УДК 531.38

Мазнев А.В., к.ф.-м.н, доц.

Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом в обобщенной задаче динамики

Исследованы условия существования регулярных прецессий гиростата в предположении, что гиростатический момент зависит от времени. Получено новое решение уравнений Кирхгофа-Пуассона, которое обобщает решение задачи о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Ключові слова: гіростат, гіростатичний момент, регулярна прецесія.

O.V.Maznyev, cand. phys. and math. sc., Associate Prof.

Regular precessions of gyrostat with a variable gyrostatic moment in the generalized task of dynamics

The existence terms of regular gyrostat precessions in case that a gyrostatic moment depends on time are investigated. The new decision of Kirkhgoff -Poisson's equalizations is discovered. It generalizes the decision of a problem on heavy gyrostat movement with a variable gyrostatic moment.

KeyWorld: gyrostat, gyrostatic moment, regular precession.

E-mail: maznev_av@rambler.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Мелешко В.В.

Введение. Многие конструкции современной техники (роботы, ракеты, космические и навигационные приборы и другие) совершают регулярные прецессии. Эти движения характеризуются рядом свойств: угол между осью симметрии тела и некоторой, неподвижной в пространстве осью, постоянен; скорости собственного вращения тела и прецессии не зависит от времени. Обзор основных теоретических результатов, полученных в случае постоянства гиростатического момента, приведен в книге [4].

Уравнения движения гиростата и системы гиростатов, указанные П.В. Харламовым [5], могут быть использованы и в случае, когда величина гиростатического момента зависит от времени. В работах [1,2,3], в предположении переменности гиростатического момента, рассмотрены условия существования простейших классов прецессионных движений в задаче о движении тела в поле силы тяжести.

В данной работе исследованы условия существования регулярных прецессий в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями Кирхгофа-Пуассона [6]. Указано новое решение данных уравнений, описывающее регулярную прецессию несимметричного гиростата относительно вертикали.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [8]. Потенциальные силы обусловлены взаимодействием намагниченного и наэлектризованного гиростата с магнитным и электрическими полями и ньютоновским притяжением гиростата неподвижным центром. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся электрические заряды. Предполагаем, что гиростатический момент зависит от времени, а роторы не намагничены и свободны от электрических зарядов. Тогда уравнения движения гиростата можно записать в виде [5,8]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - \dot{\lambda}(\mathrm{t})\boldsymbol{\alpha} - \lambda(\mathrm{t})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий ось симметрии силовых полей, на которой лежат центры кулоновского и ньютоновского притяжений; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с обобщенным вектором центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными означает относительную производную по времени.

Уравнения (1),(2) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1,\quad (A\boldsymbol{\omega}+\lambda(t)\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k, \tag{3}$$

здесь k – произвольная постоянная.

Пусть $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом. Тогда регулярную прецессию гиростата можно охарактеризовать инвариантными соотношениями [4]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=a_0,\quad \boldsymbol{\omega}=n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где $a_0=\cos\theta_0$, θ_0 – постоянный угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$, а m и n – постоянные, характеризующие скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Третью ось подвижной системы координат свяжем с вектором $\boldsymbol{a}$ таким образом, чтобы он в этой системе имел координаты $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$. Первому соотношению из (3) и уравнению Пуассона (2) удовлетворим, положив [4]

$$\nu_1=a_0'\sin nt,\quad \nu_2=a_0'\cos nt,\quad \nu_3=a_0. \tag{5}$$

В формулах (5) $a_0'=\sqrt{1-a_0^2}=\sin\theta_0$.

Внесем выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (4) в уравнение (1) и с учетом (2) рассмотрим проекции полученного векторного равенства на независимые векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}$

$$\alpha_3\dot\lambda(t)=a_0'm\alpha_1\lambda(t)\cos nt+F_1(t), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&(a_0'\alpha_1\sin nt+a_0\alpha_3)\dot\lambda(t)=-a_0'n\alpha_1\lambda(t)\cos nt+\\&+F_2(t),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&a_0'\alpha_1\cos nt\cdot\dot\lambda(t)=a_0'[\alpha_1(n+a_0m)\sin nt-\\&-a_0'\alpha_3 m]\lambda(t)+F_3(t),\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}&F_1(t)=P_2'\sin 2nt-P_2\cos 2nt-P_1'\sin nt+\\&+P_1\cos nt,\\&F_2(t)=Q_2\cos 2nt-Q_2'\sin 2nt-Q_1\cos nt+\\&+Q_1'\sin nt,\\&F_3(t)=-R_2\cos 2nt-R_2'\sin 2nt+R_1\cos nt+\\&+R_1'\sin nt-R_0.\end{aligned} \tag{9}$$

В уравнениях (6)-(9) положено, что $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,0,\alpha_3)$. Данного векторного равенства можно добиться поворотом подвижной системы координат вокруг третьей оси.

В соотношениях (9) введены обозначения

$$\begin{aligned}&P_2=a_0'^2(C_{12}+mB_{12}-m^2A_{12}),\\&P_2'=\frac{a_0'^2}{2}\big[C_{22}-C_{11}+m(B_{22}-B_{11})-\\&-m^2(A_{22}-A_{11})\big],\\&P_1=a_0'\left[s_1-a_0(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13})\right],\\&P_1'=a_0'\left[s_2-a_0(C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23})\right],\\&Q_2=a_0'^2n(B_{12}-2mA_{12}),\\&Q_2'=\frac{a_0'^2n}{2}\big[B_{22}-B_{11}-2m(A_{22}-A_{11})\big],\\&Q_1=a_0'n\big[(n+2a_0m)A_{13}-a_0B_{13}\big],\\&Q_1'=a_0'n\big[(n+2a_0m)A_{23}-a_0B_{23}\big],\\&R_2=a_0P_2'+Q_2',\quad R_2'=a_0P_2+Q_2,\\&R_1=a_0(P_1'+Q_1')+a_0'^2(C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23}),\\&R_1'=a_0(P_1+Q_1)+a_0'^2(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13}),\\&R_0=a_0'^2\Big\{s_3+\frac{a_0}{2}\big[C_{11}+C_{22}-2C_{33}+\\&+m(B_{11}+B_{22}-2B_{33})-m^2(A_{11}+A_{22}-2A_{33})\big]+\\&+\frac{n}{2}(B_{11}+B_{22})+mnA_{33}\Big\}=0.\end{aligned} \tag{10}$$

В статье [1] рассмотрен случай $B_{ij}=0,\quad C_{ij}=0\quad (i,j=\overline{1,3})$. Здесь будем изучать условия существования решения $\lambda(t)\neq const$ системы(6)-(8) в предположении, что ни одна из величин α_1,α_3 не равна нулю. То есть считаем: $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}\neq 0,\quad \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$.

Условия существования регулярных прецессий. Уравнение (7) позволяет найти функцию $\lambda(t)$

$$\begin{aligned}&\lambda(t)=\frac{1}{2n(a_0'\alpha_1\sin nt+a_0\alpha_3)}(Q_2\sin 2nt+\\&+Q_2'\cos 2nt-2Q_1\sin nt-2Q_1'\cos nt+2nQ_0),\end{aligned} \tag{11}$$

где Q_0 – произвольная постоянная.

Для определения условий существования прецессий необходимо подставить выражение (11) в уравнения (6),(8) и потребовать, чтобы полученные равенства были тождествами по t. Тогда получим систему алгебраических уравнений на параметры задачи. Выпишем ряд из них

$$2C_{12}+mB_{12}=0,\quad 2(C_{22}-C_{11})+ +m(B_{22}-B_{11})=0, \tag{12}$$

$$\alpha_1(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13})-\alpha_3[C_{22}-C_{11}+ +m^2(A_{22}-A_{11})]=0, \tag{13}$$

$$\alpha_1(C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23})+ +2\alpha_3(C_{12}+m^2A_{12})=0, \tag{14}$$

$$ms_1=(n+2a_0m)C_{13}+m(n+a_0m)B_{13},\quad ms_2=(n+2a_0m)C_{23}+m(n+a_0m)B_{23}, \tag{15}$$

$$a_0C_{23}+m(n+a_0m)A_{23}=0, \tag{16}$$

$$a_0'^2\alpha_1^2(C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23})- -2a_0\alpha_3[a_0C_{23}+m(n+a_0m)A_{13}]=0. \tag{17}$$

$$\begin{gathered}a_0^2(C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23})-\\ -2A_{23}(n+a_0m)^2=0,\\ a_0^2\alpha_3^2(n+a_0m)C_{23}-a_0'^2a_0\alpha_1^2m^2B_{23}+\\ +mA_{23}[a_0'^2\alpha_1^2m(n+2a_0m)+\\ +a_0\alpha_3^2(n+a_0m)^2]=0,\end{gathered} \tag{18}$$

Существенным условием, влияющим на дальнейшие вычисления, является равенство (16). В силу него из (14),(15),(17) и предположения $\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_3\neq 0$ вытекают равенства

$$C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23}=0,\quad a_0B_{23}- -(n+2a_0m)A_{23}=0,\quad s_2=0. \tag{19}$$

$$C_{12}+m^2A_{12}=0. \tag{20}$$

Из соотношений (18) и в силу первых двух равенств, входящих в систему (19) получим

$$A_{23}=0,\quad a_0B_{23}=0,\quad a_0C_{23}=0. \tag{21}$$

Пусть в (21) $a_0=0$ $(\theta_0=\frac{\pi}{2})$. Тогда исследование условий существования прецессий значительно упрощается. Действительно, если $a_0=0$, то знаменатель формулы (11) при $t=\frac{\pi k}{n}$ $(k\in N)$ обращается в нуль. Это значит, что для сохранения свойства ограниченности функции $\lambda(t)$ из (11) необходимо потребовать, чтобы при этих значениях t и числитель её обращался в нуль. Тогда функция $\lambda(t)$ примет вид

$$\lambda(t)=\kappa_1\sin nt+\kappa_0. \tag{22}$$

Как видно из (22) функция $\lambda(t)$ линейна по $\sin nt$, что позволяет использовать непосредственно уравнения (6)-(8) и получить следующие условия существования прецессий (4),(5)

$$\begin{gathered}a_0=0,\ s_2=0,\ A_{23}=0,\ C_{23}=-mB_{23},\\ B_{12}=2mA_{12},\ C_{12}=-m^2A_{12},\\ 2(C_{22}-C_{11})+m(B_{22}-B_{11})=0,\\ ms_1=n(C_{13}+mB_{13}),\\ s_3\alpha_1+\frac{n\alpha_1}{2}(B_{22}+B_{11})+\alpha_1 mnA_{33}-\\ -\alpha_3mnA_{13}=0,\quad 2\alpha_1(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13})-\\ -\alpha_3m\left[2m(A_{22}-A_{11})-(B_{22}-B_{11})\right]=0,\\ \kappa_1=\frac{1}{2\alpha_1}\left[2m(A_{22}-A_{11})-(B_{22}-B_{11})\right],\\ \kappa_0=-\frac{nA_{13}}{\alpha_1}.\end{gathered} \tag{23}$$

Если движение гиростата происходит только под действием силы тяжести, то есть $C_{ij}=0, B_{ij}=0$ $(i,j=\overline{1,3})$ то из (23) следует

$$\begin{gathered}a_0=0,\quad s_1=0,\quad s_2=0,\quad A_{12}=0,\\ A_{23}=0,\quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=-\frac{A_{13}}{A_{22}-A_{11}},\\ s_3\alpha_1+mn(\alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13})=0,\\ \lambda(t)=\frac{m}{\alpha_1}(A_{22}-A_{11})\sin nt-\frac{nA_{13}}{\alpha_1}.\end{gathered} \tag{24}$$

Из равенств (24) вытекает, что вектор $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки; вектор $\boldsymbol{s}$ коллинеарен оси собственного вращения, которая не может быть перпендикулярна круговому сечению эллипсоида инерции [6]; $\lambda(t)$ – тригонометрический многочлен первого порядка по $\sin nt$.

Пусть $a_0\neq 0$. Тогда из (21) следует, что $B_{23}=0,\ C_{23}=0$. Анализ системы алгебраических равенств на параметры задачи позволяет определить величины R_0 и Q_0. Тогда формула (11) значительно упрощается

$$\lambda(t)=\lambda_1\sin nt+\lambda_0, \tag{25}$$

где

$$\lambda_1=\frac{a_0'(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13})}{m\alpha_3},\qquad \lambda_0=-\frac{a_0C_{13}+m(n+a_0m)A_{13}}{m\alpha_1}. \tag{26}$$

Выпишем в случае $a_0\neq 0$ все условия существования прецессии гиростата, учитывая обозначения (10) и равенства (12)-(15),(19)-(21)

$$\begin{gathered}s_2=0,\quad C_{12}=-m^2A_{12},\quad B_{12}=2mA_{12},\\ C_{22}-C_{11}=\frac{m}{2}(B_{11}-B_{22}),\\ A_{23}=0,\quad B_{23}=0,\quad C_{23}=0,\\ s_1=\frac{1}{m}\left[(n+2a_0m)C_{13}+m(n+a_0m)B_{13}\right],\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\alpha_1(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13})-\\ -\alpha_3\left[C_{22}-C_{11}+m^2(A_{22}-A_{11})\right]=0,\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}2\alpha_1\alpha_3\left\{s_3+\frac{a_0}{2}\left[C_{11}+C_{22}-2C_{33}+\right.\right.\\ +m(B_{11}+B_{22}-2B_{33})-\\ \left.-m^2(A_{11}+A_{22}-2A_{33})\right]+\\ \left.+\frac{n}{2}(B_{11}+B_{22})+mnA_{33}\right\}-\\ -a_0\alpha_1^2(C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13})-\\ -2\alpha_3^2\left[a_0C_{13}+m(n+a_0m)A_{13}\right]=0.\end{gathered} \tag{29}$$

Поскольку $\alpha_1^2+\alpha_3^2=1,$ то это условие и условие (28) можно рассматривать, как уравнения для определения α_1,α_3. Во втором, третьем, четвертом уравнениях системы (27) параметр m можно считать свободным. Тогда восьмое уравнение системы (27) может служить для определения параметра n. Условие (29) связывает все параметры задачи и может интерпретироваться, как условие на s_3 (значение этого параметра не ограничено физическими условиями задачи, описываемой уравнениями (1),(2)).

Пусть в системе (27)-(29) $C_{ij}=0, B_{ij}=0\ (i,j=\overline{1,3}).$ Тогда из неё получим

$$\begin{gathered}s_1=0,\quad s_2=0,\quad A_{12}=0,\quad A_{23}=0,\\ \frac{\alpha_3}{\alpha_1}=-\frac{A_{13}}{A_{22}-A_{11}},\\ \alpha_1^2\left[s_3-a_0m^2(A_{22}-A_{33})+mnA_{33}\right]+\\ +\alpha_3^2m(n+a_0m)(A_{22}-A_{11})=0.\end{gathered} \tag{30}$$

Очевидно для классического варианта ($C_{ij}=0, B_{ij}=0$) условия существования прецессии для случаев $a_0=0$ и $a_0\neq 0$ можно объединить, представив в виде (30). Однако в обобщенной задаче (1),(2) указанные варианты целесообразно рассматривать в виде (23); (27)-(29).

Таким образом, получены условия существования регулярных прецессий (4),(5) в задаче (1),(2). При этом возникают два варианта. В первом варианте $\theta_0=\frac{\pi}{2}$ и выполняются условия (23), из которых следует, что вектора $\boldsymbol{a},\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{s}$ не лежат в главной плоскости эллипсоида инерции. Во втором варианте $a_0\neq 0$ и элементы матриц A,B,C с индексами два и три равны нулю. Для классического варианта имеем условия (30). Отметим, что во всех рассмотренных выше случаях регулярной прецессии функция $\lambda(t)$ является тригонометрическим многочленом первой степени.

Особый интерес представляет вариант, когда равенства (27)-(29) выполняются для всех значений параметров m и n. Рассмотрим первый случай, когда параметр m принимает произвольные значения, а параметр n фиксирован. Тогда получим следующие условия

$$\begin{gathered}A_{12}=0,\quad A_{23}=0,\quad B_{12}=0,\quad B_{13}=0,\\ B_{23}=0,\ B_{22}=B_{11},\ C_{12}=0,\ C_{13}=0,\\ C_{23}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad \alpha_1A_{13}+\\ +\alpha_3(A_{22}-A_{11})=0,\ a_0(A_{22}-A_{33})=0,\\ n\left[A_{13}^2+A_{33}(A_{22}-A_{11})\right]+\\ +a_0(B_{11}-B_{33})=0,\quad s_1=0,\ s_2=0,\\ s_3+a_0(C_{11}-C_{33})+nB_{11}=0.\end{gathered} \tag{31}$$

Предположим, что в системе (31) $a_0=0.$ Тогда из системы (31) следует, что

$$A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}), \quad s_3 + nB_{11} = 0. \qquad (32)$$

Если принять во внимание условие $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{a}$, вытекающее из (31), то первое равенство из (32) означает, что центр масс гиростата лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида. То есть первое условие из (32) описывает условие Гесса [7]. Полученное свойство существенно отличается от свойств регулярной прецессии в случае постоянного по величине гиростатического момента.

Пусть в системе (31) $a_0 \neq 0$. Тогда должно выполняться условие $A_{33} = A_{22}$. Оно не отражается на структуре оставшихся равенств из (31).

Предположим теперь, что в системе (27)-(29) параметр n принимает произвольные значения, а параметр m фиксирован. Тогда, требуя чтобы условия на s_1 и s_3 из (27),(29) выполнялись для любых n, получим

$$\begin{aligned} &s_1 = -a_0 m B_{13}, \quad C_{13} + mB_{13} = 0, \\ &\alpha_1(B_{11} + B_{22} + 2mA_{33}) - 2\alpha_3 m A_{13} = 0, \\ &\alpha_1\alpha_3\{2s_3 + a_0[C_{11} + C_{22} - 2C_{33} + \\ &+m(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}) - \\ &-m^2(A_{11} + A_{22} - 2A_{33})]\} + \\ &+a_0\alpha_1^2 m^2 A_{13} - 2\alpha_3^2 m(a_0 m A_{13} - B_{13}) = 0. \end{aligned} \qquad (33)$$

Следовательно, для нахождения условий существования регулярных прецессий в случае произвольных значений n следует в системе (27)-(29) условия на s_1 и s_3 заменить условиями (33).

Пусть в последнем равенстве из (30) n принимает произвольные значения. Тогда в дополнение к первым пяти равенствам из (30) имеют место условия

$$A_{13}^2 + A_{33}(A_{22} - A_{11}) = 0, \quad s_3 = a_0^2 m^2 A_{22}. \qquad (34)$$

Из (34) следует, что $a_0 \neq 0$ и первое условие из (34) повторяет условие Гесса.

В силу (4),(5) в скалярной форме решение уравнений (1),(2), описывающее регулярную прецессию с переменным гиростатическим моментом таково

$$\begin{aligned} &\omega_1 = m\sin\theta_0 \sin nt, \quad \omega_2 = m\sin\theta_0 \cos nt, \\ &\omega_3 = n + m\cos\theta_0, \\ &\nu_1 = \sin\theta_0 \sin nt, \quad \nu_2 = \sin\theta_0 \cos nt, \\ &\nu_3 = \cos\theta_0, \end{aligned} \qquad (35)$$

где θ_0, m, n – постоянные параметры.

Вывод. В статье изучены условия существования прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. В предположении, что $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$ получено новое решение уравнений Кирхгоффа-Пуассона, которое обобщает решение [1] и может быть охарактеризовано регулярной прецессией гиростата относительно вертикали.

Список використаних джерел

1. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. 19. – С. 30-35.

2. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.

3. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.

4. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк. 2009.

5. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.

6. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico// Ann. Mat. Pura et Appl. – 1947. – V.4, 26, f. 3-4. – P. 271-281.

7. *Hes W.* Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann.– 1890.– B.37, H. 2.– S. 153–181.

8. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations// J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V.5, № 5. – P. 742-745

Надійшла до редакції 15.02.2011

.

Донецкий национальный университет.