УДК 531.38

А.В. Мазнев

Случай трех инвариантных соотношений уравнений движения неавтономного гиростата

Получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Найдено новое решение указанных уравнений, которое выражается элементарными функциями времени.

Введение. В работе рассмотрена механическая система, состоящая из тела-носителя произвольной формы и ротора, который вращается в теленосителе вокруг закрепленной в нем оси. Уравнения движения такой системы (гиростата) можно получить, используя, например, работы В. Вольтерра [1], Н.Е. Жуковского [2], П.В. Харламова [3]. Исследование свойств движения гиростата представляется актуальным не только в случае постоянного гиростатического момента (см. обзор [4]), но и в случае, когда гиростатический момент зависит от времени (см., например, статьи [5,6]). В работе [7] изучены перманентные вращения свободного гиростата (автор статьи использует термин «неавтономный гиростат»). Статья [8] посвящена доказательству теоремы о возможности равномерного вращения неавтономного гиростата вокруг наклонной оси (оси, которая не совпадает с направлением вектора силы тяжести). В [9,10] изучены условия существования равномерных вращений и маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести. Работа [11] посвящена разработке общего метода исследования прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, который был применен в статье [12].

В этой работе получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (описание действующих сил можно найти в [13]) в случае переменного гиростатического момента. Данные условия позволили найти новый случай интегрируемости уравнений движения, которые являются обобщением уравнений Кирхгофа-Пуассона на случай переменного гиростатического момента.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{\nu} + \lambda\boldsymbol{\alpha}\right)\times a\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu}\times\left(C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\boldsymbol{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор, характеризующий составляющую момента количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, определяющий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x}$ – вектор угловой скорости, $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор; λ – величина гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$; $L(t)$– функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимого тела (ротора); $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\nu}$, λ обозначает относительную производную по независимой переменной t.

Уравнения (1),(2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k. \tag{3}$$

Здесь k – произвольная постоянная.

Поставим задачу об определении условий, при выполнении которых система дифференциальных уравнений (1),(2) допускает три инвариантных соотношения

$$\begin{aligned} x_1 &= b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \\ x_2 &= d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3, \\ x_3 &= e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3, \end{aligned} \tag{4}$$

где b_i, d_i, e_i $(i = \overline{0,3})$ – постоянные параметры. В силу структуры соотношений (4) для решения поставленной задачи можно принять главную систему координат, в которой $a = diag(a_1, a_2, a_3)$. Тогда компоненты угловой скорости ω_i определяются соотношениями $\omega_i = a_i x_i$, или на основании (4) формулами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3), \\ \omega_2 &= a_2(d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3), \\ \omega_3 &= a_3(e_0 + e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3). \end{aligned} \tag{5}$$

Подставим выражения (4) в интеграл моментов из системы (3)

$$\lambda\left(\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2+\alpha_3\nu_3\right)=k-b_0\nu_1-d_0\nu_2-e_0\nu_3+\left(\frac{1}{2}B_{11}-b_1\right)\nu_1^2+$$
$$+\left(\frac{1}{2}B_{22}-d_2\right)\nu_2^2+\left(\frac{1}{2}B_{33}-e_3\right)\nu_3^2+\left(B_{12}-d_1-b_2\right)\nu_1\nu_2+ \qquad (6)$$
$$+\left(B_{13}-e_1-b_3\right)\nu_1\nu_3+\left(B_{23}-e_2-d_3\right)\nu_2\nu_3.$$

Из формулы (6) вытекает, что функция λ является отношением многочлена второго порядка от переменных ν_i $(i=\overline{1,3})$ и линейного многочлена от этих переменных. Предположим, что λ – многочлен по переменным ν_i. Тогда из соотношения (6) следует

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3, \qquad (7)$$

где параметры λ_i связаны с параметрами b_i, d_i, e_i, B_{ij} условиями

$$b_0=-\alpha_1\lambda_0,\ d_0=-\alpha_2\lambda_0,\ e_0=-\alpha_3\lambda_0,\ b_1=\frac{1}{2}B_{11}-\alpha_1\lambda_1, \qquad (8)$$
$$d_2=\frac{1}{2}B_{22}-\alpha_2\lambda_2,\ e_3=\frac{1}{2}B_{33}-\alpha_3\lambda_3,\ d_1=B_{12}-b_2-\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\lambda_1, \qquad (9)$$
$$e_1=B_{13}-b_3-\alpha_1\lambda_3-\alpha_3\lambda_1,\ e_2=B_{23}-d_3-\alpha_2\lambda_3-\alpha_3\lambda_2. \qquad (10)$$

При этом постоянная $k=0$.

Условия существования инвариантных соотношений (4),(7).

Подставим выражения (5) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения Пуассона из (2)

$$\dot{\nu}_1=a_3\left(e_0+e_1\nu_1+e_2\nu_2+e_3\nu_3\right)\nu_2-a_2\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right)\nu_3,$$
$$\dot{\nu}_2=a_1\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right)\nu_3-a_3\left(e_0+e_1\nu_1+e_2\nu_2+e_3\nu_3\right)\nu_1, \qquad (11)$$
$$\dot{\nu}_3=a_2\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right)\nu_1-a_1\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right)\nu_2.$$

Внесем в скалярные динамические уравнения, вытекающие из (1), $L=\dot{\lambda}$, выражения (4),(5) и учтем формулы (7)-(10). Тогда получим три равенства

$$
\begin{aligned}
&-a_2\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_2\lambda_3+d_3\right)\nu_2+\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)\nu_3\right]+\\
&+a_3\left(e_0+e_1\nu_1+e_2\nu_2+e_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_3\lambda_2+e_2\right)\nu_3+\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right)\nu_2\right]+\\
&+a_1\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_1\lambda_2+b_2\right)\nu_3-\left(\alpha_1\lambda_3+b_3\right)\nu_2\right]+\\
&+s_3\nu_2-s_2\nu_3+\left(C_{22}-C_{33}\right)\nu_2\nu_3+C_{12}\nu_1\nu_3-C_{13}\nu_1\nu_2+C_{23}\left(\nu_3^2-\nu_2^2\right)=0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_1\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_1\lambda_3+b_3\right)\nu_1+\frac{1}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right)\nu_3\right]-\\
&-a_3\left(e_0+e_1\nu_1+e_2\nu_2+e_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_3\lambda_1+e_1\right)\nu_3+\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right)\nu_1\right]+\\
&+a_2\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_2\lambda_3+d_3\right)\nu_1-\left(\alpha_2\lambda_1+d_1\right)\nu_3\right]+\\
&+s_1\nu_3-s_3\nu_1+\left(C_{33}-C_{11}\right)\nu_1\nu_3+C_{23}\nu_1\nu_2-C_{12}\nu_2\nu_3+C_{13}\left(\nu_1^2-\nu_3^2\right)=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&-a_1\left(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_1\lambda_2+b_2\right)\nu_1+\frac{1}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right)\nu_2\right]+\\
&+a_2\left(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_2\lambda_1+d_1\right)\nu_2+\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)\nu_1\right]+\\
&+a_3\left(e_0+e_1\nu_1+e_2\nu_2+e_3\nu_3\right)\left[\left(\alpha_3\lambda_1+e_1\right)\nu_2-\left(\alpha_3\lambda_2+e_2\right)\nu_1\right]+\\
&+s_2\nu_1-s_1\nu_2+\left(C_{11}-C_{22}\right)\nu_1\nu_2+C_{13}\nu_2\nu_3-C_{23}\nu_1\nu_3+C_{12}\left(\nu_2^2-\nu_1^2\right)=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Потребуем, чтобы равенства (12)-(14) были тождествами для любых значений $\nu_i\ (i=\overline{1,3})$. Тогда получим условия

$$\lambda_0\left[\lambda_1\left(a_2\alpha_2^2+a_3\alpha_3^2\right)+a_2\alpha_2d_1+a_3\alpha_3e_1-\frac{a_1\alpha_1}{2}\left(B_{33}+B_{22}\right)\right]+s_1=0, \tag{15}$$

$$\lambda_0\left[\lambda_2\left(a_3\alpha_3^2+a_1\alpha_1^2\right)+a_3\alpha_3e_2+a_1\alpha_1b_2-\frac{a_2\alpha_2}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)\right]+s_2=0, \tag{16}$$

$$\lambda_0\left[\lambda_3\left(a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2\right)+a_1\alpha_1b_3+a_2\alpha_2d_3-\frac{a_3\alpha_3}{2}\left(B_{22}+B_{11}\right)\right]+s_3=0, \tag{17}$$

$$a_2d_2\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+a_3e_2\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)-\frac{a_1b_2}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right)+C_{12}=0, \tag{18}$$

$$a_3e_1\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)+a_1b_1\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)-\frac{a_2d_1}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)+C_{12}=0, \tag{19}$$

$$a_1b_1\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+a_2d_1\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)-\frac{a_3e_1}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right)+C_{13}=0, \tag{20}$$

$$a_2d_3\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+a_3e_3\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)-\frac{a_1b_3}{2}\left(B_{22}+B_{33}\right)+C_{13}=0, \tag{21}$$

$$a_1b_2\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+a_2d_2\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)-\frac{a_3e_2}{2}\left(B_{11}+B_{22}\right)+C_{23}=0, \tag{22}$$

$$a_3e_3\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)+a_1b_3\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)-\frac{a_2d_3}{2}\left(B_{11}+B_{33}\right)+C_{23}=0, \tag{23}$$

$$\begin{gathered}a_1b_2\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)-a_1b_3\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+a_3e_2\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)-a_2d_3\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)+\\+\frac{1}{2}a_3e_3\left(B_{11}+B_{22}\right)-\frac{1}{2}a_2d_2\left(B_{11}+B_{33}\right)+C_{22}-C_{33}=0,\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}a_1b_3\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)-a_3e_1\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)+a_2d_3\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)-a_2d_1\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+\\+\frac{1}{2}a_1b_1\left(B_{22}+B_{33}\right)-\frac{1}{2}a_3e_3\left(B_{11}+B_{22}\right)+C_{33}-C_{11}=0,\end{gathered} \tag{25}$$

которые являются условиями существования у уравнений (1),(2) инвариантных соотношений (4),(7).

Проведем анализ существования решения уравнений (15)-(25). На первом этапе в качестве свободных параметров примем $\lambda_i, \alpha_i, b_2, b_3, d_2, B_{ij}$. Остальные параметры соотношений (4) можно найти из формул (8)-(10), а параметры $s_i\ (i=\overline{1,3}), C_{ij}$ можно определить из системы (15)-(25). В силу структуры этой системы выпишем три уравнения, которые являются результатом вычитания уравнений (18),(19); (20),(21); (22),(23).

$$\begin{gathered}a_1\alpha_1\left(b_3\lambda_2-b_2\lambda_3\right)+a_3e_3\left(e_2+\alpha_3\lambda_2\right)-a_2d_2\left(d_3+\alpha_2\lambda_3\right)+\\+\frac{1}{2}a_3e_2\left(B_{11}+B_{22}\right)-\frac{1}{2}a_2d_3\left(B_{11}+B_{33}\right)=0,\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}a_2\alpha_2\left(d_1\lambda_3-d_3\lambda_1\right)-a_3e_3\left(e_1+\alpha_3\lambda_1\right)+a_1b_1\left(b_3+\alpha_1\lambda_3\right)+\\+\frac{1}{2}a_1b_3\left(B_{22}+B_{33}\right)-\frac{1}{2}a_3e_1\left(B_{22}+B_{11}\right)=0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$a_3\alpha_3\left(e_1\lambda_2-e_2\lambda_1\right)-a_2d_2\left(d_1+\alpha_2\lambda_1\right)+a_1b_1\left(b_2+\alpha_1\lambda_2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}a_1b_2\left(B_{22}+B_{33}\right)-\frac{1}{2}a_2d_1\left(B_{11}+B_{33}\right)=0. \qquad (28)$$

Систему (26)-(28) запишем как систему относительно величин b_2, b_3, d_3

$$\begin{aligned}
&\beta_1b_2+\beta_2b_3+\beta_3d_3=\beta_0,\\
&\gamma_1b_2+\lambda_2b_3+\gamma_3d_3=\gamma_0,\\
&\sigma_1b_2+\sigma_2b_3+\sigma_3d_3=\sigma_0,
\end{aligned} \qquad (29)$$

где

$$\beta_1=-a_1\alpha_1\lambda_3,\ \beta_2=a_1\alpha_1\lambda_2,\ \beta_1=a_2\alpha_2\lambda_2+a_3\alpha_3\lambda_3-B_0\left(a_2+a_3\right),$$
$$\gamma_1=B_0\left(a_1+a_2\right)-a_1\alpha_1\lambda_1-a_2\alpha_2\lambda_2,\ \gamma_2=-a_3\alpha_3\lambda_2,\quad \gamma_3=a_3\alpha_3\lambda_1,$$
$$\sigma_1=-a_2\alpha_2\lambda_3,\ \sigma_2=B_0\left(a_1+a_3\right)-a_1\alpha_1\lambda_1-a_3\alpha_3\lambda_3,\ \sigma_3=-a_2\alpha_2\lambda_1,$$
$$\beta_0=\frac{1}{2}\left(a_2\alpha_2\lambda_3B_{22}-a_3\alpha_3\lambda_2B_{33}\right)-a_3B_{23}\left(B_0-\alpha_3\lambda_3\right)+$$
$$+a_3B_0\left(\alpha_2\lambda_3+\alpha_3\lambda_2\right)-\alpha_2\lambda_3\left(a_2\alpha_2\lambda_2+a_3\alpha_3\lambda_3\right),$$
$$\gamma_0=\frac{1}{2}\left(a_2\alpha_2\lambda_1B_{22}-a_1\alpha_1\lambda_2B_{11}\right)+a_2B_{12}\left(B_0-\alpha_2\lambda_2\right)- \qquad (30)$$
$$-a_2B_0\left(\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1\right)+\alpha_3\alpha_3\left(\lambda_1B_{23}-\lambda_2B_{13}\right)+\lambda_1\lambda_2\left(a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2\right)-$$
$$-a_3\alpha_2\alpha_3\lambda_1\lambda_3+\alpha_1\lambda_2\left(a_2\alpha_2\lambda_2+a_3\alpha_3\lambda_3\right),$$
$$\sigma_0=\frac{1}{2}\left(a_3\alpha_3\lambda_1B_{33}-a_1\alpha_1\lambda_3B_{11}\right)+a_3B_{13}\left(B_0-\alpha_3\lambda_3\right)-a_2\alpha_2\lambda_3B_{12}+$$
$$+\lambda_1\lambda_3\left(a_1\alpha_1^2+a_2\alpha_2^2\right)+\alpha_1\lambda_3\left(a_2\alpha_2\lambda_2+a_3\alpha_3\lambda_3\right),$$
$$B_0=\frac{1}{2}\left(B_{11}+B_{22}+B_{33}\right).$$

Учитывая формулы (30), найдем значение

$$\Delta=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3\end{vmatrix}=-B_0\left\{B_0^2\left(a_1+a_2\right)\left(a_1+a_3\right)\left(a_2+a_3\right)-\right.$$
$$-B_0\left[\left(a_1+a_2\right)\left(a_1+a_3\right)\left(a_2\alpha_2\lambda_2+a_3\alpha_3\lambda_3\right)+\left(a_2+a_3\right)\left(a_1+a_2\right)\times\right. \qquad (31)$$

$$\times\left(a_1\alpha_1\lambda_1+a_3\alpha_3\lambda_3\right)+\left(a_1+a_3\right)\left(a_2+a_3\right)\left(a_1\alpha_1\lambda_1+a_2\alpha_2\lambda_2\right)\Big]+$$
$$+\left(a_1\alpha_1\lambda_1+a_2\alpha_2\lambda_2+a_3\alpha_3\lambda_3\right)\big[a_1\alpha_1\lambda_1\left(a_2+a_3\right)+a_2\alpha_2\lambda_2\left(a_1+a_3\right)+$$
$$+a_3\alpha_3\lambda_3\left(a_1+a_2\right)\big]\Big\}.$$

Поскольку параметр B_0 может принимать не нулевые значения, то будем предполагать, что $\Delta \neq 0$. Тогда система (29) имеет единственное решение

$$b_2=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ b_3=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ d_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{32}$$

где

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\beta_0 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \sigma_0 & \sigma_2 & \sigma_3\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_0 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_3\\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_3\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_0\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_0\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_0\end{vmatrix}. \tag{33}$$

Будем считать, что параметры $a_i\ ,\alpha_i,\lambda_i\ (i=\overline{1,3}),\ B_{ij}$ заданы. Тогда формулы (31)-(33) позволяют определить величины b_2,b_3,d_3. Из соотношений (8)-(10) можно найти параметры $b_0,b_1,d_0,d_1,d_2,e_0,e_1,e_2$. Используя то обстоятельство, что параметры $s_i\ (i=\overline{1,3}),\ C_{ij}$ в силу постановки задачи не стеснены какими-либо ограничениями, из уравнений (15)-(17) определим значения s_i, из равенств (18),(20),(22),(24),(25) значения C_{12},C_{13} и разности $C_{22}-C_{33}$ и $C_{33}-C_{11}$.

Таким образом, показана разрешимость условий (15)-(25) для случая обобщенной задачи динамики, то есть для случая $B_{ij}\neq 0,\ C_{ij}\neq 0$. При рассмотрении задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием только силы тяжести необходимы дополнительные исследования, так как при $B_{ij}=0\ \ (i,j=\overline{1,3})$ определитель Δ из (31) обращается в нуль.

Интегрирование уравнений (11). В общем случае существования инвариантных соотношений (4),(7) уравнений (1),(2) интегрирование уравнений (11) затруднительно, так как они допускают только один первый интеграл

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1.$$

Поэтому интегрирование уравнений (11) будем проводить, используя подход, который принят для случая постоянного гиростатического момента [14].

Пусть параметры инвариантных соотношений (5) удовлетворяют дополнительным условиям

$$a_1 b_1 = a_2 d_2 = a_3 e_3 = m_0,\; a_2 d_1 = -a_1 b_2,\; a_3 e_1 = -a_1 b_3,\; a_3 e_2 = -a_2 d_3. \tag{34}$$

В силу соотношений (9)-(10) равенства (34) можно записать в виде

$$\begin{gathered} a_1 B_{11} = 2\left(m_0 + a_1 \alpha_1 \lambda_1\right),\; a_2 B_{22} = 2\left(m_0 + a_2 \alpha_2 \lambda_2\right),\; a_3 B_{33} = 2\left(m_0 + a_3 \alpha_3 \lambda_3\right), \\ d_3\left(a_3 - a_2\right) = a_3\left(B_{23} - \alpha_2 \lambda_3 - \alpha_3 \lambda_2\right), \\ b_2\left(a_2 - a_1\right) = a_2\left(B_{12} - \alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1\right), \quad b_3\left(a_3 - a_1\right) = a_3\left(B_{13} - \alpha_1 \lambda_3 - \alpha_3 \lambda_1\right). \end{gathered} \tag{35}$$

На основании соотношений (34) скалярные равенства (5) имеют вид

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + m_0 \boldsymbol{\nu} + G\boldsymbol{\nu}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ -a_1 b_2 & 0 & a_2 d_3 \\ -a_1 b_3 & -a_2 d_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

где $\boldsymbol{\omega}_0 = (a_1 b_0, a_2 d_0, a_3 e_0)$. Вместо скалярных уравнений (11) рассмотрим их векторное представление, учтя формулы (36)

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n}), \tag{37}$$

где

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad n_1 = -a_2 d_3,\; n_2 = a_1 b_3,\; n_3 = -a_1 b_2. \tag{38}$$

В статье [14] показано, что уравнение (37) кроме интеграла $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ имеет при условии $\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ дополнительный интеграл

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_0^2 + \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{n})}{\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\nu}} = c, \tag{39}$$

где c – произвольная постоянная. Это значит, что интегрирование уравнения (37) можно осуществить в квадратурах.

Покажем, что для рассматриваемого случая (35) система уравнений (26)-(28) разрешима. Непосредственной подстановкой значений (9),(10),(35) в уравнения можно убедиться в том, что имеют место не менее двух случаев существования решения системы (26)-(28).

В первом случае параметры инвариантных соотношений (4),(7) и параметры уравнений (1),(2) имеют значения

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ a_2 B_{11} = a_1 B_{22},\ B_{12} = 0,\ b_0 = 0,\ d_0 = 0,$$

$$e_0 = -\lambda_0,\quad b_1 = \frac{B_{11}}{2},\quad b_2 = 0,\quad b_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right),\quad d_1 = 0,$$

$$d_2 = \frac{B_{22}}{2},\quad d_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right),\quad e_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right),$$

$$e_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right),\quad e_3 = \frac{a_1 B_{22}}{2a_3},\quad \lambda_0 = \frac{2s_3}{a_3\left(B_{11} + B_{22}\right)},$$

$$\lambda_1 = \frac{B_{23}\left[B_{22}\left(2a_2 + 3a_3\right) + a_3\left(2B_{11} + B_{33}\right)\right]}{a_3\left(2B_{11} + 3B_{22} + B_{33}\right)},\ \lambda_3 = \frac{a_3 B_{33} - a_1 B_{11}}{2a_3}, \tag{40}$$

$$s_1 = \lambda_0\left(a_1 b_3 - a_3\lambda_1\right),\ s_2 = \lambda_0\left(a_2 d_3 - a_3\lambda_2\right),\ C_{12} = \frac{a_2 d_3}{a_3}\left(a_3\lambda_1 - a_1 b_3\right),$$

$$C_{13} = -\frac{a_2 b_3}{2}\left(B_{11} + 2B_{22}\right),\ C_{23} = -\frac{a_2 d_3}{2}\left(B_{11} + 2B_{22}\right),\quad \tilde{N}_{33} - \tilde{N}_{22} =$$

$$= -a_1 b_3^2 - a_2 d_3 B_{23} + \frac{a_1 B_{11}}{4}\left(B_{22} - B_{33}\right),\ C_{11} - C_{33} = a_1 b_3 B_{13} + a_2 d_3^2 +$$

$$+\frac{1}{4} B_{11}\left(B_{33} - B_{11}\right).$$

Инвариантные соотношения (4) в силу условий (40) принимают вид

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{B_{11}}{2}\nu_1 + \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_3,\\
x_2 &= \frac{a_1 B_{11}}{2a_2}\nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_3,\\
x_3 &= -\lambda_0 + \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_1 + \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_2 + \frac{a_1 B_{11}}{2a_3}\nu_3.
\end{aligned} \tag{41}$$

Запишем скалярные уравнения, вытекающие из (37), с учетом равенства $n_3 = 0$, которое следует из (38),(40)

$$\dot{\nu}_1 = -a_3\lambda_0\nu_2 + n_1\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right) - n_2\nu_1\nu_2,$$

$$\dot{\nu}_2 = a_3\lambda_0\nu_1 + n_2\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) - n_1\nu_1\nu_2, \tag{42}$$

$$\dot{\nu}_3 = -\nu_3\left(n_1\nu_1 + n_2\nu_2\right).$$

Уравнения (42) имеют первые интегралы (34) и

$$\frac{n_2\nu_1 - n_1\nu_2 + a_3\lambda_0}{\nu_3} = c, \tag{43}$$

где c – произвольная постоянная.

Второй случай разрешимости уравнений (26)-(28) характеризуется равенствами

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1,\ a_1B_{11} = a_2B_{22},\ B_{11} + B_{22} + B_{33} = 0, \\
b_1 = \frac{B_{11}}{2},\ b_2 = \frac{a_2B_{12}}{a_2 - a_1},\ b_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right),\ d_1 = \frac{a_1B_{12}}{a_1 - a_2}, \\
d_2 = \frac{B_{22}}{2},\quad d_3 = \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right),\quad e_1 = \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right), \\
e_2 = \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right),\quad e_3 = \frac{a_1B_{11}}{2a_3},\quad \lambda_0 = -\frac{2s_3}{a_3B_{33}}, \\
\lambda_1 = \frac{B_{13}\left[B_{11}\left(2a_1 + 3a_3\right) + a_3\left(B_{22} - B_{11}\right)\right]}{a_3\left(2B_{11} + B_{22}\right)},\ \lambda_3 = \frac{a_3B_{33} - a_1B_{11}}{2a_3}, \\
\lambda_2 = \frac{B_{23}\left[B_{22}\left(2a_2 + 3a_3\right) + a_3\left(B_{11} - B_{22}\right)\right]}{a_3\left(2B_{22} + B_{11}\right)},\ s_1 = \lambda_0\left(a_1b_3 - a_3\lambda_1\right), \\
s_2 = \lambda_0\left(a_2d_3 - a_3\lambda_2\right),\ C_{12} = \frac{a_1b_2}{2}\left(2B_{22} + B_{33}\right) - \frac{a_2d_3}{a_3}\left(a_3b_3 - a_3\lambda_1\right), \\
C_{13} = a_1b_2d_3 - \frac{a_1b_3}{2}\left(2B_{11} + B_{33}\right),\ C_{23} = -a_1b_2b_3 - \frac{a_2d_3}{2}\left(B_{11} + 2B_{22}\right), \\
C_{33} - C_{22} = a_1\left(b_2^2 - b_3^2\right) - a_2d_3B_{23} + \frac{a_1B_{11}}{4}\left(B_{22} - B_{33}\right), \\
C_{11} - C_{33} = a_2d_3^2 - \frac{a_1^2b_2^2}{a_2} + \frac{1}{4}B_{11}\left(B_{33} - B_{11}\right).
\end{gathered} \tag{44}$$

При условиях (44) инвариантные соотношения таковы

$$x_1 = \frac{B_{11}}{2}\nu_1 + \frac{a_1 B_{12}}{a_2 - a_1}\nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_1}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_3,$$
$$x_2 = \frac{a_1 B_{12}}{a_1 - a_2}\nu_1 + \frac{B_{22}}{2}\nu_2 + \frac{a_3}{a_3 - a_2}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_3, \qquad (45)$$
$$x_3 = -\lambda_0 + \frac{a_1}{a_1 - a_3}\left(B_{13} - \lambda_1\right)\nu_1 + \frac{a_2}{a_2 - a_3}\left(B_{23} - \lambda_2\right)\nu_2 + \frac{a_1 B_{11}}{2a_3}\nu_3,$$

а уравнения (37) принимают более сложный вид, чем уравнения (42)

$$\dot{\nu}_1 = -a_3\lambda_0\nu_2 + n_1\left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right) - n_2\nu_1\nu_2 - n_3\nu_1\nu_3,$$
$$\dot{\nu}_2 = a_3\lambda_0\nu_1 + n_2\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) - n_1\nu_1\nu_2 - n_3\nu_2\nu_3, \qquad (46)$$
$$\dot{\nu}_3 = n_2\left(\nu_1^2 + \nu_3^2\right) - n_1\nu_1\nu_3 - n_2\nu_2\nu_3.$$

Так как в силу (38) и $\boldsymbol{\omega}_0 = \left(0, 0, -a_3\lambda_0\right)$ векторы $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\omega}_0$ в общем случае не ортогональны, то интеграла вида (39) для уравнений (46) не существует.

Рассмотрим интегрирование уравнений (42). Введем новые переменные

$$\nu_1 = \sin\theta\cos\varphi, \ \ \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \ \ \nu_3 = \cos\theta. \qquad (47)$$

Тогда равенство (34) становится тождеством. Подставим выражения (47) в уравнение (42) и интеграл (43). В результате несложных преобразований получим

$$\dot{\theta} = \mathrm{ctg}\theta \cdot \sqrt{\mu_0^2\sin^2\theta - \left(c\cos\theta + a_3\lambda_0\right)^2}, \qquad (48)$$
$$\varphi = -\alpha_0 + \arccos\frac{c\cos\theta + a_3\lambda_0}{\mu_0\sin\theta}, \qquad (49)$$

где $\mu_0 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\dfrac{n_1}{n_2}$.

Таким образом, из уравнения (48) вытекает, что $\theta = \theta(t)$ – элементарная функция времени. После ее нахождения $\varphi = \varphi(t)$ определим из формулы (49). Подстановка найденных функций $\theta(t), \varphi(t)$ в равенства (47) дает возможность установить зависимости ν_i $(i = \overline{1,3})$ от времени. Тогда соотношения

(7),(41) позволяют определить основные переменные задачи от времени. Функция $L(t) = \dot{\lambda}(t)$ находится на основании формул (7) и (47).

Рассмотрим второй случай. Пусть параметры задачи и инвариантных соотношений удовлетворяют условиям (44). Тогда инвариантные соотношения принимают вид (45). Интегрирование уравнений (46) проведем при $\lambda_0 = 0$. Из условий (44) вытекает, что $s_i = 0 \ (i = \overline{1,3})$, то есть центр масс гиростата неподвижен. Запишем уравнения (46) в симметричной форме

$$\dot{\nu}_i = n_i - \nu_i \left(n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3 \right). \tag{50}$$

Пусть $\boldsymbol{\nu}^{(0)}$ – начальные значения переменных ν_i. Выберем их так, чтобы вектор $\boldsymbol{n}$ был ортогонален вектору $\boldsymbol{\nu}^{(0)} = \left(\nu_1^{(0)}, \nu_2^{(0)}, \nu_3^{(0)}\right)$. Это позволяет записать решение уравнений (50) в виде

$$\nu_i(t) = \frac{n\nu_i^{(0)} + n_i \operatorname{sh} n(t - t_0)}{n \operatorname{ch} n(t - t_0)}, \tag{51}$$

где $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Как и первом случае функции (51) дают возможность построить решение уравнений (1),(2), которые выражаются элементарными функциями времени.

Вывод. Установлены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений Кирхгофа-Пуассона в случае переменного гиростатического момента. Найдены новые решения этих уравнений.

Литература

1. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes. // Acta. Math.. – 1899. – **22**. –P. 201–358.
2. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.;Л.: Гостехиздат. – 1949.– **2.** – С. 152–309.
3. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
5. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. –№2. – С. 83–96.
6. Ковалев А.М. Нелинейные задачи и наблюдения в теории динамических систем // Киев: Наук. думка. –1980. – 175 с.
7. Дружинин Э.И. О перманентных вращениях уравновешенного неавто-

номного гиростата // Прикл. математика и механика.1999.– Т.63., Вып.5. – С. 825-826.

8. Ковалева Л.М., Позднякович Е.В. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком// Механика твердого тела. – 2000. – Вып.30. – С. 100-105.

9. Волкова О.С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – вып. 38. – С. 80–86.
10. Волкова О.С., Гашененко И.Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
11. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
12. Мазнев А.В. О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2011. – №1. – С. 14–18.
13. Yehia H.M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyro scopic forces, I: The equations of motion and their transformations. // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, –№5. – P. 742–745.
14. Горр Г.В., Узбек Е.К. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 3. – С. 418–426.