ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 76. Вып. 2, 2012

УДК 531.38

© 2012 г. А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани

АСИМПТОТИЧЕСКИ-РАВНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

На основе первого метода Ляпунова получены достаточные условия существования асимптотически-равномерных движений относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Подход к исследованию уравнений движения гиростата, основанный на построении решений в замкнутом виде [1, 2], позволяет не только получить свойства движения гиростата в этом решении [2], но и изучить поведение интегральных кривых исходных дифференциальных уравнений в их “окрестности”. Эффективным методом применения данного подхода является первый метод Ляпунова [3]. Имеется обзор некоторых результатов, полученных при исследовании свойств движения гиростата с помощью первого метода Ляпунова [4]. Указаны результаты анализа асимптотических движений в классической задаче о движении тяжелого твердого тела [4–8]. В этих работах с помощью методов Ляпунова и Пуанкаре получены новые классы асимптотически-равномерных движений относительно вертикали [4], асимптотически-маятниковых движений гироскопа Гесса–Аппельрота [4], Ковалевской [6], Горячева–Чаплыгина [8], асимптотически-прецессионных движений гироскопа Гриоли [5, 7] и других движений [4].

В обобщенных задачах динамики твердого тела, имеющего неподвижную точку, первый метод Ляпунова применялся только для уравнений класса Кирхгофа–Пуассона. Были изучены асимптотически-равномерные движения гиростата относительно наклонной оси [9, 10] и некоторые классы асимптотически-прецессионных движений гиростата [11, 12]. При этом асимптотически-равномерные движения гиростата относительно наклонной оси изучены в весьма частных случаях, т.е. при определенных ограничениях, налагаемых на параметры задачи. Данная работа посвящена изучению новых достаточных условий существования асимптотически-равномерных движений гиростата относительно наклонной оси.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой, которая описывается уравнениями Кирхгофа–Пуассона. Используя принятые ранее обозначения [10–12], запишем уравнения движения в виде

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times(B\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu} - \mathbf{s}) = \mathbf{0} \qquad (1.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (1.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор вертикали, $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движения носимых тел, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1.1), (1.2) допускают интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1 \qquad (1.3)$$

$$(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})/2 = k \qquad (1.4)$$

Интерес к исследованию уравнений (1.1), (1.2) с интегралами (1.3), (1.4) связан не только с тем, что они являются обобщением классических уравнений Эйлера–Пуассона, но и с тем, что в силу гидродинамической аналогии [13] линейным преобразованием они могут быть сведены к уравнениям движения тела в жидкости (об этой задаче см. книги [14, 15]). Это значит, что все решения уравнений (1.1), (1.2) могут быть интерпретированы как решения уравнений движения тела в идеальной несжимаемой жидкости.

Следуя известному подходу [9], рассмотрим равномерные вращения гиростата относительно наклонной оси, т.е. оси, не проходящей через вектор вертикали $\mathbf{v}$. Для уравнений (1.1), (1.2) это означает, что вектор угловой скорости постоянен в системе координат, связанной с гиростатом:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{a} \tag{1.5}$$

где $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, ω_0 – постоянная. В силу формулы $d\boldsymbol{\omega}/dt = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ и соотношения (1.5) вектор $\mathbf{a}$ неизменен и в пространстве. Положим, что $|\mathbf{a}| = 1$ и $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{v}$. Таким образом, равномерные движения гиростата относительно наклонной оси можно отнести к частному случаю прецессионных движений гиростата [16]. Они могут быть описаны инвариантным соотношением $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = a_0$, где $a_0 = \cos\angle(\mathbf{a}, \mathbf{v})$. На основании этого соотношения и равенства (1.5) из уравнения (1.2) и геометрического интеграла $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$ были получены соотношения (подвижная система выбрана так, чтобы $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$) [16]

$$\begin{gathered} \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0; \quad \nu_1 = a_0' \sin\omega_0 t, \quad \nu_2 = a_0' \cos\omega_0 t, \quad \nu_3 = a_0 \\ a_0 = \cos\theta_0, \quad a_0' = \sin\theta_0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Подстановка выражений (1.6) в динамическое уравнение (1.1) и в первые интегралы приводит к следующим условиям существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси [16]:

$$\begin{gathered} s_2 = s_1 = 0, \quad C_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad C_{22} = C_{11}, \quad A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0, \quad B_{22} = B_{11} \\ \lambda_2 = a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23}, \quad \lambda_1 = a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}, \quad s_3 + \omega_0 B_{11} + a_0(C_{11} - C_{33}) = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} k = a_0 \omega_0 A_{22} + a_0 \lambda_3 - (a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33})/2 \\ 2E = \omega_0^2 A_{33} - 2a_0 s_3 + a_0'^2 C_{11} + a_0^2 C_{33} \end{gathered} \tag{1.8}$$

Представляет интерес случай, не рассмотренный ранее [16], когда условия (1.7), (1.8) выполняются для любых значений $a_0 \in (-1, 1)$. В силу равенств $C_{33} = C_{22} = C_{11}$ можно считать в уравнении (1.1) матрицу C нулевой. Остальные уравнения из (1.7) таковы:

$$\begin{gathered} s_2 = s_1 = 0, \quad B_{ij} = 0\ (i \neq j), \quad B_{22} = B_{11}, \quad \omega_0 = -s_3/B_{11} \\ \lambda_1 = -\omega_0 A_{13}, \quad \lambda_2 = -\omega_0 A_{23} \end{gathered} \tag{1.9}$$

Рассмотрим уравнения (1.1), (1.2) в окрестности решения (1.6). Положим

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{a} + \boldsymbol{\Omega}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma}; \quad \mathbf{v}^{(0)} = (a_0' \sin\omega_0 t, a_0' \cos\omega_0 t, a_0) \tag{1.10}$$

где $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – векторы возмущений. Внесем выражения (1.10) в уравнения (1.1), (1.2):

$$A\dot{\mathbf{\Omega}} = \omega_0(A\mathbf{a}\times\mathbf{\Omega} + A\mathbf{\Omega}\times\mathbf{a} + \mathbf{a}\times B\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\gamma}\times(C\mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{s} + \underline{C\boldsymbol{\gamma}}) +$$
$$+\mathbf{\Omega}\times(B\mathbf{v}^{(0)} - \boldsymbol{\lambda} - \underline{A\mathbf{\Omega} - B\boldsymbol{\gamma}}) + \mathbf{v}^{(0)}\times C\boldsymbol{\gamma} \qquad (1.11)$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \omega_0(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{a}) + \mathbf{v}^{(0)}\times\mathbf{\Omega} + \underline{\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{\Omega}}$$

Первый метод Ляпунова [3] основан на использовании свойств линейной системы, вытекающей из системы (1.11) и отличающейся от нее отсутствием подчеркнутых слагаемых. Назовем ее системой **A**. Она имеет три первых интеграла, порожденных исходными интегралами (1.3), (1.4):

$$\omega_0(A\mathbf{a}\cdot\mathbf{\Omega}) - \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\gamma} + C\mathbf{v}^{(0)}\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_1, \quad \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{v}^{(0)} = c_2 \qquad (1.12)$$
$$\omega_0(A\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{v}^{(0)}\cdot A\mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\gamma} - B\mathbf{v}^{(0)}\cdot\boldsymbol{\gamma} = c_3$$

Здесь c_i – произвольные постоянные.

В данной статье рассматриваются условия, налагаемые на параметры уравнений (1.1), (1.2), при выполнении которых векторы $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, удовлетворяющие уравнениям (1.11), при $t\to\infty$ стремятся к нулевым векторам ($\mathbf{\Omega}\to\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma}\to\mathbf{0}$).

2. Редукция линейной системы. Обозначим через $\mathbf{\Omega}_i$ координаты вектора $\mathbf{\Omega}$, а через x, y, z – координаты вектора $A\mathbf{\Omega}$. Тогда

$$\mathbf{\Omega}_i = a_{1i}x + a_{i2}y + a_{i3}z, \quad i = 1, 2, 3 \ (a_{32} = a_{23}) \qquad (2.1)$$

где a_{ij} – компоненты гирационного тензора $a = A^{-1}$. Пусть $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, тогда система **A** в скалярной форме имеет вид

$$\dot{x} = \omega_0 y + g_0(t)\Omega_2 - a_0' B_{11}\Omega_3\cos\omega_0 t + h_0(t)\gamma_3$$
$$\dot{y} = -\omega_0 x - g_0(t)\Omega_1 + a_0' B_{11}\Omega_3\sin\omega_0 t - f_0(t)\gamma_3 \qquad (2.2)$$
$$\dot{z} = a_0' B_{11}(\Omega_1\cos\omega_0 t - \Omega_2\sin\omega_0 t)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_0\gamma_2 - a_0\Omega_2 + a_0'\Omega_3\cos\omega_0 t$$
$$\dot{\gamma}_2 = -\omega_0\gamma_1 + a_0\Omega_1 - a_0'\Omega_3\sin\omega_0 t \qquad (2.3)$$
$$\dot{\gamma}_3 = a_0'(\Omega_2\sin\omega_0 t - \Omega_1\cos\omega_0 t)$$

Аналоги интегралов (1.12) для уравнений (2.2), (2.3) запишем в виде

$$z + B_{11}\gamma_3 = b_1^*, \quad a_0'(\gamma_1\sin\omega_0 t + \gamma_2\cos\omega_0 t) + a_0\gamma_3 = b_2^* \qquad (2.4)$$
$$a_0'(x\sin\omega_0 t + y\cos\omega_0 t) - g_0(t)\gamma_3 = b_3^*$$

Здесь b_1^*, b_2^*, b_3^* – произвольные постоянные. В уравнениях (2.2) использованы обозначения

$$g_0(t) = a_0' B_{13}\sin\omega_0 t + a_0' B_{23}\cos\omega_0 t - \lambda_3 - \omega_0 A_{33} + a_0 B_{33} \qquad (2.5)$$
$$h_0(t) = a_0'(C_{33} - C_{11})\cos\omega_0 t - \omega_0 B_{23}, \quad f_0(t) = a_0'(C_{33} - C_{11})\sin\omega_0 t - \omega_0 B_{13}$$

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо в уравнения (2.2), (2.3) подставить величины (2.1).

Согласно основной теореме первого метода Ляпунова [3] для исследования асимптотических решений уравнений (1.11) следует найти условия существования у линейной системы (2.2), (2.3) положительных характеристичных чисел (ХЧ). Поскольку в силу соотношений (2.1), (2.5) система (2.2), (2.3) является системой с периодическими коэффициентами периода $2\pi/\omega_0$ и допускает три независимых первых интеграла (2.4), то система (2.2), (2.3) имеет четыре нулевых ХЧ [4]. Для определения знаков двух оставшихся ХЧ требуется понизить порядок системы (2.2), (2.3) с помощью интегралов (2.4) [4].

Введем вместо x, y переменные u, υ, а вместо γ_1, γ_2 переменные β_1, β_2:

$$\begin{aligned} x &= u\sin\omega_0 t + \upsilon\cos\omega_0 t, \quad y = u\cos\omega_0 t - \upsilon\sin\omega_0 t \\ \gamma_1 &= \beta_1\sin\omega_0 t + \beta_2\cos\omega_0 t, \quad \gamma_2 = \beta_1\cos\omega_0 t - \beta_2\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{2.6}$$

Оставив переменные z и γ_3 без изменений, на основании соотношений (2.6) получим преобразование Ляпунова, которое не изменяет ХЧ системы (2.2), (2.3).

В новых переменных система (2.2), (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot u &= g_0(t)[g_1(t)u + g_2^-(t)\upsilon + g_3(t)z] + g_5(t)\gamma_3 \\ \dot\upsilon &= [g_0(t)g_2^+(t) - \kappa g_4(t)]u + [\kappa g_3(t) - g_0(t)g_1(t)]\upsilon + [g_0(t)g_4(t) - \kappa a_{33}]z + g_6(t)\gamma_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\dot z = -\kappa[g_1(t)u + g_2^-(t)\upsilon + g_3(t)z] \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \dot\beta_1 &= -\frac{a_0}{a_0'}\dot\gamma_3 = -a_0[g_1(t)u + g_2^-(t)\upsilon + g_3(t)z] \\ \dot\beta_2 &= [a_0'g_4(t) - a_0g_2^+(t)]u + [a_0g_1(t) - a_0'g_3(t)]\upsilon + [a_0'a_{33} - a_0g_4(t)]z \end{aligned} \tag{2.9}$$

В силу соотношений (2.1), (2.5), (2.6) введены обозначения

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -b_-\sin 2\omega_0 t - a_{12}\cos 2\omega_0 t, \quad g_2^\pm(t) = -b_-\cos 2\omega_0 t + a_{12}\sin 2\omega_0 t \pm b_+ \\ g_3(t) &= a_{23}\sin\omega_0 t - a_{13}\cos\omega_0 t, \quad g_4(t) = a_{23}\cos\omega_0 t + a_{13}\sin\omega_0 t \\ g_5(t) &= \omega_0(B_{13}\cos\omega_0 t - B_{23}\sin\omega_0 t) \\ g_6(t) &= a_0'(C_{33} - C_{11}) - \omega_0(B_{13}\sin\omega_0 t + B_{23}\cos\omega_0 t) \\ \kappa &= a_0'B_{11}, \quad b_\pm = (a_{11} \pm a_{22})/2 \end{aligned}$$

Интегралы (2.4) в новых переменных таковы:

$$z + B_{11}\gamma_3 = b_1^*, \quad a_0'\beta_1 + a_0\gamma_3 = b_2^*, \quad a_0'u - g_0(t)\gamma_3 = b_3^* \tag{2.10}$$

Полагая, что выполнено условие $g_0(t) \neq 0$, для понижения порядка системы (2.7)–(2.9) из первого и третьего интегралов (2.10) найдем выражение для z и γ_3 и подставим их в уравнения (2.7). В силу периодичности коэффициентов при u, υ и свободных членов в полученной таким образом системе ее ненулевые ХЧ может иметь только соответствующая однородная система

$$\dot{u} = \frac{G(t) + a_0' g_5(t)}{g_0(t)} u + g_0(t) g_2^-(t) \upsilon, \quad \dot{\upsilon} = \frac{H(t)u - G(t)\upsilon}{g_0(t)} \tag{2.11}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(t) &= g_0(t)[g_0(t)g_1(t) - \kappa g_3(t)] \\ H(t) &= g_0^2(t)g_2^+(t) - 2\kappa g_0(t)g_4(t) + a_{33}\kappa^2 + a_0' g_6(t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Так как по предположению $g_0(t) \neq 0$ и в силу введенных выше обозначений $g_2^-(t) < 0$, то для получения из системы (2.11) уравнения с одной переменной выразим переменную υ из первого уравнения системы (2.11) и подставим результат во второе уравнение этой системы. Полученное таким образом уравнение приведем к уравнению Хилла с помощью замены

$$u = w\sqrt{-h(t)}, \quad h(t) = g_0^2(t)g_2^-(t)$$

которая в силу условия $g_2^-(t) < 0$ является действительной. Получим

$$\ddot{w} + [\ddot{h}(t)/(2h(t)) - 3(\dot{h}(t))^2/(4h^2(t)) + P(t)]w = 0 \tag{2.13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{g_0(t)h(t)}\left[\dot{h}(t)R(t) - h(t)\dot{R}(t) - \frac{h^2(t)H(t)}{g_0(t)} - \frac{h(t)G(t)R(t)}{g_0(t)}\right] \\ R(t) &= G(t) + a_0' g_5(t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

При нахождении условий существования асимптотически-равномерных движений гиростата согласно теореме Ляпунова необходимо потребовать, чтобы уравнение (2.13) имело решение с положительным ХЧ. Для этого можно воспользоваться либо достаточным условием Ляпунова, либо теорией параметрического резонанса [17].

3. Случай $a_0 \in (-1, 1)$. Предположим, что выполняются условия (1.9). Выбором системы координат можно добиться выполнения равенства $a_{12} = 0$. Из первого равенства (2.5) вытекает, что $g_0(t)$ не зависит от времени. Обозначая $g_0(t) = \beta_0$, из уравнения (2.13) получим уравнение класса Хилла

$$w'' + p(\tau)w = 0; \quad \tau = \omega_0 t \tag{3.1}$$

где $p(\tau)$ — отношение тригонометрических многочленов восьмого и четвертого порядков, а штрихом обозначена производная по переменной τ.

Аналог уравнения (3.1) ранее [10] не рассматривался, так как предполагалось, что параметр a_0 принимает фиксированные значения, определенные системой (1.7); кроме этого, использовалось только достаточное условие Ляпунова существования положительного ХЧ у уравнения Хилла.

Проведем анализ уравнения (3.1) при следующих условиях:

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{23} = 0, \quad s_3 + 2a_{11}B_{11}(a_0B_{33} - \lambda_3 - \omega_0 A_{33}) = 0 \tag{3.2}$$

означающих, что вектор $\boldsymbol{s}$ принадлежит оси, ортогональной круговому сечению гирационного эллипсоида $a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}xz = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$w'' + \frac{1}{2\omega_0^2}\{-a_{13}^2\kappa^2\cos 2\tau + [2a_{11}^2\beta_0^2 + \kappa^2(2a_{11}a_{33} - a_{13}^2)]\}w = 0 \tag{3.3}$$

Воспользуемся теорией параметрического резонанса [17]. Вводя параметры

$$\lambda^2 = \xi_0/(2\omega_0^2), \quad \mu = -a_{13}^2\kappa^2/\xi_0, \quad \xi_0 = 2a_{11}^2\beta_0^2 + \kappa^2(2a_{11}a_{33} - a_{13}^2)$$

уравнение (3.3) запишем в виде

$$w'' + \lambda^2(1 + \mu\cos 2\tau)w = 0 \tag{3.4}$$

Величина параметра a_0' произвольна, поэтому можно его выбрать таким образом, чтобы считать μ малым параметром. Тогда к уравнению можно применить метод малого параметра и в окрестности натуральных значений по λ^2 найти интервалы неустойчивости решений уравнения (3.4). Приведем примеры, в которых уравнение (3.4) имеет решение вида

$$w(\tau) = c_1w_1(\tau) + c_2w_2(\tau); \quad w_1(\tau) = \psi_1(\tau)e^{\alpha^2\tau}; \quad w_2(\tau) = \psi_2(\tau)e^{-\alpha^2\tau} \tag{3.5}$$

Здесь $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ – π-периодические функции τ, α^2, $-\alpha^2$ – характеристические показатели, связанные с корнями характеристического уравнения

$$\rho^2 - 2D\rho + 1 = 0; \quad D = (w_1(\pi) + w_2(\pi))/2$$

где $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$ – два независимых частных решения уравнения (3.4), определяемые равенствами

$$\alpha^2 = \pi^{-1}\ln\rho_1, \quad -\alpha^2 = \pi^{-1}\ln\rho_2; \quad \rho_1 > 0, \quad 0 < \rho_2 < 1$$

Если параметры задачи λ и μ удовлетворяют одному из условий

$$4 - \frac{1}{3}\mu^2 + \ldots \le \lambda^2 \le 4 + \frac{5}{3}\mu^2 + \ldots \tag{3.6}$$

или

$$9 + \frac{81}{64}\mu^2 - \frac{729}{512}\mu^3 + \ldots \le \lambda^2 \le 9 + \frac{81}{64}\mu^2 + \frac{729}{512}\mu^3 + \ldots \tag{3.7}$$

то уравнение (3.4) допускает решение (3.5), в котором c_1 и c_2 – произвольные постоянные. ХЧ связаны с характеристическими показателями равенством $\lambda_k = -\mathrm{Re}\pi^{-1}\ln\rho_k$. Это значит, что решение $w_2(\tau)$ имеет положительное ХЧ. Оно порождает решение системы уравнений (2.7)–(2.9), которое имеет положительное ХЧ. Это решение можно получить, используя формулу

$$u = -\beta_0 w\sqrt{-g_2^-(t)}$$

второе уравнение (2.11) и второе уравнение (2.9). Исходные переменные задачи можно получить с помощью формул (2.6). Следовательно, при условии (3.6) или (3.7) линейная система (2.2), (2.3) допускает одно решение с положительным ХЧ. Поскольку она является правильной [3], то нелинейная система (1.11) допускает решение

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad \gamma_1 = x_4, \quad \gamma_2 = x_5, \quad \gamma_3 = x_6$$

которое при $t \to \infty$, $x_i(t) \to 0$ представимо в виде рядов Ляпунова

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} L_i^{(m)}(t)\alpha_*^m e^{-\alpha^2 mt} \tag{3.8}$$

Поэтому, если выполняется условие (3.6) или (3.7), то существует однопараметрическое семейство решений (3.8), которое описывает асимптотически-равномерное движение гиростата относительно наклонной оси. Отметим, что в соотношениях (3.8) α_* – произвольная постоянная, а ряды (3.8) сходятся абсолютно [3].

Используя условия (3.2) можно показать, что гиростат представляет собой гироскоп Гесса [18].

4. Случай, когда вектор а принадлежит главной оси. Если гиростат (1.5) равномерно вращается относительно главной оси, то выполняются равенства

$$A_{ij} = 0 \ i \neq j \ (a_{ij} = 0 \ i \neq j)$$

Следовательно, уравнение (3.1) принимает вид

$$\begin{gathered} \ddot{w} + \frac{B_{11}^2}{C^2\xi^2} f(\xi) w = 0 \\ f(\xi) = \xi^3 + a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1, \quad \xi = C(b_+ - b_-\cos 2\omega_0 t), \quad C = \frac{1}{a_{33}} \end{gathered} \tag{4.1}$$

В общем случае величины a_1, b_1, c_1 имеют сложный вид, поэтому выпишем их для случая $\lambda_3 = a_0 B_{33}$, смысл которого состоит в том, что третья компонента гиростатического момента линейно зависит от элемента B_{33} матрицы B, определяющей гироскопические силы. Вводя вместо a_{11}, a_{22}, a_{33} главные моменты инерции

$$a_{11} = 1/A, \quad a_{22} = 1/B, \quad a_{33} = 1/C$$

из уравнения (3.1) имеем

$$\begin{gathered} a_1 = (B - C)(A - C)c_1/(3C^2), \quad b_1 = -2(A + B - C)c_1/(3C) \\ c_1 = 3\omega_0^2 C^4/(AB\kappa^2) \end{gathered} \tag{4.2}$$

Переменная ξ изменяется в промежутке $[C/B, C/A]$ (считаем $A < B$).

Потребуем, чтобы уравнение

$$f(\xi) = \xi^3 + a_1\xi^3 + b_1\xi + c_1 = 0 \tag{4.3}$$

имело один действительный корень и чтобы $f(C/A) < 0$. Положив

$$A = \alpha_0, \quad B = 2\alpha_0, \quad C = 3\alpha_0/2$$

где α_0 – положительный параметр, последнему неравенству можно удовлетворить достаточно большими положительными значениями параметра ω_0.

Уравнение (4.3) будет иметь один действительный корень, если

$$a_1^2(3b_1^2+4a_1c_1)+4b_1(b_1^2-a_1^2)-18a_1b_1c_1+27c_1^2>0 \tag{4.4}$$

Наибольший порядок по ω_0^2 в этом условии имеет первое слагаемое. В силу соотношений (4.2) и выбранных значений главных моментов инерции выражение $3b_1^2+4a_1c_1$ положительно, поэтому существуют такие значения ω_0^2, которые удовлетворяют как условию $f(C/A)<0$, так и неравенству (4.4).

Итак, когда гиростат (1.5) вращается относительно главной оси, существует его асимптотически-равномерное движение относительно наклонной оси.

5. Особый случай $g_0(t)=0$. В силу соотношений (2.5) имеем

$$B_{23} = B_{13} = 0, \quad \lambda_3 = \omega_0 A_{33}-a_0B_{33} \tag{5.1}$$

При выполнении равенств (5.1) и при учете соотношений (1.7) заключаем, что уравнения (2.7) принимают вид

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{\upsilon} = \kappa[g_3(t)\upsilon-a_{33}z-g_4(t)u]+g_6(t)\gamma_3 \tag{5.2}$$

а уравнения (2.8), (2.9) остаются прежними.

Используя первый и последний интегралы (2.10) из системы (5.2), (2.8) получим неоднородную систему на переменные υ и z. Для исследования положительных ХЧ этой системы рассмотрим однородную систему, из которой найдем формулу для переменной υ и уравнение Хилла относительно переменной w (полагаем $z=w\sqrt{-g_2^-(t)}$, учитывая условие $g_2^-(t)<0$)

$$\upsilon = -\frac{\dot{z}+\kappa g_3(t)z}{\kappa g_2^-(t)} \tag{5.3}$$

$$\ddot{w} = \{-3(\ddot{g}_2^-(t))^2/(4(g_2^-(t))^2)+\ddot{g}_2^-(t)/(2g_2^-(t))+\kappa[\dot{g}_3(t)-\dot{g}_2^-(t)g_3(t)/g_2^-(t)]-$$
$$-\kappa^2g_3^2(t)-a_0'g_2^-(t)[\kappa a_{33}+g_6(t)]\}w = 0 \tag{5.4}$$

Ранее рассматривался случай гиростата, представляющего собой гироскоп Гесса, при условиях $g_0(t)\neq 0$, (1.9) и $C=0$ (матрица C в уравнение (1.1) не входит) [17] и для анализа асимптотически-равномерных движений гиростата применялась теория параметрического резонанса. Здесь обратимся к этому случаю, принимая во внимание уравнение (5.4).

Пусть $a_{12}=0$, $a_{23}=0$, $a_{22}=a_{11}$, что соответствует условиям Гесса для распределения масс в гиростате. Так как при этом $A_{23}=0$, то из условий (1.7) следует, что

$$\mathbf{s} = (0,0,s_3), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,0,\lambda_3)$$

и гиростат представляет собой гироскоп Гесса. Уравнение (5.4) принимает вид

$$\ddot{w}+\{a_{13}^2\kappa^2\sin^2\omega_0t+a_{13}\kappa\omega_0\sin\omega_0t+\kappa^2(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)+a_0'^2a_{11}(C_{33}-C_{11})\}w = 0 \tag{5.5}$$

Коэффициент при w отрицателен при всех значениях t, если выполнены условия

$$\frac{a_{11}}{a_{13}\kappa}G_0 < \omega_0 \le -\frac{a_{11}}{a_{13}\kappa}G_0; \quad G_0 = a_{33}\kappa^2 + a_0'^2(C_{33} - C_{11}) < 0 \tag{5.6}$$

Таким образом, при выполнении этих условий уравнение (5.5) имеет одно решение с положительным ХЧ [3]. Это значит, что система (5.2), (2.8), (2.9) имеет четыре нулевых ХЧ и два ХЧ противоположных знаков. Решение уравнения (5.5) можно найти в виде, аналогичном решению (3.5). Тогда по формуле (5.3) можно определить функцию $\upsilon = \upsilon(t)$, по формулам (2.10) (при $g_0(t) = 0$) – функции $\gamma_3(t)$, $\beta_1(t)$ и u, а из второго уравнения (2.9) – функцию $\beta_2(t)$. Исходные переменные можно определить из соотношений (2.6). Ряды Ляпунова, которые описывают асимптотически-равномерное движение гироскопа Гесса при условиях (1.7), (5.1), (5.6), имеют вид (3.8). При этом для первого приближения в формулах (2.10) необходимо положить

$$b_1^* = b_2^* = b_3^* = 0$$

Если при $g_0(t) = 0$ гиростат равномерно вращается относительно главной оси, уравнение (5.4) принимает вид

$$\ddot{w} + [\omega_0^2 b_-(2b_+\cos 2\omega_0 t - b_-\sin^2 2\omega_0 t - 2b_-)/(b_+ - b_-\cos 2\omega_0 t)^2 +$$
$$+ G_0(b_+ - b_-\cos 2\omega_0 t)]w = 0 \tag{5.7}$$

Можно показать, что при $G_0 > 0$ существуют значения параметра ω_0, для которых выражение в квадратных скобках в уравнении (5.7) отрицательно для всех t. Это показывает применимость условия Ляпунова [3] и возможности получения однопараметрического класса асимптотически-равномерных движений гиростата относительно наклонной оси для случая, когда предельное движение – движение относительно главной оси гиростата.

Авторы благодарят Г.В. Горра за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. Киев: ИПММ НАН Украины, 2000. Вып. 30. С. 1–13.
2. *Kharlamov P.V.* New methods in the dynamics of systems of rigid bodies // Dynamics of Multibody System: Proc. IUTAM Symp. Berlin: Springer, 1978. P. 133–143.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
4. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании асимптотических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, ИПММ АН Украины, 1992. Вып. 24. С. 25–41.
5. *Брюм А.З.* Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // Механика твердого тела. Киев: ИПММ АН Украины, 1987. Вып. 19. С. 68–72.
6. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
7. *Маркеев А.П.* Об устойчивости прецессии Гриоли // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 556–572.
8. *Маркеев А.П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 282–293.

9. *Горр Г.В., Ковалев В.М.* Об асимптотически-равномерных движениях вокруг наклонной оси в обобщенной задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. Киев: ИПММ АН УССР, 1988. Вып. 20. С. 13–18.
10. *Вархалев Ю.П., Ковалев В.М.* Об асимптотически-равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, ИПММ АН УССР, 1990. Вып. 22. С. 43–48.
11. *Горр Г.В., Думбай Д.И.* Об асимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. Киев: ИПММ НАН Украины, 1994. Вып. 26 (I). С. 20–28.
12. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Об асимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата // Механика твердого тела. Киев: ИПММ НАН Украины, 2008. Вып. 38. С. 56–62.
13. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mech. Theor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
14. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
15. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
16. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. Донецк: Изд-во ДонНУ, 2009. 222 с.
17. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
18. *Hess W.* Über die Eulerschen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. V. 37. №. 2. S. 153–181.

Донецк, Украина
e-mail: maznev_av@rambler.ru

Поступила в редакцию
2.XI.2010