УДК 531.38

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

А.В. Мазнев

Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил[6] в случае переменного гиростатического момента[13]. Для класса прецессионных движений гиростата[6] указана редукция шести уравнений Кирхгофа-Пуассона к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве примера исследованы условия маятниковых движений гиростата. Проведен сравнительный анализ полученных результатов и результатов статьи[3].

Введение. Динамика твердого тела с неподвижной точкой развивалась в нескольких направлениях, которые связаны с механической моделью, со свойствами действующих сил и другими характеристиками свойств движения. Ж. Даламбер, Л. Эйлер, С.В. Ковалевская и другие ученые изучали движение твердого тела под действием силы тяжести. Обзор основных результатов, полученных в динамике твердого тела, изложен в книге[5].

Усложнение механической модели связано в первую очередь с тем, что в твердом теле рассматривается система симметричных твердых тел, которые закреплены на этом теле неподвижной осью. Наиболее общая модель такой системы (гиростата) рассмотрена П.В. Харламовым[13], который получил и уравнения движения под действием известных сил и моментов. Однако для простейших вариантов и в несколько других постановках уравнения движения гиростата рассматривали Н.Е. Жуковский[8] и В. Вольтера[15]. Интерес последних исследований состоял в том, что центр масс носимого тела совпадал с неподвижной точкой, а в уравнениях Эйлера-Пуассона появились линейные по компонентам угловой скорости слагаемые. Последнее обстоятельство существенно усложнило интегральные уравнения Н.Е. Жуковского–В. Вольтера[15].

При изучении задач динамики твердого тела значительное место отводилось исследованию равномерных и маятниковых движений твердого тела и гиростата.

Равномерные движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой изучал О. Штауде[14], маятниковые движения – Б.К. Млодзеевский[11]. Множество осей равномерных вращений тяжелого твердого тела можно описать конусом О. Штауде[14]. Свойства маятниковых вращений, которые установил Б.К. Млодзеевский[11], характеризуются условиями горизонтальности оси вращения и принадлежности центра масс главной плоскости эллипсоида инерции.

П.В. Харламов[12] рассмотрел равномерные движения гиростата относительно вертикали. Он получил уравнение, описывающее множество осей равномерных вращений гиростата, и значение угловой скорости равномерного вращения. А.М. Ковалев[9] изучил направляющую линию осей равномерных движений в этой задаче. В работах[12,9] предполагалось, что гиростатический момент постоянен в системе координат, связанной с гиростатом.

Поскольку равномерные вращения гиростата в классических задачах о движении тяжелого твердого тела и движении тяжелого гиростата могут происходить только вокруг вертикали, то доказательство существования равномерных вращений гиростата (с постоянным гиростатическим моментом) вокруг наклонной оси в обобщенной задаче[1,4] представляет значительный интерес.

Как показано в работах[7,10] осуществить равномерное движение тяжелого гиростата можно с помощью маховиков, которые обеспечивают переменность гиростатического момента по вертикали. В работе[13] для случая переменного гиростатического момента сохраняется определение «гиростат». Поэтому, как и в [2,3], в данной работе будем использовать этот термин.

Важным направлением в динамике твердого тела служит рассмотрение обобщенных задач[5]. Например, большой интерес представляет исследование движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые описываются уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона[5,16].

Данная работа посвящена исследованию условий существования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом в случае, когда на гиростат действуют специальные потенциальные и гироскопические силы.

Отметим, что прецессионные движения (движения, при которых постоянен угол между осями, одна из которых фиксирована в гиростате, а другая – в неподвижном пространстве) имеют определенное значение для приложений. В анализе этих движений в задачах динамики твердого тела получены многочисленные результаты[6]. Однако при этом предполагалось, что гиростатический момент постоянен. В данной работе указан метод исследования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом, который является обобщением метода[6].

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему – гиростат[13] (систему тел $S_0, S_1, ..., S_n$, в которой S_0 – тело-носитель произвольное по распределению масс, тела S_i $(i = \overline{1,n})$ – закреплены на S_0 осями l_i с центрами масс на l_i и имеют симметричную форму). Момент количества движения гиростата выражается формулой: $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела-носителя; A – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\alpha}$ – неизменный в теле S_0 единичный вектор; $\lambda(t)$ – дифференцируемая функция времени t. Отметим, что $\lambda(t)$ зависит от способа движения тел $S_1, ..., S_n$. Пусть гиростат намагничен, несет на себе электрические заряды и находится под действием электромагнитных, магнитных, ньютоновских, лоренцевых сил. Предполагаем, что тела $S_1, ..., S_n$ не намагничены и не наэлектризованы и токи Фуко отсутствуют. Тогда уравнения движения гиростата можно записать в виде[5,13,16]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} - \dot{\lambda}(\mathrm{t})\boldsymbol{\alpha} - \lambda(\mathrm{t})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \qquad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad (2)$$

В уравнениях (1),(2) введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость S_0; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; A – тензор инерции гиростата с компонентами A_{ij} [13]; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с S_0; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = \left(B_{ij}\right)$, $C = \left(C_{ij}\right)$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\lambda(\mathrm{t})$ обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1),(2) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \qquad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Система уравнений (1),(2) не замкнута, так как не определена функция $\lambda(t)$. Это обстоятельство позволяет решать обратные задачи динамики твердого тела. То есть, задав решение $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_*(t)$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_*(t)$, найти функцию $\lambda(t)$. Полученные таким способом результаты можно использовать в теории управления. Однако в такой упрощенной постановке задача интегрирования уравнений (1),(2) в научной литературе не рассматривается. Это объясняется тем, что функции $\boldsymbol{\omega}_*(t)$, $\boldsymbol{\nu}_*(t)$ должны удовлетворять определенным требованиям, а именно описывать важные для практики режимы движения[2,3,7,10]. Но даже для определения условий существования простейших классов движения, то есть нахождения функции $\lambda(t)$, приходится интегрировать достаточно сложные дифференциальные уравнения.

В данной работе рассмотрим класс прецессионных движений гиростата относительно вертикали для уравнений (1),(2). Пусть в процессе движения угол между единичным вектором $\boldsymbol{a}$, неизменно связанным с S_0, и вектором $\boldsymbol{\nu}$ постоянен и равен θ_0. Тогда имеет место инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = a_0, (a_0 = \cos\theta_0) \qquad (4)$$

В книге[6] получены следующие равенства

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{a}+\dot{\psi}\boldsymbol{\nu},\quad \boldsymbol{\nu}=(a_0'\sin\varphi,\, a_0'\cos\varphi,\, a_0),\ \ \boldsymbol{a}=(0,0,1), \tag{5}$$

где $a_0'=\sin\theta_0$, φ и ψ – новые переменные. Подстановка значений (5) в уравнение (2) дает тождество. Таким образом, необходимо рассмотреть уравнение (1) пли наличии равенств (5). Внесем выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (5) в (1)

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha}+\ddot{\varphi}A\boldsymbol{a}+\ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\left[Sp(A)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a})-2\left(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]-\\
&-\lambda(t)\left[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a})+\dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu})\right]-\dot{\varphi}^2\left(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\right)-\dot{\psi}^2\left(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}\right)-\\
&-\dot{\varphi}\left(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\nu}\right)-\dot{\psi}\left(\boldsymbol{\nu}\times B\boldsymbol{\nu}\right)-\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $Sp(A)$ – след матрицы A.

Будем считать, что векторы $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}$ составляют базис. Тогда из (6) получим уравнения

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t)\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}\right)+\ddot{\varphi}\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\right)+\ddot{\psi}\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\lambda(t)\dot{\psi}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu}\right)\right]-\\
&-\dot{\psi}^2\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}\right)\right]-\dot{\psi}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times B\boldsymbol{\nu}\right)\right]-\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu}\right)\right]-\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}\right)=0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t)\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+\ddot{\varphi}\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+\ddot{\psi}\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+2\dot{\varphi}\dot{\psi}\left[A\boldsymbol{\nu}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]+\\
&+\lambda(t)\dot{\varphi}\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]-\dot{\varphi}\left[B\boldsymbol{\nu}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]+\dot{\varphi}^2\left[A\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]=0,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t)\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]+\ddot{\varphi}\left[A\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]+\ddot{\psi}\left[A\boldsymbol{\nu}\cdot\left(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right]+\\
&+\lambda(t)\left\{\dot{\varphi}\left[a_0\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}\right)-\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]+\dot{\psi}\left[\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}\right)-a_0\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]\right\}+\\
&+\dot{\varphi}\dot{\psi}\left[a_0'^2Sp(A)-2\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+2a_0\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]-\dot{\varphi}^2\left[\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\right.\\
&\left.-a_0\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\right)\right]-\dot{\psi}^2\left[a_0\left(A\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\left(A\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]+\dot{\varphi}\left[\left(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\right.\\
&\left.-a_0\left(B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]+\dot{\psi}\left[a_0\left(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\left(B\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\right]+\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s}\right)-a_0\left(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)+\\
&+a_0\left(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)-\left(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}\right)=0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Система дифференциальных уравнений (7)-(9) в отличии от системы (1),(2) является замкнутой системой дифференциальных уравнений относительно функций $\varphi(t), \psi(t), \lambda(t)$. В общем случае система (1),(2) имеет сложный вид. Поэтому ее применение целесообразно для заданных классов прецессий гиростата.

Скалярный вид уравнений (7)-(9). Для получения скалярных уравнений, вытекающих из системы (7)-(9), воспользуемся последними двумя векторными равенствами из (5). Введем следующие обозначения

$$
\begin{gathered}
\beta_0 = a_0 A_{33},\ \beta_1 = a_0' A_{23},\ \beta_1' = a_0' A_{13},\ \gamma_0 = a_0 B_{33},\ \ \gamma_1 = a_0' B_{23},\\
\gamma_1' = a_0' B_{13}, \varepsilon_0 = a_0 C_{33},\ \ \varepsilon_1 = a_0' C_{23}, \varepsilon_1' = a_0' C_{13},\ \ \kappa_0 = a_0^2 - a_0'^2,\\
\kappa_1 = a_0' s_2 - a_0 \varepsilon_1,\ \kappa_1' = a_0' s_1 - a_0 \varepsilon_1',\ \delta_1 = \left(2a_0^2 - 1\right)\varepsilon_1 - a_0 a_0' s_2,\\
\delta_1' = \left(2a_0^2 - 1\right)\varepsilon_1' - a_0 a_0' s_1,\ A_2 = a_0'^2\left(A_{22} - A_{11}\right)/2,\ A_2' = a_0'^2 A_{12},\\
A_0 = \left[a_0'^2\left(A_{11} + A_{22}\right) + 2a_0^2 A_{33}\right]/2,\ B_2 = a_0'^2\left(B_{22} - B_{11}\right)/2,\\
B_2' = a_0'^2 B_{12},\ B_0 = \left[a_0'^2\left(B_{11} + B_{22}\right) + 2a_0^2 B_{33}\right]/2,\\
C_2 = a_0'^2\left(C_{22} - C_{11}\right)/2,\ C_2' = a_0'^2 C_{12},\\
D_0 = a_0'^2\left(A_{11} + A_{22} - 2A_{33}\right)/2,\ E_0 = a_0'^2\left(B_{11} + B_{22} - 2B_{33}\right)/2,\\
B_0^* = -a_0'^2\left(B_{11} + B_{22}\right)/2,\ G_0 = a_0'^2\left[2s_3 + a_0\left(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}\right)\right]/2.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Тогда на основании (10) из уравнений (7)-(9) имеем

$$
\begin{gathered}
\alpha_3 \dot{\lambda}(t) - a_0'\left(\alpha_1 \cos\varphi - \alpha_2 \sin\varphi\right)\dot{\psi}\lambda(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + \\
+\left(\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi + \beta_0\right)\ddot{\psi} + \left(A_2 \sin 2\varphi - A_2' \cos 2\varphi + a_0 \beta_1 \sin\varphi - \right.\\
\left. - a_0 \beta_1' \sin\varphi\right)\dot{\psi}^2 + \left(B_2' \cos 2\varphi - B_2 \sin 2\varphi + a_0 \gamma_1' \cos\varphi - a_0 \gamma_1 \sin\varphi\right)\dot{\psi} + \\
+\left(C_2' \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi - \kappa_1' \cos\varphi + \kappa_1 \sin\varphi\right) = 0,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\alpha_1 a_0' \sin\varphi+\alpha_2 a_0' \cos\varphi+a_0\alpha_3\right)\dot{\lambda}(t)+a_0'\left(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi\right)\dot{\varphi}\lambda(t)+ \\
+\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right)\ddot{\varphi}+\left(\beta_1'\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2+\left(A_2\cos 2\varphi+\right. \\
\left.+A_2'\sin 2\varphi+2a_0\beta_1\cos\varphi+2a_0\beta_1'\sin\varphi+A_0\right)\ddot{\psi}+2\left(A_2'\cos 2\varphi-\right. \\
\left.-A_2\sin 2\varphi+a_0\beta_1'\cos\varphi-a_0\beta_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}\dot{\psi}-\left(B_2'\cos 2\varphi-B_2\sin 2\varphi+\right. \\
\left.+a_0\gamma_1'\cos\varphi-a_0\gamma_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}=0,
\end{gathered} \tag{12}
$$

$$
\begin{gathered}
a_0'\left(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi\right)\dot{\lambda}(t)+a_0'\left[\left(\alpha_3 a_0'-\alpha_1 a_0\sin\varphi-\alpha_2 a_0\cos\varphi\right)\dot{\psi}-\right. \\
\left.-\left(\alpha_1\sin\varphi+\alpha_2\cos\varphi\right)\dot{\varphi}\right]\lambda(t)+\left(\beta_1'\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}+\left(A_2'\cos 2\varphi-\right. \\
\left.-A_2\sin 2\varphi+a_0\beta_1'\cos\varphi-a_0\beta_1\sin\varphi\right)\ddot{\psi}-\left(2A_2\cos 2\varphi+2A_2'\sin 2\varphi+\right. \\
\left.+2a_0\beta_1\cos\varphi+2a_0\beta_1'\sin\varphi-a_0'^2 A_{33}\right)\dot{\varphi}\dot{\psi}- \\
-\left(a_0 A_2\cos 2\varphi+a_0 A_2'\sin 2\varphi+\kappa_0\beta_1\cos\varphi+\kappa_0\beta_1'\sin\varphi+a_0 D_0\right)\dot{\psi}^2- \\
-\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2+ \\
+\left(B_2\cos 2\varphi+B_2'\sin 2\varphi+a_0\gamma_1\cos\varphi+a_0\gamma_1'\sin\varphi-B_0^*\right)\dot{\varphi}+ \\
+\left(a_0 B_2\cos 2\varphi+a_0 B_2'\sin 2\varphi+\kappa_0\gamma_1\cos\varphi+\kappa_0\gamma_1'\sin\varphi+a_0 E_0\right)\dot{\psi}+ \\
+\left(a_0 C_2\cos 2\varphi+a_0 C_2'\sin 2\varphi+\delta_1\cos\varphi+\delta_1'\sin\varphi+G_0\right)=0.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Уравнения (11)-(13) допускают интеграл

$$
\begin{gathered}
\left(\alpha_1 a_0'\sin\varphi+\alpha_2 a_0'\cos\varphi+a_0\alpha_3\right)\lambda(t)+\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right)\dot{\varphi}+ \\
+\left(A_2\cos 2\varphi+A_2'\sin 2\varphi+2a_0\beta_1\cos\varphi+2a_0\beta_1'\sin\varphi+A_0\right)\dot{\psi}- \\
-\left(B_2\cos 2\varphi+B_2'\sin 2\varphi+2a_0\gamma_1\cos\varphi+2a_0\gamma_1'\sin\varphi+B_0\right)/2=k,
\end{gathered} \tag{14}
$$

который является следствием второго интеграла из системы (3) на инвариантных соотношениях (5).

Общий метод исследования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом состоит в том, что с помощью равенства (14) в общем случае можно определить $\lambda(t)$ и, подставив полученное значение в уравнения (11),(13), получить два дифференциальных уравнения, содержащих величины $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$. Это позволяет найти только одно уравнение на функцию $\varphi(t)$. Оно, очевидно, будет иметь нелинейный характер и содержать производные $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$. Условия существования решения $\varphi(t)$ данного уравнения и будут служить условиями существования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом. Особый случай выражается условиями $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ \theta_0 = \pi/2$. Он требует применения другого метода.

Маятниковые движения гиростата. Рассмотрим случай, когда вектор угловой скорости из системы (5) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} \tag{15}$$

Поскольку $\dot{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$ и вектор $\boldsymbol{a}$ сонаправлен с угловой скорость, то $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \mathbf{0}$, то есть вектор $\boldsymbol{a}$ неподвижен в пространстве.

Движение гиростата с угловой скоростью (15) при $\dot{\varphi} \neq const$ называется маятниковым движением[3,6,11]. Положим в уравнениях (11)-(14) $\dot{\psi} = 0$. Тогда, выбирая подвижную систему координат так, чтобы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$, получим

$$\alpha_3 \dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} = -C_2' \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi + \kappa_1' \cos\varphi - \kappa_1 \sin\varphi, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_1 a_0' \sin\varphi + a_0 \alpha_3\right)\dot{\lambda}(t) + a_0' \alpha_1 \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}\lambda(t) + \\
&+\left(\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi + \beta_0\right)\ddot{\varphi} + \left(\beta_1' \cos\varphi - \beta_1 \sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \\
&+\left(B_2 \sin 2\varphi - B_2' \cos 2\varphi - a_0 \gamma_1' \cos\varphi + a_0 \gamma_1 \sin\varphi\right)\dot{\varphi} = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$
\begin{gathered}
a_0'\alpha_1\cos\varphi\cdot\dot{\lambda}(t)-a_0'\alpha_1\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\lambda(t)+\left(\beta_1'\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}-\\
-\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi\right)\dot{\varphi}^2+\left(B_2\cos2\varphi+B_2'\sin2\varphi+a_0\gamma_1\cos\varphi+\right.\\
\left.+a_0\gamma_1'\sin\varphi-B_0^*\right)\dot{\varphi}+\left(a_0C_2\cos2\varphi+a_0C_2'\sin2\varphi+\delta_1\cos\varphi+\right.\\
\left.+\delta_1'\sin\varphi+G_0\right)=0,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1a_0'\sin\varphi+a_0\alpha_3}\left[\frac{1}{2}B_2\cos2\varphi+\frac{1}{2}B_2'\sin2\varphi+a_0\gamma_1\cos\varphi+\right.\\
\left.+a_0\gamma_1'\sin\varphi+\left(k+\frac{1}{2}B_0\right)-\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right)\dot{\varphi}\right].
\end{gathered}
\tag{19}
$$

В формуле (19) предполагаем $\left(\alpha_1a_0'\right)^2+\left(a_0\alpha_3\right)^2\neq0$.

Рассмотрим случай $\alpha_3=0$. Тогда $\alpha_1=1$ и из уравнения (16) следует

$$
\dot{\varphi}^2=\frac{1}{A_{33}}\left(-C_2\cos2\varphi-C_2'\sin2\varphi+2\kappa_1'\sin\varphi+2\kappa_1\cos\varphi+c_*\right),
\tag{20}
$$

где c_* – произвольная постоянная.

Поскольку уравнение (19) является следствием уравнения (17), то подставим $\lambda(t)$ из (19) в уравнение (17) (полагаем $\alpha_3=0,\ \alpha_1=1$)

$$
\begin{gathered}
\sin\varphi\cdot\left(\beta_0\cos\varphi+\beta_1\right)\ddot{\varphi}-\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_0\right)\dot{\varphi}^2+\left[-\frac{1}{2}B_0^*\cos2\varphi-\right.\\
\left.-a_0\gamma_1\cos\varphi+\frac{1}{2}\left(2k+B_2+B_0+B_0^*\right)\right]\dot{\varphi}-\sin^2\varphi\cdot\left(a_0C_2\cos2\varphi+\right.\\
\left.+a_0C_2'\sin2\varphi+\delta_1\cos\varphi+\delta_1'\sin\varphi+G_0\right)=0.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Если в уравнении (21) учесть выражение (20), то приходим к уравнению вида

$$
\begin{gathered}
p_3\cos3\varphi+p_3'\sin3\varphi+p_2\cos2\varphi+p_2'\sin2\varphi+p_1\cos\varphi+p_1'\sin\varphi+\\
+p_0=A_{33}\left[\frac{1}{2}B_0^*\cos2\varphi+a_0\gamma_1\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(2k+B_2+B_0+B_0^*\right)\right]\dot{\varphi},
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где введены обозначения

$$p_3=\frac{a_0'^3A_{33}C_{23}}{4},\;\; p_3'=\frac{a_0'^3A_{33}C_{13}}{4},\;\; p_2=\frac{a_0'^2}{2}\Big[A_{23}\left(s_2-a_0C_{23}\right)-$$

$$-a_0A_{33}\left(C_{22}-C_{33}\right)-s_2A_{33}\Big],\;\; p_2'=\frac{a_0'^2}{2}\Big[A_{23}\left(s_1-a_0C_{13}\right)-a_0A_{33}C_{12}\Big],$$

$$p_1=\frac{a_0'}{4}\left\{8a_0s_2A_{33}-\left(1+7a_0^2\right)A_{33}C_{23}+4A_{23}\left[c_*-\frac{1}{2}a_0'^2\left(C_{22}-C_{11}\right)\right]\right\},$$

$$p_1'=\frac{a_0'}{4}\Big[4a_0s_1A_{33}-\left(a_0^2+3\right)A_{33}C_{13}-4a_0'^2A_{23}C_{12}\Big], \tag{23}$$

$$p_0=\frac{1}{2}\Big[3a_0'^2A_{23}\left(s_2-a_0C_{23}\right)+a_0a_0'^2A_{33}\left(C_{11}-C_{33}\right)+a_0'^2s_3A_{23}+$$

$$+2a_0A_{33}c_*\Big].$$

В формулах (23) учтены обозначения (10).

Потребуем, чтобы правая часть уравнения (22) обращалась в нуль для любых значений $\dot{\varphi}$. Тогда в силу (22),(23) должны выполняться условия

$$B_{22}=-B_{11},\;\; a_0B_{23}=0,\;\; k=\frac{1}{2}\left(a_0'^2B_{11}-a_0^2B_{33}\right),\;\; C_{23}=C_{13}=0,$$

$$s_1A_{23}-a_0A_{33}C_{12}=0,\qquad s_2A_{23}-s_3A_{33}-a_0A_{33}\left(C_{22}-C_{33}\right)=0,$$

$$a_0s_1A_{33}-a_0'^2A_{23}C_{12}=0,\;\;\; 3a_0'^2s_2A_{23}+a_0a_0'^2A_{33}\left(C_{11}-C_{33}\right)+ \tag{24}$$

$$+a_0'^2s_3A_{33}+2a_0A_{33}c_*=0,\;\; 2a_0s_2A_{33}+c_*A_{23}-\frac{1}{2}a_0'^2A_{23}\left(C_{22}-C_{11}\right)=0.$$

Представляет интерес записать условия (24) для классического случая $B_{ij}=0,\; C_{ij}=0\;\; (i,j=\overline{1,3})$. Если $A_{23}\neq 0$, то имеем

$$k=0,\;\; s_1=0,\;\; s_2A_{23}-s_3A_{33}=0,\;\; \mathrm{ctg}^2\theta_0=\frac{A_{23}^2}{A_{33}^2}. \tag{25}$$

Из формул (19),(20) получим зависимости $\lambda(t),\,\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2s_2}{A_{23}A_{33}}\left(a_0' A_{23}\cos\varphi - a_0 A_{33}\right),$$
$$\lambda(t) = -\frac{\left(a_0' A_{23}\cos\varphi + a_0' A_{13}\sin\varphi + a_0 A_{33}\right)}{a_0'\sin\varphi}. \qquad (26)$$

Когда $a_0 = 0$, то есть $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $A_{23} = 0,\ s_3 = 0$. Это значит, что выполняется условие $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{a}$. Кроме этого $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{a}$. Из системы (24) следует, что c_* – произвольная постоянная. Формула (20) в данном случае примет вид

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{A_{33}}\left(2s_1\sin\varphi + 2s_2\cos\varphi + c_*\right). \qquad (28)$$

Зависимость $\lambda(t)$ вытекает из (27): $\lambda(t) = -A_{13}\,\dot{\varphi}$.

Решение системы (24) разобьем на три случая. В первом случае

$$a_0 = 0,\ A_{23} = 0,\ B_{22} = -B_{11},\ k = \frac{1}{2}B_{11},\ C_{23} = C_{13} = 0,\ s_3 = 0,$$

для которого

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{A_{33}}\left(-\frac{1}{2}\left(C_{22} - C_{11}\right)\cos 2\varphi - C_{12}\sin 2\varphi + 2s_1\sin\varphi + 2s_2\cos\varphi\right),$$
$$\lambda(t) = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{2}B_{12}\sin 2\varphi - B_{11}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_{11} - \dot{\varphi}A_{13}\sin\varphi\right). \qquad (29)$$

Во втором случае имеют место условия

$$a_0 = 0,\ A_{23} \neq 0,\ B_{22} = -B_{11},\ k = \frac{1}{2}B_{11},\quad s_3 = s_2 = s_1 = 0,$$
$$C_{ij} = 0\ (i \neq j). \qquad (30)$$

Когда выполнены равенства (30) из (19),(20) получим

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sin\varphi}\left[-B_{11}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_{12}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}B_{11} - \right.$$
$$\left. -\left(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi\right)\dot{\varphi} \right], \ \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{C_{22}-C_{11}}{A_{33}}}\sin\varphi. \qquad (31)$$

Для третьего случая условия существования запишем в виде

$$B_{22} = -B_{11},\ B_{23} = 0,\ k = \frac{1}{2}\left(a_0'^2 B_{11} - a_0^2 B_{33}\right),\ C_{23} = C_{13} = 0,\ C_{12} = 0,$$
$$s_1\left(a_0^2 A_{33} - a_0'^2 A_{23}\right) = 0, \quad s_2 A_{23} - s_3 A_{33} - a_0 A_{33}\left(C_{22} - C_{33}\right) = 0,$$
$$c_* = \frac{1}{A_{23}}\left[\frac{1}{2}a_0'^2 A_{23}\left(C_{22}-C_{11}\right) - 2a_0 s_2 A_{33}\right], \quad 2s_2\left(a_0'^2 A_{23} - a_0^2 A_{33}\right) + \qquad (32)$$
$$+a_0 a_0'^2 A_{33}\left(C_{22} - C_{33}\right) = 0.$$

При выполнении равенства $\operatorname{ctg}^2\theta_0 = \dfrac{A_{23}^2}{A_{33}^2}$ можно полагать $s_1 \neq 0$ и тогда часть условий из (32) упрощается; запишем их отдельно от системы (32):

$$s_2 A_{23} - s_3 A_{33} = 0, \quad C_{22} = C_{33}.$$

Если считать $\operatorname{ctg}^2\theta_0 \neq \dfrac{A_{23}^2}{A_{33}^2}$, то необходимо полагать $s_1 = 0$. В обоих случаях можно пользоваться формулами (19),(20), в которых естественно следует учитывать полученные условия. Основное свойство зависимости $\varphi(t)$ вытекает из дифференциального уравнения (20). Очевидно, $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени.

Таким образом, в случае $\alpha_3 = 0$, то есть при выполнении условия $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ возможны три класса движений, которые включают варианты: $a_0 = 0$ (ось маятникового движения горизонталь); $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$ (центр масс неподвижен); вариант (32), для которого в общем случае $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a} \neq 0,\ a_0 \neq 0$. Последний вариант интересен тем, что при $s_1 \neq 0$ маятниковое движение происходит относительно оси, которая составляет с вектором вертикали угол θ_0: $\operatorname{ctg}^2\theta_0 = \dfrac{A_{23}^2}{A_{33}^2}$, зависящий от компонент тензора инерции.

При рассмотрении случая $\alpha_3 = 0$ возможен и случай, когда правая часть (22) не обращается в нуль для всех значений $\dot{\varphi}$. Для его исследования необходимо в правую часть уравнения (22) подставить выражение (20)

$$
\begin{gathered}
A_{33}\left(p_3\cos 3\varphi + p_3'\sin 3\varphi + p_2\cos 2\varphi + p_2'\sin 2\varphi + p_1\cos\varphi + \right.\\
\left. + p_1'\sin\varphi + p_0\right)^2 - \left(C_2\cos 2\varphi + C_2'\sin 2\varphi - 2\kappa_1'\sin\varphi - 2\kappa_1\cos\varphi - c_*\right)\times \\
\times\left[\frac{1}{2}B_0^*\cos 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + \left(k + \frac{1}{2}B_0\right)\right]^2 = 0.
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Требование того, что уравнение (33) будет тождеством по φ приводит к условиям существования маятниковых движений гиростата. Здесь эти условия выписывать не будем в силу их громоздкости.

Случай $\alpha_3 \neq 0$. Поскольку выражение (19) получено из первого интеграла моментов из (3), то предполагая $\alpha_1 \neq 0$ из трех уравнений (16)-(18) и уравнения (19) рассмотрим уравнение, полученное подстановкой (19) в (16) и комбинацию уравнений (17),(18):

$$
\begin{gathered}
a_0'\left(\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33}\right)\ddot{\varphi} - a_0'\alpha_3 A_{23}\dot{\varphi}^2 + \alpha_3\left(B_2'\sin\varphi + a_0'^2 B_{22}\cos\varphi + \right.\\
\left. + a_0 a_0' B_{23}\right)\dot{\varphi} - a_0'\left(\alpha_1 C_2' + \frac{1}{2}a_0'\alpha_3\varepsilon_1\right)\cos 2\varphi + a_0'\left(\alpha_1 C_2 - \right.\\
\left. - \frac{1}{2}a_0'\alpha_3\varepsilon_1'\right)\sin 2\varphi + \left[a_0'\alpha_1\kappa_1' + \alpha_3\left(a_0 C_2 + G_0\right)\right]\cos\varphi - \\
-\left(a_0'\alpha_1\kappa_1 - a_0\alpha_3 C_2'\right)\sin\varphi + \frac{\alpha_3}{2}\left[\left(3a_0^2 - 1\right)\varepsilon_1 - 2a_0 a_0' s_2\right] = 0,
\end{gathered}
\tag{34}
$$

$$
\begin{gathered}
a_0'\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3\right)\left[\left(\alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13}\right)\sin\varphi-\alpha_3A_{23}\cos\varphi\right]\ddot{\varphi}+\\
+a_0'\alpha_3\left[\left(\alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13}\right)\cos\varphi+a_0\alpha_3A_{23}\sin\varphi+a_0'\alpha_1A_{23}\right]\dot{\varphi}^2+\\
+\alpha_3\left\{\frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2\cos3\varphi+\frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2'\sin3\varphi-a_0\alpha_3B_2'\cos2\varphi-\right.\\
-a_0\alpha_3B_2\sin2\varphi+\left[a_0^2\alpha_3\gamma_1'-a_0'\alpha_1\left(k+\frac{3}{4}B_2+\frac{1}{2}B_0\right)\right]\cos\varphi-\\
\left.-\left(a_0^2\alpha_3\gamma_1+\frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2\right)\sin\varphi-a_0a_0'\alpha_1\gamma_1\right\}\dot{\varphi}-\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3\right)^2\times\\
\times\left(C_2\sin2\varphi+C_2'\cos2\varphi+\kappa_1'\cos\varphi-\kappa_1\sin\varphi\right)=0.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Условия существования решений системы дифференциальных уравнений (34),(35) в общем случае можно найти следующим образом. Необходимо из уравнений (34),(35), исключив $\ddot{\varphi}$, определить функцию $\dot{\varphi}=\Phi(\varphi)$. Подстановка этой функции в одно из уравнений (34),(35) и требование того, чтобы полученное уравнение было тождеством по φ приводит к условиям существования решения системы (34),(35). В данной статье рассмотрим два особых случая.

Потребуем, чтобы уравнение (34) были тождеством. Тогда получим следующие условия

$$
\begin{gathered}
A_{23}=0,\quad \alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13},\quad B_{22}=0,\quad B_{12}=0,\quad a_0B_{23}=0,\\
2\alpha_1C_{12}+\alpha_3C_{23}=0,\quad \alpha_1\left(C_{22}-C_{11}\right)-\alpha_3C_{13}=0,\\
\alpha_3\left(\alpha_1s_1+\alpha_3s_3\right)+a_0\left[\alpha_1^2C_{11}+\left(\alpha_3^2-\alpha_1^2\right)C_{22}-\alpha_3^2C_{33}\right]=0,\\
2\alpha_1^2s_2+a_0\left(\alpha_3^2-2\alpha_1^2\right)C_{23}=0,\quad \left(3a_0^2-1\right)C_{23}-2a_0s_2=0.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Пусть в системе (36) $a_0=0$, то есть $\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда из (36) имеем

$$
\begin{gathered}
A_{23}=0,\quad \alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13}=0,\quad B_{22}=0,\quad B_{12}=0,\quad C_{12}=C_{23}=0,\\
\alpha_1\left(C_{22}-C_{11}\right)-\alpha_3C_{13}=0,\quad \alpha_1s_1+\alpha_3s_3=0,\quad s_2=0.
\end{gathered}
\tag{37}
$$

При выполнении условий (37) из (19) и (35) имеем

$$\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1\sin\varphi}\left[-\frac{1}{4}B_{11}\cos 2\varphi+\left(k+\frac{1}{4}B_{11}\right)-A_{13}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\right],$$
$$\alpha_3\left[\left(k-\frac{1}{8}B_{11}\right)\cos\varphi+\frac{1}{8}B_{11}\cos 3\varphi\right]\dot{\varphi}=\alpha_1\sin^2\varphi\times \tag{38}$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\left(C_{22}-C_{11}\right)\sin 2\varphi-s_1\cos\varphi\right].$$

Случай (37),(38) распространяется и на классический вариант $B_{ij}=0,\ C_{ij}=0,\ (i,j=\overline{1,3})$. Тогда выполняются равенства

$$A_{23}=0,\quad \alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13},\ \alpha_1s_1+\alpha_3s_3=0,\quad s_2=0. \tag{39}$$

Из последних двух условий системы (39) следует $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{s}=0$. Выражения для $\lambda(t)$ и $\dot{\varphi}$ из (38) упрощаются

$$\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1\sin\varphi}\left(k-A_{13}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\right),\quad \dot{\varphi}^2=-\frac{\alpha_1s_1\sin^2\varphi}{\alpha_3k}. \tag{40}$$

Второе уравнение позволяет установить, что $\varphi(t)$ – элементарная функция времени.

Когда в системе (36) имеют место условия $C_{23}=0,\ a_0\neq 0$, то $s_2=0, B_{23}=0$. Остальные условия остаются без изменений.

В случае $C_{23}\neq 0$ из последних двух равенств системы (36) вытекает

$$\alpha_1=\cos\theta_0,\ \alpha_3=\sin\theta_0. \tag{41}$$

Из (41) заключаем, что в рассматриваемом случае углы между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, и векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ совпадают. Запишем зависимости $\lambda(t), \dot{\varphi}$, которые вытекают из (19) и (35)

$$\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1 a_0'\sin\varphi+a_0\alpha_3}\left[-\frac{1}{4}a_0'^2 B_{11}\cos 2\varphi+a_0a_0'B_{13}\sin 2\varphi+\left(k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}a_0'^2B_{11}+a_0^2B_{33}\right)-\left(a_0'A_{13}\sin\varphi+a_0A_{33}\right)\dot{\varphi}\right],$$

$$\alpha_3\dot{\varphi}\left[-\frac{1}{8}a_0'^2\alpha_1B_{11}\cos 3\varphi+\frac{1}{2}a_0a_0'B_{11}\sin 2\varphi+\left(a_0^2\alpha_3B_{13}-\alpha_1\left(k-\right.\right.\right. \tag{42}$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{8}B_{11}+a_0^2B_{33}\right)\right)\cos\varphi\right]=\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3\right)^2\left[\frac{1}{2}a_0'\left(C_{22}-C_{11}\right)\sin 2\varphi+\right.$$

$$\left.+a_0'C_{12}\cos 2\varphi+\left(s_1-a_0C_{13}\right)\cos\varphi-\left(s_2-a_0C_{23}\right)\sin\varphi\right].$$

Использование записи $\lambda(t)$ в левой части (42) означает, что в правую часть (42) подставлена функция $\varphi(t)$, которая в данном случае является элементарной функцией времени.

Отметим, что в классическом варианте при $a_0\neq 0$ из (36) вытекают условия (39). Формулы принимают вид

$$\lambda(t)=\frac{1}{\alpha_1a_0'\sin\varphi+a_0\alpha_3}\left[k-\left(a_0'A_{13}\sin\varphi+a_0A_{33}\right)\dot{\varphi}\right],$$

$$\dot{\varphi}=-\frac{s_1}{\alpha_1\alpha_3k}\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3\right)^2 \tag{43}$$

То есть в случае (44), так же как и в случае (39), $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{s}=0,\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}\neq 0$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (35) становится тождеством. Для этой цели положим, что выполняются условия

$$\alpha_1A_{33}-\alpha_3A_{13}=0,\ A_{23}=0,\ B_{11}=B_{22},\quad B_{12}=0,\ B_{23}=0,$$

$$C_{11}=C_{22},\quad C_{12}=0,\quad s_1=a_0C_{13},\quad s_2=a_0C_{23}, \tag{45}$$

$$k=\frac{1}{\alpha_1}\left[a_0^2\alpha_3B_{13}-\frac{1}{2}\alpha_1\left(a_0'^2B_{11}+a_0^2B_{33}\right)\right].$$

При наличии ограничений (45) уравнение (34) приводится к виду

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{B_{22}}\left[a_0'C_{23}\cos\varphi+a_0'C_{13}\sin\varphi-\left(s_3+a_0\left(C_{11}-C_{33}\right)\right)\right]. \tag{46}$$

Из уравнения (19) найдем $\lambda(t)$. Используя условия (45), имеем

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_1}\left(a_0 B_{13} - A_{13}\dot{\varphi}\right). \tag{47}$$

Интерес формулы (47) заключается в ее линейной относительно $\dot{\varphi}$ зависимости.

Классический вариант в данном случае в силу (45),(46) приводит к случаю $\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$. То есть в этом случае $\varphi(t)$ – произвольная функция времени, а $\lambda(t) = -\frac{A_{13}}{\alpha_1}\dot{\varphi}$. Угол θ_0 является произвольным. То есть для варианта, когда гиростат имеет неподвижный центр масс, маятниковое движение может происходить с произвольной угловой скоростью и при произвольном значении угла между осью вращения (вектором $\boldsymbol{a}$) и вектором $\boldsymbol{\nu}$, если вектор $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ специальным образом выбран в гиростате ($\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{A_{33}}{A_{13}}$).

Таким образом, в данной статье предложен метод исследования прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом; получены три уравнения на неизвестные функции $\lambda(t), \varphi(t), \psi(t)$; приведены примеры маятниковых движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые описываются уравнениями Кирхгофа-Пуассона.

Литература

1. Вархалев Ю.П., Ковалев А.М. Об асимптотически равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 43–48.
2. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – вып. 38. – С. 80–86.
3. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
4. Горр Г.В., Ковалев В.М. Об асимптотически равномерных движениях вокруг наклонной оси в обобщенной задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 13–18.
5. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела // Київ: Наук. Думка. – 1978. – 296 с.
6. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк.:: ДонНУ, 2009. – 222 с.

7. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э.И.Дружинин // Прикл. математика и механика. – 1999. – Т.63. – Вып. 5. – С. 825-826.
8. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – М.,Л. ОГИЗ.– 1949. – Т.2. – С. 152-309.
9. Ковалев А.М. О стационарных решениях дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Мат. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 87–102.
10. Ковалева Л.М., Позднякович Е.В. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
11. Млодзеевский Б.К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1894. – **7**, вып. 1. – С. 46–48.
12. Харламов П.В. О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 2. – С. 373–375.
13. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
14. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. reine und angew. Math. – 1894. – **113**, H. 4. – S. 318–334.
15. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. 1899. V.**22**. – P. 201-358
16. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V. **5**, №5. – P. 742-745.