ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА **Том 77. Вып. 2, 2013**

УДК 531.38

© 2013 г. А. В. Мазнев

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Рассматривается движение динамически симметричного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с переменным гиростатическим моментом, описываемое обобщенными уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. Получены условия существования трех линейных инвариантных соотношений специального вида и построены новые решения уравнений движения, которые выражаются либо в виде элементарных функций, либо в виде эллиптических функций времени.

Классическая задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, описываемая уравнениями Эйлера–Пуассона, получила многочисленные обобщения (см., например, обзоры [1–4]). Особенность задачи о движении тяжелого гиростата в предположении, что гиростатический момент постоянен [1], состоит в том, что уравнения движения допускают три первых интеграла, и поэтому к ним применима теория Якоби интегрирования уравнений динамики. На практике, например при управлении ориентацией и стабилизации спутника роторами [5], важным обобщением служит задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом, которая допускает только два первых интеграла. Эта задача рассматривалась многими авторами [5–9], исследовались частные случаи движения гиростата [10–13].

1. Постановка задачи. Метод решения. В классических работах [6–8] были заложены теоретические основы динамики гиростата с переменным гиростатическим моментом. Современная ее трактовка дана В.В. Румянцевым [5] и П.В. Харламовым [9]. Они рассматривали механическую систему, состоящую из тел $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Тело-носитель S_0 имеет либо неподвижную точку O, либо движение точки O задано (например, В.В. Румянцев предполагал, что точка O движется по орбите спутника). Тела S_i либо геометрически симметричны (роторы [5]), либо динамически симметричны (моменты инерции относительно экваториальных осей равны [9]) и закреплены на теле S_0 своими осями симметрии. Свойства взаимодействия тел S_0 и S_i определены уравнениями относительного движения.

Будем рассматривать движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которые характеризуются влиянием магнитного и электрического полей на намагниченный и наэлектризованный гиростат [14, 15]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L \tag{1.1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – момент количества движения тела-носителя, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, связанный с вектором $\mathbf{x}$ соотношением $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ (a – гирационный тензор), $\lambda = \lambda(t)$ – функция, характеризующая величину гиростатического момента: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ – постоянный единичный вектор, L – величина, характеризующая действие сил на тела S_i со стороны тела S_0 (например, в случае одного ротора [5] L – проекция момента сил на его ось вращения), $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей, $\mathbf{s}$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс, $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точкой обозначена производная по времени.

Уравнения (1.1) допускают два первых интеграла

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1, \quad (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{v} - (B\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/2 = k \tag{1.2}$$

где k – произвольная постоянная. Поэтому для применения теории Якоби интегрирования уравнений динамики необходимо найти три дополнительных интеграла. Это обстоятельство принципиально отличает задачу, описываемую уравнениями (1.1), от задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае $\lambda(t) = \mathrm{const}$, поскольку в последнем случае есть интеграл энергии, и для интегрирования уравнений в квадратурах достаточно найти один дополнительный интеграл. Имеется обзор результатов по динамике гиростата с постоянным гиростатическим моментом [1–4, 16, 17].

Рассмотрим уравнения (1.1) и интегралы (1.2) в скалярной форме, полагая

$$\begin{gathered} a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_2), \quad B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_2), \quad C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_2) \\ \boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{s} = (s_1, 0, 0) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Тогда, полагая в уравнениях (1.1) $L = \dot{\lambda}$ и учитывая равенства (1.3), имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(x_1 + \lambda)^{\bullet} = a_2 B_2(\nu_3 x_2 - \nu_2 x_3) \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} \dot{x}_j = (-1)^j (a_1 - a_2) x_1 x_{5-j} - (-1)^j a_2 \lambda x_{5-j} + a_{4-j} B_{j-1} \nu_{j-1} x_{7-2j} - \\ - a_{j-1} B_{4-j} \nu_{7-2j} x_{j-1} - (-1)^j s_1 \nu_{5-j} + (-1)^j (C_1 - C_2) \nu_1 \nu_{5-j}, \quad j = 2, 3 \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_2(x_3\nu_2 - x_2\nu_3), \quad \dot{\nu}_j = a_{j-1} x_{j-1} \nu_{7-2j} - a_{4-j} x_{7-2j} \nu_{j-1}, \quad j = 2, 3 \tag{1.6}$$

Интегралы (1.2) в скалярной форме таковы:

$$\begin{gathered} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (x_1 + \lambda)\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + (B_2 - B_1)\nu_1^2/2 = k_* \\ k_* = k + B_2/2 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Из уравнения (1.4) в силу первого уравнения (1.6) вытекает первый интеграл

$$x_1 + \lambda + B_2\nu_1 = \alpha_0 \tag{1.8}$$

Здесь α_0 – произвольная постоянная. Этот интеграл – аналог интеграла Кирхгофа–Харламова [14, 16] задачи о движении тела в идеальной несжимаемой жидкости.

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1.5)–(1.8) трех инвариантных соотношений

$$x_r = b_{0,r} + b_{1,r}\nu_r, \quad r = 1, 2, 3 \tag{1.9}$$

где $b_{0,r}$ и $b_{1,r}$ – постоянные параметры, подлежащие определению.

Из интеграла (1.8) при учете соотношения (1.9) для $r = 1$ найдем

$$\lambda = (\alpha_0 - b_{0,1}) - (B_2 + b_{1,1})\nu_1 \tag{1.10}$$

Внесем выражения (1.9), (1.10) в уравнения (1.5) и учтем в полученных равенствах соотношения (1.6). Тогда имеем два уравнения вида

$$f_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0, \quad f_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0$$

Потребуем, чтобы они выполнялись для любых значений ν_1, ν_2, ν_3. Это приводит к следующим условиям, налагаемым на параметры уравнений (1.4)–(1.7) и параметры $b_{0,r}, b_{1,r}$ инвариантных соотношений (1.9):

$$b_{1,5-r}\left[a_1 b_{1,1} + a_2\left(B_1 + B_2\right)\right] - a_1 b_{1,1}\left(b_{1,r} + B_2\right) + a_2 b_{1,r} b_{1,5-r} + C_1 - C_2 = 0, \quad r = 2,3 \tag{1.11}$$

$$b_{0,r}\left[a_1 b_{1,1} + a_2\left(B_1 + B_2\right) + a_2 b_{1,5-r}\right] = 0, \quad r = 2,3 \tag{1.12}$$

$$b_{1,r}(a_2\alpha_0 - a_1 b_{0,1}) + a_1 b_{0,1} B_2 + a_1 b_{0,1} b_{1,5-r} + s_1 = 0, \quad r = 2,3 \tag{1.13}$$

$$b_{0,5-r}(a_1 b_{0,1} - a_2\alpha_0) = 0, \quad r = 2,3 \tag{1.14}$$

Таким образом, условия (1.11)–(1.14) являются необходимыми условиями существования решения (1.9) уравнений (1.4)–(1.6).

Поскольку при наличии соотношений (1.10)–(1.14) динамические уравнения (1.4)–(1.5) становятся тождествами, выпишем уравнения (1.6), (1.7) при учете равенств (1.9), (1.10)

$$\begin{aligned} &\dot\nu_1 = a_2(b_{0,3}\nu_2 - b_{0,2}\nu_3) + a_2(b_{1,3} - b_{1,2})\nu_2\nu_3 \\ &\dot\nu_j = a_{j-1} b_{0,j-1}\nu_{7-2j} - a_{4-j} b_{0,7-2j}\nu_{j-1} + (-1)^j (a_1 b_{1,1} - a_2 b_{1,5-j})\nu_1\nu_{5-j}, \quad j = 2,3 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\alpha_0\nu_1 + b_{0,2}\nu_2 + b_{0,3}\nu_3 + b_{1,2}\nu_2^2 + b_{1,3}\nu_3^2 - \left(B_1 + B_2\right)\nu_1^2/2 = k_* \tag{1.16}$$

Метод исследования условий существования инвариантных соотношений (1.9) состоит в анализе условий (1.11)–(1.14) и последующем интегрировании системы (1.15) при наличии у нее интегралов $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1$ и (1.16).

2. Случай $b_{1,2} \neq b_{1,3}$. Из равенств (1.11), (1.13) получаем следующие соотношения:

$$b_{1,1} = -a_2\left(B_1 + B_2\right)/(2a_1) \tag{2.1}$$

$$2a_1 b_{0,1} - a_2\alpha_0 = 0 \tag{2.2}$$

Если предположить, что в уравнениях (1.14) $b_{0,2}^2 + b_{0,3}^2 \neq 0$, то при учете равенства (2.2) из этих уравнений получим $b_{0,1} = 0,\ \alpha_0 = 0$. Тогда из уравнений (1.13) вытекает, что $s_1 = 0$, т.е. центр масс гиростата неподвижен. Этот вариант исключаем из рассмотрения, так как для него необходимо изменять постановку задачи. Следовательно, в уравнениях (1.12), (1.14) следует положить $b_{0,2} = 0,\ b_{0,3} = 0$.

Полагая $\alpha_0 \neq 0$, из уравнения (2.2) определим

$$b_{0,1} = (a_2\alpha_0)/(2a_1) \tag{2.3}$$

Таким образом, первое соотношение (1.9) при $r = 1$ становится линейной относительно ν_1 функцией с известными коэффициентами.

Воспользовавшись уравнениями (1.11) и (1.13) при $r = 2$, получим

$$\begin{aligned} &b_{1,3} = (-\kappa_1 \pm \sqrt{\kappa_1^2 - 4\kappa_0})/2, \quad b_{1,2} = \kappa_1 - b_{1,3}, \quad \kappa_1^2 - 4\kappa_0 > 0 \\ &\kappa_0 = \frac{s_1 a_2\left(B_1 + B_2\right) + 2a_1 b_{0,1}\left(C_2 - C_1\right)}{2a_1 a_2 b_{0,1}}, \quad \kappa_1 = -\frac{s_1 + a_1 b_{0,1} B_2}{a_1 b_{0,1}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, в силу равенств (2.3), (2.4), коэффициенты инвариантных соотношений (1.9) зависят от одной произвольной постоянной α_0.

Для нахождения решения $\nu_i = \nu_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ обратимся к уравнениям (1.15). Так как $b_{0,2} = 0,\ b_{0,3} = 0$, то из системы (1.15) имеем

$$\begin{aligned} &\dot{\nu}_1 = a_2(b_{1,3} - b_{1,2})\nu_2\nu_3 \\ &\dot{\nu}_j = (-1)^j \left[a_1 b_{0,1} + (a_1 b_{1,1} - a_2 b_{1,5-j})\nu_1\right]\nu_{5-j}, \quad j = 2,3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Система (2.5) допускает два первых интеграла, вытекающих из соотношений (1.7) и (1.16):

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad \alpha_0\nu_1 + b_{1,2}\nu_2^2 + b_{1,3}\nu_3^2 - \left(B_1 + B_2\right)\nu_1^2 / 2 = k_* \tag{2.6}$$

и поэтому ее решение сводится к квадратурам. Из интегралов (2.6), при учете выражений (2.1), (2.3) получим

$$\begin{aligned} &\nu_j = \sqrt{\varphi_{j-1}(\nu_1)} / \beta_0, \quad \beta_0 = \sqrt{a_2(b_{1,3} - b_{1,2})} \\ &\varphi_{j-1}(\nu_1) = (-1)^j[(a_1 b_{1,1} - a_2 b_{1,5-j})\nu_1^2 + 2a_1 b_{0,1}\nu_1 + a_2(b_{1,5-j} - k_*)]; \quad j = 2,3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Из первого уравнения системы (2.5) в силу соотношений (2.7) следует, что

$$\dot{\nu}_1 = \sqrt{\varphi_1(\nu_1)\varphi_2(\nu_1)}$$

Зависимость $\nu_1 = \nu_1(t)$ определим путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{\varphi_1(\nu_1)\varphi_2(\nu_1)}} = t - t_0 \tag{2.8}$$

и получим, что $\nu_1 = \nu_1(t)$ – эллиптическая функция времени. Подставив ее в равенства (2.7), найдем $\nu_2(t), \nu_3(t)$. Это позволяет из соотношений (1.9) получить зависимости $x_r = x_r(t)$ $(r = 1,2,3)$, а из соотношения (1.10) – функцию $\lambda(t)$. Таким образом, решение уравнений (1.4)–(1.6) в случае (1.9) построено.

3. Случай $b_{1,2} = b_{1,3}$. Уравнения (1.15) упрощаются:

$$\begin{aligned} &\dot{\nu}_1 = a_2(b_{0,3}\nu_2 - b_{0,2}\nu_3) \\ &\dot{\nu}_j = a_{j-1}b_{0,j-1}\nu_{7-2j} - a_{4-j}b_{0,7-2j}\nu_{j-1} + (-1)^j(a_1 b_{1,1} - a_2 b_{1,2})\nu_1\nu_{5-j}, \quad j = 2,3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Из первого уравнения системы (3.1) следует, что при $b_{0,2} = 0,\ b_{0,3} = 0$ имеем $\nu_1 = \text{const}$. Тогда из соотношения (1.10) вытекает, что величина гиростатического момента постоянна. Поэтому в дальнейшем полагаем

$$\Delta \equiv b_{0,2}^2 + b_{0,3}^2 \neq 0$$

Запишем условия (1.11)–(1.14) в исследуемом варианте

$$\begin{aligned} &b_{0,1} = (a_2\alpha_0)/a_1, \quad a_1 b_{1,1}\left(b_{1,2} + B_2\right) = C_2 - C_1 \\ &a_1 b_{1,1} + a_2\left(b_{1,2} + B_2 + B_1\right) = 0, \quad a_2\alpha_0\left(b_{1,2} + B_2\right) + s_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отметим, что параметры $b_{0,2}$ и $b_{0,3}$ произвольны. Решение системы (3.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &b_{0,1} = (a_2\alpha_0)/a_1, \quad b_{1,j-1} = [(-1)^j s_1 - a_2\alpha_0 B_{j-1}]/(a_{j-1}\alpha_0), \quad j = 2,3 \\ &a_2\left(C_1 - C_2\right)\alpha_0^2 + s_1 a_2 B_1\alpha_0 - s_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из последнего равенства (3.3), полагая, например, $C_1 > C_2$, найдем

$$\alpha_0^{(1,2)} = \frac{-a_2B_1s_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2\left(C_1 - C_2\right)}, \quad D = a_2s_1^2[a_2B_1^2 + 4\left(C_1 - C_2\right)] \tag{3.4}$$

Таким образом, в силу соотношений (3.3), (3.4), величины $b_{0,1}$, $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, α_0 принимают фиксированные значения, зависящие от параметров задачи.

Систему (3.1) при учете условий (3.2) запишем в виде

$$\begin{gathered}\dot{\nu}_1 = a_2(b_{0,3}\nu_2 - b_{0,2}\nu_3)\\ \dot{\nu}_j = a_{j-1}b_{0,j-1}\nu_{7-2j} - a_{4-j}b_{0,7-2j}\nu_{j-1} + (-1)^j 2\sigma_0\nu_1\nu_{5-j}, \quad j = 2,3\\ \sigma_0 = \left[2a_1b_{1,1} + a_2\left(B_1 + B_2\right)\right]/2\end{gathered} \tag{3.5}$$

Эта система имеет два первых интеграла

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad a_1b_{0,1}\nu_1 + a_2b_{0,2}\nu_2 + a_2b_{0,3}\nu_3 + \sigma_0\nu_1^2 = k_0 \tag{3.6}$$

где k_0 – произвольная постоянная.

В силу структуры второго соотношения (3.6) представляет интерес случай, когда параметр $b_{1,1}$ удовлетворяет условию

$$b_{1,1} = -a_2\left(B_1 + B_2\right)/(2a_1) \tag{3.7}$$

Тогда соотношения (3.2) примут вид

$$\begin{gathered}b_{0,1} = \frac{2s_1}{a_1\left(B_1 - B_2\right)}, \quad \alpha_0 = \frac{2s_1}{a_2\left(B_1 - B_2\right)}, \quad b_{1,2} = b_{1,3} = -\frac{B_1 + B_2}{2}\\ 4\left(C_2 - C_1\right) = a_2(B_1^2 - B_2^2)\end{gathered} \tag{3.8}$$

При выполнении равенства (3.7) интеграл моментов (второе равенство (3.6)) принимает линейную по ν_i форму:

$$a_1b_{0,1}\nu_1 + a_2b_{0,2}\nu_2 + a_2b_{0,3}\nu_3 = k_0 \tag{3.9}$$

Уравнения Пуассона в рассматриваемом случае также линейны по основным переменным ν_i:

$$\dot{\nu}_1 = a_2(b_{0,1}\nu_2 - b_{0,2}\nu_3), \quad \dot{\nu}_j = a_{j-1}b_{0,j-1}\nu_{7-2j} - a_{4-j}b_{0,7-j}\nu_{j-1}, \quad j = 2,3 \tag{3.10}$$

Для интегрирования системы (3.10) вместо ν_1, ν_2, ν_3 введем новые переменные θ, φ:

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi \tag{3.11}$$

Тогда геометрический интеграл (первое равенство (3.6)) удовлетворяется тождественно, а из интеграла (3.9) получим

$$\sin(\varphi + \varphi_0) = \frac{k_0 - a_1b_{0.1}\cos\theta}{a_2\sqrt{\Delta}\sin\theta}; \quad \sin\varphi_0 = \frac{b_{0.2}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{b_{0.3}}{\sqrt{\Delta}} \tag{3.12}$$

Первое уравнение системы (3.5) в силу равенств (3.11), (3.12) преобразуем к виду

$$\dot{\nu}_1 = \sqrt{F(\nu_1)}; \quad F(\nu_1) = -(a_1^2b_{0,1}^2 + a_2^2\Delta)\nu_1^2 + 2a_1b_{0,1}k_0\nu_1 + a_2^2\Delta - k_0^2$$

Очевидно, $\nu_1 = \nu_1(t)$ – элементарная функция времени, а $\theta(t) = \arccos\nu_1(t)$.

Из формулы (3.12) получим

$$\varphi = \varphi_0 + \arcsin\frac{k_0 - a_1 b_{0.1}\cos\theta(t)}{a_2\sqrt{\Delta}\sin\theta(t)} \tag{3.13}$$

На основании равенств (3.11), (3.13) из соотношений (1.9) определим $x_r = x_r(t)$, а из равенства (1.10) найдем $\lambda(t)$.

Таким образом, в случае (3.7), (3.8) переменные задачи – элементарные функции времени.

Соотношение (3.9) допускает простую геометрическую интерпретацию. Запишем формулу (3.9) в виде $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = k_0$, где $\mathbf{n}$ – вектор с компонентами $n_1 = a_1 b_{0.1}$, $n_2 = a_2 b_{0.2}$, $n_3 = a_2 b_{0.3}$. Очевидно, что угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ постоянен во все время движения (прецессионное движение [17]). Поскольку параметры $b_{0.1}$ и $c_{0.2}$ произвольны, то множество осей, для которых постоянен угол с вертикалью $\mathbf{v}$, является частью плоскости.

Рассмотрим общий случай в рамках варианта $b_{1.2} = b_{1.3}$. Пусть в интегралах (3.6) введены переменные θ, φ согласно формулам (3.11). Тогда из второго интеграла (3.6) по аналогии с формулой (3.12) можно записать

$$\sin(\varphi + \varphi_0) = \frac{k_0 - a_1 b_{0.1}\cos\theta - \sigma_0\cos^2\theta}{a_2\sqrt{\Delta}\sin\theta} \tag{3.14}$$

Используя первое уравнение системы (3.5) и соотношения (3.11), (3.14), получим

$$\dot{\nu}_1 = \sqrt{\hat{O}(\nu_1)};\quad \hat{O}(\nu_1) = a_2^2\Delta(1-\nu_1^2) - (k_0 - a_1 b_{0,1}\nu_1 - \sigma_0\nu_1^2)^2$$

Тогда функцию $\nu_1 = \nu_1(t)$ можно найти обращением эллиптического интеграла

$$\int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1}\frac{d\nu_1}{\sqrt{\hat{O}(\nu_1)}} = t - t_0 \tag{3.15}$$

Действительности функции $\nu_1(t)$ можно добиться, например, выбирая произвольные постоянные $b_{0.2}, b_{0.3}, k_0$ согласно неравенству

$$a_2^2\Delta - k_0^2 > 0$$

так как в этом случае функция $\hat{O}(\nu_1)$ обладает свойством $\hat{O}(0) > 0$.

После нахождения из равенства (3.15) функции $\nu_1(t)$ переменные ν_2, ν_3 находим на основании формул (3.11), (3.14). Компоненты x_1, x_2, x_3 и функцию $\lambda(t)$ определим из равенств (1.9), (1.10). Следовательно, решение уравнений (1.4)–(1.6) на инвариантных соотношениях (1.9) выражается в виде эллиптических функций времени.

Автор благодарит Г.В. Горра за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
3. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 256 с.
4. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.

5. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1970. Вып. 2. С. 83–96.
6. *Liouville J.* Dèveloppements sur un chapitre de la “mècanique” de Poisson // J. Math. Pures et Appl. 1858. V. 3. P. 1–25.
7. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. 1899. V. 22. P. 201–358.
8. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 2. С. 152–309.
9. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 4. С. 52–73.
10. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 825–826.
11. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труд. Ин-та прикл. матем. и мех. 2009. Т. 19. С. 30–35.
12. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. Донецк: ИПММ НАН Украины, 2008. Вып. 38. С. 80–86.
13. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. Донецк: ИПММ НАН Украины, 2009. Вып. 39. С. 42–49.
14. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. матем. и техн. физ. 1963. № 4. С. 17–29.
15. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I. The equations of motion and their transformations // J. Mech. Theor. Appl. 1986. V. 5. № 5. P. 747–754.
16. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
17. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. Донецк: ДонНУ, 2009. 222 с.

г. Донецк
e-mail: maznev_av@rambler.ru

Поступила в редакцию
4.V.2011