УДК 531.38

Г.В. Горр, А.В. Мазнев

О ДВИЖЕНИИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ В ДВУХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Рассмотрено движение симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики: в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемой уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона; в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Указаны решения уравнений движения, содержащие шесть произвольных постоянных.

Введение. Модель симметричного гиростата характеризуется тем, что центр масс гиростата находится на оси симметрии, а моменты инерции относительно экваториальных осей равны (гироскоп Лагранжа). Гироскоп Лагранжа рассмотрен во многих классических учебниках по теоретической механике (см., например, [1]). Известно, что интегрирование уравнений движения тяжелого гироскопа Лагранжа осуществляется в эллиптических функциях времени.

Уравнения движения симметричного гиростата с постоянным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил, описываемых уравнениями класса Кирхгофа, допускают, как и в классическом случае, дополнительный первый интеграл и поэтому интегрируются в квадратурах [2,3].

Для задачи о движении тяжелого твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона уравнения движения допускают только два первых интеграла, но, несмотря на это, в случае симметричного гиростата можно получить один линейный первый интеграл и один дополнительный интеграл [4].

В статье рассмотрено движение симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом. Постановка задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом дана Ж. Лиувиллем [5], В. Вольтерра [6], Н.Е. Жуковским [7], П.В. Харламовым [8]. Условия существования некоторых классов движений в задаче о движении тяжелого гиростата получены в [9-12], в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил – в [13,14].

Данная статья посвящена интегрированию в квадратурах уравнений движения симметричного гиростата в двух задачах динамики, указанных в аннотации статьи. Полученные решения зависят от шести произвольных постоянных.

Постановка задачи. Рассмотрим первую задачу – задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [3,13-15]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha} - B\boldsymbol{\nu}\right)\times\boldsymbol{\omega} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda} = L. \tag{2}$$

где введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, характеризующий гиростатический момент гиростата $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; L – проекция момента сил, действующих на носимое тело, на его ось вращения; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; A – тензор инерции гиростата; B и $\tilde{N}$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}, \lambda(\mathrm{t})$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1),(2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \left(A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}\right)\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\left(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Запишем уравнения (1),(2), используя в качестве переменных x_1, x_2, x_3, где $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{\omega} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя, а также ν_1, ν_2, ν_3 и λ. Тогда вектор угловой скорости можно записать в виде $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x}$ ($a = (a_{ij})$ – гирационный тензор). Полагаем, что тело носитель является гироскопом Лагранжа, а матрицы B и C имеют специальную форму, т.е.

$$\begin{gathered} a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_2), \ \boldsymbol{s} = (s_1, 0, 0), \ B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_2), \\ C = \mathrm{diag}(\mathrm{C}_1, C_2, C_2). \end{gathered} \tag{4}$$

Подставив выражение $L = \dot{\lambda}$ из уравнения (2) в уравнение (1) и учтя равенства (4), получим уравнения движения симметричного гиростата

$$\left(x_1 + \lambda(t) + B_2\nu_1\right)^{\cdot} = 0, \tag{5}$$

$$\dot{x}_2 = x_3\left[x_1\left(a_1 - a_2\right) - a_2\lambda(t) + B_1 a_2\nu_1\right] + \nu_3\left[\left(C_1 - C_2\right)\nu_1 - B_2 a_1 x_1 - s_1\right], \tag{6}$$

$$\dot{x}_3 = -x_2\left[x_1\left(a_1 - a_2\right) - a_2\lambda(t) + B_1 a_2\nu_1\right] - \nu_2\left[\left(C_1 - C_2\right)\nu_1 - B_2 a_1 x_1 - s_1\right]. \tag{7}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_2\left(x_3\nu_2 - x_2\nu_3\right),\;\; \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_2x_3\nu_1,\;\; \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \qquad (8)$$

Интегралы(3) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}&\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,\;\left(x_1+\lambda\right)\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3-\\&-\frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2+B_2\nu_2^2+B_3\nu_3^2\right)=k.\end{aligned} \qquad (9)$$

При записи уравнений (5)-(9) считаем $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)$, т.е. гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ направлен по оси симметрии тела-носителя.

Отметим, что в силу гидродинамической аналогии [15] при $\lambda=\mathrm{const}$ уравнения (1),(2) можно линейным преобразованием привести к уравнениям движения тела в жидкости [3]. В такой трактовке, вытекающий из уравнения (5) первый интеграл $x_1+B_2\nu_1=c$ называют интегралом Кирхгофа-Харламова [16].

Вторая задача описывается уравнениями

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}}=\left(A\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\alpha}\right)\times\boldsymbol{\omega}+B\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\nu}-L\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{s}\right), \qquad (10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega},\quad \dot{\lambda}=L, \qquad (11)$$

в которых физическая интерпретация величин $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu},\lambda,\boldsymbol{\alpha},L,C$ совпадает с интерпретацией соответствующих величин в уравнениях (1),(2). Матрица B в уравнении (10) обусловлена влиянием магнитного поля на ферромагнетик (первоначально не намагниченный). Момент $B\boldsymbol{\omega}$, входящий в уравнение (10) в составе произведения, и характеризует эффект Барнетта-Лондона (при $\lambda=\mathrm{const}$ см. статьи [4,17,18]).

Запишем уравнения (10),(11), приняв, как и в случае рассмотрения уравнений (1),(2), переменные $x_1,x_2,x_3,\nu_1,\nu_2,\nu_3$ и условия (4):

$$\left(x_1+\lambda(t)+B_2\nu_1\right)^{\boldsymbol{\cdot}}=0, \qquad (12)$$

$$\dot{x}_2=x_3\left[\left(a_1-a_2\right)x_1-a_2\lambda(t)+B_2a_2\nu_1\right]+\nu_3\left[\left(C_1-C_2\right)\nu_1-B_1a_1x_1-s_1\right], \qquad (13)$$

$$\dot{x}_3=-x_2\left[\left(a_1-a_2\right)x_1-a_2\lambda(t)+B_2a_2\nu_1\right]-\nu_2\left[\left(C_1-C_2\right)\nu_1-B_1a_1x_1-s_1\right], \qquad (14)$$

$$\dot{\nu}_1 = a_2\left(x_3\nu_2 - x_2\nu_3\right),\;\; \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_2x_3\nu_1,\;\; \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \qquad (15)$$

Уравнения (12)-(15) допускают первые интегралы

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1, \quad \left(x_1+\lambda\right)\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3=k, \tag{16}$$

где k – произвольная постоянная.

Отметим, что при получении уравнений (12)-(14) предполагалось: $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)$.

Если в уравнениях (12)-(15) считать $\lambda(t)=\mathrm{const}$, то из (12) следует интеграл В.А. Самсонова [4]. В дальнейшем будем считать, что $\lambda(t)\neq\mathrm{const}$.

Интегрирование уравнений (5)-(8). Из уравнения (5) найдем первый интеграл

$$x_1+\lambda(t)+B_2\nu_1=c, \tag{17}$$

где c – произвольная постоянная. Он является обобщением первого интеграла для случая $\lambda(t)=\mathrm{const}$. Выразим из соотношения (17) $\lambda(t)$:

$$\lambda(t)=c-x_1-B_2\nu_1 \tag{18}$$

и подставим (18) в уравнения (6),(7):

$$\begin{aligned}\dot{x}_2&=x_3\left[\left(a_1x_1-a_2c\right)+a_2\left(B_1+B_2\right)\nu_1\right]+\nu_3\left[\left(C_1-C_2\right)\nu_1-B_2a_1x_1-s_1\right],\\ \dot{x}_3&=-x_3\left[\left(a_1x_1-a_2c\right)+a_2\left(B_1+B_2\right)\nu_1\right]-\nu_2\left[\left(C_1-C_2\right)\nu_1-B_2a_1x_1-s_1\right].\end{aligned} \tag{19}$$

Интеграл моментов из системы (9) при условии (18) примет вид

$$x_2\nu_2+x_3\nu_3-\frac{1}{2}\left(B_1+B_2\right)\nu_1^2+c\nu_1=K, \tag{20}$$

где $K=k+\dfrac{1}{2}B_2$.

Отметим, что в уравнениях (8),(19) x_1 – произвольная дифференцируемая функция времени.

Для интегрирования уравнений (8),(19) введем вместо ν_1,ν_2,ν_3 и x_2,x_3 новые переменные

$$\nu_1=\cos\theta,\ \ \nu_2=\sin\theta\cos\varphi,\ \ \nu_3=\sin\theta\sin\varphi, \tag{21}$$

$$x_2=\rho\cos\alpha, \quad x_3=\rho\sin\alpha. \tag{22}$$

Тогда рассматриваемая система (8),(19) преобразуется так

$$\dot{\theta} = a_2 \rho \sin(\varphi - \alpha), \tag{23}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\left[a_2 \rho \cos\theta \cos(\varphi - \alpha) - a_1 x_1 \sin\theta\right], \tag{24}$$

$$\dot{\rho} = \sin\theta \sin(\varphi - \alpha)\left[\left(C_1 - C_2\right)\cos\theta - \left(s_1 + B_2 a_1 x_1\right)\right], \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = \frac{1}{\rho}\Big\{&\left(a_2 c - a_1 x_1\right)\rho - a_2\left(B_1 + B_2\right)\rho\cos\theta - \sin\theta\cos(\varphi - \alpha)\times \\ &\times\left[\left(C_1 - C_2\right)\cos\theta - \left(s_1 + B_2 a_1 x_1\right)\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{26}$$

Система (23)-(26) имеет первый интеграл

$$\rho\sin\theta\cos(\varphi - \alpha) - \frac{1}{2}\left(B_1 + B_2\right)\cos^2\theta + c\cos\theta = K, \tag{27}$$

который следует из соотношения (20) в силу (21),(22).

Покажем, что система (23)-(26) при $x_1 = x_1^{(0)} = \mathrm{const}$ интегрируется в квадратурах. Из уравнений (23),(25) вытекает

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{a_2\rho}\left[\left(C_1 - C_2\right)\cos\theta - \left(s_1 + B_2 a_1 x_1^{(0)}\right)\right],$$

из которого получим зависимость $\rho^2(\theta)$

$$\rho^2(\theta) = \frac{1}{a_2}\left[\left(C_2 - C_1\right)\cos^2\theta + 2\left(s_1 + B_2 a_1 x_1^{(0)}\right)\cos\theta + \varepsilon_0\right], \tag{28}$$

где ε_0 – произвольная постоянная.

На основании равенства (28), и из интеграла (27) найдем $\cos(\varphi - \alpha)$ и подставим в уравнение (23):

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} = a_2(t - t_0), \tag{29}$$

где

$$F(\theta)=\rho^2(\theta)\sin^2\theta-\left[K+\frac{1}{2}\left(B_1+B_2\right)\cos^2\theta-c\cos\theta\right]^2, \tag{30}$$

а $\rho^2(\theta)$ выражается по формуле (28).

Обращение интеграла (29) позволяет определить функцию $\theta=\theta(t)$. Для определения свойств этой функции можно использовать обозначение $\cos\theta=\nu_1$ из системы (21), а также выражение (28) и интеграл (29) привести к виду

$$\int_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1}\frac{d\nu_1}{\sqrt{\Phi(\nu_1)}}=-(t-t_0). \tag{31}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\Phi(\nu_1)=d_4\nu_1^4+d_3\nu_1^3+d_2\nu_1^2+d_1\nu_1+d_0,\\ d_4=-\frac{a_2}{4}\left(B_1+B_2\right)+C_1-C_2,\ d_3=-c\left(B_1+B_2\right)-2\left(s_1+B_2a_1x_1^{(0)}\right),\\ d_2=C_2-C_1-\varepsilon_0-a_2c^2+K\left(B_1+B_2\right),\quad d_1=2\left(s_1+B_2a_1x_1^{(0)}\right)-2cK,\\ d_0=\varepsilon_0-a_2K^2.\end{gathered} \tag{32}$$

Из формул (31),(32) вытекает, что $\nu_1=\nu_1(t)$ является эллиптической функцией времени.

Для нахождения функции $\varphi(t)$ будем использовать уравнение, которое вытекает из уравнения (24) и интеграла (27) путем исключения $\cos(\varphi-\alpha)$.

Если функцию $\theta=\theta(t)$, найденную из (29), подставить в редуцированное уравнение, то получим

$$\begin{gathered}\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sin^2\theta(t)}\Big[\frac{a_2}{2}\left(B_1+B_2\right)\cos^3\theta(t)-\left(a_2c-a_1x_1^{(0)}\right)\cos^2\theta(t)+\\ +a_2K\cos\theta(t)-a_1x_1^{(0)}\Big]dt.\end{gathered} \tag{33}$$

Из формулы (27) вытекает

$$\begin{gathered}\alpha(t)=\varphi(t)+\arccos\frac{1}{\rho(\theta(t))\sin\theta(t)}\Big[K+\frac{1}{2}\left(B_1+B_2\right)\cos^2\theta(t)-\\ -c\cos\theta(t)\Big].\end{gathered} \tag{34}$$

Соотношения (18),(28),(29),(33),(34) позволяют, в силу (21),(22), найти зависимость всех переменных задачи (5)-(8) в предположении, что $x_1 = x_1^{(0)} = \mathrm{const}$, т.е. для построенного решения проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на ось симметрии тела-носителя постоянна. Отметим, что произвольными постоянными в нем являются величины: $x_1^{(0)}, \varepsilon_0, K, c, \varphi_0, \theta_0$ ($\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $\theta_0 = \theta(t_0)$). Функция $L(t)$ находится дифференцированием функции $\lambda(t) = c - x_1^{(0)} - B_2 \cos\theta(t)$. Таким образом, в случае симметричного гиростата установлено общее решение уравнений движения.

Интегрирование уравнений (12)-(15). Следует подчеркнуть отличие уравнений системы (5)-(8) и системы (12)-(15). Оно состоит в том, что типы первых интегралов моментов из формул (9) и (16) не совпадают (в интеграл моментов из (16) не входят параметры B_i $(i = \overline{1,3})$). Однако это обстоятельство не отражается на интегрировании системы (12)-(15).

Из уравнения (12) следует

$$\lambda(t) = c - x_1 - B_2 \nu_1 \tag{35}$$

где c – произвольная постоянная. Введем новые переменные $\rho, \alpha, \theta, \varphi$ согласно формулам (21),(22). С учетом равенства (35) систему уравнений (13)-(15) приведем к системе уравнений четвертого порядка. При этом очевидно, что уравнения для $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ совпадают с уравнениями (23),(24), а уравнения для $\dot{\rho}$ и $\dot{\alpha}$ таковы

$$\dot{\rho} = \sin\theta \sin(\varphi - \alpha)\left[\left(C_1 - C_2\right)\cos\theta - \left(s_1 + B_1 a_1 x_1\right)\right], \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = -\frac{1}{\rho}\left\{\rho\left[\left(a_1 x_1 - a_2 c\right) + 2 a_2 B_2 \cos\theta\right] + \sin\theta\cos(\varphi - \alpha) \times \right. \\ \left. \times\left[\left(C_1 - C_2\right)\cos\theta - \left(s_1 + B_1 a_1 x_1\right)\right]\right\}.\end{gathered} \tag{37}$$

Первый интеграл моментов из (16) в новых переменных можно записать в виде

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{1}{\sin\theta}\left(k + B_2 \cos^2\theta - c\cos\theta\right). \tag{38}$$

Выполним интегрирование уравнений (23),(24),(36),(37) в случае $x_1 = x_1^{(0)} = \mathrm{const}$. Из уравнений (23),(36) определим

$$\rho^2(\theta)=\frac{1}{a_2}\Big[\big(C_2-C_1\big)\cos^2\theta+2\Big(s_1+B_1a_1x_1^{(0)}\Big)\cos\theta+\varepsilon_0\Big], \tag{39}$$

где ε_0 – произвольная постоянная. Подставим выражение (38) в уравнение (23), используя очевидную формулу $\sin(\varphi-\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\varphi-\alpha)}$. Тогда зависимость $\theta=\theta(t)$ можно определить путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sin\theta d\theta}{\varphi(\theta)}=a_2(t-t_0), \tag{40}$$

где

$$\varphi(\theta)=\rho^2(\theta)\sin^2\theta-\Big(k+B_2\cos^2\theta-c\cos\theta\Big)^2. \tag{41}$$

Переход в формуле (40) к интегрированию по $\nu_1=\cos\theta$ осуществляется так же, как и в случае получения формулы (31). Следовательно, на основании формул (39),(41) можно утверждать, что $\nu_1=\nu_1(t)$ – эллиптическая функция времени.

Подставим выражения (38),(39) в уравнение (24) и учтем зависимость $\theta=\theta(t)$. Тогда функцию $\varphi(t)$ можно получить из формулы

$$\begin{aligned}\varphi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{\sin^2\theta(t)}\Big[&a_2B_2\cos^3\theta(t)-\Big(a_2c-a_1x_1^{(0)}\Big)\cos^2\theta(t)+\\&+k\cos\theta(t)-a_1x_1^{(0)}\Big]dt.\end{aligned} \tag{42}$$

Функцию $\alpha(t)$ определим из соотношения (38)

$$\alpha(t)=\varphi(t)+\arccos\frac{1}{\rho(\theta(t))\sin\theta(t)}\Big(k+B_2\cos^2\theta(t)-c\cos\theta(t)\Big), \tag{43}$$

где в силу (39)

$$\rho(\theta)=a_2^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\Big[\big(C_2-C_1\big)\cos^2\theta+2\Big(s_1+B_1a_1x_1^{(0)}\Big)\cos\theta+\varepsilon_0\Big]}. \tag{44}$$

Итак, функции $\theta(t), \varphi(t), \alpha(t), \rho(t)$ находятся из формул (40),(42)-(44). Подставив их в соотношения (21),(22),(35), установим зависимость переменных задачи от времени. Построенное решение зависит от произвольных постоянных $x_1^{(0)}, \varepsilon_0, k, c, \varphi_0, \theta_0$.

Замечание. Анализ окончательных результатов, полученных при интегрировании уравнений движения симметричного гиростата в двух задачах динамики, описываемых соответственно уравнениями (1),(2) и (10),(11), показывает, что учет переменности гиростатического момента позволяет стабилизировать движение гиростата так, чтобы $x_1 = x_1^{(0)} = \mathrm{const}$. Этот факт представляет интерес для приложений в задачах управления движением механических систем.

Выводы. В статье найдены решения двух систем дифференциальных уравнений движения симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом, описывающих движение гиростата под действием специального класса потенциальных и гироскопических сил, и движением симметричного гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта-Лондона. Эти решения можно интерпретировать, как решения, обобщающие решение Кирхгофа-Харламова и решение В.А. Самсонова.

Полученные в данной статье результаты допускают, очевидно, обобщение, которое отвечает случаю, когда x_1 является функцией переменной θ. Тогда, например, для первой задачи, можно найти аналоги формул (28)-(30),(33),(34) и определить функцию (18), которые будут описывать решение с пятью произвольными постоянными и одной произвольной функцией $x_1(\theta)$.

Список литературы

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат. – 1946. – 655с.
2. Kirchhoff G.R. Über die Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – **71**. – p.p. 237–262.
3. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29
4. Самсонов В.А. О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
5. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
6. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. 1899. V.**22**. – P. 201-358
7. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего поло-

сти, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ.. – 1885. – **17**, вып. 6. – С. 81–113

8. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
9. Волкова О.С. О стабилизации равномерных вращений вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Труды ИПММ НАНУ. – 2007. Т. 14. – С. 41–51.
10. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – вып. 38. – С. 80–86.
11. Волкова О.С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ИПММ НАНУ. – 2009. Т. 19. – С. 30–35.
12. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
13. Горр Г.В., Мазнев А.В. О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики// Труды ИПММ НАНУ. – 2010. Т. 21. – С. 64–75.
14. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – вып. 40. – С. 91–102.
15. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – V. **5**, №5. – P. 742-745.
16. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела // Київ: Наук. Думка. – 1978. – 296 с.
17. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
18. Урман Ю.М. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – **276**, № 6. – С. 1402–1404.