УДК 531.38

©2009. А.В. Мазнев

Об одном случае существования интегрирующего множителя уравнений динамики твердого тела на инвариантных соотношениях класса Чаплыгина

Указан новый случай существования интегрирующего множителя уравнений динамики твердого тела, которые допускают первые интегралы и инвариантные соотношения класса Чаплыгина [1].

Введение. В динамике твердого тела с неподвижной точкой, как правило, рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения следующего вида

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0, \quad (i = \overline{1,n}) \tag{1}$$

то есть в уравнение, относительно которого записана производная от переменной по времени, сама переменная не входит. Предполагаем, что правые части уравнений непрерывно-дифференцируемы до порядка k в области $E_n \subset R_n$. Указанным выше свойством $\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \right)$ удовлетворяют, например, уравнения Д. Гриоли [2]

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (a_3 - a_2)x_2x_3 + a_3x_3\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} - a_2x_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} + \\
&+\nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} - \nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3}, \\
\dot{x}_2 &= (a_1 - a_3)x_3x_1 + a_1x_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} - a_3x_3\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} + \\
&+\nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_3} - \nu_3\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1},
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\dot{x}_3 = (a_2 - a_1)x_1x_2 + a_2x_2\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} - a_1x_1\frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2} +$$
$$+\nu_2\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_1} - \nu_1\frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial \nu_2},$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3,\ \ \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1,\ \ \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \quad (3)$$

Уравнения (2),(3) имеют первые интегралы

$$\begin{aligned} &a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \\ &x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k, \quad \nu_1^2 + \nu_1^2 + \nu_1^2 = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнениях (2),(3) и интегралах (4) обозначено: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор момента количества движения тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3),\ U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – дифференцируемые функции переменных ν_1, ν_2, ν_3; E и k – произвольные постоянные.

Если в (2)-(4) положить $L = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\cdot\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}),\ U = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(C\cdot\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})$, то приходим к уравнениям класса Кирхгофа, которые описывают движение твердого тела в поле сил, являющемся суперпозицией центрального ньютоновского поля сил, магнитного поля сил и электрического поля сил. В указанных выше выражениях для $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3),\ U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{s}$ постоянные векторы ($\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\ \boldsymbol{s} = (s_1,s_2,s_3)$); B и C симметричные матрицы третьего порядка. Когда $B = 0, C = 0$, то получим уравнения движения гиростата с неподвижной точкой [3].

Для интегрирования в квадратурах уравнений (2),(3) с интегралами (4) необходимо знать дополнительный первый интеграл. Это свойство основано на теореме Якоби [4]. Пусть система (1) допускает $n-2$ первых интеграла

$$\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = c_k \quad (k = \overline{1, n-2}). \tag{5}$$

Тогда она допускает дополнительный интеграл и интегрируется в квадратурах. (Этот термин означает, что решение уравнений (1) можно получить с помощью обращения интегралов от известных функций).

В работе [5] рассмотрены вопросы интегрирования системы (1) в двух случаях. В первом случае предполагается, что она допускает $n-3$ первых интеграла и одно инвариантное соотношение класса Леви – Чивиты Т. [6]. То есть в первом случае выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = c_i \quad (i = \overline{1, n-3}), \\ &\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} X_j(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\lambda(x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned} \tag{6}$$

где c_i – произвольные постоянные и поэтому уравнения (1) имеют инвариантное соотношение

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (\overline{grad}\, \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\big|_{\varphi=0} \neq 0) \tag{7}$$

Во втором случае система (1) допускает $n-4$ первых интеграла $\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = c_k \quad (k = \overline{1, n-4})$ и два инвариантных соотношения класса Леви – Чивиты Т. [6].

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \;\; g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \tag{8}$$

для которых выполняются уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\lambda_{11}(x_1, x_2, ..., x_n) + g(x_1, x_2, ..., x_n)\lambda_{12}(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dot{g} &= \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\lambda_{21}(x_1, x_2, ..., x_n) + g(x_1, x_2, ..., x_n)\lambda_{22}(x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned} \tag{9}$$

где левые части уравнений (9) – производные от левых частей равенств (8) в силу уравнений.

В работе [5] получены достаточные условия интегрируемости уравнений (1), для которых интегрирующий множитель приведенной системы имеет определенный аналог с интегрирующим множителем приведенной системы в случае Якоби (результаты Якоби подробно изложены в книге П.В. Харламова [3]).

Данная работа посвящена исследованию условий интегрируемости уравнений (1) в случае, когда они допускают k первых интегралов и l инвариантных соотношений класса Чаплыгина $(k + l = n - 2)$. То есть, предполагаем, что имеют место соотношения

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = c_j \;\; (j = \overline{1, k}), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= g_1^{m_{11}}\lambda_{11} + g_2^{m_{12}}\lambda_{12} + ... + g_l^{m_{1l}}\lambda_{1l}, \\ \dot{g}_2 &= g_1^{m_{21}}\lambda_{21} + g_2^{m_{22}}\lambda_{212} + ... + g_l^{m_{2l}}\lambda_{2l}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{g}_l &= g_1^{m_{l1}}\lambda_{l1} + g_2^{m_{l2}}\lambda_{l2} + ... + g_l^{m_{ll}}\lambda_{ll}, \end{aligned} \tag{11}$$

В системе (11) $m_{ij} > 0,\ \lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n),\ c_j (j = \overline{1,k})$ – произвольные постоянные ($\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$). На основании (11) система (1) допускает l инвариантных соотношений

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., g_l(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \qquad (12)$$

Если в системе (11) положить, что $m_{ij} = 1\left(\forall i, j\right)$, то получим случай Леви – Чивиты Т.[6]. Для варианта двух инвариантных соотношений уравнения Леви – Чивиты Т. записаны в виде (9). Наиболее полно инвариантные соотношения класса Леви – Чивиты Т. исследовал А.М. Ковалев [7].

Приведенная система. Условия Якоби. Обозначим через $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Следуя [1,4,5] введем в точке $x^{(0)} \in E_n$ и её окрестности новые координаты $y_1, y_2, ..., y_n$

$$x_i = q_i(y_1, y_2, ..., y_n),\ (i = \overline{1,n}), \qquad (13)$$

где $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T \in E_n^* \subset R_n$. Якобиан замены переменных (13) обозначим так

$$D(y_1, y_2, ..., y_n) = \left| \frac{\partial q_i(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial y_j} \right|,\quad (i, j = \overline{1,n}). \qquad (14)$$

Очевидно для (14) предполагаем $D(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ в E_n^*. Это значит, что замена (13) обратима, то есть из формул (13) можно получить

$$y_i = Q_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad (i = \overline{1,n}). \tag{15}$$

Причем $y_i^{(0)} = Q_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ и в силу $D(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$, где D выражается формулой (14), для якобиана замены (15) выполняются условия

$$D^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \left| \frac{\partial Q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} \right| \neq 0 \ \ (i, j = \overline{1,n}), \tag{16}$$

$$D^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\langle D(y_1, y_2, ..., y_n) \rangle}, \tag{17}$$

где обозначено

$$\langle D(y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = D\big(Q_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., Q_n(x_1, x_2, ..., x_n)\big). \tag{18}$$

С помощью замены (13) уравнения (1) преобразуются к виду

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, y_2, ..., y_n), \ \ (i = \overline{1,n}). \tag{19}$$

Для уравнений (1),(19) имеет место тождество Якоби [4]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = \left\langle \frac{1}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D(y_1, y_2, ..., y_n) Y_i(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial y_j} \right\rangle. \tag{20}$$

Для преобразования системы(1) к системе (19) воспользуемся уравнениями (10),(12) и положим

$$
\begin{aligned}
&y_j = \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n), \ (j = \overline{1,k}),\\
&y_{k+1} = g_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., y_{k+l} = g_l(x_1, x_2, ..., x_n),\\
&y_{n-1} = x_{n-1}, \ y_n = x_n.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Тогда на основании (10),(11) в силу $k + l = n - 2$ из системы (1) получим

$$\overline{y}_1 = 0, ..., \overline{y}_k = 0, \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{y}_{k+1} = y_{k+1}^{m_{11}} \Lambda_{11} + y_{k+2}^{m_{12}} \Lambda_{12} + ... + y_{k+l}^{m_{1l}} \Lambda_{1l},\\
&\overline{y}_{k+2} = y_{k+1}^{m_{21}} \Lambda_{21} + y_{k+2}^{m_{22}} \Lambda_{22} + ... + y_{k+l}^{m_{2l}} \Lambda_{2l},\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&\overline{y}_{k+l} = y_{k+1}^{m_{l1}} \Lambda_{l1} + y_{k+2}^{m_{l2}} \Lambda_{l2} + ... + y_{k+l}^{m_{ll}} \Lambda_{ll},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$\overline{y}_{n-1} = Y_{n-1}(y_1, y_2, ..., y_n), \quad \overline{y}_n = Y_n(y_1, y_2, ..., y_n). \tag{24}$$

В системе (23) $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Случай $n-2$ первых интегралов [4]. Если в системе (22)-(24) положить, что существует только $n-2$ первых интеграла системы (1), а инвариантные соотношения отсутствуют, то из (22)-(24) следует

$$
\begin{aligned}
&y_1 = c_1, ..., y_{n-2} = c_{n-2},\\
&\overline{y}_{n-1} = Y_{n-1}(c_1, c_2, ..., c_{n-2}, y_{n-1}, y_n),\\
&\overline{y}_n = Y_n(c_1, c_2, ..., c_{n-2}, y_{n-1}, y_n).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Условие Якоби (20) принимает вид (т.к. левая часть равна нулю в силу (1))

$$\frac{\partial D(c_1,c_2,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)Y_{n-1}(c_1,c_2,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)}{\partial y_{n-1}}+$$
$$+\frac{\partial D(c_1,c_2,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)Y_n(c_1,c_2,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)}{\partial y_n}=0. \qquad (26)$$

То есть в силу (26) функция $D(c_1,c_2,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)$ является интегрирующим множителем последних двух уравнений из системы (25). Это значит, что система (25) допускает дополнительный первый интеграл $z(c_1,c_2,...,c_{n-2},y_{n-1},y_n)=c_{n-1}$ (c_{n-1} – произвольная постоянная). Выражая из него, например, y_{n-1} получим $y_{n-1}=y_{n-1}(c_1,c_2,...,c_{n-2},c_{n-1},y_n)$. Подстановка этой функции в уравнение для y_n системы (25) приводит к уравнению, из которого путем обращения интеграла можно определить функцию

$$y_n=y_n(c_1,c_2,...,c_{n-2},c_{n-1},c_n,t), \qquad (27)$$

где c_n – произвольная постоянная, возникшая из операции обращения интеграла. Таким образом, приведенная система (25) интегрируется в квадратурах. Это означает, что интегрируется и система (1). Зависимость переменных x_i от времени легко определить, используя указанные выше преобразования.

Случай k первых интегралов; $m_{ii}=1\,(i=\overline{1,l})$. Предположим, что в системе (22)-(24) $m_{ii}=1,\ \Lambda_{ii}(y_1,y_2,...,y_k,y_{k+1},...,y_{k+i-1},0,y_{k+i+1},...,y_n)\neq 0$. Тогда на первых интегралах $y_1=c_1,...,y_k=c_k$ и инвариантных соотношениях $y_{k+1}=0,...,y_{k+l}=0$ $(k+l=n-2)$ система (22)-(24) примет вид

$$y_1=c_1,...,y_k=c_k,\quad y_{k+1}=0,...,y_{k+l}=0,$$

$$\dot{y}_{n-1}=Y_{n-1}(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n), \qquad (28)$$

$$\overset{\square}{y}_n = Y_n(c_1, c_2, ..., c_k, \underbrace{0, ..., 0}_{l}, y_{n-1}, y_n).$$

Аналог якобиана (14) можно получить, разрешив уравнения (21) относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. В силу формулы (17) этот якобиан

можно получить так

$$D(y_1, y_2, ..., y_n) = \frac{1}{\left\langle D^*(x_1, x_2, ..., x_n) \right\rangle}. \tag{29}$$

В формуле (29) в силу соотношений (21) D^* имеет вид

$$D^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} ... & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} ... & \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & 0\,0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} ... & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} ... & \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_2} & 0\,0 \\ . \quad . & . & . & . & . \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-2}} ... & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n-2}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-2}} ... & \frac{\partial g_l}{\partial x_{n-2}} & 0\,0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n-1}} ... & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-1}} ... & \frac{\partial g_l}{\partial x_{n-1}} & 1\,0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} ... & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} ... & \frac{\partial g_l}{\partial x_n} & 0\,1 \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Формула Якоби (20) на основании формул (21),(22),(28)-(30) примет вид (эту формулу выпишем на первых интегралах и инвариантных соотношениях из (28))

$$\begin{aligned} &\Lambda_{11}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) + \Lambda_{22}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) + \\ &+\Lambda_{33}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) + ... + \Lambda_{ll}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) + \\ &+\frac{\partial D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) Y_{n-1}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} + \\ &+\frac{\partial D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) Y_n(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_n} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Предположим, что выполняется условие

$$\Lambda_{11}(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+\Lambda_{22}(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)+$$
$$+...+\Lambda_{ll}(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)=0. \quad (32)$$

Тогда в силу (32) из (31) следует

$$\frac{\partial D(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_{n-1}(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_{n-1}}+$$
$$+\frac{\partial D(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)Y_n(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n)}{\partial y_n}=0. \quad (33)$$

При выполнении условия (33) последние два уравнения из системы (28) интегрируются в квадратурах, а их интегрирующим множителем является функция

$$D(y_{n-1},y_n)=D(c_1,c_2,...,c_k,0,...,0,y_{n-1},y_n). \quad (34)$$

В силу (29),(30),(34) получен аналог результата Якоби [4] и обобщение статьи [5]. Исключение составляет случай одного инвариантного соотношения, так как для него в силу предположений данной статьи условие (32) выполняться не может.

Итак, установлено достаточное условие (32) интегрирование системы (1), которая допускает k первых интегралов и l инвариантных соотношений класса С.А. Чаплыгина при $m_{ii}=1\,(i=\overline{1,l})$. Его можно использовать и в случае, когда уравнения (11) принимают вид $\bar{g}_j=g_j^{m_{jj}}\lambda_{jj}$, то есть при условии, что эти уравнения допускают l инвариантных соотношений нулевого слоя [8].

Общий случай. Рассмотрим общий случай, то есть предварительно, не накладывая ограничений на числа m_{ij}. Выполнив преобразования (21), получим систему (22)-(24). Рассмотрим условие (20). Как и ранее в силу условия из (1) правая часть равенства (20) равна нулю. В силу условий (22) оно примет вид

$$\sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial D(y_1, y_2, ..., y_n) Y_j(y_1, y_2, ..., y_n)}{\partial y_j} = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим уравнение (35) на первых интегралах $y_m = c_m$ $(m = \overline{1,k})$ и инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, ..., y_{k+l} = 0$

$$\begin{aligned} & D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n)\Big[m_{11} y_{k+1}^{m_{11}-1} \Lambda_{11}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) + \\ & + ... + m_{ll} y_{k+l}^{m_{ll}-1} \Lambda_{ll}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) \Big] + \\ & + \frac{\partial D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) Y_{n-1}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_{n-1}} + \\ & + \frac{\partial D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) Y_n(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n)}{\partial y_n} = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

С.А. Чаплыгин [1] исследовал случай $m_{ii} > 1 (i = \overline{1,l})$. Тогда из (36) на инвариантных соотношениях $y_{k+1} = 0, ..., y_{k+l} = 0$ получим условие (33), при выполнении которого последние два уравнения из системы (28) интегрируются в квадратурах. В этом случае интегрирующий множитель уравнений (28) очевиден: $D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n)$.

Поскольку случаи $m_{ii} = 1 (i = \overline{1,l})$, $m_{ii} > 1 (i = \overline{1,l})$ рассмотрены, то остается рассмотреть случай, когда часть величин m_{ii} равна единице, а часть m_{ii} больше единицы. Без ограничения общности положим

$$m_{11} > 1, ..., m_{\sigma\sigma} > 1, m_{\sigma+1\sigma+1} = 1, ..., m_{ll} = 1. \qquad (37)$$

Так как $D(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) \neq 0$, то для обобщения указанных выше результатов положим

$$\begin{aligned} &\Lambda_{\sigma+1\sigma+1}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) + \\ &+ ... + \Lambda_{ll}(c_1, c_2, ..., c_k, 0, ..., 0, y_{n-1}, y_n) = 0. \end{aligned} \qquad (38)$$

При выполнении равенства (38) последние два уравнения из (28) допускают интегрирующий множитель (34) и поэтому система (23) интегрируется. Это означает, что и система (1) также интегрируется в квадратурах.

Литература

1. Чаплыгин С.А. О принципе последнего множителя // Математический сборник. – 1900.– Т. 21.
2. Grioli G. Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. scifis. e natur.– 1963. – 35, 1-2 – P. 35-39
3. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та. – 1965. – 221 с.
4. Jacobi C.G. Nouvelle theorie de la rotation d'un corps de revolution grave suspend en un point quelconque de son axe // Gesammelte Werke. Berlin. – 1882. – B.2. – S. 477-492.
5. Горр Г.В., Щетинина Е.К. Об интегрирующем множителе уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 60-66.
6. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики: в 2-х т. – М.: Изд-во иностр. литер. – 1951. – 555 с.
7. Ковалев А.М. Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35 – С.19-30.

8. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.