УДК 531.38

# О ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

А.В. Мазнев

Рассмотрена задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, описываемая обобщенными уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона, в предположении, что гиростатический момент зависит от времени. Найдены условия существования трех линейных инвариантных соотношений специального вида и построены новые решения уравнений движения.

**Ключевые слова:** гиростат, инвариантное соотношение, гиростатический момент.

**ВВЕДЕНИЕ.** Динамика твердого тела, как раздел аналитической механики, интенсивно развивается и получает многочисленные обобщения [1-5]. Одним из таких обобщений служит задача о движении гиростата под действием силы тяжести в случае постоянного гиростатического момента. Поскольку уравнения движения допускают три классических интеграла, то к их интегрированию применима теория интегрирующего множителя Якоби [1,4,5]. В решении многих прикладных проблем механики, например, при управлении ориентацией и стабилизации спутника роторами [2] важным обобщением является задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Эта задача рассматривалась Ж. Лиувиллем [6], В. Вольтерра [7], Н.Е. Жуковским [8]. В современной постановке задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом описана в работах П.В. Харламова [1,9], В.В. Румянцева [2] и других. Частные типы движений гиростата изучали Э.И. Дружинин [10], О.С. Волкова [11,12], О.С. Волкова и И.Н. Гашененко [13].

В данной работе рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая моделируется дифференциальными уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона (см., например, работы [14,15]), в обобщении, что гиростатический момент зависит от времени.

Интегрирование уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом усложняется в силу того, что для интегрирования этих уравнений недостаточно найти дополнительный интеграл. Поэтому исследование свойств движения гиростата с переменным гиростатическим моментом на основе построенных частных решений уравнений движения представляется актуальным.

В данной работе для обобщенных уравнений Кирхгофа-Пуассона изучены условия существования трех инвариантных соотношений специального вида. На их основе построены новые решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1. Постановка задачи.** Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в предположении, что гиростатический момент зависит от времени [9,14,15]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, связанный с вектором $\boldsymbol{x}$ соотношением $\boldsymbol{\omega} = a\,\boldsymbol{x}$ ( $a$ – гирационный тензор); $\lambda = \lambda(t)$ – функция, характеризующая величину гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $L$ – проекция момента сил, действующего на носимые тела относительно оси вращения;

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij}), C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными характеризует производную по времени.

Уравнения (1),(2) допускают два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где $k$ – произвольная постоянная. Для применения теории Якоби интегрирования уравнений динамики (1),(2) необходимо найти три дополнительных интеграла. Это обстоятельство принципиально отличает задачу (1),(2) от задачи о движении гиростата при $\lambda(t) = const.$ [1,3-5,14,16,17].

Запишем уравнения (1),(2) в скалярном виде, в предположении, что $a = diag(a_1, a_2, a_3), \quad B = diag(B_1, B_2, B_3), \quad C = diag(C_1, C_2, C_3)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = {} & (a_3 - a_2) x_2 x_3 + \lambda(\alpha_2 a_3 x_3 - \alpha_3 a_2 x_2) - \dot{\lambda}\alpha_1 + B_3 a_2 x_2 \nu_3 - \\ & - B_2 a_3 x_3 \nu_2 + s_2 \nu_3 - s_3 \nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2 \nu_3, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = {} & (a_1 - a_3) x_3 x_1 + \lambda(\alpha_3 a_1 x_1 - \alpha_1 a_3 x_3) - \dot{\lambda}\alpha_2 + B_1 a_3 x_3 \nu_1 - \\ & - B_3 a_1 x_1 \nu_3 + s_3 \nu_1 - s_1 \nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3 \nu_1, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = {} & (a_2 - a_1) x_1 x_2 + \lambda(\alpha_1 a_2 x_2 - \alpha_2 a_1 x_1) - \dot{\lambda}\alpha_3 + B_2 a_1 x_1 \nu_2 - \\ & - B_1 a_2 x_2 \nu_1 + s_1 \nu_2 - s_2 \nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1 \nu_2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_3 x_3 \nu_2 - a_2 x_2 \nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= a_1 x_1 \nu_3 - a_3 x_3 \nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= a_2 x_2 \nu_1 - a_1 x_1 \nu_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Интеграл моментов из (3) запишется так

$$\lambda = \frac{1}{\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3}\Big[k - x_1\nu_1 - x_2\nu_2 - x_3\nu_3 + \\ + \frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2\right)\Big]. \tag{8}$$

В данной статье поставлена задача об определении условий существования у уравнений (4)-(7) трех инвариантных соотношений

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1, \quad x_2 = c_0 + c_2\nu_2, \quad x_3 = d_0 + d_3\nu_3. \tag{9}$$

**2. Метод исследования.** Будем использовать метод инвариантных соотношений [18]. Согласно этому методу вычислим производную от (9) в силу уравнений (4)-(7)

$$\begin{aligned}
\alpha_1\dot\lambda &= \lambda\left(\beta_0 + \beta_2\nu_2 + \beta_3\nu_3\right) + \gamma_0 + \gamma_2\nu_2 + \gamma_3\nu_3 + \gamma_{23}\nu_2\nu_3,\\
\alpha_2\dot\lambda &= \lambda\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\nu_1 + \varepsilon_3\nu_3\right) + \sigma_0 + \sigma_1\nu_1 + \sigma_3\nu_3 + \sigma_{13}\nu_1\nu_3,\\
\alpha_3\dot\lambda &= \lambda\left(\eta_0 + \eta_1\nu_1 + \eta_2\nu_2\right) + \xi_0 + \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + \xi_{12}\nu_1\nu_2,
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = \alpha_2 a_3 d_0 - \alpha_3 a_2 c_0, \quad \beta_2 = -\alpha_3 a_2 c_2, \quad \beta_3 = \alpha_1 a_3 d_3,\\
&\gamma_0 = d_0 c_0 (a_3 - a_2), \quad \gamma_2 = d_0\left[c_2(a_3 - a_2) - b_1 a_3 - a_2 B_2\right] - s_3,\\
&\gamma_3 = c_0\left[d_3(a_3 - a_2) + a_2 B_3 + a_2 b_1\right] + s_2,\\
&\gamma_{23} = c_2 d_3 (a_3 - a_2) + a_2 c_2 B_3 - a_2 d_3 B_2 - b_1\left(a_3 d_3 - a_2 c_2\right) + C_3 - C_2,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = \alpha_3 a_1 b_0 - \alpha_1 a_3 d_0, \quad \varepsilon_1 = \alpha_3 a_1 b_1, \quad \varepsilon_3 = -\alpha_1 a_3 d_3,\\
&\sigma_0 = b_0 d_0 (a_1 - a_3), \quad \sigma_1 = d_0\left[b_1(a_1 - a_3) + a_3 c_2 + a_3 B_1\right] + s_3,\\
&\sigma_3 = b_0\left[d_3(a_1 - a_3) - a_1 B_3 - a_1 c_2\right] - s_1,\\
&\sigma_{13} = b_0 d_3 (a_1 - a_3) + a_3 d_3 B_1 - a_1 b_1 B_3 - c_2\left(a_1 b_1 - a_3 d_3\right) + C_1 - C_3,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\eta_0 = \alpha_1 a_2 c_0 - \alpha_2 a_1 b_0, \quad \eta_1 = -\alpha_2 a_1 b_1, \quad \eta_2 = -\alpha_1 a_2 c_2,$$
$$\xi_0 = b_0 c_0 (a_2 - a_1), \quad \xi_1 = c_0 \left[ b_1 (a_2 - a_1) - a_2 d_3 - a_2 B_1 \right] - s_2,$$
$$\xi_2 = b_0 c_2 (a_2 - a_1) + a_1 b_0 d_3 + a_1 b_0 B_2 + s_1,$$
$$\xi_{12} = b_1 c_2 (a_2 - a_1) + a_1 b_1 B_2 - a_2 c_2 B_1 - d_3 \left( a_2 c_2 - a_1 b_1 \right) + C_2 - C_1. \tag{13}$$

Уравнения (10) имеют первый интеграл, порожденный соотношениями (8),(9)

$$\lambda = \frac{1}{\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \alpha_3 \nu_3} \Big[ k - b_0 \nu_1 - c_0 \nu_2 - d_0 \nu_3 +$$
$$+ \frac{1}{2} \left( B_1 - 2 b_1 \right) \nu_1^2 + \frac{1}{2} \left( B_2 - 2 c_2 \right) \nu_2^2 + \frac{1}{2} \left( B_3 - 2 d_3 \right) \nu_3^2 \Big]. \tag{14}$$

Внесем выражения (9) в правые части уравнений (7)

$$\dot{\nu}_1 = a_3 d_0 \nu_2 - a_2 c_0 \nu_3 + \left( a_3 d_3 - a_2 c_2 \right) \nu_2 \nu_3,$$
$$\dot{\nu}_2 = a_1 b_0 \nu_3 - a_3 d_0 \nu_1 + \left( a_1 b_1 - a_3 d_3 \right) \nu_1 \nu_3, \tag{15}$$
$$\dot{\nu}_3 = a_2 c_0 \nu_1 - a_1 b_0 \nu_2 + \left( a_2 c_2 - a_1 b_1 \right) \nu_1 \nu_2.$$

Для анализа решения уравнений (9),(15) введем следующие соотношения

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta \sin\varphi, \tag{16}$$

где $\theta$ и $\varphi$ новые переменные. Функции $\nu_i$ из (16) параметризуют геометрический интеграл из (3).

Без ограничения общности будем считать $\alpha_1 \neq 0$. Подставим $\lambda$ из первого уравнения системы (10) во второе и третье уравнения этой системы. Учитывая в полученных соотношениях равенство (14) и выражения (16), имеем

$$\begin{aligned}
&\left[b_2 \sin^2\theta\cos 2\varphi - c_0\sin\theta\cos\varphi - d_0\sin\theta\sin\varphi + g_2(\theta)\right]\times\\
&\times\left[\left(\alpha_3\beta_0-\alpha_1\eta_0\right)-\alpha_1\eta_1\cos\theta+\left(\alpha_3\beta_2-\alpha_1\eta_2\right)\sin\theta\cos\varphi+\right.\\
&\left.+\alpha_3\beta_3\sin\theta\sin\varphi\right]+\left[\left(\alpha_3\gamma_0-\alpha_1\xi_0\right)-\alpha_1\xi_1\cos\theta+\right.\\
&+\left(\alpha_3\gamma_2-\alpha_1\xi_2\right)\sin\theta\cos\varphi+\alpha_3\gamma_3\sin\theta\sin\varphi+\\
&\left.+\frac{1}{2}\alpha_3\gamma_{23}\sin^2\theta\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\alpha_1\xi_{12}\sin 2\theta\cos\varphi\right]\times\\
&\times\left(\alpha_1\cos\theta+\alpha_2\sin\theta\cos\varphi+\alpha_3\sin\theta\sin\varphi\right)=0,
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\left[b_2 \sin^2\theta\cos 2\varphi - c_0\sin\theta\cos\varphi - d_0\sin\theta\sin\varphi + g_2(\theta)\right]\times\\
&\times\left[\left(\alpha_2\beta_0-\alpha_1\varepsilon_0\right)-\alpha_1\varepsilon_1\cos\theta+\alpha_2\beta_2\sin\theta\cos\varphi+\right.\\
&\left.+\left(\alpha_2\beta_3-\alpha_1\varepsilon_3\right)\sin\theta\sin\varphi\right]+\left[\left(\alpha_2\gamma_0-\alpha_1\sigma_0\right)-\alpha_1\sigma_1\cos\theta+\right.\\
&+\alpha_2\gamma_2\sin\theta\cos\varphi+\left(\alpha_2\gamma_3-\alpha_1\sigma_3\right)\sin\theta\sin\varphi+\\
&\left.+\frac{1}{2}\alpha_2\gamma_{23}\sin^2\theta\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\alpha_1\sigma_{13}\sin 2\theta\sin\varphi\right]\times\\
&\times\left(\alpha_1\cos\theta+\alpha_2\sin\theta\cos\varphi+\alpha_3\sin\theta\sin\varphi\right)=0,
\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&b_2=\frac{1}{4}\left[\left(B_2-B_3\right)+2\left(d_3-c_2\right)\right],\\
&g_2(\theta)=k-b_0\cos\theta+\frac{1}{2}\left(B_1-2b_1\right)\cos^2\theta+\\
&+\frac{1}{4}\left[\left(B_2+B_3\right)-2\left(d_3+c_2\right)\right]\sin^2\theta.
\end{aligned}\tag{19}$$

Потребуем, чтобы уравнения (17),(18) выполнялись для любых значений переменных $\theta$, $\varphi$. Тогда получим систему уравнений, которой должны удовлетворять параметры задачи (1),(2) и инвариантных соотношениях (9). Выпишем часть уравнений

$$\begin{aligned}
&2b_2a_3d_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+\alpha_2^2\gamma_{23}=0,\\
&2b_2a_2c_2(\alpha_1^2+\alpha_3^2)+\alpha_3^2\gamma_{23}=0,\\
&\alpha_2\alpha_3(2a_2c_2b_2+\gamma_{23})=0,\quad \alpha_2\alpha_3(2a_3d_3b_2+\gamma_{23})=0,\\
&\alpha_2(a_1b_1b_2-\xi_{12})=0,\quad \alpha_3(\gamma_{23}-\xi_{12})=0,\\
&\alpha_2(\sigma_{13}-\gamma_{23})=0,\quad \alpha_3(\sigma_{13}-a_1b_1b_2)=0...
\end{aligned}\tag{20}$$

где $\gamma_{23},\sigma_{13}$, $\xi_{12}$ имеют значения из систем (11)-(13). Многоточие в системе (20) обозначает уравнения, которые не выписаны в силу их громоздкости. Можно показать, что одним из решений является решение, которое характеризуется равенствами $\alpha_2=\alpha_3=0$ и условиями, при выполнении которых функция $\lambda$ из формулы (14) имеет вид

$$\lambda=\kappa_0+\kappa_1\nu_1. \tag{21}$$

Выпишем полную систему условий на параметры при указанных выше условиях и на основании обозначений (11)-(13)

$$s_3=0,\quad d_0=0, \tag{22}$$

$$s_2+c_0\left[a_2\left(b_1+\kappa_1\right)+d_3\left(a_3-a_2\right)+a_2B_3\right]=0, \tag{23}$$

$$s_2-c_0\left[b_1\left(a_2-a_1\right)-a_2\left(d_3+B_1\right)+a_2\kappa_1\right]=0, \tag{24}$$

$$c_0\left[b_0\left(a_2-a_1\right)+a_2\kappa_0\right]=0, \tag{25}$$

$$s_1 + b_0\left[c_2(a_2 - a_1) + a_1(d_3 + B_2)\right] + \kappa_0 a_2 c_2 = 0, \tag{26}$$

$$s_1 - b_0\left[d_3(a_1 - a_3) - a_1(c_2 + B_3)\right] + \kappa_0 a_3 d_3 = 0, \tag{27}$$

$$(a_2c_2 - a_3d_3)(b_1 + \kappa_1) + c_2d_3(a_3 - a_2) + a_2c_2B_3 - a_3d_3B_2 + C_3 - C_2 = 0, \tag{28}$$

$$c_2(a_3d_3 - a_1b_1) + b_1d_3(a_1 - a_3) - \kappa_1 a_3 d_3 + a_3d_3B_1 - a_1b_1B_3 + C_1 - C_3 = 0, \tag{29}$$

$$d_3(a_1b_1 - a_2c_2) + b_1c_2(a_2 - a_1) + \kappa_1 a_2 c_2 + a_1b_1B_2 - a_2c_2B_1 + C_2 - C_1 = 0. \tag{30}$$

Отметим, что при получении равенств (22) предполагалось, что $a_3 \neq a_2$. Итак, равенства (23)-(30) являются условиями существования инвариантных соотношений (9).

**3. Случай $c_0 \neq 0$.** Из уравнения (25) вытекает

$$\kappa_0 = \frac{b_0(a_1 - a_2)}{a_2}. \tag{31}$$

В силу структуры уравнений (23)-(30) из уравнений (23),(24) можно определить значение $\kappa_1$, выраженное через остальные параметры задачи и не зависящее от $s_1$. Из уравнений (26)-(27) можно найти $c_2$, которое не зависит от $s_1$ и показать, что уравнения (28)-(30) зависимы.

Выпишем окончательный результат, учитывая условия (22)

$$s_3=0,\quad d_0=0,\quad c_2=\frac{1}{a_2}\left[a_2\left(B_2-B_3\right)-d_3\left(a_3-2a_2\right)\right],$$

$$c_0=-\frac{2s_2}{a_3d_3+a_1b_1+a_2\left(B_2+B_3\right)},\quad b_0=-\frac{s_1}{a_1\left(B_2+d_3\right)},$$

$$b_1=\frac{a_3\left(a_3-2a_2\right)d_3^2+a_3d_3\left(B_3-B_1-2B_2\right)+2a_2\left(C_3-C_1\right)}{a_1\left[d_3\left(a_3-2a_2\right)-2a_2B_2\right]},$$

$$b_*=\frac{a_2\left[2\left(C_3-C_1\right)-a_3d_3\left(B_1-B_3\right)\right]}{d_3\left(a_3-2a_2\right)-2a_2B_2},\qquad a_3\left(a_2-a_3\right)\left(2a_2-a_3\right)d_3^3+ \quad (32)$$

$$+2a_2\left(a_2-a_3\right)\left[a_2B_1+a_3B_2+\left(a_2-a_3\right)B_3\right]d_3^2+a_2\left[2C_1\left(a_2-a_3\right)+\right.$$

$$+C_2\left(a_3-2a_2\right)+a_3C_3-a_2\left(2a_3-3a_2\right)B_1B_2-a_2^2B_1B_3+$$

$$\left.+a_2\left(a_2-a_3\right)B_3\left(3B_2-B_3\right)\right]d_3+a_2\left[C_1\left(B_2-B_3\right)-\right.$$

$$\left.2C_2B_2+C_3\left(B_2+B_3\right)+a_2B_2\left(B_2-B_3\right)\left(B_1+B_3\right)\right]=0,$$

$$\kappa_1=\frac{1}{2a_1a_2}\left[a_1a_2\left(B_1-B_3\right)-b_*\left(2a_2-a_1\right)+2a_2\left(a_1-a_3\right)d_3\right].$$

Поскольку предпоследнее уравнение из (32) имеет, по крайней мере, один действительный корень, то система условий (32) представляет собой действительные условия существования трех инвариантных соотношений (9).

Запишем уравнения (15) при $d_0=0$

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_1&=\left[-a_2c_0+p_0\nu_2\right]\nu_3,\\ \dot{\nu}_2&=\left[a_1b_0+q_0\nu_1\right]\nu_3,\\ \dot{\nu}_3&=a_2c_0\nu_1-a_1b_0\nu_2+r_0\nu_1\nu_2,\end{aligned}\qquad (33)$$

где $p_0=a_3d_3-a_2c_2,\ q_0=a_1b_1-a_3d_3,\ r_0=a_2c_2-a_1b_1.$

Система дифференциальных уравнений (33) имеет первый интеграл

$$2a_1b_0\nu_1 + 2a_2c_0\nu_2 + q_0\nu_1^2 - p_0\nu_2^2 = c_*, \tag{34}$$

где $c_*$ – произвольная постоянная. Используя геометрическое соотношение $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и интеграл (34), найдем

$$\nu_2 = \frac{1}{p_0}\left(a_2c_0 - \sqrt{\hat{O}(\nu_1)}\right), \tag{35}$$

$$\nu_3 = \frac{1}{|p_0|}\left[F(\nu_1) + 2a_2c_0\sqrt{\hat{O}(\nu_1)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

где

$$\hat{O}(\nu_1) = a_2^2c_0^2 - p_0\left(-q_0\nu_1^2 - 2a_1b_0 + c_*\right),$$
$$F(\nu_1) = -p_0\left(-r_0\nu_1^2 + 2a_1b_0\nu_1 - p_0 - c_*\right) - 2a_2c_0^2.$$

Подставим выражения (35),(36) в первое уравнение системы (33)

$$\dot{\nu}_1 = -\frac{1}{|p_0|}\sqrt{\hat{O}(\nu_1)\left[F(\nu_1) + 2a_2c_0\sqrt{\hat{O}(\nu_1)}\right]}. \tag{37}$$

Из уравнения (37) можно определить $\nu_1(t)$ и подставить в формулы (35),(36), а затем внести в равенства (9),(21). В результате получим решение уравнений (1),(2) при наличии у них трех инвариантных соотношений (9).

**4. Случай $c_0 = 0$.** Из системы уравнений (22)-(30) получим

$$s_2 = 0,\ s_3 = 0,\ d_0 = 0,\ b_0 = -\frac{s_1p_0}{e}, \tag{38}$$

$$\kappa_0 = \frac{b_0}{p_0}\left[\left(2a_1 - a_3\right)d_3 - \left(2a_1 - a_2\right)c_2 + a_1\left(B_2 - B_3\right)\right], \tag{39}$$

$$e = a_1 a_3 d_3^2 + a_1 (a_2 - a_3) c_2 d_3 - a_1 d_2 c_2^2 + a_1 (a_3 d_3 B_3 - a_2 c_2 B_3), \qquad (40)$$

$$b_1 e_1 - \kappa_1 a_3 d_3 = e_0, \quad b_1 g_1 - \kappa_1 a_2 c_2 = g_0, \qquad (41)$$

$$\begin{gathered} e_1 = d_3 (a_1 - a_3) - a_1 (B_3 + c_2), \quad e_0 = C_3 - C_1 - a_3 d_3 (B_1 + c_2), \\ g_1 = c_2 (a_2 - a_1) + a_1 (B_2 + d_3), \quad g_0 = C_1 - C_2 + a_2 c_2 (B_1 + d_3), \end{gathered} \qquad (42)$$

$$p_0 (\Delta_1 + \Delta_2) - \Delta \left[ c_2 d_3 (a_3 - a_2) + a_2 c_2 B_3 - a_3 d_3 B_2 + C_3 - C_2 \right] = 0, \qquad (43)$$

$$\Delta = a_2 c_2 e_1 + a_3 d_3 g_1, \quad \Delta_1 = a_2 c_2 e_0 + a_3 d_3 g_0, \quad \Delta_2 = e_1 g_0 - e_0 g_1. \qquad (44)$$

Из (38) следует, что обобщенный центр масс гиростата лежит на первой координатной оси. Условия (38)-(44) показывают, что величины $b_0, b_1, \kappa_0, \kappa_1$ зависят от параметров $c_2, d_3$, связанных между собою равенством (43), в котором введены обозначения (44).

Для сведения задачи к квадратурам запишем уравнения Пуассона (33) при $c_0 = 0$

$$\dot{\nu}_1 = p_0 \nu_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = [a_1 b_0 + q_0 \nu_1] \nu_3, \quad \dot{\nu}_3 = [-a_1 b_0 + r_0 \nu_1] \nu_2, \qquad (45)$$

Уравнения (45) имеют два интеграла: геометрический $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и $2 a_1 b_0 \nu_1 + q_0 \nu_1^2 - p_0 \nu_2^2 = c^*$, где $c^*$ – произвольная постоянная и поэтому их интегрирование сводится к квадратуре

$$\int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{\varphi_1(\nu_1) \varphi_2(\nu_1)}} = t - t_1, \qquad (46)$$

где

$$\varphi_1(\nu_1) = q_0 \nu_1^2 + 2 a_1 b_0 \nu_1 - c^*, \quad \varphi_2(\nu_1) = r_0 \nu_1^2 - 2 a_1 b_0 \nu_1 + p_0 + c^*. \qquad (47)$$

После обращения интеграла из (46) находим функцию $\nu_1(t)$, а функции $\nu_2(t),\ \nu_3(t)$ определяем из формул

$$\nu_2(t) = \sqrt{\frac{\varphi_1(\nu_1(t))}{p_0}}, \quad \nu_3(t) = \sqrt{\frac{\varphi_2(\nu_1(t))}{p_0}}.$$

Функцию $\lambda(t)$ можно найти из (21): $\lambda(t) = \kappa_0 + \kappa_1 \nu_1(t),$ а компоненты момента количества движения гиростата – из формул (9). Очевидно, что основные переменные задачи (1),(2) являются эллиптическими функциями времени. Действительность полученного решения вытекает из условия, что параметры $c_2, d_3$ связаны только одним соотношением (43), в котором разность $C_3 - C_2$ может принимать любое значение, а также из условия, что параметр $c^*$ произволен.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В статье получены два новых класса решений уравнений (1),(2), которые характеризуются линейными инвариантными соотношениями (9),(21) и выражаются эллиптическими функциями времени.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела / П.В. Харламов – Новосибирск: Изд–во Новосиб. университета, 1965. – 221 с.

2. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В.В. Румянцев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1970. Вып. 2. С. 83–96.

3. Горр Г.В. Классические задачи динамики твердого тела/ Г.В.Горр, Л.В. Кудряшова, Л.А. Степанова – Київ: Наук. думка, 1978. – 296 с.

4. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела / В.В. Козлов – Ижевск: Изд–во РХД, 2000. - 256 с.

5. Борисов А.В. Динамика твердого тела/ А.В. Борисов, И.С. Мамаев – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.

6. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson / J. Liouville // J. math. pures et appl. 1858. V.3. P. 1-25.

7. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. 1899. V.22. P. 201-358.

8. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Жуковский Н.Е. // Собр. соч: М.; Л.: Гостехиздат. 1949. Т. 1. – С. 31-152.

9. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел / Харламов П.В. // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. – С. 52-73.

10. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э.И. Дружинин // Прикл. математика и механика. 1999. Т.63. Вып. 5. – С. 825-826.

11. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси / О.С. Волкова // Труды ин-та прикладной математики и механики. 2009. – Т. 19. – С. 30-35.

12. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик / О.С. Волкова // Механика твердого тела. 2008. Вып. 38. – С. 80-86.

13. Волкова О.С. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом/ О.С. Волкова, И.Н. Гашененко // Механика твердого тела. 2009. Вып. 39. – С. 42-49.

14. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П.В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. 1963. № 4. – С. 17–29.

15. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H.M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. 1986. V. 5, №5. P. 747-754.

16. Горр Г.В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел/ Г.В. Горр, А.В. Мазнев, Е.К. Щетинина – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

17. Горр Г.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку/ Г.В. Горр, А.В. Мазнев – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.

18. Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П.В. Харламов // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15-24.

г. Донецк
Донецкий национальный университет