$$k_{22} = \frac{1}{4}A_1\theta_2^{\,2} + \frac{1}{4}A_2\theta_1^{\,2} + A_3,$$

$$k_{12} = (A_1 - A_2)\theta_3 - \frac{1}{2}A_3\theta_1\theta_2,$$

$$k_{23} = -\frac{1}{2}A_1\theta_2\theta_3 + (A_2 - A_3)\theta_1,$$

$$k_{13} = (A_3 - A_1)\theta_2 - \frac{1}{2}A_2\theta_1\theta_3,$$

$$K_1 = -\varGamma\left(1+\frac{1}{4}\theta^2\right)\left(e_1\left(-\theta_2+\frac{1}{2}\theta_1\theta_3\right)+e_2\left(\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\right)+e_3\left(1-\frac{1}{2}\theta_1^2-\frac{1}{2}\theta_2^2+\frac{1}{2}\theta_3^2\right)\right),$$

$$m_1 = A_1\left(-\theta_2+\frac{1}{2}\theta_1\theta_3\right)-\frac{1}{2}A_2\theta_3\left(\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\right)+\frac{1}{2}A_3\theta_2\left(1-\frac{1}{2}\theta_1^2-\frac{1}{2}\theta_2^2-\frac{1}{2}\theta_3^2\right),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}A_1\theta_3\left(-\theta_2+\frac{1}{2}\theta_1\theta_3\right)+A_2\left(\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\right)-\frac{1}{2}A_3\theta_1\left(1-\frac{1}{2}\theta_1^2-\frac{1}{2}\theta_2^2+\frac{1}{2}\theta_3^2\right),$$

$$m_3 = -\frac{1}{2}A_1\theta_2\left(-\theta_2+\frac{1}{2}\theta_1\theta_3\right)+\frac{1}{2}A_2\theta_1\left(\theta_1+\frac{1}{2}\theta_2\theta_3\right)+A_3\left(1-\frac{1}{2}\theta_1^2-\frac{1}{2}\theta_2^2+\frac{1}{2}\theta_3^2\right).$$

Вывод. Уравнения Эйлера-Кирхгофа в форме (29), (30) в обобщенных координатах являются достаточно общими. Из них можно получить уравнения в углах Эйлера с помощью соотношений (27), в новых модификациях углов Эйлера, в параметрах Родрига-Гамильтона и других обобщенных координатах. Система (29)-(30) удобна для численного решения задач динамики твердого тела и механики гибких стержней, так как ее правые части являются алгебраическими полиномами основных переменных и не имеют особенностей $\left(1+\frac{1}{4}\theta^2 \neq 0\right)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордеев, Г. Г. Уравнения Эйлера-Кирхгофа в гамильтоновой форме (обобщенные координаты-компоненты вектора конечного поворота) // Сб. тр. горно-электромеханического факультета ДонГТУ. – Донецк, 1996. – С. 40–44.
2. Илюхин, А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А. А. Илюхин. – Киев: Наук. Думка, 1979. – 216 с.
3. Кирхгоф, Г. Механика / Г. Кирхгоф. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 404 с.
4. Лурье, А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
5. Харламов, П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1965. – 220 с.
6. Эйлер, Л. Основы динамики точки. Первые главы из «Механики» и «Теории движения твердых тел» / Л. Эйлер. – М.; Л.: ОНТИ, 1938. – 500 с.

УДК 531.38
ББК 22.21

Г. В. Горр, А. В. Мазнев

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Аннотация. В работе показано, что движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом, при котором общий момент количества движения гиростата ортогонален барицентрической оси, возможно только при условиях, аналогичным условиям Гесса. Найдено решение уравнений движения гиростата, содержащее произвольную функцию угла нутации.

Ключевые слова: тяжелый гиростата, гиростатический момент, инвариантное соотношение.

G. V. Gorr, A. V. Maznyev

ON THE SOLUTION OF HEAVY GYROSTAT MOTION EQUATIONS WITH A VARIABLE GYROSTATIC MOMENT

Abstract. In the paper it is shown that motion of heavy gyrostat with a variable gyrostatic moment when a general moment-of momentum gyrostat is a orthogonal to the barycentric axis is possible only at terms analogical to the terms of Hess. The new solution of gyrostat motion equation with the arbitrary nutation corner function is found.

Key words: heavy gyrostat, gyrostatic moment, invariant correlation.

1. Введение. В динамике твердого тела при моделировании движений объектов техники часто используется модель гиростата [18]. Уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом рассматривались в работах Ж. Лиувилля [12], В. Вольтера [2], Н. Е. Жуковского [10], П. В. Харламова [18]. Следует отметить, что с помощью модели гиростата [18] можно изучать случай, когда носимое тело имеет несимметричную форму.

При изучении задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом необходимо учитывать, что уравнения движения гиростата допускают только два первых интеграла и поэтому использование теоремы Якоби, которая успешно применялась в задаче о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом (см. обзоры [1; 2; 6; 10; 19]), невозможно.

К настоящему времени в рассматриваемой задаче исследованы равномерные вращения [8; 11], регулярные прецессии [3], прецессионные движения общего вида [14; 15] и другие классы движений. Особое значение имеют результаты [4; 7; 16; 17], которые посвящены изучению условий существования инвариантных соотношений, поскольку они позволяют установить уровень сложности задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Так, например, в работе [4] при рассмотрении условий существования одного инвариантного соотношения были приняты некоторые дополнительные соотношения, которые только и позволили сформулировать результат в окончательной форме.

В динамике твердого тела получен ряд решений, которые имеют простой и наглядный геометрический смысл [6]. К ним относится решение В. Гесса [9], характеризующееся свойством ортогональности момента количества движения гиростата и барицентрической оси в теле. Представляет большой интерес исследование аналогичных решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Данная статья посвящена рассмотрению вопросов интегрирования уравнений движения гиростата, допускающих указанное соотношение. Получены новые решения обобщенных уравнений Эйлера–Пуассона в случае переменного гиростатического момента.

2. Постановка задачи. Запишем уравнения движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом [18]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times a\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{2}$$

где введены обозначения: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор гиростатического момента гиростата: $\lambda\boldsymbol{\alpha}$; λ – величина гиростатического момента; L – проекция действующих на тело-носитель сил на ось вращения носимых тел; $\boldsymbol{s} = s(l_1, l_2, l_3)$, $l_i (i = \overline{1,3})$ – компоненты единичного вектора, направленного из неподвижной точки O в центр тяжести C; $a = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1,3})$ – гирационный тензор; $s = mg\left|\overline{OC}\right|$, m – масса, g – ускорение свободного падения; точка над переменными обозначает производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad \boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha} \ \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Запишем компоненты угловой скорости гиростата $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \omega_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \omega_3 &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{4}$$

В скалярной форме из уравнения (1) имеем (первую ось подвижной системы координат направим по вектору $\boldsymbol{s}$: $\boldsymbol{s} = s(1, 0, 0)$)

$$x_1+\alpha_1\lambda^{\bullet} = x_2+\alpha_2\lambda\ \ \omega_3 - x_3+\alpha_3\lambda\ \ \omega_2, \tag{5}$$

$$x_2+\alpha_2\lambda^{\bullet} = x_3+\alpha_3\lambda\ \ \omega_1 - x_1+\alpha_1\lambda\ \ \omega_3 - s\nu_3, \tag{6}$$

$$x_3+\alpha_3\lambda^{\bullet} = x_1+\alpha_1\lambda\ \ \omega_2 - x_2+\alpha_2\lambda\ \ \omega_1 + s\nu_2, \tag{7}$$

Уравнение Пуассона из системы (2) с учетом (4) запишем в скалярном виде

$$\dot{\nu}_1=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3,\ \ \dot{\nu}_2=\omega_1\nu_3-\omega_3\nu_1,\ \ \dot{\nu}_3=\omega_2\nu_1-\omega_1\nu_2. \tag{8}$$

а интегралы (3) приведем к соотношениям

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1,\ (x_1+\alpha_1\lambda)\nu_1+(x_2+\alpha_2\lambda)\nu_2+(x_3+\alpha_3\lambda)\nu_3=k, \tag{9}$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (1),(2) инвариантного соотношения

$$\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{\alpha}\ \ \cdot\boldsymbol{s}=0, \tag{10}$$

которое является аналогом в случае Гесса [9]. В силу выбранной подвижной системы координат из (10) получим

$$x_1+\alpha_1\lambda=0. \tag{11}$$

В дальнейшем при изучении соотношения (11) будем применять метод инвариантных соотношений (ИС) Леви-Чивиты [13].

3. Редукция системы (5)–(8) на ИС (11). Распишем уравнение (5), учитывая формулы (4),(11)

$$\begin{aligned}&(a_{33}-a_{22})x_2x_3+a_{23}(x_2^2-x_3^2)+\lambda^2\alpha_1(\alpha_3a_{12}-\alpha_2a_{13})+\\&+\lambda\ \ x_2(\alpha_2a_{23}-\alpha_1a_{13}-\alpha_3a_{22})+x_3(\alpha_1a_{12}+\alpha_2a_{23})\ \ =0.\end{aligned} \tag{12}$$

Потребуем, чтобы равенство (12) было тождеством по переменным x_2, x_3, λ. Тогда получим следующие условия на параметры

$$a_{23}=0,\quad a_{33}=a_{22}, \tag{13}$$

$$\alpha_1(\alpha_3a_{12}-\alpha_2a_{13})=0,\quad \alpha_1a_{13}+\alpha_3a_{22}=0,\quad \alpha_1a_{12}+\alpha_2a_{23}=0. \tag{14}$$

Условия (13) позволяют поворотом подвижной системы координат вокруг первой координатной оси добиться условия $a_{12}=0$. Тогда из последнего уравнения системы (14) вытекает равенство $\alpha_2=0$, а второе уравнение этой системы можно параметризовать следующим образом

$$\alpha_1=-\mu_0a_{22},\ \ \alpha_3=\mu_0a_{13},\quad \mu_0=1\Big/\sqrt{a_{13}^2+a_{22}^2}\ . \tag{15}$$

В силу равенств (13) и условия $a_{12}=0$ выражения для компонент ω_i из (4) упрощаются. Учитывая в них и равенства (11), (15), получим

$$\omega_1=a_{13}x_3+\mu_0a_{11}a_{22}\lambda,\quad \omega_2=a_{22}x_2,\ \ \omega_3=a_{22}(x_3+\mu_0a_{13}\lambda). \tag{16}$$

На основании формул (11),(15),(16) уравнения (6)–(8) запишем в виде

$$\dot{x}_2=(x_3+\mu_0a_{13}\lambda)(a_{13}x_3+\mu_0a_{11}a_{22}\lambda)-s\nu_3, \tag{17}$$

$$\dot{x}_3=-\mu_0a_{13}\dot{\lambda}-x_2(a_{13}x_3+\mu_0a_{11}a_{22}\lambda)+s\nu_2, \tag{18}$$

$$\dot{\nu}_1=a_{22}(x_3\nu_2-x_2\nu_3+\mu_0a_{13}\lambda\nu_2), \tag{19}$$

$$\dot{\nu}_2=\nu_3(a_{13}x_3+\mu_0a_{11}a_{22}\lambda)-a_{22}\nu_1(x_3+\mu_0a_{13}\lambda), \tag{20}$$

$$\dot{\nu}_3=a_{22}x_2\nu_1-\nu_2(a_{13}x_3+\mu_0a_{11}a_{22}\lambda). \tag{21}$$

Отметим, что геометрический интеграл из (9) не изменяется, а интеграл моментов из (9) несколько упрощается

$$x_2\nu_2+x_3\nu_3=k-\mu_0a_{13}\lambda\nu_3. \tag{22}$$

Таким образом, уравнения (5)–(8) допускают инвариантное соотношение (10) при выполнении условий (13), равенства $a_{12}=0$ и равенств (15).

Условия (13) и равенство $a_{12}=0$ показывают, что центр тяжести гиростата лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида. Этому свойству удовлетворяют параметры и в решении Гесса [9].

В приведенной системе дифференциальных уравнений (17)–(21) исключим переменную x_3 с помощью соотношения

$$x_3=(k-x_2\nu_2-\mu_0 a_{13}\lambda\nu_3)/\nu_3\,. \tag{23}$$

полученного из формулы (22) и вместо $\nu_i\ (i=\overline{1,3})$ введем новые переменные θ,φ на сфере Пуассона $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$:

$$\nu_1=\cos\theta,\quad \nu_2=\sin\theta\cos\varphi,\quad \nu_3=\sin\theta\sin\varphi. \tag{24}$$

Тогда имеем следующие уравнения

$$\dot\theta=\frac{a_{22}(x_2\sin\theta-k\cos\varphi)}{\sin\theta\sin\varphi}, \tag{25}$$

$$\dot\varphi=\frac{1}{\sin^2\theta\sin\varphi}\Big[a_{13}x_2\sin^2\theta\cos\varphi+k(a_{22}\cos\theta\sin\varphi-a_{13}\sin\theta)-$$
$$-\mu_0\beta_0\lambda\sin^2\theta\sin\varphi\Big], \tag{26}$$

$$\dot x_2=\frac{1}{\sin^2\theta\ \sin^2\varphi}\ (k-x_2\sin\theta\cos\varphi)(a_{13}k-a_{13}x_2\sin\theta\cos\varphi+$$
$$+\mu_0\beta_0\lambda\sin\theta\sin\varphi)-s\sin^3\theta\sin^3\varphi\Big],\quad \beta_0=a_{11}a_{22}-a_{13}^2>0. \tag{27}$$

Итак, система (25)–(27) имеет третий порядок и содержит произвольную дифференцируемую функцию $\lambda=\lambda(t)$. После ее задания и интегрирования системы (25)–(27) переменные $\nu_i\ (i=\overline{1,3})$ находятся из формул (24), переменная x_1 – из формулы (11), а переменная x_3 – из формулы (23) с учетом соотношений (24)

$$x_3=\frac{1}{\sin\theta\sin\varphi}(k-x_2\sin\theta\cos\varphi-\mu_0a_{13}\lambda\sin\theta\sin\varphi). \tag{28}$$

4. Интегрирование системы (25)–(27). Выразим из уравнения (25) переменную x_2:

$$x_2=\frac{\dot\theta\sin\varphi}{a_{22}}+\frac{k\cos\varphi}{\sin\theta}. \tag{29}$$

Подставим значение (29) в уравнение (27) и учтем выражение для $\dot\varphi$ из (26). Тогда получим уравнение на переменную θ

$$\ddot\theta=\frac{k^2a_{22}^2}{\sin^3\theta}\cos\theta-sa_{22}\sin\theta. \tag{30}$$

Умножая обе части равенства (30) на $\dot\theta$, приходим к уравнению, которое имеет решение

$$\dot\theta=\sqrt{c_0+2sa_{22}\cos\theta-\frac{k^2a_{22}^2}{\sin^2\theta}}, \tag{31}$$

где c_0 – произвольная постоянная.

При исследовании уравнения (31) будем рассматривать два случая: $k=0$ и $k\neq 0$. В первом случае из (31) имеем

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2sa_{22}\cos\theta+c_0}}=t-t_0. \tag{32}$$

Изучим вариант, когда интеграл в левой части (32) является эллиптическим. Для этой цели формулу (32) представим так

$$\int_0^{\theta}\frac{d(\theta/2)}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2(\theta/2)}}=\sigma_0(t-t_0). \tag{33}$$

где

$$\kappa^2=\frac{4sa_{22}}{2sa_{22}+c_0},\quad \sigma_0=\frac{1}{2}\sqrt{2sa_{22}+c_0}. \tag{34}$$

В соотношениях (34) полагаем $s>0$ (выбором системы координат), $c_0>2sa_{22}$. Последнее неравенство служит ограничением на постоянную c_0.

На основании общей теории эллиптических функций из (32) определим

$$\begin{gathered}\theta(t)=2\mathrm{am}\,\vartheta(t),\ \ \vartheta(t)=\sigma_0(t-t_0),\\ \sin\theta(t)=2\mathrm{sn}\,\vartheta(t)\mathrm{cn}\,\vartheta(t),\ \ \cos\theta(t)=\mathrm{cn}^2\vartheta(t)-\mathrm{sn}^2\vartheta(t).\end{gathered} \tag{35}$$

Здесь $\mathrm{am}\,\vartheta(t),\mathrm{sn}\,\vartheta(t),\mathrm{cn}\,\vartheta(t)$ – эллиптические функции.

Пусть в уравнении (32) $k\neq 0$. Тогда, в силу первой формулы из системы (24), интегрирование уравнения (31) приведем к обращению интеграла

$$\int_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1}\frac{d\nu_1}{\sqrt{F(\nu_1)}}=t-t_0,\ \ F(\nu_1)=(1-\nu_1^2)(2sa_{22}\nu_1+c_0)-k^2a_{22}^2. \tag{36}$$

Как и в случае $k=0$ будем считать $s>0$. Тогда из второй формулы (36) вытекает

$$F(-\infty)>0,\quad F(-1)<0,\quad F(1)<0.$$

из которых следует, что один действительный корень $\nu_1^{(3)}$ уравнения $F(\nu_1)=0$ удовлетворяет условию $\nu_1^{(3)}<-1$. Необходимо потребовать, чтобы уравнение $F(\nu_1)=0$ имело три действительных корня, причем должны выполняться условия

$$-\infty<\nu_1^{(3)}<-1\le\nu_1^{(1)}\le\nu_1^{(2)}\le 1. \tag{37}$$

Следовательно, в силу (37) переменная ν_1 изменяется в промежутке

$$\nu_1^{(1)}\le\nu_1\le\nu_1^{(2)}. \tag{38}$$

Тогда на основании неравенств (37),(38) функцию $F(\nu_1)$ из (36) можно записать в виде

$$F(\nu_1)=2sa_{22}(\nu_1^{(2)}-\nu_1)(\nu_1-\nu_1^{(1)})(\nu_1-\nu_1^{(3)}). \tag{39}$$

Введем в формуле (39) новую переменную ψ

$$\nu_1=\nu_1^{(2)}\cos^2\psi+\nu_1^{(1)}\sin^2\psi. \tag{40}$$

Из формулы (40) вытекает, что при $\psi=0:\nu_1=\nu_1^{(2)}$, при $\psi=\dfrac{\pi}{2}:\nu_1=\nu_1^{(1)}$. В силу (39),(40) интеграл из (36) запишем так

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\kappa_1^2\sin^2\psi}}=\varepsilon_0(t-t_0), \tag{41}$$

где модуль эллиптического интеграла κ_1 и параметр ε_0 таковы

$$\varepsilon_0=\sqrt{sa_{22}\ \ \nu_1^{(2)}-\nu_1^{(3)}},\quad \kappa_1^2=\frac{\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(1)}}{\nu_1^{(2)}-\nu_1^{(3)}}. \tag{42}$$

Очевидно параметр κ_1^2 из (42) в силу (37) заключен между нулем и единицей.

Из (41) обращением эллиптического интеграла получим

$$\psi=\mathrm{am}(\varepsilon_0(t-t_0)),\quad \sin\psi=\mathrm{sn}(\kappa_1,\varepsilon_0(t-t_0)). \tag{43}$$

Подставим второе выражение из (43) в формулу (40)

$$\nu_1(t)=\nu_1^{(2)}-\ \ \nu_1^{(2)}-\nu_1^{(3)}\ \ \mathrm{sn}^2(\kappa_1,\varepsilon_0(t-t_0)). \tag{44}$$

Из (44) в силу первой формулы из (24) получим

$$\theta(t)=\arccos\nu_1(t). \tag{45}$$

Следовательно, зависимость $\theta = \theta(t)$ при $k = 0$ определена первой формулой из системы (35), при $k \neq 0$ – формулой (45).

Подставим выражение (29) в уравнение (26)

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{a_{13}}{a_{22}}\dot{\theta}\sin^2\theta\cos\varphi + k(a_{22}\cos\theta - a_{13}\sin\theta\sin\varphi) - \right.$$
$$\left. -\mu_0\beta_0\lambda\sin^2\theta\sin\varphi\right]. \tag{46}$$

Соотношения (35), (45) показывают, что функция $\theta(t)$ не зависит от функции λ. Но функции $x_2(t)$ и $\varphi(t)$ в силу формул (29), (46) зависят от этой функции. Причем из (46) следует, что нахождение функции $\varphi(t)$ сводится к определению решения уравнения класса Рикатти с переменными коэффициентами, что удается в крайне редких случаях. Однако, в силу произвольности функции $\lambda(t)$, можно указать достаточно простые случаи интегрирования уравнения (46) в квадратурах. Пусть, например, функция $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0\beta_0\sin^2\theta}\; k(a_{22}\cos\theta - a_{13}\sin\theta\sin\varphi) - L(\theta)\cos\varphi\;, \tag{47}$$

где $L(\theta)$ – произвольная дифференцируемая функция переменной θ. На основании (47) решение уравнения (46) запишется в виде

$$\varphi(t) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} e^{\Phi(t)}, \tag{48}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{a_{13}}{a_{22}}(\theta - \theta_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{L(\theta(t))}{\sin^2\theta(t)}dt. \tag{49}$$

Соотношения (45), (48), (49) позволяют определить функцию (29)

$$x_2(t) = \frac{\dot{\theta}(t)\sin\varphi(t)}{a_{22}} + \frac{k\cos\varphi(t)}{\sin\theta(t)}, \tag{50}$$

а также функции (24) и (28), то есть получить решение уравнений (25)–(28) в квадратурах. Представляет интерес свойство данного решения, которое заключается в том, что оно зависит от произвольной функции $L(\theta(t))$.

5. Анализ частных случаев. Рассмотрим случай $a_{13} = 0,\ k = 0$. Из соотношений (15) следуют равенства $\alpha_3 = 0,\ \alpha_1 = -1$. Это означает, что гиростатический момент направлен по барицентрической оси. Уравнение (46) упрощается

$$\dot{\varphi} = -\mu_0\beta_0\lambda\sin\varphi \tag{51}$$

и из него получим общее решение

$$\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\cdot\exp\left(-\mu_0\beta_0\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt\right)\right). \tag{52}$$

Таким образом, функция (52) зависит только от функции $\lambda(t)$.

Из (29), (51) вытекает, что $x_2 = -\dfrac{\dot{\theta}\dot{\varphi}}{\mu_0\beta_0\lambda(t)}$. Эта формула показывает достаточно наглядный вид переменной x_2. Необходимо отметить, что зависимость $\theta(t)$ определена первым равенством из системы (35).

Поскольку в данном случае гирационный тензор имеет вид $a = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{22})$, то мы имеем некоторый аналог условий Лагранжа.

Пусть $a_{13}=0,\ k\neq 0$. Тогда по аналогии с предыдущим случаем имеем $\alpha_3=0,\ \alpha_1=-1$ и гиростатический момент, как и в первом случае, направлен по барицентрической оси. В формуле (48) значение функции $\Phi(t)$ упрощается

$$\Phi(t)=\int_{t_0}^{t}L^*(\theta(t))\,dt,\quad L^*(\theta(t))=\frac{L(\theta(t))}{\sin^2\theta(t)}.$$

Рассмотрим случай $a_{13}\neq 0,\ k=0$. Из формул (15) следует, что гиростатический момент не совпадает с направлением барицентрической оси. Значение λ из (47) принимает более простой вид

$$\lambda=\frac{L(\theta)\cos\varphi}{\mu_0\beta_0\sin^2\theta},$$

поскольку в отличии от значения (47) λ пропорционально $\cos\varphi$. Формулы (48),(49) не изменяются. Способ нахождения всех переменных задачи основан на соотношениях (11), (24), (28), (29), (35), (48).

6. Заключение. Показано, что движение тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом, при котором общий момент количества движения гиростата ортогонален барицентрической оси, возможно только при условиях, аналогичных условиям Гесса [9]. Найдено решение уравнений движения гиростата, содержащее произвольную функцию угла нутации. В статье [5] указан другой способ исследования инвариантного соотношения (10) и метод интегрирования уравнений движения на ИС (10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Борисов, А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
2. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – V. 22. – P. 201–358.
3. Волкова, О. С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. 19. – С. 30–35.
4. Волкова, О. С. О движениях гиростата, характеризующихся линейными по компонентам угловой скорости инвариантными соотношениями // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 39–50.
5. Волкова, О. С. Точные решения уравнений движения гиростата с неподвижной точкой / О. С. Волкова, И. Н. Гашененко // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Харьков: Вид-во ФОП, 2011. – С. 74–84.
6. Горр, Г. В. Классические задачи динамики твердого тела / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова. – Київ: Наук. Думка, 1978. – 296 с.
7. Горр, Г. В. О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Нелинейная динамики. – 2012. – Т. 8. – № 2 – С. 369–376.
8. Дружинин, Э. И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – Т. 63. – Вып. 5. – С. 825–826.
9. Hess, W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – V. 37. – №. 2. – S. 153–181.
10. Жуковский, Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – М.; Л: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152–309.
11. Ковалева, Л. М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л. М. Ковалева, Е. В. Позднякович // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
12. Liouville, J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – V. 3. – P. 1–25.
13. Леви-Чивита, Т. Курс теоретической механики: в 2 т. / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1951. – Т. 2. – Ч. 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 556 с.
14. Мазнев, А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
15. Мазнев, А. В. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом» / А. В. Мазнев, Г. А. Котов // «Вісн. Донец. Нац. Ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–83.
16. Мазнев, А. В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 51–60.
17. Мазнев, А. В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16. – Вип. 16 – С. 158–165 .
18. Харламов, П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
19. Харламов, П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосибир. гос. ун-та, 1965. – 224 с.