УДК 531.38

Один случай прецессии общего вида гиростата с переменным гиростатическим моментом

А.В. Мазнев

В статье рассмотрена прецессия общего вида гиростата с переменным гиростатическим моментом, характеризующаяся постоянством произведения скоростей прецессии и собственного вращения. Получены новые решения уравнений движения гиростата под действием силы тяжести и уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Введение. Прецессионные движения гиростата находят широкое применение в приложениях [1], так как они имеют наглядный механический смысл. Для этих движений постоянен угол между двумя осями $l_1,\ l_2$ с общим началом в неподвижной точке O и фиксированными соответственно в гиростате и в неподвижном пространстве [2,3]. Обзор результатов, полученных в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом, изложен в книге [4].

Задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом рассматривалась в работах Ж. Лиувилля [5], В. Вольтерра [6], Н.Е. Жуковского [7], П.В. Харламова [8] и других. Следует подчеркнуть, что в работе [8] предложен достаточно общий подход, который характеризуется свойством, что тело-носитель имеет произвольное распределение масс, а носимые тела вращаются вокруг закрепленных в теле-носителе осей, несущих центры масс носимых тел и являющихся осями динамической симметрии этих тел.

Равномерные движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом рассмотрены в работах [9-11]. Исследованию простейших классов прецессионных движений посвящены работы [12,13].

В статье [14] предложен общий метод изучения прецессий гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. В ней получена система трех дифференциальных уравнений на три функции – $\lambda(t),\ \varphi(t),\ \psi(t),$ где $\lambda(t)$ – величина гиростатического момента, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – углы Эйлера, характеризующие скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Метод [14] позволяет исследовать различные классы прецессий [4]. Особое место в классификации прецессий занимает прецессия гиростата класса А.И. Докшевича [15]. Она характеризуется свойством постоянства произведения скорости прецессии и скорости собственного вращения гиростата под действием силы тяжести. Обобщение прецессии [15] в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае постоянного гиростатического момента дано в книге [4]. В данной работе рассмотрены условия существования прецессии класса А.И. Докшевича в случае переменного гиростатического момента для задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Получены новые решения уравнений движения гиростата.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [8,16]

$$
\begin{gathered}
A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}\right)\times\boldsymbol{\omega} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}, \\
\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L.
\end{gathered} \tag{1}
$$

где– $\boldsymbol{\omega} = \left(\omega_1, \omega_2, \omega_3\right)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = \left(\nu_1, \nu_2, \nu_3\right)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор, характеризующий направление вектора гиростатического момента $\lambda\boldsymbol{\alpha}$; L – проекция момента сил на ось вращения носимого тела; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, λ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1,\quad \left(A\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\alpha}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}\left(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)=k, \tag{2}$$

где k – произвольная постоянная.

Отметим, что при заданной функции $L=L(t)$ уравнения (1) в скалярном виде представляют собой систему семи обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной статье поставим задачу об изучении прецессионных движений гиростата, описываемых уравнениями (1) в предположении $L(t)\neq 0$. Следуя [14] прецессионные движения опишем инвариантными соотношениями

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=a_0,\qquad \boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}(t)\boldsymbol{a}+\dot{\psi}(t)\boldsymbol{\nu}, \tag{3}$$

Здесь $a_0=\cos\theta_0$ (θ_0 – угол между единичными векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$), $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ – скорости собственного вращения и прецессии гиростата.

Уравнение Пуассона из (1), после подстановки в него второго соотношения из (3), примет вид

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}), \tag{4}$$

Согласно методу из [3] кинематическому соотношению $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1$ из системы (2), условию $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=a_0$ и уравнению (4) удовлетворим, положив

$$\nu_1=a_0'\sin\varphi,\quad \nu_2=a_0'\cos\varphi,\quad \nu_3=a_0. \tag{5}$$

где $a_0'=\sin\theta_0$.

Внесем $\boldsymbol{\omega}$ из системы (3) и $L = \dot{\lambda}$ из системы (1) в динамическое уравнение системы (1)

$$\dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} - \lambda\left[\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu})\right] + \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\dot{\psi}\left[Sp(A)(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}) -\right.$$
$$\left. -2\left(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}\right)\right] - \dot{\varphi}^2\left(A\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\right) - \dot{\psi}^2\left(A\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}\right) - \dot{\varphi}\left(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\nu}\right) - \dot{\psi}\left(\boldsymbol{\nu}\times B\boldsymbol{\nu}\right) - \quad (6)$$
$$-\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}.$$

Здесь $Sp(A)$ – след матрицы A.

Отметим, что при получении формул (5) подвижная система координат введен так, что третья ось этой системы направлена по вектору $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$. Не смотря на это обстоятельство уравнение (?) можно использовать в произвольной системе координат, в частности, в главной системе координат. Однако для этой цели необходимо вместо соотношений (5) использовать другие соотношения (см., например, формулы (1.16),(1.17) на стр. 14 книги [4]).

Прецессия [15] характеризуется соотношением

$$\dot{\psi} = \frac{\sigma_0}{\dot{\varphi}} \qquad (7)$$

где σ_0 – постоянный параметр, $\dot{\varphi} \neq 0$.

Поставим задачу об исследовании уравнения (6) в предположениях: $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$; ν_i – выражаются соотношениями (5); скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ связаны условиями (7).

Следуя методу [14] найдем проекции левой части уравнения (6) на независимые векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\nu}$. Тогда имеем три уравнения (без ограничения общности считаем $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$)

$$\alpha_3 \dot{\varphi}^2 \dot{\lambda} - a_0'\alpha_1\sigma_0 \dot{\varphi}\lambda\cos\varphi + A_{33}\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi} - \sigma_0\ddot{\varphi}\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right) + \qquad (8)$$
$$+\dot{\varphi} h_2(\varphi)+\dot{\varphi}^2 g_2(\varphi)+f_2(\varphi)=0,$$

$$\dot{\varphi}\lambda\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3\right)+\dot{\varphi}^2\left(\beta_1\cos\varphi+\beta_1'\sin\varphi+\beta_0\right) - \qquad (9)$$
$$-\dot{\varphi} H_2(\varphi)+G_2(\varphi)=0,$$

$$a_0'\alpha_1\dot{\varphi}^2\dot{\lambda}\cos\varphi + a_0'\dot{\varphi}\lambda\left[\sigma_0\left(a_0'\alpha_3 - a_0\alpha_1\sin\varphi\right) - \alpha_1\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right] +$$
$$+\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}\left(\beta_1'\cos\varphi-\beta_1\sin\varphi\right) - \ddot{\varphi} F_2(\varphi) - \dot{\varphi}^2 K_2(\varphi) - \dot{\varphi}^4\left(\beta_1\cos\varphi + \right. \qquad (10)$$
$$\left.+\beta_1'\sin\varphi\right) + \dot{\varphi}\left[\dot{\varphi}^2 L_2(\varphi) + N_2(\varphi)\right] + \dot{\varphi}^2 M_2(\varphi) - Q_2(\varphi) = 0,$$

где

$$h_2(\varphi)=\sigma_0\left(B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0\gamma_1'\cos\varphi - a_0\gamma_1\sin\varphi\right),$$
$$g_2(\varphi)=C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi + \kappa_0'\cos\varphi - \kappa_0\sin\varphi,$$
$$f_2(\varphi)=\sigma_0^2\left(A_2\sin 2\varphi - A_2'\cos 2\varphi + a_0\beta_1\sin\varphi - a_0\beta_1'\cos\varphi\right),$$
$$H_2(\varphi)=\frac{1}{2}\left[B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + 2a_0\gamma_1\cos\varphi + 2a_0\gamma_1'\sin\varphi + \left(B_0+2k\right)\right],$$
$$G_2(\varphi)=\sigma_0\left(A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + 2a_0\beta_1\cos\varphi + 2a_0\beta_1'\sin\varphi + A_0\right),$$
$$F_2(\varphi)=\sigma_0\left(A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + a_0\beta_1'\cos\varphi - a_0\beta_1\sin\varphi\right), \qquad (11)$$
$$K_2(\varphi)=\sigma_0\left(2A_2\cos 2\varphi + 2A_2'\sin 2\varphi + 2a_0\beta_1\cos\varphi + 2a_0\beta_1'\sin\varphi - a_0'^2 A_{33}\right),$$
$$L_2(\varphi)=B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi + \frac{1}{2}a_0'^2\left(B_{11}+B_{22}\right),$$
$$N_2(\varphi)=\sigma_0\left[a_0 B_2\cos 2\varphi + a_0 B_2'\sin 2\varphi + \left(2a_0^2-1\right)\gamma_1\cos\varphi + \right.$$
$$\left. +\left(2a_0^2-1\right)\gamma_1'\sin\varphi + \frac{a_0 a_0'^2}{2}\left(B_{11}+B_{22}-2B_{33}\right)\right],$$
$$M_2(\varphi)=a_0 C_2\cos 2\varphi + a_0 C_2'\sin 2\varphi + \left[\left(2a_0^2-1\right)\varepsilon_1 - a_0 a_0' s_2\right]\cos\varphi +$$

$$+\left[\left(2a_0^2-1\right)\varepsilon_1'-a_0a_0's_1\right]\sin\varphi+\frac{a_0'^2}{2}\left[a_0\left(C_{11}+C_{22}-2C_{33}\right)+2s_3\right],$$

$$Q_2(\varphi)=\sigma_0^2\Big[a_0A_2\cos 2\varphi+a_0A_2'\sin 2\varphi+\left(2a_0^2-1\right)\beta_1\cos\varphi+$$

$$+\left(2a_0^2-1\right)\beta_1'\sin\varphi+\frac{a_0a_0'^2}{2}\left(A_{11}+A_{22}-2A_{33}\right)\Big].$$

В функциях (11) введены обозначения

$$A_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(A_{22}-A_{11}\right),\ A_2'=a_0'^2A_{12},\ A_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(A_{22}+A_{11}\right)+2a_0^2A_{33}\right],$$

$$B_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(B_{22}-B_{11}\right),\ B_2'=a_0'^2B_{12},\ B_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(B_{22}+B_{11}\right)+2a_0^2B_{33}\right],$$

$$C_2=\frac{a_0'^2}{2}\left(C_{22}-C_{11}\right),\ C_2'=a_0'^2C_{12},\ C_0=\frac{1}{2}\left[a_0'^2\left(C_{22}+C_{11}\right)+2a_0^2C_{33}\right],\quad (12)$$

$$\beta_1=a_0'A_{23},\ \beta_1'=a_0'A_{13},\ \beta_0=a_0A_{33},\ \gamma_1=a_0'B_{23},\ \gamma_1'=a_0'B_{13},$$

$$\varepsilon_1=a_0'C_{23},\ \varepsilon_1'=a_0'C_{13},\quad \kappa_0=a_0\varepsilon_1-a_0's_2,\quad \kappa_0'=a_0\varepsilon_1'-a_0's_1.$$

Основная задача состоит в определении условий существования решений $\varphi(t),\ \lambda(t)$ системы (8)-(10) с учетом свойства ограниченности функции $\lambda=\lambda(t)$. При этом, в силу сложности системы (8)-(10) (нелинейности по скорости собственного вращения и наличия её второй производной), решение этой системы будем искать в классе функций

$$\dot{\varphi}=\sqrt{c_0+c_1\sin\varphi},\quad \lambda=p_0+p_1\sin\varphi+\varepsilon_0\sqrt{c_0+c_1\sin\varphi}.\qquad (13)$$

Выбор зависимости $\dot{\varphi}$ от переменной φ, которая определяется первой формулой из системы (13), обосновано результатом [17], полученным при анализе условий существования прецессий в решении [15]. Структура функции $\lambda(\varphi)$ из (13) получена на основе анализа уравнений (8)-(10).

Случай $p_0 = 0,\ p_1 = 0.$ Из второй формулы системы (13) вытекает равенство $\lambda = \varepsilon_0 \varphi$. Подставим эту функцию и первое выражение из (13) в уравнения (8)-(10) и потребуем, чтобы они становились тождествами по переменной φ. Тогда, в силу соотношений (11) и обозначений (19), условия существования решения (13) получим в виде системы алгебраических уравнений на параметры задачи, которая имеет, например, решение

$$A_{12} = A_{23} = 0, \qquad B_{ij} = 0\ (i, j = \overline{1,3}), \qquad k = 0, \tag{14}$$

$$C_{11} = C_{22}, \qquad C_{ij} = 0\ (i \neq j), \qquad s_2 = 0, \tag{15}$$

$$c_0 = \frac{4a_0\alpha_3 s_1}{\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13}}, \qquad c_1 = \frac{4a_0'\alpha_1 s_1}{\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13}}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha_1\left[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - 2A_{13}^2\right] + \alpha_3 A_{13}(A_{11} - A_{22})}{2\alpha_1\left[\alpha_1 A_{13} + \alpha_3(A_{11} - A_{22})\right]},$$
$$\sigma_0 = \frac{2\alpha_1 s_1}{\alpha_3(A_{11} - A_{22}) - \alpha_1 A_{13}}, \tag{17}$$

$$tg^2\theta_0 = \frac{1}{\alpha_1^2}\left[\alpha_3^2(A_{22} - A_{11}) + 2\alpha_1\alpha_3 A_{13} - \alpha_1^2 A_{33}\right], \tag{18}$$

$$\alpha_1^{(1,2)} = \frac{\alpha_3}{\delta_3}\left[-A_{13}(A_{33} + A_{11} - A_{22}) \pm \delta_1\delta_2\right], \tag{19}$$

$$s_3 = \frac{1}{a_0'c_0}\Big[c_0\, a_0'a_0\left(C_{33} - C_{22}\right) - \frac{1}{2}\alpha_1\varepsilon_0 c_0 c_1 - a_0'\varepsilon_0 c_0\alpha_3\sigma_0 -$$
$$-\frac{1}{2}c_0 c_1 A_{13} + \frac{1}{2}a_0\sigma_0 c_1 A_{13} + \sigma_0 c_0 b_1 + \sigma_0^2 b_2\Big], \tag{20}$$

$$\delta_1 = \sqrt{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}, \qquad \delta_2 = \sqrt{A_{13}^2 + \left(A_{22} - A_{11}\right)\left(A_{33} - A_{22}\right)},$$
$$\delta_3 = A_{33}\left(A_{22} - A_{33}\right) - A_{13}^2, \qquad b_1 = a_0'\left(A_{22} - A_{11} - A_{33}\right), \tag{21}$$
$$b_1 = a_0' a_0\left(A_{22} - A_{33}\right).$$

Из равенств (14),(15) вытекает, что матрица B в уравнениях (1) отсутствует, постоянная интеграла площадей из (2) равна нулю, центр масс гиростата принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции, а матрица C отлична от нулевой матрицы. Компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}$ определяются формулой (19) и равенством $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 1$. Пример разрешимости этих уравнений может характеризоваться следующими значениями моментов инерции: $A_{11} = \mu_0$, $A_{22} = 3\mu_0$, $A_{33} = 2{,}5\mu_0$, $A_{13} = 1{,}5\mu_0$ (μ_0 – параметр). Очевидно, что при этом правая часть выражения (18) положительна. Поскольку параметры ε_0 и σ_0 входят в соотношения (17) линейно, то их действительность очевидна. В силу первой формулы из системы (13) и вида значений c_0, c_1 из (16) выбором параметра s_1 можно добиться действительности функции $\dot{\varphi} = \sqrt{c_0 + c_1 \sin\varphi}$. В заключение обсуждения соотношений (14)-(21) отметим, что для простоты записи условий существования прецессий класса Докшевича в формулу (20) не подставлены значения величин входящих в правую часть.

На основании формул (3),(5),(7),(13) запишем полученное решение уравнений (1)

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\sqrt{c_0 + c_1 \sin\varphi}} \big((c_0 + c_1 \sin\varphi)\boldsymbol{a} + \sigma_0 \boldsymbol{\nu} \big), \\
\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi,\, a_0' \cos\varphi,\, a_0), \quad \lambda = \varepsilon_0 \sqrt{c_0 + c_1 \sin\varphi}, \\
\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_0 + c_1 \sin\varphi}} = t - t_0.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Из последней формулы и соотношений (16) вытекает, что при условии ограниченности функции (7) можно указать такие значения параметров задачи (1) (например, для моментов инерции можно принять указанные выше значения), при которых $\varphi(t)$ является эллиптической функцией времени.

Случай $p_1 = 0$. Положим во втором равенстве из (13) $p_1 = 0$ и подставим (13) в уравнения (8)-(10). С помощью обозначений (11),(12) можно показать, что при наличии соотношений (14)-(20) и выполнении условий

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{a_0 B_{13}}{\alpha_1},\ B_{12} = B_{23} = 0,\ B_{22} = B_{11},\ 2\alpha_3 B_{13} + \alpha_1 \left(B_{11} - B_{33}\right) = 0, \\ 2B_{11}\left[\alpha_1 A_{33} + \alpha_3 \left(A_{22} - A_{11}\right)\right] + B_{13}\left(\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13}\right) = 0, \\ 2k = \frac{1}{\alpha_1}\left[2a_0^2 \alpha_3 B_{13} - \alpha_1 \left(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}\right)\right]. \end{gathered} \tag{23}$$

система уравнений (8)-(10) допускает решение

$$\dot{\varphi} = \sqrt{c_0 + c_1 \sin\varphi}, \quad \lambda = p_0 + \varepsilon_0 \sqrt{c_0 + c_1 \sin\varphi}, \tag{24}$$

которое порождает прецессию, определяемую первой, второй и четвертой формулами из системы (22). Отличие данной прецессии при условиях (23) от прецессии в случае (22) состоит в том, что для неё матрица B в первом уравнении из системы (1) отлична от нулевой матрицы и постоянная $k \neq 0$. При этом величина гиростатического момента в силу (24) содержит аддитивную постоянную p_0.

Таким образом, условия существования прецессии при $p_1 = 0,\ p_0 \neq 0$ характеризуются равенствами (14)-(20),(23). Она описывается эллиптическими функциями времени.

Случай $p_0 \neq 0,\ p_1 \neq 0$. Подставим соотношения (13) в равенства (8)-(10) и учтем в полученных уравнениях обозначения (11),(12). Тогда полагая, что функция $\varphi(t)$, найденная из первого уравнения системы (13) не вырождается в элементарную, найдем систему уравнений на параметры, из которой вытекают равенства (14)-(20) и

$$p_0 = \frac{a_0}{2\alpha_1^2}\left[2\alpha_1 B_{13} + \alpha_3\left(B_{22} - B_{11}\right)\right], \;\; p_1 = -\frac{a_0'\left(B_{22} - B_{11}\right)}{\alpha_1}, \tag{25}$$

$$2k = 2a_0\alpha_3 p_0 - \left(a_0'^2 B_{22} + a_0^2 B_{33}\right) \tag{26}$$

$$\left(B_{22} - B_{11}\right)\left[\alpha_3^2(1 + a_0^2) - \alpha_1^2 a_0^2 a_0'^2\right] + 2\alpha_1\alpha_3(1 + a_0^2)B_{13} = 0, \tag{27}$$

$$2\alpha_1\left(\alpha_1 B_{33} - \alpha_3 B_{13}\right) + B_{11} - B_{22} = 0, \tag{28}$$

$$\alpha_1^2 A_{33} - 3\alpha_1\alpha_3 A_{13} - 2\alpha_3^2\left(A_{22} - A_{11}\right) = 0. \tag{29}$$

Формулы (25) указывают значения свободного члена и коэффициента при $\sin\varphi$ во второй формуле из (13). Соотношение (26) показывает, что постоянная интеграла площадей из (2) фиксирована. Формулы (27),(28) являются условиями на элементы матрицы B.

Соотношение (29) необходимо рассматривать совместно с условиями (19), которое представим иначе

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2\left[A_{33}(A_{22} - A_{33}) - A_{13}^2\right] + 2\alpha_1\alpha_3 A_{13}(A_{11} - A_{22} + A_{33}) + \\ &+\alpha_3^2\left[A_{11}(A_{22} - A_{11}) - A_{13}^2\right] = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Тогда получим

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 A_{13}\left[3\sigma + A_{33}\left(A_{11} - 4A_{22} + A_{33}\right)\right]}{\sigma\left(2A_{11} - 2A_{22} - A_{33}\right) + A_{33}\left(A_{11} - A_{22}\right)\left(A_{11} - 4A_{22} + A_{33}\right)}. \tag{31}$$

где $\sigma = A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22})$.

При наличии равенств (29),(30) выражение, стоящее в числителе формулы (18), должно быть положительным. Поскольку это выражение в силу уравнения (29) можно представить в виде $-\frac{1}{2}\alpha_1\left(\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13}\right)$, то необходимо считать, что должно выполняться условие $\alpha_1\alpha_3 A_{13} > 0$. Равенство (29) допускает запись в виде

$$2\alpha_3\left[\alpha_1 A_{13} - \alpha_3(A_{11} - A_{22})\right] = \alpha_1^2 A_{33} - \alpha_1\alpha_3 A_{13}. \tag{32}$$

Из данного выражения в силу полученных результатов следует, что для действительности решения системы уравнений (29),(30) необходимо потребовать условия $A_{11} > A_{22}$. Знак выражения $-\left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^2\left(A_{11} - A_{22}\right) + 2\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}A_{13} - A_{33}$ при больших значениях $\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}$ в силу разности $A_{11} - A_{22} > 0$ принимает отрицательные значения. Поэтому для существования положительных значений указанного выражения необходимо потребовать условия $A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22}) = \sigma > 0$.

Для дальнейшего анализа выражения (31), как общего корня уравнений (29),(30) и неравенства $\alpha_1\left(\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33}\right) > 0$ введем безразмерные параметры $\dfrac{A_{11}}{A_{33}} = a,\ \dfrac{A_{22}}{A_{33}} = b$. Учитывая неравенства на моменты инерции A_{ij}:

$A_{11} + A_{22} > A_{33},\quad A_{22} + A_{33} > A_{11},\quad A_{33} + A_{11} > A_{22},\quad A_{11}A_{33} - A_{13}^2 > 0,$

$-\dfrac{A_{22}}{2}\ \mathrm{J}\ A_{13}\ \mathrm{J}\ \dfrac{A_{22}}{2}$ и установленного ранее условия $A_{11} > A_{22}$, в плоскости параметров (a,b) получим область G, определяемую неравенствами

$$\begin{aligned} &a > 0,\quad b > 0,\quad a + b > 1,\quad b + 1 > a,\\ &a + 1 > b,\quad a > b,\quad b^2 + 4b - 4a\ \mathrm{i}\ 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Обозначая $\varkappa = \dfrac{\sigma}{A_{33}}$, подставим выражение (31) в уравнение (29) и неравенство $\alpha_1\left(\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33}\right) > 0$. Учитывая принятые обозначения, получим

$$
\begin{gathered}
9\varkappa^2 + \left[(a-b)(a+8b) + 5a - 14b + 4\right]\varkappa + 3b(a-b)(a-4b+1) = 0, \\
\frac{3\varkappa + 2a - 5b + 2}{\varkappa(2a-2b-1) + (a-b)(a-4b+1)} > 0.
\end{gathered}
\tag{34}
$$

где $0 < \varkappa < b$. Численный анализ в области G из (33) существования решений первого уравнения из (34) при выполнении второго неравенства из (34) показал, что условия (33),(34) при $\varkappa \in (0, b)$ несовместны. Таким образом, доказано, что случай $p_1 \neq 0$ динамически невозможен.

Вывод. В статье получены два новых решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил, которые описывают прецессионное движение класса Докшевича. При этом первое решение имеет аналог для случая движения гиростата под действием силы тяжести.

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука. – 1976. – 670 с.

2. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **26**, f. 3–4. – P. 271–281.

3. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 4. – С. 573–587.

4. Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
5. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
6. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math.. – 1899. – **22**. –P. 201–358.
7. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч: – М.; Л.: Гостехиздат. – 1949. – Т. **2**. – С. 152-309.
8. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
9. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика.1999.Т.63. Вып.5. С. 825-826.
10. Ковалева Л.М., Позднякович А.Е. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком// Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
11. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – вып. 38. – С. 80-86.
12. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. **19**. – С. 30-35.
13. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
14. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил// Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 16-25.
15. Докшевич А.И. Об одном частном решении задачи о вращении тяжелого

твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР. – 1966. – **167**, № 6. – С. 1251–1252.

16. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V. **5**, №5. – P. 742-745.

17. Горр Г.В. Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38**, вып. 3. – С. 451–458.

Украина, 83055, г. Донецк, ул. Университетская 24,
Донецкий национальный Университет