УДК 531.38

ЛИНЕЙНОЕ ИНВАРИАНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

А.В. Мазнев

В работе получены условия существования линейного инвариантного соотношения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил с учетом переменности гиростатического момента. На их основе проведена редукция исходных уравнений к системе третьего порядка и указано новое решение этой системы.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение.

Введение. Задачи динамики твердого тела и гиростата находят широкое применение в моделировании движений системы связанных твердых тел не только в случае постоянного гиростатического момента [1 – 4], но и в случае, когда гиростатический момент зависит от времени [5 – 9].

Следует отметить, что задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом отличается от задачи с постоянным гиростатическим моментом, тем, что для уравнений движения первой задачи отсутствует интеграл энергии. В силу актуальности задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом для решения проблем стабилизации и управления движением механических систем в настоящее время в ней проводятся интенсивные исследования и получены многочисленные результаты. В работах [10-12] изучены маятниковые и равномерные движения гиростата, в [13 – 17] рассмотрены условия существования определенных классов прецессионных движений гиростата, в [18 – 21] исследованы движения гиростата в случаях, когда уравнения движения допускают два или три инвариантных соотношения.

В данной статье рассмотрены вопросы интегрирования уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил при условии, что они допускают одно линейное инвариантное соотношение.

Постановка задачи. Пусть гиростат [9, 22, 23] намагничен, несет на себе электрические заряды и находится под действием электрических, магнитных, ньютоновских и лоренцевых сил. Тогда уравнения движения гиростата можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{x} \times B\boldsymbol{\nu} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3),\ \boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$$

где $\boldsymbol{x}$ – момент количества движения тела-носителя; $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; L – проекция момента сил, действующих на носимое тело, на ось его вращения; $\boldsymbol{\alpha}$ – постоянный единичный вектор, характеризующий направление гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $\lambda(t)$ – ограниченная дифференцируемая функция времени; $\boldsymbol{s}$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точкой обозначена производная по времени.

Уравнения (1), (2) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})/2 = k. \tag{3}$$

Здесь k – произвольная постоянная.

Поставим задачу об исследовании условий существования для уравнений (1), (2) линейного инвариантного соотношения (ИС)

$$x_1 - (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) = 0. \tag{4}$$

Обозначим $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты угловой скорости гиростата. Тогда $\boldsymbol{\omega} = a\,\boldsymbol{x}$ или

$$\omega_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \quad \omega_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad \omega_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3, \tag{5}$$

где в силу (4) $x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3$.

С помощью выражений (5) уравнения Пуассона из (2) запишем так

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3,\ \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1,\ \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2. \tag{6}$$

При исследовании ИС (4) будем применять подход Т. Леви-Чивиты [24]. На его основе вычислим производную от ИС (4) в силу первого скалярного уравнения, вытекающего из векторного уравнения (1) и уравнений (6)

$$x_2\omega_3 - x_3\omega_2 + \lambda(t)(\alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2) - \big[(\alpha_1\lambda_1 + b_1)(\omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3) + (\alpha_1\lambda_2 + b_2)(\omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1) + \\ +(\alpha_1\lambda_3 + b_3)(\omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2)\big] + \omega_2(B\nu)_3 - \omega_3(B\nu)_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + \nu_2(C\nu)_3 - \nu_3(C\nu)_2 = 0, \tag{7}$$

где

$$(B\nu)_2 = B_{12}\nu_1 + B_{22}\nu_2 + B_{23}\nu_3,\ (B\nu)_3 = B_{13}\nu_1 + B_{23}\nu_2 + B_{33}\nu_3,$$
$$(C\nu)_2 = C_{12}\nu_1 + C_{22}\nu_2 + C_{23}\nu_3,\ (C\nu)_3 = C_{13}\nu_1 + C_{23}\nu_2 + C_{33}\nu_3.$$

Потребуем, чтобы уравнение (7) становилось тождеством на ИС (4). Поскольку в уравнение (7) входит функция $\lambda(t)$, то необходимо задать ее свойства в зависимости от остальных переменных задачи: $x_2, x_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$. При этом естественно считать, что $\lambda(t)$ не зависит от x_2 и x_3, а зависит от переменных ν_1, ν_2, ν_3. В силу этого будем считать, что функция $\lambda(t)$ является многочленом по ν_1, ν_2, ν_3, а уравнение (7) выполняется для любых значений величин x_2, x_3 и ν_1, ν_2, ν_3. Тогда можно показать, что $\lambda(t)$ имеет вид

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3. \tag{8}$$

Учитывая указанные выше предположения, а также формулу (8), из уравнения (7) получим систему уравнений на параметры задачи, $b_i\ (i=\overline{0,3})$ инвариантного соотношения (4) и $\lambda_i\ (i=\overline{0,3})$

$$a_{23} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{33} = a_{22}, \tag{9}$$
$$\alpha_2\lambda_0 = 0,\ ab_0 - \alpha_3\lambda_0 = 0, \tag{10}$$
$$ab_2 + B_{23} - \alpha_3\lambda_2 = 0,\ \ b_2 - B_{12} + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1 = 0, \tag{11}$$
$$a(b_2 + \alpha_1\lambda_2) + B_{23} - \alpha_2\lambda_3 = 0, \tag{12}$$
$$ab_1 + B_{13} - b_3 - \alpha_1\lambda_3 - \alpha_3\lambda_1 = 0,\ ab_3 + B_{33} + b_1 + \alpha_1\lambda_1 - \alpha_3\lambda_3 = 0, \tag{13}$$
$$a(b_3 + \alpha_1\lambda_3) - b_1 - B_{22} + \alpha_2\lambda_2 - \alpha_1\lambda_1 = 0, \tag{14}$$
$$s_2 = b_0\mu_2, \quad s_3 = b_0\mu_3, \tag{15}$$
$$C_{23} + b_2\mu_3 = 0,\ C_{23} + b_3\mu_2 = 0,\ C_{12} + b_1\mu_2 = 0,\ C_{13} + b_1\mu_3 = 0, \tag{16}$$
$$C_{22} - C_{33} + b_3\mu_3 - b_2\mu_2 = 0, \tag{17}$$

где

$$\mu_2 = a_{11}(b_2 + \alpha_1\lambda_2) + a_{13}(B_{23} - \alpha_2\lambda_3), \quad a = a_{13}/a_{22}, \\ \mu_3 = a_{11}(b_3 + \alpha_1\lambda_3) - a_{13}(b_1 + \alpha_1\lambda_1 + B_{22} - \alpha_2\lambda_2). \tag{18}$$

Условия (9) – (17) – необходимые условия существования ИС (4) уравнений (1),(2) в предположении (8). Основными задачами данной статьи являются: исследование условий (9) – (17), редукция системы (1), (2) на ИС (4) при выполнении (8), интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений, нахождение зависимости исходных переменных x_i, ν_i от времени.

Исследование системы (9) – (17). Из равенств (9) вытекает, что ИС (4) имеет место только в случае, когда первая координатная ось, относительно которой задано соотношение (4), ортогональна круговому сечению гирационного эллипсоида.

Преобразуем систему (9) – (17), в которой приняты обозначения (18), в общем случае. Из системы уравнений (11), (12)имеем

$$b_2 = B_{12} - \alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1,\ \ \lambda_2(a\alpha_1 + \alpha_3) - \alpha_2\lambda_3 = 0, \quad \alpha_2(a\lambda_1 + \lambda_3) - (aB_{12} + B_{23}) = 0. \tag{19}$$

Систему (12), (14) используем для определения параметров b_1, b_3 и условия на параметры λ_i

$$b_1 = \big[\lambda_3(a\alpha_1 + \alpha_3) - 2\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 - (B_{22} + B_{33})\big]/2, \tag{20}$$
$$b_3 = \big[\lambda_3(\alpha_3 - a\alpha_1) - \alpha_2\lambda_2 + (B_{22} - B_{33})\big]/(2a), \tag{21}$$
$$(a\alpha_1 + \alpha_3)\Big[\lambda_3(a^2 - 1) - 2a\lambda_1\Big] + 2aB_{13} + \alpha_2\lambda_2(1 + a^2) - B_{22}(1 + a^2) + B_{33}(1 - a^2) = 0. \tag{22}$$

Уравнения (15)–(17) в силу обозначений (18) и системы равенств из (12) и (14) представим виде

$$s_2 = \beta_0(b_2 + \alpha_1\lambda_2),\ \ s_3 = \beta_0(b_3 + \alpha_1\lambda_3),\ \Big(\beta_0 = (a_{11}a_{22} - a_{13}^2)/a_{22}\Big); \tag{23}$$

$$C_{23}+b_2\beta_0(b_3+\alpha_1\lambda_3)=0,\quad C_{23}+b_3\beta_0(b_2+\alpha_1\lambda_2)=0,$$
$$C_{12}+b_1\beta_0(b_2+\alpha_1\lambda_2)=0,\quad C_{13}+b_1\beta_0(b_3+\alpha_1\lambda_3)=0; \tag{24}$$

$$C_{33}-C_{22}+\beta_0\left[b_3(b_3+\alpha_1\lambda_3)-b_2(b_2+\alpha_1\lambda_2)\right]=0. \tag{25}$$

Разность левых частей первых двух равенств из (24) позволяет определить уравнение, которое не содержит параметра C_{23}

$$\alpha_1(b_2\lambda_3-b_3\lambda_2)=0. \tag{26}$$

Случай движения гиростата под действием силы тяжести. Положим в системе (19)–(25)

$$B_{ij}=0,\ C_{ij}=0,\ (i,j=\overline{1,3})$$

$$b_2=-\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\lambda_1,\ \lambda_2(a\alpha_1+\alpha_3)-\alpha_2\lambda_3=0,\ \alpha_2(a\lambda_1+\lambda_3)=0,$$
$$b_1=\left[\lambda_3(a\alpha_1+\alpha_3)-2\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2\right]/2,\ b_3=\left[\lambda_3(\alpha_3-a\alpha_1)-\alpha_2\lambda_2\right]/(2a),$$
$$(a\alpha_1+\alpha_3)\left[\lambda_3(a^2-1)-2a\lambda_1\right]+\alpha_2\lambda_2(1+a^2)=0, \tag{27}$$
$$b_1(b_2+\alpha_1\lambda_2)=0,\ b_1(b_3+\alpha_1\lambda_3)=0,\ b_2(b_3+\alpha_1\lambda_3)=0,$$
$$b_3(b_2+\alpha_1\lambda_2)=0,\ b_3(b_3+\alpha_1\lambda_3)-b_2(b_2+\alpha_1\lambda_2)=0.$$

Если в последних пяти уравнениях системы (27) считать $b_2+\alpha_1\lambda_2\neq 0$ или $b_3+\alpha_1\lambda_3\neq 0$, то получим $b_i=0\ \ (i=\overline{1,3})$ и

$$\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1=0,\ \lambda_2(a\alpha_1+\alpha_3)-\alpha_2\lambda_3=0,\ \alpha_2(a\lambda_1+\lambda_3)=0,$$
$$\lambda_3(a\alpha_1+\alpha_3)-2\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2=0,\ \lambda_3(\alpha_3-a\alpha_1)-\alpha_2\lambda_2=0, \tag{28}$$
$$(a\alpha_1+\alpha_3)\left[\lambda_3(a^2-1)-2a\lambda_1\right]+\alpha_2\lambda_2(1+a^2)=0.$$

Пусть в системе (28) $\alpha_2=0,\ a\alpha_1+\alpha_3=0$. Тогда нетрудно установить, что $\lambda_i=0\ \ (i=\overline{1,3})$. Когда $\alpha_2=0,\ a\alpha_1+\alpha_3\neq 0$ и $\lambda_3(a^2-1)-2a\lambda_1=0$, то из (28) также следует $\lambda_i=0\ \ (i=\overline{1,3})$.

В случае $\alpha_2\neq 0,\ \lambda_3=-a\lambda_1$ из системы (28) имеем $\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_1=0,\ \lambda_3(a\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_2\lambda_2=0,$ $\alpha_1\lambda_1=0.$ Поэтому для этого варианта система (27) при $b_i=0\ \ (i=\overline{1,3})$ не имеет решения, для которого $\lambda_i\neq 0\ \ (i=\overline{1,3})$.

Положим в системе (27) $b_1^2+b_2^2+b_3^2\neq 0$. Тогда из (10), (23)–(25), (27) найдем решение

$$\alpha_2=0,\ a\alpha_1+\alpha_3=0,\ b_i=-\lambda_i\alpha_1\ (i=\overline{0,3}),\ s_2=s_3=0. \tag{29}$$

Из (29) вытекает, что направление гиростатического момента, определяемое вектором $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,0,\alpha_3)$ зависит от компонент гирационного тензора a_{13},a_{22}. При этом $x_1=-\alpha_1\lambda$.

Случай $b_2+\alpha_1\lambda_2=0,\ b_3+\alpha_1\lambda_3=0,\ a\alpha_1+\alpha_3\neq 0$. Из уравнений (23)–(25) получим

$$s_2=0,\ s_3=0,\ C_{ij}=0\ \ (i\neq j),\ C_{33}=C_{22}, \tag{30}$$

Система уравнений (10), (19) – (22) имеет решение

$$\alpha_2=0,\ \ B_{12}=0,\ B_{23}=0,\ b_0=\alpha_3\lambda_0/a,\ b_1=-\alpha_1\lambda_1-B_{22},\ b_2=0,\ \ b_3=-\alpha_1\lambda_3,$$
$$\lambda_1=(B_{13}-aB_{22})/(a\alpha_1+\alpha_3),\ \ \lambda_2=0,\ \ \lambda_3=(B_{33}-B_{22})/(a\alpha_1+\alpha_3). \tag{31}$$

В условиях (31) отсутствует второе равенство из (29), параметры λ_1,λ_3 выражаются через параметры $\alpha_1,\alpha_3,a,B_{13},B_{22},B_{33}$, нет линейной зависимости величин x_1 и λ.

Случай $b_2+\alpha_1\lambda_2=0,\ b_3+\alpha_1\lambda_3=0,\ a\alpha_1+\alpha_3=0$. Условия (30) в этом случае не изменяются. Остальные условия получим из формул (10), (19)–(22)

$$\alpha_2=0,\ \lambda_3=-a\lambda_1,\ B_{12}=0,\ B_{23}=0,\ B_{13}=aB_{22},\ B_{33}=B_{22},$$
$$b_0=-\alpha_1\lambda_0,\ \ b_1=-\alpha_1\lambda_1-B_{22},\ \ b_2=-\alpha_1\lambda_2,\ \ b_3=-\alpha_1\lambda_3. \tag{32}$$

Отличие варианта (32) от варианта (31) состоит в том, что при выполнении равенств (32) значение параметров $\lambda_i\ \ (i=\overline{0,3})$ остаются произвольными.

Замечание. Приведенные случаи решений системы уравнений (10), (19) – (26) позволяют в общем случае охарактеризовать разрешимость указанных условий. Равенство $\alpha_2\lambda_0 = 0$ приводит к рассмотрению двух вариантов: $\alpha_2 = 0$ и $\lambda_0 = 0$. Первый вариант приводит к результату, из которого можно получить предельный случай постоянства гиростатического момента. Второй вариант – к анализу случая $b_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (19), равенства (22) можно определить значения параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ через параметры a, α_i $(i = \overline{1,3})$, B_{13}, B_{23}, B_{22}, B_{33}. При этом найденные значения λ_i позволяют определить величины b_i $(i = \overline{1,3})$ из уравнений (19)–(21). Из системы (23)–(25) определяем значение параметров $s_2, s_3, C_{12}, C_{13}, C_{23}$ и разность $C_{33} - C_{22}$. На основании установленных выше результатов уравнение (26) может служить для нахождения условий на параметры α_i.

Таким образом, получение условий существования ИС (4) уравнений (1), (2) при наличии дополнительного соотношения (8) возможно не только в частных случаях, которые представляют определенный интерес, но и в общем случае.

Редукция системы (1), (2). Пусть уравнения (1), (2) допускают ИС (4) и дополнительное соотношение (8). Выполним редукцию системы (1), (2) к системе относительно переменных x_2, x_3, ν_1, ν_2, ν_3. При этом вместо переменных ν_1, ν_2, ν_3 удобно ввести переменные θ и φ

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi, \tag{33}$$

так как при выполнении равенств (33) геометрический интеграл из (3) становится тождеством.
На основании условий (9) соотношения (5) таковы

$$\omega_1 = a_{11}x_1(\theta,\varphi) + a_{13}x_3,\ \ \omega_2 = a_{22}x_2,\ \ \omega_3 = a_{13}x_1(\theta,\varphi) + a_{22}x_3. \tag{34}$$

Здесь в силу (4), (33) введены обозначения

$$x_1(\theta,\varphi) = b_0 + b_1\cos\theta + b_2\sin\theta\cos\varphi + b_3\sin\theta\sin\varphi. \tag{35}$$

Вместо переменных x_2, x_3 введем переменные ρ, β

$$x_2 = \rho\cos\beta, \quad x_3 = \rho\sin\beta. \tag{36}$$

На основании соотношений (33)–(36) из интеграла моментов (3) получим

$$\begin{aligned}\rho(\theta,\varphi,\beta) = \big[&k - (b_0 + \alpha_1\lambda_0)\cos\theta - \alpha_2\lambda_0\sin\theta\cos\varphi - \alpha_3\lambda_0\sin\theta\sin\varphi + \\ &+\big(B_{11}/2 - b_1 - \alpha_1\lambda_1\big)\cos^2\theta + \big(B_{22}/2 - \alpha_2\lambda_2\big)\sin^2\theta\cos^2\varphi + \\ &+\big(B_{33}/2 - \alpha_3\lambda_3\big)\sin^2\theta\sin^2\varphi - ab_1\sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \\ &+(B_{23} - \alpha_2\lambda_3 - \alpha_3\lambda_2)\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\big]\big/\big[\sin\theta\cos(\varphi-\beta)\big].\end{aligned} \tag{37}$$

С помощью равенств (33) – (36) из уравнений (6) найдем

$$\dot\theta = a_{22}\rho(\theta,\varphi,\beta)\sin(\varphi-\beta) - a_{13}x_1(\theta,\varphi)\cos\varphi, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\dot\varphi = \big[&x_1(\theta,\varphi)(a_{13}\cos\theta\sin\varphi - a_{11}\sin\theta) + \\ &+\rho(\theta,\varphi,\beta)(a_{22}\cos\theta\cos(\varphi-\beta) - a_{13}\sin\beta\sin\theta\big]\big/\sin\theta.\end{aligned} \tag{39}$$

При нахождении уравнения на $\dot\beta$ введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}&\lambda(\theta,\varphi) = \lambda_0 + \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta\cos\varphi + \lambda_3\sin\theta\sin\varphi, \\ &h_1(\beta) = (a_{13}\alpha_1 - a_{11}\alpha_3)\sin\beta - \alpha_2 a_{11}\cos\beta, \\ &h_2(\beta) = \alpha_2\sin\beta - \alpha_3\cos\beta, \quad h_3(\beta) = s_2\cos\beta + s_3\sin\beta, \\ &g_1(\theta,\varphi) = (\lambda_1 a_{13} - \lambda_3 a_{11})\sin\theta\cos\varphi + \lambda_2(a_{11}\sin\theta\sin\varphi - a_{13}\cos\theta), \\ &H_1(\theta,\varphi,\beta) = \big[B_{12}\cos\theta + (B_{22}\cos\varphi + B_{23}\sin\varphi)\sin\theta\big]\cos\beta + \\ &\qquad +\big[B_{13}\cos\theta + (B_{23}\cos\varphi + B_{33}\sin\varphi)\sin\theta\big]\sin\beta, \\ &H_2(\beta) = \alpha_1 a_{22} - a_{13}(\alpha_2\cos\beta + \alpha_3\sin\beta)\sin\beta, \\ &H_3(\theta,\varphi,\beta) = \lambda_1 a_{22}\sin\theta\sin(\beta-\varphi) + \lambda_2(a_{13}\sin\theta\cos\varphi - \\ &-a_{22}\cos\theta)\sin\beta + \lambda_3(a_{22}\cos\theta\cos\beta - a_{13}\sin\theta\sin\beta\cos\varphi),\end{aligned} \tag{40}$$

$$H_4(\theta,\varphi,\beta) = a_{22}\left[B_{11}\cos\theta + (B_{12}\cos\varphi + B_{13}\sin\varphi)\sin\theta\right]\cos\beta,$$
$$H_5(\theta,\varphi,\beta) = \left[C_{12}\cos\theta + (C_{22}\cos\varphi + C_{23}\sin\varphi)\sin\theta\right]\cos\beta +$$
$$+\left[C_{13}\cos\theta + (C_{23}\cos\varphi + C_{33}\sin\varphi)\sin\theta\right]\sin\beta.$$

В силу обозначений (35), (40) из уравнения (1) получим

$$\begin{aligned}&\rho(\theta,\varphi,\beta)\dot\beta = -a_{13}\rho^2(\theta,\varphi,\beta)\sin\beta + x_1(\theta,\varphi)\left[\rho(\theta,\varphi,\beta)(a_{22}-a_{11}) +\right.\\ &\left.+a_{13}x_1(\theta,\varphi) + h_1(\beta)\lambda(\theta,\varphi) + h_2(\beta)g_1(\theta,\varphi) + a_{11}H_1(\theta,\varphi,\beta)\right] +\\ &+\rho(\theta,\varphi,\beta)\left[h_2(\beta)H_3(\theta,\varphi,\beta) + a_{13}H_1(\theta,\varphi,\beta)\sin\beta - H_4(\theta,\varphi,\beta) +\right.\\ &\left.+H_2(\beta)\lambda(\theta,\varphi)\right] - h_3(\beta)\cos\beta + s_1\sin\theta\cos(\varphi-\beta) + H_5(\theta,\varphi,\beta)\cos\theta.\end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, система уравнений (1), (2) на ИС (4) и равенстве (8) редуцирована к уравнениям (38), (39), (41), которые в силу обозначений (35), (40) представляют собой нелинейную систему трех дифференциальных уравнений относительно функций $\theta(t),\varphi(t),\beta(t)$. Отметим, что для одного ИС класса Гесса [25] в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой редукция исходных уравнений приводила к двум дифференциальным уравнениям [26]. Аналогичное свойство имеет место и в задаче об исследовании одного ИС для уравнений класса Кирхгофа–Пуассона [27].

Один случай разрешимости уравнений (38), (39), (41). Положим в условиях (19)-(26)

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ b_i = 0\ (i=\overline{0,3}),\ \ \lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = B_{11},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\\ &B_{22} = -B_{11},\ B_{33} = -B_{11},\ B_{ij} = 0\ \ (i\ne j),\ s_2 = s_3 = 0,\ C_{ij} = 0\ \ (i\ne j),\ \ C_{22} = C_{33}.\end{aligned} \tag{42}$$

Уравнение (27) рассмотрим в предположении $\varphi - \beta = \pi/2$, то есть в силу (42) считаем, что оно выполняется для любых значений ρ. При условиях (42) уравнения для x_2, x_3 из (1) таковы

$$\begin{aligned}&\dot x_2 = a_{13}x_3^2 - a_{13}B_{11}x_3\nu_3 + \left(C_{11}-C_{22}\right)\nu_1\nu_3 - s_1\nu_3,\\ &\dot x_3 = -a_{13}x_2x_3 - a_{13}B_{11}x_3\nu_2 + \left(C_{22}-C_{11}\right)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2.\end{aligned} \tag{43}$$

Поскольку мы имеем особый случай, то вместо уравнения (41) удобно исследовать уравнения (43). Для этой цели положим

$$x_2 = \eta(t)\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3 = -\eta(t)\sin\theta\cos\varphi. \tag{44}$$

Запишем уравнения (38), (39) при условии $x_1 = 0$ с учетом (44)

$$\dot\theta = a_{22}\eta(t)\sin\theta,\quad \dot\varphi = a_{13}\eta(t)\sin\theta\cos\varphi. \tag{45}$$

Подставив выражения (44) в уравнения (43), найдем

$$\dot\eta(t) = -a_{22}\eta^2(t)\cos\theta - a_{13}B_{11}\eta(t)\sin\theta\cos\varphi + \left(C_{11}-C_{22}\right)\cos\theta - s_1. \tag{46}$$

Из уравнений (45) вытекает

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a_{13}}{a_{22}}(\theta-\theta_0). \tag{47}$$

Интегрируя уравнение (47), имеем

$$\cos\varphi = \frac{2\mu_0 e^w}{\mu_0^2 e^{2w}+1},\ \ w = \frac{a_{13}}{a_{22}}(\theta-\theta_0),\ \ \mu_0 = \mathrm{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{48}$$

Преобразуем уравнение (46), используя замену $u = \eta(\theta)\sin\theta$, и с учетом (48) получим

$$u\left(u'(\theta) + F_1(\theta)\right) + F_2(\theta) = 0, \tag{49}$$

где

$$F_1(\theta) = \frac{a_{13}B_{11}\sin\theta}{a_{22}\mathrm{ch}\dfrac{a_{13}}{a_{22}}(\theta-\theta_0)},\quad F_2(\theta) = \frac{1}{a_{22}}\sin\theta\left[s_1 - \left(C_{11}-C_{22}\right)\cos\theta\right]. \tag{50}$$

В формулах (50) для простоты записи положено $\mu_0 = 1$ $(\varphi_0 = 0)$. Уравнение (49) относится к уравнению класса Абеля и поэтому не интегрируется в квадратурах.

Если через $u(\theta)$ обозначить решение уравнения (49), то зависимость $\theta = \theta(t)$ можно определить подстановкой $u(\theta)$ в уравнение $\dot{\theta} = a_{22}u(\theta)$, полученное из системы (45)

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{u(\theta)} = a_{22}(t - t_0). \tag{51}$$

Обозначим решение уравнения (51) через $\theta(t)$, тогда $\varphi(t)$ найдем из (48)

$$\varphi(t) = \arccos\frac{1}{\mathrm{ch}w}, \quad w = \frac{a_{13}}{a_{22}}\left(\theta(t) - \theta_0\right). \tag{52}$$

Компоненты x_2, x_3 определим на основании (44), замены $u = \eta(t)\sin\theta$ и функции $\theta = \theta(t)$

$$x_2(t) = u(t)\sin\varphi(t), \quad x_3(t) = -u(t)\cos\varphi(t). \tag{53}$$

Примером решения уравнения (49) в квадратурах может служить случай, когда $s_1 = 0,\ C_{22} = C_{11}$. Тогда

$$u(\theta) = -\int_{\theta_0}^{\theta} F_1(\theta)d\theta. \tag{54}$$

Функции $\nu_i(t)$ установим из формул (33), (48). Они позволяют определить из (4) величину x_1.

Таким образом, приведен пример, когда система (38), (39), (41) интегрируема в квадратурах. Этот пример можно охарактеризовать как некоторый аналог решения Гесса [27] для задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

В общем случае существования одного линейного инвариантного соотношения система дифференциальных уравнений (38), (39), (41) как и в классическом случае решения Гесса [26] не интегрируема в квадратурах.

Выводы. Рассмотрены условия существования одного инвариантного соотношения у уравнений (1), (2). Выполнена редукция этих уравнений к системе трех дифференциальных уравнений относительно новых переменных $\theta(t),\ \varphi(t),\ \beta(t)$. Приведен пример решения редуцированных уравнений.

РЕЗЮМЕ

У роботі отримані умови існування лінійного інваріантного співвідношення рівнянь руху гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил з врахуванням змінності гіростатичного моменту. На їх основі проведена редукція вихідних рівнянь до системи третього порядку і вказано новий розв'язок цієї системи.

Ключові слова: гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення.

SUMMARY

The terms of existence of linear invariant correlation of gyrostat motion equalizations under the action of potential and gyroscopic forces taking into account changeability of gyrostatic moment are got in this work. On their basis reduction of initial equalizations is conducted to the system of third order is conducted and the new decision of this system is indicated.

Keywords: gyrostat, gyrostatic moment, invariant correlation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – Москва, Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 384 с.
2. Горр Г. В. Классические задачи динамики твердого тела / Г. В. Горр, Л. В Кудряшова, Л. А. Степанова // Київ: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
3. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела / В. В. Козлов. – Ижевск: Изд-во РХД. – 2000. – 256 с.
4. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.
5. Liouville J. Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson / J. Liouville // J. math. pures et appl. – 1858. – Vol. 3. – P. 1-25.
6. Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. –1899. – Vol. 22. –P. 201-358.
7. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Собр. соч. – М.-Л: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152-309.
8. Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В. В. Румянцев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1970. – Вып. 2. – С. 83-96.

9. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып.4. – С. 52-73.
10. Волкова О. С. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / О. С. Волкова, И. Н. Гашененко // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
11. Ковалева Л. М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л.М. Ковалева, Е.В. Позднякович // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105
12. Волкова О. С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик / О. С. Волкова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
13. Волкова О. С. Регулярные прецессии гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести / О. С. Волкова // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 63-76.
14. Волкова О. С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси / О. С. Волкова // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т. 19. – С. 30-35.
15. Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
16. Мазнев А. В. Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Докл. НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 66-72.
17. Мазнев А. В. О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести / А. В. Мазнев // Вестник Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естественные науки. – 2011. – № 1. – С. 14-18.
18. Мазнев А. В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Механика твердого тела. – Донецк. – 2011. – Вып. 41. – С.51-60.
19. Горр Г. В. О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2012. – Т. 8, № 2.– С. 369-376.
20. Мазнев А. В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Вісник Одеського нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип.16 – С. 158-165.
21. Мазнев А. В. Об одном классе трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев // Прикладная математика и механика.– 2011. – Т. 76, вып. 2. – С. 237-246.
22. Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H. M. Yehia // J. Mech. Theor. Appl. 1986. –Vol. 5, No 5. – P. 747-754.
23. Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Донецк: ДонНУ. – 2010. – 364 с.
24. Леви-Чивита Т. Курс теоретической механики / Т. Леви-Чивита, У. Амальди // М.: Изд-во иностр. литер. – 1951. – Т. 2., ч. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 555 с.
25. Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math. Ann.– 1890.– B.37, H. 2.– P. 153-181.
26. Ковалев А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалев // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т.32. – Вып. 6. – С. 1111-1118.
27. Горр Г. В. О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2005. – Т. 67, вып. 6. – С. 931-939.

Поступила в редакцию12.06.2012 г.