УДК 531.38

©2011. **А. В. Мазнев**

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРЕХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в предположении, что гиростатический момент зависит от времени. Получено новое решение уравнений движения, характеризующееся специальным классом трех нелинейных инвариантных соотношений.

Ключевые слова: *инвариантное соотношение, гиростат, гиростатический момент.*

1. Введение. Классическая задача о движении тяжелого твердого тела, которую исследовали многие ученые (см. обзоры [1, 2]) получила многочисленные обобщения, среди которых отметим обобщения в предположении постоянства гиростатического момента [3-5], а также обобщения, в которых учитывается переменность гиростатического момента [6-14]. Актуальность изучения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом обусловлена не только практическим использованием результатов в управлении движением технических объектов, но и получением новой информации о свойствах интегральных многообразий уравнений динамики гиростата с переменным гиростатическим моментом.

В данной работе рассмотрена задача о движении неавтономного, намагниченного и наэлектризованного гиростата в магнитном, электрическом и ньютоновском полях под действием потенциальных и гироскопических сил. Ранее в этой задаче исследовались, в основном, равномерные вращения, маятниковые и прецессионные движения [9-12]. В статье поставлена задача изучения условий существования решений, которые характеризуются тремя нелинейными инвариантными соотношениями специального вида [15-17]. Найдено новое решение уравнений класса Кирхгофа-Пуассона [4] в случае переменного гиростатического момента. Проведен сравнительный анализ этого решения с решением в случае постоянного гиростатического момента [16].

2. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в векторном виде [4, 5]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha} - B\boldsymbol{\nu}) \times a\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{s} - C\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu} - L\boldsymbol{\alpha}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \quad \dot{\lambda} = L, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата в предположении покоящихся носимых тел; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор; $\lambda = \lambda(t)$ – величина гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; L – проекция момента действующих на носимое тело сил на ось вращения; a – гирационный тензор; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс.

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Выберем в качестве подвижной системы координат главную систему координат, т.е. положим $a = diag(a_1, a_2, a_3)$. Следуя работам [15-17] будем предполагать, что в этой системе координат выполняются условия

$$B = diag(B_1, B_2, B_3), \quad C = diag(C_1, C_2, C_3), \quad \boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{s} = (s_1, 0, 0). \tag{4}$$

Исключая $L = \dot{\lambda}$ в уравнении (1) и учитывая (4), из (1), (2) имеем

$$\dot{x}_1 = (a_3 - a_2)x_2x_3 - \dot{\lambda} + a_2B_3x_2\nu_3 - a_3B_2x_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \tag{5}$$

$$\dot{x}_2 = (a_1 - a_3)x_3x_1 - a_3x_3\lambda + a_3B_1x_3\nu_1 - a_1B_3x_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1 - s_1\nu_3, \tag{6}$$

$$\dot{x}_3 = (a_2 - a_1)x_1x_2 + a_2x_2\lambda + a_1B_2x_1\nu_2 - a_2B_1x_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Из второго соотношения системы (3) следует

$$(x_1 + \lambda)\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 - \frac{1}{2}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2) = k. \tag{9}$$

Поскольку система (5)-(8) не замкнута относительно неизвестных величин x_1, x_2, x_3, ν_1, ν_2, ν_3, λ, то её интегрирование возможно только на заданных инвариантных соотношениях (см., например [9-14]).

В данной статье по аналогии с подходом [15-17] зададим три инвариантных соотношения

$$x_1 = g_1(\nu_1), \quad x_2 = \nu_2g_2(\nu_1), \quad x_3 = \nu_3g_3(\nu_1), \tag{10}$$

где функции $g_i(\nu_1)$ $(i = 1, 2, 3)$ либо заданы, либо подлежат определению. Тогда на инвариантных соотношениях (10) при заданных функциях $g_i(\nu_1)$ уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2\nu_3(a_3g_3(\nu_1) - a_2g_2(\nu_1)), \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3(a_1g_1(\nu_1) - a_3\nu_1g_3(\nu_1)), \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_2(a_2\nu_1g_2(\nu_1) - a_1g_1(\nu_1)), \end{aligned} \tag{11}$$

следующие из уравнений (8) интегрируются в квадратурах [15]

$$\nu_2^2(\nu_1) = 2\int \frac{a_1g_1(\nu_1) - a_3\nu_1g_3(\nu_1)}{a_3g_3(\nu_1) - a_2g_2(\nu_1)}\, d\nu_1, \quad \nu_3^2 = 1 - \nu_1^2 - \nu_2^2(\nu_1). \tag{12}$$

Для получения решения уравнений (5)-(7) в окончательном виде необходимо соотношения (10), (12) подставить в эти уравнения. В статьях [15-17] данная проблема исследуется для случая постоянного гиростатического момента. Здесь будем предполагать, что $\lambda(t) \neq const$.

3. Редукция уравнений (5)-(7). Из соотношения (9) определим

$$\lambda = \frac{1}{\nu_1}\Big[k + \nu_1\Big(\frac{1}{2}B_1\nu_1 - g_1(\nu_1)\Big) + \nu_2^2\Big(\frac{1}{2}B_2 - g_2(\nu_1)\Big) + \nu_3^2\Big(\frac{1}{2}B_3 - g_3(\nu_1)\Big)\Big]. \quad (13)$$

Подставим выражение (13) в уравнения (6) и (7)

$$\nu_1 g_2(\nu_1)(a_3\nu_1 g_2(\nu_1) - a_1 g_1(\nu_1)) + \nu_1\nu_2^2 g_2'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) + \\ + a_1\nu_1 g_1(\nu_1)(g_3(\nu_1) - B_3) - a_3 g_3(\nu_1)\Big[k - \frac{1}{2}B_1\nu_1^2 + \nu_2^2\Big(\frac{1}{2}B_2 - g_2(\nu_1)\Big) + \\ + \nu_3^2\Big(\frac{1}{2}B_3 - g_3(\nu_1)\Big)\Big] - s_1\nu_1 + (C_1 - C_3)\nu_1^2 = 0, \quad (14)$$

$$\nu_1 g_3(\nu_1)(a_1 g_1(\nu_1) - a_2\nu_1 g_2(\nu_1)) + \nu_1\nu_3^2 g_3'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) + \\ + a_1\nu_1 g_1(\nu_1)(B_2 - g_2(\nu_1)) + a_2 g_2(\nu_1)\Big[k - \frac{1}{2}B_1\nu_1^2 + \nu_2^2\Big(\frac{1}{2}B_2 - g_2(\nu_1)\Big) + \\ + \nu_3^2\Big(\frac{1}{2}B_3 - g_3(\nu_1)\Big)\Big] + s_1\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1^2 = 0. \quad (15)$$

Поскольку соотношение (13) представляет собой первый интеграл уравнений (5)-(8), то в качестве редуцированной системы можно принять систему уравнений (11), (13)-(15). Интегралом этой системы служит кинематическое соотношение $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$. В силу равенств (12) из уравнений (14), (15) получим

$$2\Big[\nu_1 g_2'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) - a_3 g_3(\nu_1)\Big(\frac{1}{2}(B_2 - B_3) + g_3(\nu_1) - \\ - g_2(\nu_1)\Big)\Big]\int \frac{a_1 g_1(\nu_1) - a_3\nu_1 g_3(\nu_1)}{a_3 g_3(\nu_1) - a_2 g_2(\nu_1)}\,d\nu_1 + \nu_1 g_2(\nu_1)(a_3\nu_1 g_3(\nu_1) - \\ - a_1 g_1(\nu_1)) + a_1\nu_1 g_1(\nu_1)(g_3(\nu_1) - B_3) - a_3 g_3(\nu_1)\Big[k + \frac{1}{2}B_3 - g_3(\nu_1) - \\ - \nu_1^2\Big(\frac{1}{2}(B_1 + B_3) - g_3(\nu_1)\Big)\Big] - s_1\nu_1 + (C_1 - C_3)\nu_1^2 = 0, \quad (16)$$

$$2\Big[\nu_1 g_3'(\nu_1)(a_3 g_3(\nu_1) - a_2 g_2(\nu_1)) + a_2 g_2(\nu_1)\Big(\frac{1}{2}(B_2 - B_3) + g_3(\nu_1) - \\ - g_2(\nu_1)\Big)\Big]\int \frac{a_1 g_1(\nu_1) - a_3\nu_1 g_3(\nu_1)}{a_3 g_3(\nu_1) - a_2 g_2(\nu_1)}\,d\nu_1 + \nu_1 g_3(\nu_1)(a_1 g_1(\nu_1) - \\ - a_2\nu_1 g_2(\nu_1)) + \nu_1(1 - \nu_1^2)g_3'(\nu_1)(a_2 g_2(\nu_1) - a_3 g_3(\nu_1)) + \\ + a_1\nu_1 g_1(\nu_1)(B_2 - g_2(\nu_1)) + a_2 g_2(\nu_1)\Big[k + \frac{1}{2}B_3 - g_3(\nu_1) - \\ - \nu_1^2\Big(\frac{1}{2}(B_1 + B_3) - g_3(\nu_1)\Big)\Big] + s_1\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1^2 = 0. \quad (17)$$

Очевидно, имеют место различные варианты исследования уравнений (16), (17). Например, если задать дифференциальную функцию $g_1(\nu_1)$, то уравнения (16), (17) будут являться двумя интегро-дифференциальными уравнениями на функции $g_2(\nu_1)$, $g_3(\nu_1)$. Условия на параметры задачи и функции $g_2(\nu_1)$, $g_3(\nu_1)$, при которых существует решение указанных уравнений, и будут являться условиями существования для уравнений (5)-(8) инвариантных соотношений (10).

4. Новое решение. Приведем пример разрешимости уравнений (14), (15) в классе полиномиальных функций по вспомогательной переменной ν_1. Следуя работе [16], будем находить условия существования решений следующего вида

$$\begin{gathered}\nu_2^2(\nu_1)=\alpha_0+\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_1^2,\quad \nu_3^2(\nu_1)=(1-\alpha_0)-\alpha_1\nu_1-(1+\alpha_2)\nu_1^2,\\ g_1(\nu_1)=p_0+p_1\nu_1+p_2\nu_1^2,\quad g_2(\nu_1)=q_0+q_1\nu_1,\quad g_3(\nu_1)=r_0+r_1\nu_1.\end{gathered}\tag{18}$$

Подставим выражения (18) в формулу (13)

$$\lambda(t)=\frac{1}{\nu_1}[\Lambda_0+\nu_1(\lambda_0+\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_1^2)],\tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}&\Lambda_0=k+\frac{1}{2}B_3+\frac{\alpha_0}{2}(B_2-B_3)-\alpha_0q_0-r_0(1-\alpha_0),\\ &\lambda_0=\frac{\alpha_1}{2}(B_2-B_3)-p_0-\alpha_0q_1-\alpha_1q_0-r_1(1-\alpha_0)+r_0\alpha_1,\\ &\lambda_1=\frac{1}{2}(B_1-B_3)+\frac{\alpha_2}{2}(B_2-B_3)-p_1-\alpha_2q_0+\alpha_1(r_1-q_1)+r_0(1+\alpha_2),\\ &\lambda_2=r_1-p_2+\alpha_2(r_1-q_1).\end{aligned}\tag{20}$$

Отметим, что запись $\lambda(t)$ в виде (19) обусловлена свойством функции $\lambda(t)$, которое будет получено в дальнейшем.

Внесем функции (18) в уравнения (14), (15) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по переменной ν_1. Тогда получим $\Lambda_0=0$, т.е. в силу (20) имеем условие на постоянную k

$$k=\alpha_0\Big(q_0+\frac{B_3-B_2}{2}-r_0\Big)+r_0-\frac{1}{2}B_3.\tag{21}$$

Следовательно, функция (19) становиться квадратичной функцией по ν_1

$$\lambda(t)=\lambda_0+\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_1^2.\tag{22}$$

Получение функции $\lambda(t)$ в виде (22) позволяет использовать исходные уравнения (5)-(7) и систему (11).

Внесем выражения (10), (18), (22) в уравнение (5) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по ν_1. Тогда имеет место следующая система условий:

$$\begin{gathered}2a_2\alpha_2q_1^2+2a_3(1+\alpha_2)r_1^2-q_1r_1(a_2+a_3)(1+2\alpha_2)=0,\\ p_1(a_3r_1-a_2q_1)+2(p_2+\lambda_2)(a_3r_0-a_2q_0)+\lambda_1(a_3r_1-a_2q_1)+\\ +(a_2-a_3)(q_0r_1+q_1r_0)-a_2B_3q_1+a_3B_2r_1=0,\\ (p_1+\lambda_1)(a_3r_0-a_2q_0)+q_0r_0(a_2-a_3)-a_2B_3q_0+a_3B_2r_0+C_2-C_3=0.\end{gathered}\tag{23}$$

Подставим функции (10), (18) во второе уравнение системы (11) и учтем третье уравнение этой системы. Полученное равенство является тождеством по ν_1 при выполнении равенств

$$\begin{gathered} a_1p_2 + a_2\alpha_2q_1 - a_3(1+\alpha_2)r_1 = 0, \\ 2a_1p_1 - 2a_3(1+\alpha_2)r_0 + \alpha_1(a_2q_1 - a_3r_1) + 2a_2\alpha_2q_0 = 0, \\ 2a_1p_0 - \alpha_1(a_3r_0 - a_2q_0) = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Анализ уравнений (23), (24) целесообразно проводить после рассмотрения дополнительных условий, которые находим подстановкой выражений (10), (18), (22) в уравнения (6), (7). Часть этих условий имеет достаточно простой вид

$$r_1(a_2 + a_3) - 2a_2q_1 = 0, \quad q_1(a_2 + a_3) - 2a_3r_1 = 0. \tag{25}$$

В силу предположения $q_1 \neq 0,\ r_1 \neq 0$ из (25) следуют равенства

$$a_3 = a_2, \quad r_1 = q_1. \tag{26}$$

Первое равенство из системы (23) на основании условий (26) становится тождеством, а из первого равенства системы (24) следует следующее значение p_2

$$p_2 = \frac{a_2q_1}{a_1} \tag{27}$$

Равенства (26), (27) позволяют упростить систему уравнений (11)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= a_2(r_0 - q_0)\nu_2\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3[a_1p_0 + (a_1p_1 - a_2r_0)\nu_1], \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_2[-a_1p_0 + (a_2q_0 - a_1p_1)\nu_1]. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как постановка задачи проводилась с учетом условия $\nu_1 \neq const$, то из первого уравнения системы (28) следует, что $r_0 \neq q_0$.

Из второго и третьего уравнений системы (24) найдем

$$p_0 = \frac{\alpha_1a_2(r_0 - q_0)}{2a_1}, \quad p_1 = \frac{a_2}{a_1}[(1+\alpha_2)r_0 - \alpha_2q_0]. \tag{29}$$

Второе равенство из системы (23) позволяет определить разность

$$r_0 - q_0 = \frac{B_3 - B_2}{2}. \tag{30}$$

Если вновь обратимся к системе условий, которая вытекает из уравнения (6) в силу (10), (18), (26), то установим равенство

$$4(1+\alpha_2)(q_0 - r_0) = (2+\alpha_2)B_2 - (1+\alpha_2)B_3 - B_1. \tag{31}$$

Условие совместимости уравнений (30), (31) приводит к выражению для α_2:

$$\alpha_2 = \frac{B_3 - B_1}{B_2 - B_3}. \tag{32}$$

Равенства (26), (27), (29), (30), (32) позволяют существенно упростить дальнейшие выкладки получения решения (10), (18), (22). Используя указанный выше полуобратный метод исследования условий существования этого решения, а также формулы (20)-(22), (26)-(30), (32), получим

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_1^2, \tag{33}$$

$$x_1 = p_0 + p_1\nu_1 + p_2\nu_1^2, \quad x_2 = \nu_2(q_0 + q_1\nu_1), \quad x_3 = \nu_3(r_0 + q_1\nu_1), \tag{34}$$

$$\nu_2^2 = \alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2, \quad \nu_3^2 = (1-\alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1+\alpha_2)\nu_1^2, \tag{35}$$

$$\dot{\nu}_1 = \frac{a_2\kappa_0}{2}\sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2)[(1-\alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1+\alpha_2)\nu_1^2]}, \tag{36}$$

где

$$\kappa_0 = B_3 - B_2, \quad \sigma_0 = B_2 - B_1, \;\; \delta_0 = \; B_3 - B_1, \quad \lambda_0 = -\frac{a_2\alpha_1\kappa_0}{4a_1} - q_1,$$

$$\lambda_1 = -\frac{(a_1 - a_2)}{a_1\kappa_0}[r_0\sigma_0 - q_0\sigma_0], \quad \lambda_2 = \frac{(a_1 - a_2)}{a_1}q_1, \quad p_0 = \frac{a_2\alpha_1\kappa_0}{4a_1},$$

$$p_1 = \frac{a_2}{a_1}[(1+\alpha_2)r_0 - \alpha_2 q_0], \quad p_2 = \frac{a_2 q_1}{a_1},$$

$$q_0 = \frac{1}{2a_2\kappa_0}[a_2(B_1 + B_2)\kappa_0 + 4(C_2 - C_3)], \quad r_0 = q_0 + \frac{\kappa_0}{2}, \tag{37}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{8a_2 q_1^2\kappa_0^2}\{4q_1^2[\kappa_0(2a_2(B_1+B_3) - a_1(B_2+B_3)) + 8(C_3 - C_1)] -$$
$$-16s_1\kappa_0 q_1 - (B_2+B_3)[a_2\kappa_0\sigma_0\delta_0 + 4C_1\kappa_0 - 4C_2\delta_0 + 4C_3\sigma_0]\},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2a_2 q_1\kappa_0^2}[4a_1\kappa_0 q_1^2 + a_2\kappa_0\sigma_0\delta_0 + 4C_1\kappa_0 - 4C_2\delta_0 + 4C_3\sigma_0], \quad \alpha_2 = -\frac{\delta_0}{\kappa_0}.$$

5. Анализ решения (33)-(36). Проведем анализ свойств решения (33)-(36), существующего при условиях (37). Одним из основных свойств является то обстоятельство, что параметр q_1 принимает произвольные значения. Из вида функций $\nu_2^2(\nu_1)$ и $\nu_3^2(\nu_1)$ из равенств (35) следует, что действительности решения (33)-(36) можно добиться, выбирая малые положительные значения параметра α_0, так как при этом выполняются неравенства $\nu_2^2(0) > 0$, $\nu_3^2(0)>0$. Из вида дифференциального уравнения (36) следует, что обращение интеграла

$$\int\limits_{\nu_1^{(0)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{(\alpha_0 + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_1^2)[(1-\alpha_0) - \alpha_1\nu_1 - (1+\alpha_0)\nu_1^2]}} = \frac{a_2\kappa_0}{2}(t - t_0) \tag{38}$$

приводит к эллиптической функции $\nu_1(t)$. Следовательно, и решение (33)-(35) характеризуется тем, что оно выражается эллиптическими функциями времени.

Поскольку в данном решении гирационный тензор имеет вид $a = diag(a_1, a_2, a_2)$, а вектор $\boldsymbol{s} = (s_1, 0, 0)$, то обобщенный центр масс гиростата лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида. Это свойство отличает решение (33)-(36) от решения [16], в котором $a_1 = a_2 = a_3 = a^*$(гирационный эллипсоид – сфера). Анализ соотношений (37) показывает, что в полученном решении нет условий на параметры a_i, B_i, C_i. Решение [16] существует при выполнении условия

$$a^*(B_1-B_2)(B_2-B_3)(B_3-B_1)-4C_1(B_2-B_3)-4C_2(B_3-B_1)-4C_3(B_1-B_2) = 0, \quad (39)$$

т.е. в нем имеются ограничения на параметры a_i, B_i, C_i уравнений Кирхгофа и условия на параметр s_1.

Общими чертами в условиях существования решения (33)-(37) и решения [16] служит значение параметра α_2. Если в системе (37) положить $a_1 = a_2$, то функция $\lambda(t) = \lambda_0 = const$. Поэтому найденное решение теряет смысл для сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом.

Если решение (33)-(37) рассматривать для классической задачи о движении гиростата под действием силы тяжести, т.е. считать $B_i = 0,\ C_i = 0\ (i = \overline{1,3})$, то, например, последние три равенства из (37) невозможны. Поэтому полученное решение не имеет места для этой задачи.

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. – 384 с.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Київ: Наук. Думка. – 1978. – 296 с.
3. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд–во Новосиб. университета. – 1965. – 221 с.
4. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – **5**, № 5. – P. 742-745.
5. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения системы твердых тел. // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
6. *Liouville J.* Dиveloppements sur un chapitre de la Mиcanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1-25.
7. *Volterra V.* Sur la thйorie des variations des latitudes. // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201-358.
8. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М..–Л.: ОГИЗ. – 1949. – **2**. – С. 152-309.
9. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
11. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 63-76.
12. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-102.
13. *Мазнев А.В.* О прецессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести // Вісник Донецького нац. ун-ту, Сер. А: Природничі науки, 2011. – №1. – С. 14-18.
14. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики //

Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2010. – Т. **21**. – С. 64-75.
15. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* К постановке задачи о решении уравнений Д. Гриоли–М.П. Харламова в специальной форме // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 133-139.
16. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Новые решения в задаче о движении тела в поле потенциальных и гироскопических сил // Доповіді НАН України. – 2001. – № 4. – С. 41-48.
17. *Узбек Е.К.* О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопичеких сил // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**. – Вып. 6. – С. 964-970.

A. M. Maznev

About one class of three nonlinear invariant correlations of gyrostat motion equations with a variable gyrostatic moment.

The problem of gyrostat motion under the action of potential and gyroscopic forces in the assumption that gyrostatic moment depends on time is considered. The new decision of motion equations which is characterized by special class of three nonlinear invariant correlations is got.

Keywords: *invariant correlation, gyrostat, gyrostatic moment.*

О. В. Мазнєв

Про один клас трьох нелінійних інваріантних співвідношень рівнянь руху гіростата із змінним гіростатичним моментом.

Розглянуто задачу про рух гіростата під дією потенційних і гіроскопічних сил в припущенні, що гіростатичний момент залежить від часу. Отримано новий розв'язок рівнянь руху, який характеризується спеціальним класом трьох нелінійних інваріантних співвідношень.

Ключові слова: *інваріантне співвідношення, гіростат, гіростатичний момент.*

Донецкий национальный ун-т
maznev_av@rambler.ru

Получено 04.10.11