Validation and Robot Self-Location in a Graph-Like World // Robotics and Autonomous Systems, 1997. – V.22(2). – P.159-178.
5. Сапунов С.В. Эквивалентность отмеченных графов // Труды ИПММ НАНУ, 2002. – Т.7. – С.162-167.
6. Грунский И.С., Козловский В.А., Пономаренко Г.Г. Представление конечных автоматов фрагментами поведения. – Киев: Наукова думка, 1990. – С.232.
7. Q.M. Tan, A. Petrenko, Test generation for specification modeled by input-output automata. // Testing of communicating systems Proc. Of the IFIP tc. 6 IWTTS'98, 1998. – P.83-99.
8. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М.: Наука, 1988 – 296 с.
9. Лекции по теории графов / Емеличев В.А. и др. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
10. Сапунов С.В. Контроль детерминированных графов // Труды ИПММ НАНУ, 2003. – Т.8.
11. A. Bhattacharyya, Checking experiments in sequential machines, John Wiley & Sons, 1989.

*Надійшла до редакції 24.04.2003 р.*

УДК 681.324

# СИНТЕЗ УСТРОЙСТВ УПРАВЛЕНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ НАБОРОВ МИКРООПЕРАЦИЙ В КОДЫ СОСТОЯНИЙ

*А.А.Баркалов, Эль-Джейби Ахмад Камаль, А.А.Красичков*
*Донецький національний технічний університет*

**1.Введение**

Одной из актуальных проблем, стоящих перед специалистами в области синтеза цифровых устройств, является проблема оптимизации аппаратурных затрат в схемах устройств [1]. Эта же проблема является одной из основных при синтезе схем устройств управления (УУ) цифровых систем на программируемых логических устройствах (ПЛУ) [2,3]. Практическая ценность решения этой задачи заключается в получении УУ с меньшей стоимостью, что повышает их конкурентоспособность. Пути решения этой проблемы при реализации УУ в виде микропрограммного автомата широко освещены в литературе [3,4]. Один из путей решения этой проблемы – увеличение числа уровней схемы [1], что приводит к появлению дополнительных переменных. При этом актуальным является разработка методов, приводящих к схемам с минимальным числом дополнительных переменных.

В настоящей работе рассматривается задача оптимизации УУ, представленного в виде микропрограммного автомата (МПА) Мили. Предлагаемый метод основан на преобразовании кодов микроопераций в коды состояний автомата.

**2.Постановка задачи**

Пусть (МПА) Мили задан прямой структурной таблицей (ПСТ) со столбцами [4]:

$a_m$ – исходное состояние автомата, $a_m \in A$, где $A=\{a_1,\ldots,a_M\}$ – множество состояний;

$K(a_m)$ – код состояния $a_m \in A$ разрядности $R=]\log_2 M[$, для кодирования используются внутренние переменные $T_r \in T=\{T_1,\ldots,T_R\}$;

$a_s$, $K(a_s)$ – состояние перехода и его код соответственно;

$X_h$ – входной сигнал, определяющий переход $<a_m, a_s>$ и равный конъюнкции некоторых элементов (или их отрицаний) множества логических условий $X = \{x_1,\ldots,x_L\}$;

$Y_h$ – набор микроопераций, формируемый на переходе $<a_m, a_s>$, $Y_h \subseteq Y$, где $Y=\{y_1,\ldots,y_N\}$ – множество микроопераций;

$\Phi_h$ – набор функций возбуждения памяти автомата, принимающих единое значение для ее переключения из $K(a_m)$ в $K(a_s)$, $\Phi_h \subseteq \Phi=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_r\}$;

$h = \overline{1,H}$ – номер перехода.

В этом случае МПА может быть синтезирован как одноуровневая схема (рис. 1). Здесь комбинационная схема КС формирует функции $Y=Y(T,X)$ и $\Phi=\Phi(T,X)$, получаемые из ПСТ в виде

$$y_n = \bigvee_{h=1}^{H} C_{nh} A_m^h X_h \qquad (n=1,\ldots, N), \tag{1}$$

$$\varphi_r = \bigvee_{h=1}^{H} C_{rh} A_m^h X_h \qquad (r=1,\ldots, R), \tag{2}$$

где Cnh (Crh) – булева переменная, равна единице, если и только если в h-й строке ПСТ записана функция $y_n(\varphi_r)$; $A_m^h$ – конъюнкция внутренних переменных, соответствующая коду состояния $a_m \in A$ из h-й строки ПСТ.

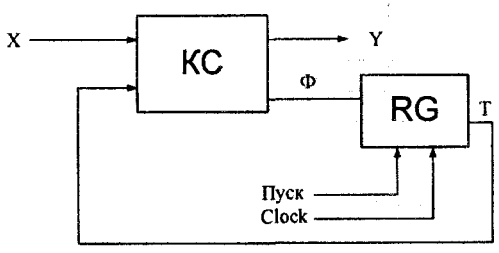



Рис. 1. Одноуровневая реализация автомата Мили.

©Баркалов А.А., Эль-Джейби Ахмад Камаль, Красичков А.А.

Память автомата реализована в виде регистра RG, имеющего информационные входы D-типа. По сигналу «Пуск» в RG записывается нулевой код начального состояния $a_1 \in A$, по сигналу «Clock» RG переключается из $K(a_m)$ в $K(a_s)$, $a_m$, $a_s \in A$.

Одноуровневая схема обладает максимальным быстродействием и, как следствие, максимальными аппаратурными затратами [3]. Пусть S – число входов ПЛУ схемы КС, $V=\{v_1,\ldots,v_Q\}$ – множество кодирующих переменных, позволяющих совместно с микрооперациями $y_n \in Y_h$ однозначно задавать код состояния $a_s \in A$, тогда при выполнении условия

$$N+Q \le S \tag{3}$$

в настоящей работе предлагается реализовать автомат Мили как YV-автомат (Рис. 2).

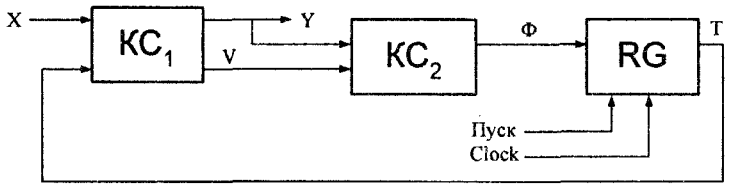



Рис. 2. Структурная схема YV-автомата Мили.

В YV-автомате схема $КС_1$ формирует функции (1) и V=V(T,X), схема $КС_2$ формирует функции возбуждения памяти МПА

$$\varphi_r = \bigvee_{h=1}^{H} C_{rh} Z_h B_h \qquad (r=1,\ldots, R), \tag{4}$$

где $Z_h$ – конъюнкция микроопераций из h-й строки ПСТ, $B_h$ – конъюнкция переменных $v_q \in V$, позволяющая совместно с набором $Y_h$ однозначно идентифицировать состояние перехода $a_s$ для h-й строки ПСТ. При выполнении условий

$$L + R > S, \tag{5}$$
$$N + R > t, \tag{6}$$
$$N + Q \le t, \tag{7}$$

где t – число выходов ПЛУ в схемах автоматов, предложенный подход позволяет значительно уменьшить аппаратурные затраты в логической схеме МПА.

**3.Метод решения задачи**

В настоящей работе предлагается методика синтеза YV-автомата, иллюстрируемая на примере синтеза автомата Мили $S_1$ (Табл. 1).

Таблица 1

Прямая структурная таблица автомата Мили $S_1$

| $a_m$ | $K(a_m)$ | $a_s$ | $K(a_s)$ | $X_h$ | $Y_h$ | $\Phi_h$ | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 00 | $a_2$ | 01 | $x_1$ | $y_1 y_2$ | $D_2$ | 1 |
| | | $a_3$ | 10 | $x_1 \bar{x}_2$ | $y_2 y_3$ | $D_1$ | 2 |
| | | $a_2$ | 01 | $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ | $y_3$ | $D_2$ | 3 |
| $a_2$ | 01 | $a_3$ | 10 | $x_3 \bar{x}_4$ | $y_1 y_2$ | $D_1$ | 4 |
| | | $a_4$ | 11 | $\bar{x}_3 \bar{x}_4$ | $y_3$ | $D_1 D_2$ | 5 |
| | | $a_2$ | 01 | $\bar{x}_3 x_5$ | $y_1 y_3$ | $D_2$ | 6 |
| | | $a_3$ | 10 | $\bar{x}_3 \bar{x}_5$ | $y_2 y_3$ | $D_1$ | 7 |
| $a_3$ | 10 | $a_4$ | 11 | $x_6$ | $y_2$ | $D_1 D_2$ | 8 |
| | | $a_1$ | 00 | $\bar{x}_6$ | $y_3$ | — | 9 |
| $a_4$ | 11 | $a_2$ | 10 | $x_7$ | $y_1 y_3$ | $D_1$ | 10 |
| | | $a_1$ | 00 | $\bar{x}_7$ | $y_3$ | — | 11 |

*Для МПА $S_1$ $X=\{x_1,\ldots,x_7\}$, $Y=\{y_1,\ldots,y_3\}$, $T=\{T1, T2\}$, $D=\{D_1, D_2\}$, $L=7$, $N=3$, $R=2$, $H=11$.*

Пусть $H_m$ – число переходов из состояния $a_m \in A$, что определяет число строк в подтаблице $m$ исходной ПСТ, задающей переходы из состояния $a_m \in A$. Предлагаемая методика синтеза включает следующие этапы:

1. Поставить в соответствие каждой подтаблице $\pi_m$ исходной ПСТ множество $P_m$ пар вида $F_m^h = \langle a_s, Yh\rangle$ где h – номер строки исходной ПСТ.

2. Закодировать пары $F_m^h \in P_m$ двоичными кодами разрядности $Q = ]\log_2 K[$,

где $K = \max(|P_1|,\ldots,|P_M|)$.

Для автомата $S_1$ существуют наборы микроопераций $Y_1=\{y_1,y_2\}$, $Y_2=\{y_2,y_3\}$, $Y_3=\{y_3\}$, $Y_4=\{y_1,y_3\}$, $Y_5=\{y_2\}$. Анализ табл. 1 показывает, что K=4, Q=2 и $V=\{v_1,v_2\}$. Для оптимизации схемы $КС_2$ закодируем пары $F_m^h$ из разных подтаблиц ПСТ, но с одинаковыми компонентами одинаковыми кодами: $F_m^i = F_s^j \rightarrow K(F_m^i) = K(F_s^j)$ где $K(F_m^i)$, $K(F_s^j)$ – коды пар $F_m^i$, $F_s^j$ соответственно $a_m$, $a_s \in A$, i, $j \in \{1,\ldots,H\}$. Результат кодирования для автомата $S_1$ показан в табл. 2.

Таблица 2

Таблица кодирования строк ПСТ автомата $S_1$

| h | m | $F_m^h$ | $K(F_m^h)$ | h | m | $F_m^h$ | $K(F_m^h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\langle a_2, y_1\rangle$ | 00 | 7 | 2 | $\langle a_3, y_2\rangle$ | 01 * |
| 2 | 1 | $\langle a_3, y_2\rangle$ | 01 * | 8 | 3 | $\langle a_4, y_5\rangle$ | 00 |
| 3 | 1 | $\langle a_2, y_3\rangle$ | 10 | 9 | 3 | $\langle a_1, y_3\rangle$ | 01 - |
| 4 | 2 | $\langle a_3, y_1\rangle$ | 00 | 10 | 4 | $\langle a_2, y_4\rangle$ | 10 |
| 5 | 2 | $\langle a_4, y_3\rangle$ | 11 | 11 | 4 | $\langle a_1, y_3\rangle$ | 01 - |
| 6 | 2 | $\langle a_2, y_4\rangle$ | 10 ** | | | | |

Согласно правилу (8) пары $F_1^2$ и $F_2^7$ закодированы одинаковыми кодами, аналогично выполняется кодирование для пар $F_2^6$, $F_4^{10}$ и $F_3^9$, $F_4^{11}$.

3. Построить преобразованную ПСТ YV-автомата, удалив из исходной ПСТ столбцы $a_s$, $K(a_s)$ и введя столбцы $K(F_m^h)$, $V_h$, используя таблицу кодирования строк ПСТ.

Для автомата $S_1$ преобразованная ПСТ приведена в табл. 3.

Таблица 3

Преобразования ПСТ YV-автомата $S_1$

| $a_m$ | $K(a_m)$ | $X_h$ | $Y_h$ | $K(F_m^h)$ | $V_h$ | $\Phi_h$ | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 00 | $\bar{x}_1$ | $y_1 y_2$ | 00 | — | $D_2$ | 1 |
| | | $\bar{x}_1 x_2$ | $y_2 y_3$ | 01 | $v2$ | $D_1$ | 2 |
| | | $x_1 x_2$ | $y_3$ | 10 | $v1$ | $D_2$ | 3 |
| $a_2$ | 01 | $x_3 \bar{x}_4$ | $y_1 y_2$ | 00 | — | $D_1$ | 4 |
| | | $x_3 x_4$ | $y_3$ | 11 | $v1\ v2$ | $D_1D_2$ | 5 |
| | | $\bar{x}_3 \bar{x}_5$ | $y_1 y_3$ | 10 | $v1$ | $D_2$ | 6 |
| | | $x_3 \bar{x}_5$ | $y_2 y_3$ | 01 | $v2$ | $D_1$ | 7 |
| $a_3$ | 10 | $\bar{x}_6$ | $y_2$ | 00 | — | $D_1D_2$ | 8 |
| | | $x_6$ | $y_3$ | 01 | $v2$ | — | 9 |
| $a_4$ | 11 | $x_7$ | $y_1 y_3$ | 10 | $v1$ | $D_1$ | 10 |
| | | $\bar{x}_7$ | $y_3$ | 01 | $v2$ | — | 11 |

4. Сформировать по преобразованной ПСТ системы функций (1), (4) и

$$v_q = \bigvee_{h=1}^{H} C_{qh} A_m^h X_h, \qquad (q=1,\ldots,Q), \tag{8}$$

где $C_{qh}$ – булева переменная, равная единице, если и только если в h-й строке таблицы записана переменная $v_q \in V$.

Для автомата $S_1$ из табл. 3 имеем, например, $y_1 = A_1x_1 \vee A_2x_4 \vee A_2x_6 \vee A_4x_{10} = \bar{T}_1\bar{T}_2x_1 \vee \bar{T}_1T_2x_3x_4 \vee \bar{T}_1T_2\bar{x}_3x_5 \vee T_1T_2x_7$; $D_1 = Z_2B_2 \vee Z_4B_4 \vee Z_5B_5 \vee Z_7B_7 \vee Z_8B_8 \vee Z_{10}B_{10} = y_2y_3\bar{v}_1v_2 \vee y_1y_2\bar{v}_1\bar{v}_2 \vee y_3v_1v_2 \vee y_2\bar{v}_1\bar{v}_2 \vee y_1y_3v_1\bar{v}_2$; $v_1 = A_1x_3 \vee A_2x_5 \vee A_2x_6 \vee A_4x_{10} = \bar{T}_1\bar{T}_2\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \vee \bar{T}_1T_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{T}_1T_2\bar{x}_3x_5 \vee T_1T_2x_7$. Отметим, что в силу кодирования (8) конъюнкции $Z_2B_2$ и $Z_7B_7$ совпа-

дают, поэтому в формуле для $D_1$ присутствует только одна из них, что сокращает число термов в функциях (4).

5. Построить логическую схему YV-автомата, используя для синтеза схемы $КС_1$ системы (1) и (8), для синтеза схемы $КС_2$ – систему (4).

Вопросы реализации схем автоматов по таблицам достаточно рассмотрены в литературе [1,2], поэтому в данной работе они не рассматриваются. Схема $КС_1$ и $КС_2$ автомата $S_1$ (Рис. 3) построены на программируемых логических интегральных схемах PAL [2].

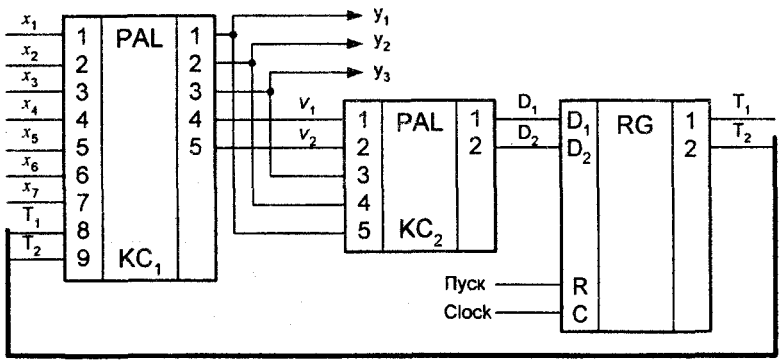



Рис. 3. Функциональная схема YV-автомата $S_1$

**4. Заключение**

В YV-автомате функции Y и V заменяют логические условия X и внутренние переменные T. Исследования авторов показали, что при выполнении условий (3) и (5)–(7) YV-автоматы требуют на 32–37 % меньше корпусов ПЛУ, чем одноуровневые схемы. Так как схема $КС_2$ не влияет на время формирования микроопераций, то это время одинаково для одноуровневой схемы и для YV-автомата. Если время такта операционного автомата превышает время срабатывания ПЛУ схемы $КС_2$, то время выполнения алгоритма управления для одноуровневой схемы и YV-автомата совпадает. Таким образом, при выполнении отмеченных условий YV-автоматы отличаются меньшими аппаратурными затратами при сохранении быстродействия одноуровневой схемы.

**РЕЗЮМЕ**

Розглянута задача оптимізації УУ, представленого у виді мікропрограмного автомату (МПА) Мілі. Пропонований метод заснований на перетворенні кодів мікроопераций у коди станів автомата. Приведено приклад синтезу мікропрограмного автомата (МПА) Мілі з запропонованою структурою.

**SUMMARY**

The method of optimization of the logic circuit of the Mealy FSM is proposed. The method is based on transformation of sets of microoperations and codes of transition subtables' rows in the excitation functions of the automaton' memory. The method and the example of synthesis of the Mealy FSM with proposed structure is given.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Баркалов А.А. Синтез устройств управления на программируемых логических устройствах. – Донецк: ДонНТУ, 2002. – 262 с.
2. Соловьёв В.В. Проектирование цифровых систем на основе программируемых логических интегральных схем. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – 626 с.
3. Баркалов А.А. Палагин А.В. Синтез микропрограммных устройств управления. – Киев: ИК НАН Украины, 1997. – 156 с.
4. Баранов С.И. Синтез микропрограммных автоматов. – Л.: Энергия, 1979. – 232 с.

*Надійшла до редакції 10.04.2003 р.*

# КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.5

## НЕРАВЕНСТВО ТИПА БЕРНШТЕЙНА И НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

*А.В.Товстолис*

Неравенство Бернштейна и неравенство разных метрик для целых функций экспоненциального типа в пространствах Лебега $L^p$ хорошо известны и являются классическими. В настоящее время пространства Харди $H^p$ стали таким же классическим объектом исследований, как и пространства $L^p$. Поэтому задача переноса классических результатов на случай пространств Харди представляется весьма актуальной. Получению аналогов указанных выше неравенств и посвящена настоящая работа.

Следуя [1, гл. III], введём следующие обозначения. Пусть $B$ – некоторое открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$. *Трубчатой областью* с основанием $B$ называют множество

$$T_B = \left\{ z \in \mathbf{C}^n, z = x + iy : x \in \mathbf{R}^n, y \in B \right\}.$$

Непустое открытое множество $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым конусом* в $\mathbf{R}^n$, если $0 \notin \Gamma$ и из того, что $x, y \in \Gamma$ и $\alpha, \beta > 0$ следует, что $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \Gamma$. *Сопряжённым к* $\Gamma$ *конусом* называется следующее множество:

$$\Gamma^* = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : (x,t) \geq 0 \; \forall t \in \Gamma \right\}.$$

Если $\Gamma^*$ имеет непустую внутренность, то он является замкнутым конусом, а конус $\Gamma$ называют *острым открытым конусом*.

Голоморфная в $T_B$ функция $f$ принадлежит *пространству Харди* $H^p(T_B)$, $p \in (0,\infty]$, если конечна следующая величина:

$$\|f\|_{H^p} := \|f\|_{H^p(T_B)} := \begin{cases} \sup_{y \in B} \left( \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}, & p \in (0,\infty), \\ \sup_{z \in T_B} |f(z)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Другими словами, $\|f\|_{H^p(T_B)} = \sup_{y \in B} \|f_y\|_p$, где $f_y(\cdot) := f(\cdot + iy)$, $y \in B$.

Далее мы рассматриваем случай, когда в качестве $B$ выступает открытый конус $\Gamma$, т.е. имеем дело с трубчатой областью над открытым конусом, что является наиболее общим кратным аналогом верхней полуплоскости.

Преобразованием Фурье функции $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ называют функцию

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{-2\pi i (\xi, t)} \, dt, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Нам понадобится определение преобразования Фурье функции из $H^p$ при $p \in (0,1]$. В одномерном случае оно, по сути, введено в [2, лемма 4] (см. также [3]). В общем случае, *преобразованием Фурье* функции $f \in H^p(T_\Gamma)$, $p \in (0,1]$, называется функция

$$\hat{f}(\xi) = e^{2\pi(\xi,\delta)} \hat{f}_\delta(\xi), \qquad \xi \in \mathbf{R}^n,$$

где $\delta \in \Gamma$ выбирается произвольно (см. [4]). Легко видеть, что $f_\delta \in L^1(\mathbf{R}^n)$ и правая часть этого равенства от $\delta$ не зависит. В случае $p = 1$ определённая таким образом функция $\hat{f}$ совпадает с классическим преобразованием Фурье предельной функции $f(x) = \lim_{\zeta \to 0, \zeta \in \Gamma} f_\zeta(x)$ (см. [1, гл. III, § 5, теорема 5.6]).

©Товстолис А.В.

Кроме того, если $f \in H^p(T_\Gamma)$ при некотором $p \in (0,1]$, то $\operatorname{supp} \hat{f} \subset \Gamma^*$ и имеет место формула обращения (см. [4]):

$$f(z) = \int_{\Gamma^*} \hat{f}(t) e^{2\pi i (z,t)}\, dt, \qquad z \in T_\Gamma. \tag{1}$$

Из этой формулы видно, что при любом $p \in (0,1]$ пространство Харди $H^p(T_\Gamma)$ содержит ненулевые функции тогда и только тогда, когда конус $\Gamma$ является острым. На самом деле такое утверждение справедливо и при $p \in (1,2]$. Для этого достаточно заметить, что если $f \in H^p(T_\Gamma)$, то $f_\delta \in H^q(T_\Gamma)$ при любых $\delta \in \Gamma$ и $q \in [p,\infty]$ и воспользоваться теоремой 3.1 из [1, гл. III, § 3].

Объектом изучения настоящей работы являются целые функции экспоненциального типа, принадлежащие ещё и пространству Харди. Следуя [1, гл. III, § 4], приведём несколько определений относящихся к теории целых функций экспоненциального типа в $\mathbf{C}^n$.

Выпуклое, компактное и симметричное относительно нуля множество $K \subset \mathbf{R}^n$ называют *симметричным телом*. Через $K^*$ обозначают *поляру* множества $K$:

$$K^* = \{t \in \mathbf{R}^n : (x,t) \le 1 \; \forall x \in K\}.$$

Положим также

$$\|z\| := \sup_{t \in K^*} |(z,t)| = \sup_{t \in K^*} |z_1 t_1 + \ldots + z_n t_n|.$$

Целая функция $f$, определённая на $\mathbf{C}^n$, является *функцией экспоненциального типа* $K$, где $K$ – симметричное тело, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся константа $A_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|f(z)| \le A_\varepsilon e^{2\pi(1+\varepsilon)\|z\|} \qquad \forall z \in \mathbf{C}^n.$$

Класс всех целых функций экспоненциального типа $K$ обозначается $\mathcal{E}(K)$.

Следующее утверждение является аналогом классического неравенства Бернштейна (см., напр., [5, гл. IV, § 4.8]).

**Теорема 1.** *Пусть $\Gamma$ – острый открытый конус в $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, $p \in (0,1]$ и $K$ – симметричное тело в $\mathbf{R}^n$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ и любого мультииндекса $k = (k_1, \ldots, k_n)$ справедливо неравенство:*

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{H^p} \le \frac{\gamma(n,p,|k|)}{(V_n(\Gamma))^{1/p-1}} \cdot \sigma^{|k|} \cdot \|f\|_{H^p}, \tag{2}$$

*где $\sigma = \max_{j=\overline{1,n}} \max_{t \in K \cap \Gamma^*} |t_j|$, $|k| = \sum_{j=1}^n k_j$, $\gamma$ – константа, зависящая только от указанных в скобках параметров, $V_n(\Gamma)$ – максимально возможный объём симплекса, который можно построить на $n$ единичных векторах, содержащихся в $\overline{\Gamma}$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее утверждение, которое интересно само по себе, несмотря на его элементарность.

**Лемма 1.** *Пусть $\Gamma$ – острый открытый конус в $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, $p \in (0,1]$ и $K$ – симметричное тело в $\mathbf{R}^n$. Тогда класс $\mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ определяется не всем множеством $K$, а только его частью $K \cap \Gamma^*$. То есть, если $K_1$ – произвольное симметричное тело в $\mathbf{R}^n$ такое, что $K_1 \cap \Gamma^* = K \cap \Gamma^*$, то классы $\mathcal{E}(K_1^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ и $\mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ совпадают и для любой функции $f \in \mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ имеет место формула обращения:*

$$f(z) = \int_{K \cap \Gamma^*} \hat{f}(t) e^{2\pi i (z,t)}\, dt, \qquad z \in T_\Gamma. \tag{3}$$

Доказательство. Если $f \in \mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$, то для любого $y \in \Gamma$ функция $f_y$ принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R}^n)$ и, очевидно, принадлежит классу $\mathcal{E}(K^*)$. В силу теоремы Пэли-Винера и формулы обращения (1), имеем $\operatorname{supp} \hat{f}_y \subset (K \cap \Gamma^*)$. Поэтому $\operatorname{supp} \hat{f} \subset (K \cap \Gamma^*)$ и, следовательно, имеет место формула обращения (3). Остальные утверждения леммы – очевидные следствия этой формулы и теоремы Пэли-Винера. ■

Доказательство Теоремы 1. В силу леммы 1, если $K \cap \Gamma^*$ имеет пустую внутренность, то функция $f$ тождественно равна нулю и неравенство (2) тривиально выполнено. Поэтому далее предполагаем, что внутренность $K \cap \Gamma^*$ не пуста. В этом случае, очевидно, что $0 < \sigma < \infty$.

Рассмотрим функцию $F(z) := f(z/\sigma)$. Легко видеть, что $F \in H^p(T_\Gamma)$ и $\|F\|_{H^p} = \sigma^{n/p} \|f\|_{H^p}$. Кроме того, $\hat{F}(t) = \sigma^n \hat{f}(\sigma t)$ для всех $t \in \mathbf{R}^n$. Ввиду леммы 1, получаем: $\operatorname{supp} \hat{F} \subset [-1,1]^n$. Таким образом,

$$F(z) = \int\limits_{[-1,1]^n \cap \Gamma^*} \hat{F}(t) e^{2\pi i (z,t)}\, dt, \qquad z \in T_\Gamma.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^{|k|} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}(z) = \int\limits_{[-1,1]^n \cap \Gamma^*} \hat{F}(t) (2\pi i)^{|k|} t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n} e^{2\pi i (z,t)}\, dt = \int\limits_{[-1,1]^n \cap \Gamma^*} \varphi_k(t) \hat{F}(t) e^{2\pi i (z,t)}\, dt, \qquad z \in T_\Gamma,$$

где $\varphi_k(t) = (2\pi i)^{|k|} t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n} g(t)$, а функция $g$ – произвольная фиксированная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$; $\operatorname{supp} g \subset [-2,2]^n$; $g(t) \equiv 1$ в $[-1,1]^n$. Существование такой функции гарантирует, например, следствие 1.26 в [6, гл. 1, § 2]. Так как функция $\varphi_k$, очевидно, принадлежит классу $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и финитна, то её преобразование Фурье принадлежит $L^p(\mathbf{R}^n)$. В силу теоремы 2 из [4], она является мультипликатором в $H^p(T_\Gamma)$ и

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{H^p} \le \frac{\gamma(n,p) 2^{n(1/p-1)}}{(V_n(\Gamma))^{1/p-1}} \cdot \|\hat{\varphi}_k\|_p \cdot \|F\|_{H^p}. \tag{4}$$

Если зафиксировать функцию $g$, то функция $\varphi_k$ определяется только мультииндексом $k$. Её выбор совершенно не зависит от функции $f$. Очевидно, что количество всевозможных мультииндексов с модулем, равным $|k|$, конечно и зависит только от $|k|$ и $n$ (грубая оценка даёт, что это число не превосходит $n!|k|!$). Таким образом, полагая $\gamma(n,p,|k|) = \gamma(n,p) 2^{n(1/p-1)} \cdot \sup_{l=(l_1,\ldots l_n),|l|=|k|} \|\hat{\varphi}_l\|_p$, из неравенства (4) получаем:

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{H^p} \le \frac{\gamma(n,p,|k|)}{(V_n(\Gamma))^{1/p-1}} \cdot \|F\|_{H^p}.$$

Возвращаясь к функции $f$, имеем:

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{H^p} = \sigma^{|k|-n/p} \cdot \left\| \frac{\partial^{|k|} F}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{H^p} \le \frac{\gamma(n,p,|k|)}{(V_n(\Gamma))^{1/p-1}} \cdot \sigma^{|k|-n/p} \cdot \|F\|_{H^p} =$$

$$= \frac{\gamma(n,p,|k|)}{(V_n(\Gamma))^{1/p-1}} \cdot \sigma^{|k|} \cdot \|f\|_{H^p}.$$

Что и требовалось доказать. ■

**Замечание.** *В случае, когда* $\Gamma = \mathbf{R}^n_+ \setminus \partial\mathbf{R}^n_+$ *– первый октант в* $\mathbf{R}^n$, *неравенство (2) может быть несколько уточнено:*

$$\left\| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{H^p} \le \gamma(n,p,|k|) \cdot \prod_{j=1}^{n} \sigma_j \cdot \|f\|_{H^p},$$

*где* $\sigma_j = \max_{t \in K \cap \mathbf{R}^n_+} |t_j|$.

Для получения этой оценки нужно повторить рассуждения доказательства теоремы 1, со следующей функцией $F$: $F(z) = F(z_1,\dots,z_n) = f(z_1/\sigma_1,\dots,z_n/\sigma_n)$.

Как известно, пространства Харди $H^p(T_\Gamma)$ и $H^q(T_\Gamma)$ не вложены друг в друга при различных $p$ и $q$. Однако, если дополнительно потребовать принадлежность функций классу $\mathcal{E}(K^*)$, то имеет место следующее неравенство разных метрик (предшествующие результаты см., напр., в [5, гл. IV, § 4.9] и [7]).

**Теорема 2.** *Пусть* $\Gamma$ *– острый открытый конус в* $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, *а* $K$ *– симметричное тело в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда если функция* $f$ *принадлежит классу* $\mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ *при некотором* $p \in (0,\infty)$, *то*

$$\|f\|_{H^p} \le \left(\frac{p}{2}+1\right)^{n(1/p-1/q)} \cdot \left(\operatorname{mes}(K \cap \Gamma^*)\right)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_{H^p} \qquad \forall q \in (p,\infty]$$

*(здесь* $\operatorname{mes} A$ *обозначает меру Лебега множества* $A$*). В частности, класс* $\mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$, $p \in (0,\infty)$, *содержит ненулевые функции тогда и только тогда, когда* $\operatorname{mes}(K \cap \Gamma^*) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $q = \infty$, $p = 2$. Если $f \in \mathcal{E}(K^*) \cap H^2(T_\Gamma)$, то, согласно теореме 3.1 из [1, гл. III, § 3],

$$f(z) = \int_{\Gamma^*} e^{2\pi i(z,t)} F(t)\,dt, \tag{5}$$

где $F$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию: $\int_{\Gamma^*} |F(t)|^2\,dt < \infty$. При этом

$$\|f\|_{H^2} = \left( \int_{\Gamma^*} |F(t)|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $f_y \in \mathcal{E}(K^*) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ при любом $y \in \Gamma$. Применяя к ней теорему Пэли-Винера, получаем, что функция $f_y(x)$ является преобразованием Фурье некоторой функции, равной нулю вне $K$. Поскольку $K$ является симметричным относительно нуля, то последнее утверждение равносильно тому, что $f_y(x)$ является обратным преобразованием Фурье некоторой функции, равной нулю вне $K$. Поэтому, с учётом (5) имеем:

$$f(x+iy) = \int_{K \cap \Gamma^*} e^{2\pi i(x,t)} e^{-2\pi(y,t)} F(t)\,dt, \qquad x \in \mathbf{R}^n, y \in \Gamma.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и унитарность оператора преобразования Фурье, получаем:

$$\|f_y\|_\infty \le \left(\operatorname{mes}(K \cap \Gamma^*)\right)^{1/2} \cdot \left( \int_{K \cap \Gamma^*} \left| e^{-2\pi(y,t)} F(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\operatorname{mes}(K \cap \Gamma^*)\right)^{1/2} \cdot \|f_y\|_2.$$

Переходя в этом неравенстве к $\sup_{y \in \Gamma}$, имеем:

$$\|f\|_{H^\infty} \le \left(\operatorname{mes}(K \cap \Gamma^*)\right)^{1/2} \cdot \|f\|_{H^2}. \tag{6}$$

Пусть теперь $p \in (0,\infty)$, $q = \infty$. Возьмём $r \in \mathbf{N}$ такое, что $p \le 2r < p+2$. Если $f \in \mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$, то функция $g(z) := f^r(z/r)$, очевидно, принадлежит классу $\mathcal{E}(K^*)$. Также очевидно, что $\forall \zeta \in \Gamma \;\; g_\zeta \in \mathcal{E}(K^*)$. Кроме того, в силу леммы 2.12 из [1, гл. III, § 2], $f_{\zeta/r} \in H^\infty(T_\Gamma)$. Поэтому $g_\zeta \in H^\infty(T_\Gamma)$. Таким образом, при любом $y \in \Gamma$ имеем:

$$\left\|g_\zeta(\cdot+iy)\right\|_2^2 = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\left|f^r\left(\frac{x}{r}+\frac{iy}{r}+\frac{i\zeta}{r}\right)\right|^2 dx = r^n \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n}\left|f\left(t+\frac{iy}{r}+\frac{i\zeta}{r}\right)\right|^{2r} dt \le$$

$$\le r^n \cdot \left\|f_{\zeta/r}(\cdot+iy)\right\|_\infty^{2r-p} \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n}\left|f\left(t+\frac{iy}{r}+\frac{i\zeta}{r}\right)\right|^p dt \le r^n \cdot \left\|f_{\zeta/r}\right\|_{H^\infty}^{2r-p} \cdot \|f\|_{H^p}^p .$$

Переходя в этом неравенстве к $\sup_{y\in\Gamma}$, получаем:

$$\|g_\zeta\|_{H^2} \le r^{n/2} \cdot \left\|f_{\zeta/r}\right\|_{H^\infty}^{r-p/2} \cdot \|f\|_{H^p}^{p/2} .$$

В силу неравенства (6), приходим к следующей оценке:

$$\|g_\zeta\|_{H^\infty} \le \left(\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right)\right)^{1/2} \cdot r^{n/2} \cdot \left\|f_{\zeta/r}\right\|_{H^\infty}^{r-p/2} \cdot \|f\|_{H^p}^{p/2} .$$

Из определения функции $g$ следует, что $\|g_\zeta\|_{H^\infty} = \left\|f_{\zeta/r}\right\|_{H^\infty}^r$. Поэтому, последнее неравенство даёт:

$$\left\|f_{\zeta/r}\right\|_{H^\infty}^{p/2} \le \left(\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right)\right)^{1/2} \cdot r^{n/2} \cdot \|f\|_{H^p}^{p/2} .$$

Возводя обе части полученного неравенства в степень $2/p$, переходя к $\sup_{\zeta\in\Gamma}$ и учитывая, что $r < p/2+1$, получаем:

$$\|f\|_{H^\infty} \le \left(\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right)\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{p}{2}+1\right)^{n/p} \cdot \|f\|_{H^p} . \qquad (7)$$

Пусть теперь $q \in (p,\infty)$. Тогда для произвольного $y \in \Gamma$ имеет место неравенство: $\|f_y\|_q^q \le \|f_y\|_\infty^{q-p} \cdot \|f_y\|_p^p$. Переходя к $\sup_{y\in\Gamma}$, получаем:

$$\|f\|_{H^q} \le \|f\|_{H^\infty}^{1-p/q} \cdot \|f\|_{H^p}^{p/q} .$$

Применяя теперь неравенство (7), имеем:

$$\|f\|_{H^q} \le \left(\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right)\right)^{1/p-1/q} \cdot \left(\frac{p}{2}+1\right)^{n(1/p-1/q)} \cdot \|f\|_{H^p} .$$

Из неравенства (7), в частности, следует, что если $f \in \mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ при некотором $p \in (0,\infty)$ и $\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right) = 0$, то $f(z) \equiv 0$ в $T_\Gamma$, а, следовательно (в силу теоремы единственности), и в $\mathbf{C}^n$. Напротив, если $\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right) > 0$, то ненулевые функции, принадлежащие классу $\mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ при некотором $p \in (0,1]$ могут быть получены с помощью формулы (3). В силу доказанного неравенства разных метрик, любая такая функция будет принадлежать пространству $H^q(T_\Gamma)$ при любом $q \in (p,\infty]$. Таким образом, условие $\mathrm{mes}\left(K \cap \Gamma^*\right) > 0$ гарантирует существование ненулевых функций в классе $\mathcal{E}(K^*) \cap H^p(T_\Gamma)$ при любом $p \in (0,\infty)$.

Тем самым, теорема доказана полностью. ■

**Замечание.** *Неравенство, обратное полученному в теореме 2, вообще говоря, неверно.*

В качестве иллюстрации рассмотрим функцию $f(z)=e^{2iz}\cdot\frac{\sin^2 z}{z^2}$. Эта функция является целой функцией экспоненциального типа $4$ и, очевидно, принадлежит пространству $H^1$ в верхней полуплоскости, но не принадлежит пространству $H^{1/2}$ в верхней полуплоскости.

**РЕЗЮМЕ**

В роботі отримано нерівність типу Бернштейна та нерівність різних метрік для цілих функцій експоненціального типу, що належать також просторам Харді в трубчастих областях над відкритими конусами. Також наведений критерій того, коли такі класи містять не лише нульову функцію.

**SUMMARY**

A Bernstein-type inequality and a different metrics inequality for entire functions of exponential type that belong to Hardy spaces in tube domains over open cones are obtained in the article. A criterion for these classes to contain not only the zero-function is derived.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
2. Fefferman C., Stein E. M. $H^p$ spaces of several variables // Acta Math. – 1972. – **129**. – P.137-193.
3. Soljanik A.A. On the order of approximation to functions of $H^p(\mathbf{R})$ $(0<p\le 1)$ by certain means of Fourier integrals // Anal. Math. – 1986. – **12**, №1. – P.59-75.
4. Tovstolis A.V. Fourier multipliers in Hardy spaces in tube domains over open cones and their applications // Methods Funct. Anal. Topology. – 1998. – **4**, № 1. – P. 68-89.
5. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматлит, 1960. – 624 с.
6. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. – М.: Мир, 1971. – 232 с.
7. Nessel R.J., Wilmes G. Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1978. – **25**, №1. – P.7-18.

*Надійшла до редакції 03.10.2003 р.*

УДК 519.21

# ОТОБРАЖЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ СОХРАНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕРЫ

*О.А.Очаковская*

Отображения, сохраняющие меру, играют важную роль в теории информации и смежных областях (см., например, [1], [2] и библиографию к ним). В данной работе изучаются подобные отображения, действующие на подмножествах гиперболической плоскости. Рассмотрим гиперболическую плоскость, реализованную в виде круга $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C} : |z|<1\}$ с гиперболическим расстоянием $d(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\bar{z}_1z_2|+|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|-|z_2-z_1|}$ между точками $z_1,z_2\in\mathbf{D}$. Группа $SU(1,1)$ состоит из комплексных матриц вида $g=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$, где $|a|^2-|b|^2=1$ и действует на $\mathbf{D}$ посредством конформных отображений $gz=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, $z\in\mathbf{D}$. Расстояние $d$ и мера $d\omega(z)=\frac{dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}$ инвариантны относительно $SU(1,1)$. Гиперболическая мера $\mu(G)$ множества $G\subset\mathbf{D}$ имеет вид $\mu(G)=\int\limits_G d\omega(z)$.

Пусть $A=\left\{a_t=\begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht\end{pmatrix}, t\in R^1\right\}$, $N=\left\{n_s=\begin{pmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is\end{pmatrix}, s\in R^1\right\}$, тогда $a_{t_1+t_2}=a_{t_1}a_{t_2}$, $n_s\cdot a_t=a_t n_{se^{2t}}$. Кроме того, всякое $z\in\mathbf{D}$ имеет вид $z=n_s a_t 0$ (см. [3] ), и мы положим $\langle z,1\rangle=t$. Пусть также $K_r(\varsigma)=\{z\in\mathbf{D}: d(z,\varsigma)\le r\}$, $K_r=K_r(0)$, $H_\alpha=\{z=n_s a_t 0 : t>\alpha, s\in\mathrm{R}^1\}$, $H_{-\infty}=\mathbf{D}$. Обозначим $N(r)$ - множество положительных нулей $\lambda$ функции

$$W_r(\lambda)=\int\limits_{K_r} e^{(i\lambda+1)\langle z,1\rangle}d\omega(z).$$

**Теорема.** *Пусть $\alpha\in[-\infty;+\infty)$, $r_1,r_2>0$ - фиксированы и $N(r_1)\bigcap N(r_2)=\varnothing$. Пусть также инъективное непрерывно дифференцируемое отображение $F : H_\alpha \to \mathbf{D}$ с не равным нулю якобианом удовлетворяет следующим условиям*

1) $\mu(F(K_\eta(\varsigma)))=\mu(K_\eta(\varsigma))$ *для всех* $K_\eta(\varsigma)\subset H_\alpha$;

2) *существует* $\nu_1>\alpha+r_2$ *такое, что для любого* $k\in\mathbf{Z}_+$ *и почти всех* $\xi>\nu_1$ *выполнено*

$$M_k(\xi)=\int\limits_{\Gamma_\xi}\frac{|m(F(K_{r_2}(\varsigma)))-m(K_{r_2}(\varsigma))|\cdot|d\varsigma|}{(1-|\varsigma|^2)^{\frac{k}{2}+1}}<\infty$$

*и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\inf\limits_{q\ge m}(M_q(\xi))^{1/q}}=\infty$;

3) *существует* $\nu_2>\alpha+r_2$ *такое, что для любого* $k\in\mathbf{Z}_+$

$$\varlimsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\iint\limits_{H_{\nu_2}\setminus H_T}\frac{|\,m(F(K_{r_2}(\varsigma)))-m(K_{r_2}(\varsigma))\,|\,e^{(k+1)\langle\varsigma,1\rangle}}{(1-|\varsigma|^2)^{k/2}}d\omega(\varsigma)=0.$$

Тогда $\mu(G)=\mu(F(G))$ для любого измеримого $G\subset H_\alpha$.

Для доказательства теоремы установим следующее вспомогательное утверждение.

©Очаковская О.А.

**Лемма.** *Пусть* $\alpha \in [-\infty;+\infty)$, $r>0$ *фиксированы,* $f \in L_{loc}(H_\alpha)$ *и выполнены следующие условия:*

1) $\int\limits_{K_r(z)} f(\zeta)d\omega(\zeta)=0$ *для всех* $K_r(z)\subset H_\alpha$;

2) *существует* $\nu_1>\alpha$ *такое, что для любого* $k\in \mathbf{Z}_+$ *и почти всех* $\xi>\nu_1$ *выполнено*

$$M_k(\xi)=\int\limits_{\Gamma_\xi}\frac{|f(\zeta)|\cdot|d\zeta|}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}}<\infty$$

*и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\inf\limits_{q\ge m}(M_q(\xi))^{1/q}}=\infty$;

3) *существует* $\nu_2>\alpha$ *такое, что для любого* $k\in \mathbf{Z}_+$

$$\varlimsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\iint\limits_{H_{\nu_2}\setminus H_T}\frac{|f(\zeta)|\cdot e^{(k+1)\langle\zeta,1\rangle}}{(1-|\zeta|^2)^{k/2}}d\omega(\zeta)=0.$$

Тогда $f=0$ в $H_\alpha$.

Доказательство. Пусть $g=n_\sigma a_\tau$. Тогда условие $gK_r\subset H_\alpha$ эквивалентно тому, что $\tau>r+\alpha$. Если $z=n_s a_t 0$, то $gz=n_{\sigma+se^{2\tau}}a_{\tau+t}0$ и мы положим $f(gz)=h(\sigma+se^{2\tau},\tau+t)$. Условие 1) леммы принимает вид

$$\int\limits_{K_r^*}h(\sigma+se^{2\tau},\tau+t)e^{-2t}\,ds\,dt=0,\ \sigma\in\mathrm{R}^1,\quad \tau>r+\alpha, \tag{1}$$

где $K_r^*=\{(s,t): n_s a_t 0\in K_r\}$.

Далее считаем $\tau>r+\nu$, где $\nu=\max\{\nu_1,\nu_2\}$. Умножая (1) на $e^{i\lambda\sigma}$, где $\lambda\in\mathrm{R}^1$ и интегрируя по $\sigma$ на $\mathrm{R}^1$, после преобразований находим

$$\int\limits_{-r}^{r}Q_\lambda(\tau+t)e^{-2t}\frac{\sin(\lambda e^{2\tau}x(t))}{\lambda e^{2\tau}}dt=0, \tag{2}$$

где $\tau>r+\nu$, $x(t)=e^t chr\sqrt{th^2r\,ch^2t-sh^2t}$, $Q_\lambda(\xi)=\int\limits_{R^1}h(u,\xi)e^{i\lambda u}du$.

Из теории Данжуа-Карлемана [4] и условия 2) леммы следует квазианалитичность $Q_\lambda(\xi)$ по переменной $\lambda$ при почти всех $\xi\in(\nu,+\infty)$. Далее, при $\lambda\to 0$ уравнение (2) переходит в уравнение свертки относительно неизвестной функции $Q_0$. Используя лемму 4 из [5] и третье условие леммы, заключаем, что $Q_0(\xi)=0$ для почти всех $\xi\in(\nu,+\infty)$. Отсюда и из (2) индукцией по $k=0,1,...$ получаем $\left.\frac{\partial^k Q_\lambda(\xi)}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=0}=0$ для почти всех $\xi\in(\nu,+\infty)$ и всех $k$. В силу квазианалитичности $Q_\lambda$ имеем $Q_\lambda(\xi)=0$ для почти всех $\lambda\in\mathrm{R}^1$, $\xi\in(\nu,+\infty)$. Отсюда и из определения $Q_\lambda$ и $h$ получаем $f=0$ в $H_\nu$. По теореме единственности [6] отсюда и из условия 1) леммы имеем $f=0$ в $H_\alpha$.

Перейдем к доказательству теоремы. Положим $u(z)=\frac{|J(F,z)|(1-|z|^2)^2}{(1-|F(z)|^2)^2}-1$, $v(\zeta)=\int\limits_{K_{r_2}(\zeta)}u(z)d\omega(z)$, где $\zeta\in H_{\alpha+r_2}$ и $J(F,z)$- якобиан отображения $F$. С учетом того, что

$\mu(F(G)) = \int\limits_G \frac{|J(F,z)|\,dx\,dy}{(1-|F(z)|^2)^2}$, условие 1) теоремы примет вид $\int\limits_{K_{r_1}(z)} u(\varsigma)\,d\omega(\varsigma) = 0$ для всех $K_{r_1}(z) \subset H_\alpha$. Из определения $v$ заключаем, что функция $v$ удовлетворяет условиям леммы при $r = r_1$ и $H_{\alpha+r_2}$ вместо $H_\alpha$. Согласно лемме, функция $u$ имеет нулевые интегралы относительно меры $d\omega$ по всем гиперболическим кругам с радиусами $r_1, r_2$, содержащимся в $H_\alpha$. Так как $N(r_1) \bigcap N(r_2) = \emptyset$, то по теореме о двух радиусах [6] $u = 0$ в $H_\alpha$. Это означает, что $\mu(F(G)) = \mu(G)$ для любого измеримого $G \subset H_\alpha$ и теорема доказана.

**РЕЗЮМЕ**

Робота присвячена задачі зберігання гіперболічної міри за більш слабкими умовами її зберігання та деяких множинах кіл на гіперболічній площині. Показано, що зберігання міри має місце, якщо множина кіл є інваріантною відносно групи конформних перетворень.

**SUMMARY**

This paper is devoted to the problem of preserving of hyperbolic measure under some conditions which provide such preserving on certain sets of hyperbolic disks. We show that such preserving of measure holds for conformal invariant set of disks.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. – М.: Мир, 1969. – 238 с.
2. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
3. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 736 с.
4. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – Т.1. – Теория распределений и анализ Фурье. – М.: Мир, 1986.
5. Очаковская О.А. О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т.10. – №3. – С.493-501.
6. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Известия РАН. – 2001. – Т.65. – №2. – С.3-26.

*Надійшла до редакції 21.01.2003 р.*