УДК 531.38

Горр Г.В., Мазнев А.В.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ

В работе получены новые классы регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом, в случае, когда постоянен угол между собственной осью в гиростате и осью, не совпадающей с осью симметрии силовых полей. Механическая модель действующих на гиростат моментов и сил описана уравнениями Кирхгофа-Пуассона.

1. Введение. В книгах [6,8,11,13] даны обзоры по динамике твердого тела и гиростата, которые посвящены исследованию уравнений движения в предположении, что гиростатический момент постоянен в подвижной системе координат по направлению и величине. Уравнения П.В. Харламова [12] позволяют исследовать и задачи с переменным гиростатическим моментом. В [9] проведен анализ равномерных вращений уравновешенного гиростата; в [10] рассмотрены некоторые случаи равномерных движений гиростата в предположении, что центр тяжести не совпадает с неподвижной точкой; в [1,2,3,5] исследованы условия существования равномерных вращений гиростата в общем случае и регулярных прецессий тяжелого гиростата как относительно вертикали, так и относительно наклонной оси; в [4] изучены маятниковые движения гиростата в поле силы тяжести.

Данная статья посвящена рассмотрению задачи о движении гиростата, которая описывается уравнениями Кирхгофа-Пуассона. Найдены новые классы регулярных прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом в случае невертикальной оси в пространстве.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата [16] под действием потенциальных и гироскопических сил

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}) - \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}),$$
$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}(t)$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; A – тензор инерции гиростата с компонентами A_{ij}; $B = \left(B_{ij}\right), C = \left(C_{ij}\right)$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Уравнения (1) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \tag{2}$$

Здесь k – произвольная постоянная.

Рассмотрим регулярные прецессии гиростата относительно оси, не совпадающей по направлению с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Введем в неподвижном пространстве единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$ с началом в неподвижной точке. Угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ обозначим через κ. Тогда имеем уравнения [7]

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega}, \;\; \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu} = c_0, \;\; (c_0 = \cos\kappa). \tag{3}$$

Свяжем с гиростатом единичный вектор $\boldsymbol{a}$ так, чтобы $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$.

Рассмотрим класс регулярных прецессий гиростата относительно вектора $\boldsymbol{\gamma}$ [7]

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\gamma} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\gamma}, \tag{4}$$

где $a_0 = \cos\theta_0$, θ_0, n и m – постоянные параметры.

На основании соотношений (4) в работе [7] получено векторное равенство

$$\boldsymbol{\gamma} = (a_0' \sin nt,\ a_0' \cos nt,\ a_0). \tag{5}$$

Здесь $a_0' = \sin\theta_0$. Подстановка значений $\boldsymbol{\omega}$ из (4) и $\boldsymbol{\gamma}$ из (5) в уравнения Пуассона из системы (1) приводит к тождеству. При рассмотрении уравнения (1) найдем разложение вектора $\boldsymbol{\nu}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\nu} = \left(c_0 + a_0 b_0' \sin(mt+\psi_0)\right)\boldsymbol{\gamma} - b_0'\boldsymbol{a}\sin(mt+\psi_0) - b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos(mt+\psi_0), \tag{6}$$

где $b_0' = \dfrac{b_0}{a_0'}$, $b_0 = \sin\kappa$, ψ_0 – постоянная, которая в общем случае отлична от нуля.

Подставим выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (4) и выражение $\boldsymbol{\nu}$ из (6) в динамическое уравнение из (1)

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} = \left[n(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}) + m(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma})\right]\lambda(t) + n^2\left(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\right) + m^2\left(A\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}\right) - \\
&-nm\left[Sp\left(A\right)(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}) - 2\left(A\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}\right)\right] + \left(c_0 + a_0 b_0'\sin(mt+\psi_0)\right)(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\gamma}) - \\
&-b_0'(\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{a})\sin(mt+\psi_0) - b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\left[\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\right]\cos(mt+\psi_0) + \\
&+\left(c_0 + a_0 b_0'\sin(mt+\psi_0)\right)\left[n\left(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\gamma}\right) + m\left(\boldsymbol{\gamma}\times B\boldsymbol{\gamma}\right)\right] - \\
&-b_0'\left[n\left(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{a}\right) + m\left(\boldsymbol{\gamma}\times B\boldsymbol{a}\right)\right]\sin(mt+\psi_0) - b_0'\left[n\left(\boldsymbol{a}\times B(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\right) + \right. \\
&\left.+m\left(\boldsymbol{\gamma}\times B(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\right)\right]\cos(mt+\psi_0) + \left(c_0 + a_0 b_0'\sin(mt+\psi_0)\right)^2\left(\boldsymbol{\gamma}\times C\boldsymbol{\gamma}\right) - \\
&-b_0'\left(\boldsymbol{\gamma}\times C\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times C\boldsymbol{\gamma}\right)\left(c_0 + a_0 b_0'\sin(mt+\psi_0)\right)\sin(mt+\psi_0) - \\
&-b_0'\left[\boldsymbol{\gamma}\times C(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\times C\boldsymbol{\gamma}\right]\left(c_0 + a_0 b_0'\sin(mt+\psi_0)\right)\cos(mt+\psi_0) +
\end{aligned} \tag{7}$$

$$+\frac{b_0'^2}{2}\left[\boldsymbol{a}\times C(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\times C\boldsymbol{a}\right]\sin 2(mt+\psi_0)+$$

$$+b_0'^2\left(\boldsymbol{a}\times C\boldsymbol{a}\right)\sin^2(mt+\psi_0)+b_0'^2\left[(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\times C(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\right]\cos^2(mt+\psi_0),$$

где $Sp\left(A\right)$ – след матрицы A.

Введем обозначения

$$A_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(A_{22}-A_{11}\right),\ A_2'=a_0'^2A_{12},\ A_1=2a_0\sigma_1,\ A_1'=2a_0\sigma_1',$$

$$\sigma_1=a_0'A_{23},\ \sigma_1'=a_0'A_{13},\ \sigma_0=a_0A_{33},\ A_0^*=-\frac{a_0'^2}{2}\left(A_{11}+A_{22}\right),$$

$$A_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(A_{11}+A_{22}\right)+2a_0^2A_{33}\right],\ A_0'=\frac{a_0'^2}{2}\left(A_{11}+A_{22}-2A_{33}\right),$$

$$B_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(B_{22}-B_{11}\right),\ B_2=a_0'^2B_{12},\ B_1=2a_0\kappa_1,\ B_1'=2a_0\kappa_1',$$

$$\kappa_1=a_0'B_{23},\ \kappa_1'=a_0'B_{13},\ \kappa_0=a_0B_{33},\ B_0^*=-\frac{a_0'^2}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right),\tag{8}$$

$$B_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(B_{11}+B_{22}\right)+2a_0^2B_{33}\right],\ B_0'=\frac{a_0'^2}{2}\left(B_{11}+B_{22}-2B_{33}\right),$$

$$C_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(C_{22}-C_{11}\right),\ C_2'=a_0'^2C_{12},\ C_1=2a_0\varepsilon_1,\ C_1'=2a_0\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1=a_0'C_{23},\ \varepsilon_1'=a_0'C_{13},\ \varepsilon_0=a_0C_{33},\ C_0^*=-\frac{a_0'^2}{2}\left(C_{11}+C_{22}\right),$$

$$C_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(C_{11}+C_{22}\right)+2a_0^2C_{33}\right],\ C_0'=\frac{a_0'^2}{2}\left(C_{11}+C_{22}-2C_{33}\right);$$

$$P_2=mB_2+2c_0C_2,\ P_2'=mB_2'+2c_0C_2',\ P_1=a_0a_0's_2+a_0'^2m\kappa_1+$$

$$+c_0(1-2a_0^2)\varepsilon_1,\quad P_1'=a_0a_0's_1+a_0'^2m\kappa_1'+c_0(1-2a_0^2)\varepsilon_1',$$

$$Q_1=a_0's_2-a_0c_0\varepsilon_1,\ Q_1'=a_0's_1-a_0c_0\varepsilon_1',\ Q_0=-mB_0^*,$$

$$R_2=(1+a_0^2)C_2,\ R_2'=(1+a_0^2)C_2',\ R_1=a_0a_0'^2\varepsilon_1,\quad R_1'=a_0a_0'^2\varepsilon_1',$$

$$S_2 = m^2 A_2 - m c_0 B_2 + \frac{1}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right) C_2, \tag{9}$$

$$S_2' = m^2 A_2' - m c_0 B_2' + \frac{1}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right) C_2',$$

$$S_1 = a_0 m^2 \sigma_1 + a_0' c_0 s_2 - a_0 c_0 m \kappa_1 + \frac{a_0}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right)\varepsilon_1,$$

$$S_1' = a_0 m^2 \sigma_1' + a_0' c_0 s_1 - a_0 c_0 m \kappa_1' + \frac{a_0}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right)\varepsilon_1';$$

$$\begin{gathered} L_2 = a_0 n B_2 - c_0 C_2,\ L_2' = a_0 n B_2' - c_0 C_2',\ L_1 = a_0' s_2 - a_0'^2 n \kappa_1 - a_0 c_0 \varepsilon_1, \\ L_1' = a_0' s_1 - a_0'^2 n \kappa_1' - a_0 c_0 \varepsilon_1',\ U_2 = n B_2 - a_0 c_0 C_2,\ \ U_2' = n B_2' - a_0 c_0 C_2', \\ U_1 = a_0 a_0' s_2 - c_0 (2a_0^2 - 1)\varepsilon_1,\ U_1' = a_0 a_0' s_1 - c_0 (2a_0^2 - 1)\varepsilon_1', \\ U_0 = n B_0^* - a_0 c_0 C_0' - a_0'^2 s_3,\ \varPi_2 = n\left(2mA_2 - c_0 B_2\right), \\ \varPi_2' = n\left(2mA_2' - c_0 B_2'\right),\ \varPi_1 = n\left[(n + 2a_0 m)\sigma_1 - a_0 c_0 \kappa_1\right], \\ \varPi_1' = n\left[(n + 2a_0 m)\sigma_1' - a_0 c_0 \kappa_1'\right]; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} D_2 = c_0 (1 - 2a_0^2) C_2 - a_0 (n + a_0 m) B_2, \\ D_2' = c_0 (1 - 2a_0^2) C_2' - a_0 (n + a_0 m) B_2', \\ D_1 = a_0'^2 \left[-a_0' s_2 + (n + 2a_0 m)\kappa_1 + 4a_0 c_0 \varepsilon_1\right], \\ D_1' = a_0'^2 \left[-a_0' s_1 + (n + 2a_0 m)\kappa_1' + 4a_0 c_0 \varepsilon_1'\right], \\ D_0 = c_0 (1 - 2a_0^2) C_0' - a_0'^2 \left[a_0 s_3 + \frac{a_0}{2}(n + a_0 m)\left(B_{11} + B_{22}\right) + m a_0'^2 B_{33}\right], \\ E_2 = (n + a_0 m) B_2 + a_0 c_0 C_2,\ E_2' = (n + a_0 m) B_2' + a_0 c_0 C_2', \\ E_1 = a_0'^2 (m \kappa_1 + c_0 \varepsilon_1),\quad E_1' = a_0'^2 (m \kappa_1' + c_0 \varepsilon_1'); \end{gathered} \tag{11}$$

$$G_2 = m(a_0 m + 2n) A_2 - c_0 (n + a_0 m) B_2 + \frac{a_0}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right) C_2,$$

$$G_2' = m(a_0 m + 2n) A_2' - c_0 (n + a_0 m) B_2' + \frac{a_0}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right) C_2',$$

$$
\begin{aligned}
&G_1 = a_0 a_0' c_0 s_2 + \left[(n+a_0 m)^2 - a_0'^2 m^2\right]\sigma_1 - c_0\left(a_0 n + (2a_0^2-1)m\right)\kappa_1 + \\
&+\frac{2a_0^2-1}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right)\varepsilon_1,\ G_1' = a_0 a_0' c_0 s_1 + \left[(n+a_0 m)^2 - a_0'^2 m^2\right]\sigma_1' - \\
&-c_0\left(a_0 n + (2a_0^2-1)m\right)\kappa_1' + + \frac{2a_0^2-1}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right)\varepsilon_1',\ G_0 = a_0 m^2 A_0' - \\
&-a_0'^2 mnA_{33} - a_0'^2 c_0 s_3 + c_0\left(nB_0^* - a_0 m B_0'\right) + \frac{a_0}{2}\left(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2\right)C_0'.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Умножим обе части уравнения (7) скалярно на независимые векторы $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\gamma}$. Тогда на основании (7) и обозначений (8)-(12) получим

$$
\alpha_3 \dot{\lambda}(t) = a_0'\alpha_1 m \cos nt \cdot \lambda(t) + \Phi_1(t), \tag{13}
$$

$$
(\alpha_1 a_0' \sin nt + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t) = -a_0'\alpha_1 n \cos nt \cdot \lambda(t) + \Phi_2(t), \tag{14}
$$

$$
a_0'\alpha_1 \cos nt \cdot \dot{\lambda}(t) = a_0'\left[\alpha_1(n+a_0 m)\sin nt - a_0'\alpha_3 m\right]\lambda(t) + \Phi_3(t), \tag{15}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1(t) = b_0'\left(-a_0 P_2' \cos 2nt + a_0 P_2 \sin 2nt + P_1' \cos nt - P_1 \sin nt\right)\sin(mt+\psi_0) + \\
&+b_0'\left(-P_2 \cos 2nt - P_2' \sin 2nt + Q_1 \cos nt + Q_1' \sin nt + Q_0\right)\cos(mt+\psi_0) + \\
&+\frac{b_0'^2}{2}\left(-2a_0 C_2 \cos 2nt - 2a_0 C_2' \sin 2nt + a_0'^2 \varepsilon_1 \cos nt + a_0'^2 \varepsilon_1' \sin nt\right)\times \\
&\times \sin 2(mt+\psi_0) + \frac{b_0'^2}{2}\left(R_2' \cos 2nt - R_2 \sin 2nt - R_1' \cos nt + R_1 \sin nt\right)\times \\
&\times \cos 2(mt+\psi_0) + \left(S_2' \cos 2nt - S_2 \sin 2nt + S_1' \cos nt - S_1 \sin nt\right);
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi_2(t) = b_0'\left(L_2' \cos 2nt - L_2 \sin 2nt + L_1' \cos nt - L_1 \sin nt\right)\sin(mt+\psi_0) + \\
&+b_0'\left(U_2 \cos 2nt + U_2' \sin 2nt + U_1 \cos nt + U_1' \sin nt + U_0\right)\cos(mt+\psi_0) + \\
&+\frac{b_0'^2}{2}\left(-R_2 \cos 2nt - R_2' \sin 2nt + 2R_1 \cos nt + 2R_1' \sin nt + a_0'^2 C_0'\right)\times
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$\times\sin 2(mt+\psi_0)+b_0'^2\left(a_0C_2'\cos 2nt-a_0C_2\sin 2nt-a_0'^2\varepsilon_1'\cos nt+\right.$$
$$\left.+a_0'^2\varepsilon_1\sin nt\right)\cos 2(mt+\psi_0)+\left(-\Pi_2'\cos 2nt+\Pi_2\sin 2nt-\right.$$
$$\left.-\Pi_1'\cos nt+\Pi_1\sin nt\right);$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(t)&=b_0'\left(D_2\cos 2nt+D_2'\sin 2nt+D_1\cos nt+D_1'\sin nt+D_0\right)\times\\&\times\sin(mt+\psi_0)+b_0'\left(E_2'\cos 2nt-E_2\sin 2nt-E_1'\cos nt+E_1\sin nt\right)\times\\&\times\cos(mt+\psi_0)+\frac{a_0'^2b_0'^2}{2}\left(-C_2'\cos 2nt+C_2\sin 2nt-a_0\varepsilon_1'\cos nt+\right.\\&\left.+a_0\varepsilon_1\sin nt\right)\sin 2(mt+\psi_0)+\frac{a_0'^2b_0'^2}{2}\left(-a_0C_2\cos 2nt-a_0C_2'\sin 2nt+\right.\\&\left.+(1-2a_0^2)\varepsilon_1\cos nt+(1-2a_0^2)\varepsilon_1'\sin nt-a_0C_0'\right)\cos(mt+\psi_0)+\\&+\left(G_2\cos 2nt+G_2'\sin 2nt+G_1\cos nt+G_1'\sin nt+G_0\right).\end{aligned} \qquad (18)$$

При выводе формул (13)-(18) использована подвижная система координат, в которой $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,0,\alpha_3)$, что не ограничивает общности задачи.

3. Случай $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a},\ a_0=0,\ m=n,\ \psi_0=0$. Положим в уравнениях (13)-(15) $\alpha_1=0,\ a_0=0,\ m=n,\ \psi_0=0$. Эти условия примем и в обозначениях (8)-(12),(16)-(18). Тогда уравнения (13)-(15) принимают вид

$$\dot{\lambda}(t)=\Phi_1(t),\quad \Phi_2(t)=0,\ \lambda(t)=\frac{1}{n}\Phi_3(t). \qquad (19)$$

Потребуем, чтобы уравнения из системы (19) были совместными. Тогда с помощью (16)-(18) и обозначений (8)-(12) получим

$$\begin{aligned}&A_{12}=0,\ C_{22}=C_{11},\ B_{33}=-B_{22},\ nB_{12}=-b_0C_{23},\ b_0^2C_{23}=n^2A_{23},\\&n\left(B_{22}-B_{11}\right)=2b_0C_{13},\ s_2=nB_{23}+C_{23},\ b_0\left(s_1-nB_{13}-c_0C_{13}\right)+\\&+n^2\left(A_{22}-A_{11}\right)=0,\ b_0^2\left(C_{11}-C_{33}\right)+n^2\left(A_{22}-A_{11}\right)=0,\end{aligned} \qquad (20)$$

$$b_0 n\left(B_{22}+B_{11}\right)+2b_0 s_3+2n^2 A_{13}=0.$$

В силу условий (20) функцию $\lambda(t)$ из (19) представим так

$$\begin{aligned}
\lambda(t)=\frac{1}{n}\Bigg[&-\frac{b_0^2}{4}C_{23}\cos 3nt-\frac{b_0^2}{4}C_{13}\sin 3nt+\Bigg(\frac{n^2}{2}\left(A_{22}-A_{11}\right)-\\
&-\frac{b_0 n}{2}B_{13}-c_0 b_0 C_{13}\Bigg)\cos 2nt+b_0\left(c_0 C_{23}-nB_{23}\right)\sin 2nt+\\
&+\left(c_0 nB_{23}+\left(c_0^2+\frac{b_0^2}{4}\right)C_{23}\right)\cos nt+\Big(b_0 c_0\left(C_{11}-C_{33}\right)-n\,b_0 B_{33}+\\
&+c_0 nB_{13}-(b_0^2-c_0^2)C_{13}\Big)\sin nt-\frac{b_0 s_1}{2}+n^2 A_{33}-\frac{c_0}{2}\Big(2s_3+b_0 C_{13}+\\
&+n\left(B_{11}+B_{22}\right)\Big)\Bigg].
\end{aligned}\tag{21}$$

Решение уравнений (1), описывающее регулярную прецессию (4),(5), можно записать так

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\gamma}=(\sin nt,\cos nt,0),\quad \boldsymbol{\omega}=n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\gamma}),\\
&\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\gamma}\cos\kappa-\boldsymbol{a}\sin\kappa\sin nt-(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos\kappa\cos nt.
\end{aligned}\tag{22}$$

Если гиростат движется под действием силы тяжести, то из формулы (21) вытекает, что $\lambda(t)=const$. Это значит, что аналога решения (21),(22) для классической задачи нет. Данное свойство отражено в [5].

4. Случай $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a},\ a_0\neq 0,\ m=n,\ \psi_0=0$. При выполнении указанных условий систему уравнений (13)-(15) запишем так

$$\dot{\Phi}_3(t)-a_0'^2 n\Phi_1(t)=0,\ \ \Phi_2(t)-a_0\Phi_1(t)=0,\ \ \lambda(t)=\frac{1}{a_0'^2 n}\Phi_3(t).\tag{23}$$

Подставим функции Φ_i из (16)-(18) в первые два уравнения системы (23) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по t. Тогда получим следующие условия на параметры задачи (1)

$$
\begin{aligned}
&A_{12}=0,\ A_{23}=0,\ B_{12}=0,\ B_{22}=B_{11},\ B_{33}=-B_{22},\ C_{ij}=0\ (i\neq j),\\
&C_{22}=C_{11},\ b_0^2\left(C_{11}-C_{33}\right)+n^2\left(A_{22}-A_{11}\right)=0,\ s_2=n(a_0+1)B_{23},\\
&b_0\left[s_1-n(a_0+1)B_{13}\right]+n^2(a_0+1)\left(A_{22}-A_{11}\right)=0,\quad 2a_0s_3+\\
&+n\left[(a_0+1)^2B_{11}+a_0'^2B_{33}\right]=0,\ b_0'^2(1-a_0)\left[n(a_0+1)B_{11}+s_3\right]+\\
&+a_0'b_0'(a_0+1)n^2A_{13}-a_0c_0n^2\left(A_{22}-A_{11}\right)=0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Функцию $\lambda(t)$ определим из последнего равенства системы (23) с учетом равенств (24)

$$
\begin{aligned}
\lambda(t)=\frac{1}{n}\Bigg\{&-\frac{a_0+1}{2}\left[a_0b_0'nB_{13}-n^2\left(A_{22}-A_{11}\right)\right]\cos 2nt+\\
&+\frac{a_0+1}{2}b_0'nB_{23}\sin 2nt+a_0'c_0nB_{23}\cos nt+\frac{1}{b_0'}\Big[a_0'^2b_0'^2nB_{11}+\\
&+a_0'b_0'c_0B_{13}+a_0a_0'b_0'nA_{13}-c_0(a_0+1)n^2\left(A_{22}-A_{11}\right)\Big]\sin nt+\\
&+\frac{1}{2a_0'^2}\left(b_0'D_1'-b_0'E_1'+2G_0\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Таким образом, из (25) вытекает, что $\lambda(t)$ – тригонометрический многочлен второго порядка. Это свойство отличает функцию $\lambda(t)$ из (21).

Запишем решение в исследуемом варианте

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\gamma}=(a_0'\sin nt, a_0'\cos nt, a_0),\quad \boldsymbol{\omega}=n(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\gamma}),\\
&\boldsymbol{\nu}=(c_0+a_0b_0'\sin nt)\boldsymbol{\gamma}-b_0'\boldsymbol{a}\sin nt-b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\cos nt.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Рассмотрим классический случай, то есть положим в равенствах (24),(25) $B_{ij}=0, C_{ij}=0\ (i,j=\overline{1,3})$. Тогда получим: $A_{22}=A_{11}, s_1=s_2=s_3=0, A_{13}= =0, \lambda(t)=const$. Это значит, что аналог решения (25),(26) в классической задаче отсутствует. Этот факт согласуется с результатом [5].

5. Случай $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a},\ m=2n,\ \psi_0=\dfrac{\pi}{2}$. Положим в уравнениях (13)-(15) $\alpha_1=0, \alpha_3=1, m=2n, \psi_0=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда можно показать, что при выполнении условий

$$\begin{aligned}&C_{33}=C_{22}=C_{11},\ B_{22}=B_{11},\ A_{ij}=0\ (i\neq j),\ B_{ij}=0\ (i\neq j),\\&C_{ij}=0\ (i\neq j),\ s_2=s_1=0,\ b_0'\left[n(1+2a_0)B_{11}+s_3\right]+\\&+2n^2(a_0+1)\left(A_{22}-A_{11}\right)=0,\ a_0'^2b_0'\left(B_{33}+B_{11}\right)-2a_0(a_0+1)\times\\&\times n\left(A_{22}-A_{11}\right)=0,\end{aligned}\tag{27}$$

система (13)-(15) допускает решение

$$\lambda(t)=a_0'^2\left[b_0'B_{11}+n\left(A_{22}-A_{11}\right)\right]\cos 2nt.\tag{28}$$

Регулярная прецессия гиростата относительно наклонной оси описывается формулами

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\gamma}=(a_0'\sin nt, a_0'\cos nt, a_0),\quad \boldsymbol{\omega}=n(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{\gamma}),\\&\boldsymbol{\nu}=(c_0+a_0b_0'\cos 2nt)\boldsymbol{\gamma}-b_0'\boldsymbol{a}\cos 2nt-b_0'(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{a})\sin 2nt.\end{aligned}\tag{29}$$

Прецессия (29) имеет аналог в классической задаче о движении гиростата при $a_0=0\left(\theta_0=\dfrac{\pi}{2}\right)$. Условия на параметр s_3 и функцию $\lambda(t)$ упрощаются

$$b_0 s_3 + 2n^2\left(A_{22} - A_{11}\right) = 0,\ \lambda(t) = n\left(A_{22} - A_{11}\right)\cos 2nt. \tag{30}$$

Для обобщенной задачи (1) из условий (27),(28) следует, что матрицу C в первом уравнении из системы (1) можно считать нулевой. Важное свойство прецессии (29) при условиях (27) состоит в том, что $a_0 \neq 0$.

Система уравнений (13)-(15) при $\psi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и $m = 2n$ допускает решение

$$\begin{gathered} \boldsymbol{s} = \boldsymbol{0},\ B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0\ (i, j = \overline{1,3}),\ a_0 = -\frac{1}{2},\ A_{22} = A_{11}, \\ \lambda(t) = -n\sqrt{3}\left(A_{13}\sin nt + A_{23}\cos nt\right) + A_{11}n, \end{gathered} \tag{31}$$

которое, очевидно, отличается от решения (30). В случае (31) первое уравнение системы (1) можно записать в виде

$$\frac{d\left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\right)}{dt} = \boldsymbol{0}. \tag{32}$$

Из (32) следует, что вектор $A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c}$ – постоянный вектор. То есть система (1) становится системой Жуковского с переменным гиростатическим моментом. Этот вектор можно принять за вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Прецессию, соответствующую случаю (31) можно интерпретировать, как движение, для которого ось, ортогональная круговому сечению эллипсоида инерции, будет составлять угол 120° с некоторой осью в пространстве.

6. Случай $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0, m = n,\ \psi_0 = 0$**.** Приведенные выше примеры регулярных прецессий гиростата характеризовались свойством, что вектор гиростатического момента сонаправлен с вектором, определяющим ось собственного вращения гиростата. Представляет интерес случай, когда

$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = 0$. В уравнениях (13)-(15) положим $\psi_0 = 0, m = n$. Тогда из первого уравнения этой системы следует

$$\lambda(t) = \frac{1}{a_0' n \cos nt}\left(-T_4' \cos 4nt + T_4 \sin 4nt + T_3 \cos 3nt + T_3' \sin 3nt + \right.$$
$$\left. + T_2 \cos 2nt + T_2' \sin 2nt + T_1 \cos nt + T_1' \sin nt + T_0 \right), \tag{33}$$

где

$$T_4' = \frac{1}{4} b_0'^2 (1 + a_0)^2 C_2',\ T_4 = \frac{1}{4} b_0'^2 (1 + a_0)^2 C_2,\ T_3 = \frac{b_0'}{4}(1 + a_0) \times$$
$$\times \left(2P_2 + b_0' a_0'^2 \varepsilon_1'\right),\ T_3' = \frac{b_0'}{4}(1 + a_0)\left(2P_2' + b_0' a_0'^2 \varepsilon_1\right),$$
$$T_2 = -\frac{b_0'}{2}\left[a_0'(1 + a_0)s_2 + a_0'^2 n \kappa_1 + c_0(1 - 2a_0^2 - a_0)\varepsilon_1\right] - n^2 A_2' +$$
$$+ n c_0 B_2' - \frac{1}{2}(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2) C_2',\ T_2' = -\frac{b_0'}{2}\left[a_0'(1 + a_0)s_1 + a_0'^2 n \kappa_1' + \right.$$
$$\left. + c_0(1 - 2a_0^2 - a_0)\varepsilon_1'\right] + n^2 A_2 - n c_0 B_2 + \frac{1}{2}(a_0'^2 b_0'^2 - 2c_0^2) C_2, \tag{34}$$
$$T_1 = \frac{b_0'}{2}(1 - a_0) P_2 - b_0' Q_0 - a_0 n^2 \sigma_1' - a_0' c_0 s_1 + a_0 c_0 n \kappa_1' -$$
$$- \frac{1}{4} a_0'^2 b_0'^2 (1 + a_0)\varepsilon_1 + a_0 c_0^2 \varepsilon_1',\ T_1' = \frac{b_0'}{2}(1 - a_0) P_2' + a_0 n^2 \sigma_1 -$$
$$- a_0 c_0 n \kappa_1 - -\frac{1}{4} a_0'^2 b_0'^2 (1 - 3a_0)\varepsilon_1' + a_0 c_0^2 \varepsilon_1,\ T_0 = \frac{1}{4}\left[2b_0' P_1 - 2b_0' Q_1 + \right.$$
$$\left. + b_0' C_2' (2a_0 - 1 - a_0^2)\right].$$

Подстановка функции (33) в уравнение (14) и требование того, чтобы полученное равенство было тождеством для всех значений t приводит к условиям на параметры, из которых выпишем часть условий

$$C_{ij}=0\ (i\neq j),\ C_{22}=C_{11},\ B_{22}=B_{11},\ B_{12}=0. \qquad (35)$$

На основании обозначений (8)-(10),(34) функция (33) примет вид

$$\lambda(t)=\frac{1}{a_0' n\cos nt}\left(T_2\cos 2nt+T_2'\sin 2nt+T_1\cos nt+T_1'\sin nt+T_0\right). \quad (36)$$

Здесь T_i, T_i' в силу (34),(35) имеют значения

$$\begin{aligned}
T_2&=-\frac{1}{2}\left[b_0a_0'\left((1+a_0)s_2+a_0'n\kappa_1\right)+2n^2A_2'\right],\\
T_2'&=-\frac{1}{2}\left[b_0a_0'\left((1+a_0)s_1+a_0'n\kappa_1'\right)-2n^2A_2\right],\\
T_1&=-b_0'Q_0-a_0n^2\sigma_1'-a_0'c_0s_1+a_0c_0n\kappa_1',\\
T_1'&=a_0n^2\sigma_1+a_0'c_0s_2-a_0c_0n\kappa_1.
\end{aligned} \qquad (37)$$

Поскольку $\lambda(t)$ должна быть ограниченной функцией времени, то из формулы (36) следует, что должны выполняться равенства $T_0=T_2,\ T_1'=0$. Тогда из (36) вытекает

$$\lambda(t)=\frac{1}{a_0' n}\left(2T_2'\sin nt+T_1\right). \qquad (38)$$

Внесем функцию (38) в уравнения (14),(15) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по t. Тогда в дополнение к условиям (35) получим равенства

$$s_2=0,\ A_{12}=0,\ A_{23}=0,\ B_{23}=0,\ s_1=\frac{1}{3}a_0(a_0-1)\,B_{13},$$
$$(a_0+1)nB_{13}+b_0\left(C_{11}-C_{33}\right)=0,\ b_0\left[a_0c_0\left(C_{11}-C_{33}\right)+s_3\right]+$$

$$
\begin{gathered}
+n^2(a_0+1)A_{13}-c_0s_1=0,\; b_0'(a_0+1)s_1+a_0'n^2\left[a_0A_{22}-\right.\\
\left.-(a_0+1)A_{33}\right]-a_0'c_0s_3+a_0'c_0n\left[a_0B_{33}-(a_0+1)B_{11}\right]+\\
+\frac{a_0a_0'}{2}\left(C_{11}-C_{33}\right)(b_0^2-2c_0^2)=0,\; b_0n\left[(a_0+1)^2B_{11}+a_0'^2B_{33}\right]-\\
-2a_0(a_0+1)n^2A_{13}+(a_0+1)c_0s_1-c_0n^2a_0'^2(1-a_0)B_{13}=0.
\end{gathered}
\tag{39}
$$

При выполнении условий (35),(38),(39) движение гиростата является регулярной прецессией (26).

Рассмотрим частный случай: $a_0=0$. Запишем в этом случае условия (35),(39)

$$
\begin{gathered}
s_2=0,\quad s_1=0,\quad A_{12}=0,\quad A_{23}=0,\; B_{12}=0,\; B_{23}=0,\; B_{22}=B_{11},\\
C_{ij}=0\;(i\neq j),\; C_{22}=C_{11},\; nB_{13}+b_0\left(C_{11}-C_{33}\right)=0,\; s_3=-\frac{n^2}{b_0}A_{13},\\
n\left(b_0A_{33}-c_0A_{13}\right)+b_0c_0B_{11}=0,\; b_0\left(B_{11}+B_{33}\right)-c_0B_{13}=0,
\end{gathered}
\tag{40}
$$

где $b_0=\sin\kappa,\; c_0=\cos\kappa$. Величины T_1, T_1' из (38) упрощаются и так как $a_0'=1$, то

$$
\lambda(t)=n\left(A_{22}-A_{11}\right)\sin nt-B_{11}. \tag{41}
$$

Для задачи о движении гиростата в поле силы тяжести из (40),(41) имеем

$$
s_3=-\frac{n^2}{\sin\kappa}A_{13},\; \mathrm{tg}\kappa=\frac{A_{13}}{A_{33}},\; \lambda(t)=n\left(A_{22}-A_{11}\right)\sin nt. \tag{42}
$$

В работе [5] условия (42) были получены несколько другим способом. Интересно отметить, что значение угла κ между векторами совпадает со значением κ в решении Гриоли [15]. Но в силу условий $s_2 = 0,\ s_1 = 0,\ A_{22} - A_{11} \neq 0$ центр масс не лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции.

7. Об исследовании условий существования прецессий в общем случае. В общем случае можно исключить из уравнений (13),(14) $\dot{\lambda}(t)$

$$\lambda(t) = \frac{\alpha_3\Phi_2(t) - (a_0'\alpha_1 \sin nt + a_0\alpha_3)\Phi_1(t)}{a_0'\alpha_1\left[a_0'\alpha_1 m \sin nt + \alpha_3(n + a_0 m)\right]\cos nt}. \tag{43}$$

Второе выражение для $\lambda(t)$ найдем, подставив в левую часть равенства (14) $\alpha_3\dot{\lambda}(t)$ из уравнения (13), а $a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)$ из уравнения (15)

$$\lambda(t) = \frac{\left(\Phi_2(t) - a_0\Phi_1(t)\right)\cos nt - \Phi_3(t)\sin nt}{a_0'\left[\alpha_1(n + a_0 m) - a_0'\alpha_3 m \sin nt\right]}. \tag{44}$$

Приравнивая правые части равенств (43),(44), получим

$$\varphi_1(t)\Phi_1(t) + \varphi_2(t)\Phi_2(t) + \varphi_3(t)\Phi_3(t) = 0, \tag{45}$$

где

$$\varphi_1(t) = -a_0 a_0' m\alpha_1^2 \sin^2 nt + \alpha_1\alpha_3\left[(a_0'^2 - a_0^2)m - a_0 n\right]\sin nt +$$
$$+a_0'(a_0\alpha_3^2 m - \alpha_1^2 n),\ \ \varphi_2(t) = a_0' m\alpha_1^2 \sin^2 nt + \alpha_1\alpha_3(n + a_0 m)\sin nt - \tag{46}$$
$$-a_0' m,\ \ \varphi_3(t) = \alpha_1\left[a_0'\alpha_1 m \sin nt + \alpha_3(n + a_0 m)\right]\cos nt.$$

Второе уравнение получим, рассмотрев уравнение, которое является линейной комбинацией соотношений (43),(44) и не содержит выражения $n + a_0 m$.

Вычислим производную по времени левой части полученного уравнения в силу уравнения (13) и используем (44)

$$
\begin{aligned}
& a_0\Phi_1(t)\left[-a_0'\alpha_1 m(a_0 m+\alpha_3^2 n)\sin nt+\alpha_3\left(\alpha_1^2 n(n+a_0 m)+\right.\right.\\
& \left.\left.+a_0'^2 m^2\right)\right]\cos nt+a_0' m^2(a_0\alpha_1\sin nt-a_0'\alpha_3)\Phi_2(t)\cos nt+\\
& +a_0'\alpha_1 m(n+a_0 m\cos^2 nt)\Phi_3(t)+\alpha_1\left[\alpha_1(n+a_0 m)-\right.\\
& \left.-a_0'\alpha_3 m\sin nt\right]\left[(a_0'\alpha_1+a_0\alpha_3\sin nt)\dot{\Phi}_1(t)-\alpha_3\left(\Phi_2(t)\sin nt+\right.\right.\\
& \left.\left.+\Phi_3(t)\cos nt\right)^{\cdot}\right]=0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Условия существования получим, требуя, чтобы уравнения (45),(47) были тождествами по t.

В [5] даны необходимые условия существования регулярных прецессий в классической задаче. В обозначениях, принятых в данной работе, часть условий можно записать так

$$
\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{a},\quad a_0=0,\quad \alpha_1 A_{12}=0. \tag{48}
$$

В обобщенной задаче (1) первые два условия из (48) могут не выполняться (см., например, условия (27),(39)). Это значит, что регулярная прецессия гиростата относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил может существовать при более общих условиях, чем в классической задаче.

Литература

1. Волкова О.С. О стабилизации равномерных вращений вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Труды ИПММ НАНУ. – 2007. Т. 14. – С. 41–51.

2. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
3. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ИПММ НАНУ. – 2009. Т. 19. – С. 30–35.
4. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
5. Волкова О.С. Некоторые классы движений тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом –Автореферат диссертации на соискание научной степени кандидата физ.-мат. наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. ИПММ НАНУ. – Донецк 2010. –19 с.
6. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
7. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк.: ДонНУ, 2009. – 222 с.
8. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
9. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. 1999. Т.63. Вып. 5. – С. 825-826.
10. Ковалева Л.М., Позднякович Е.В. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып.30. – С. 100-105
11. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосиб. университета. – 1965. – 221 с.
12. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.

13. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегро-дифференциальные уравнения динамики твердого тела. – Киев.: Наук. думка. – 1986. – 296 с.
14. Яхья Х.М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. – 1987. – Вып. 4. – С. 88–90.
15. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura et Appl. Ser. – 1947. – V. **26**, f. 3–4. – P. 271–281.
16. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V. **5**, №5. – P. 742-745.