МЕХАНІКА

УДК 513.8

О РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО НАКЛОННОЙ ОСИ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

А. А. Возняк[*], *Е. М. Миронова*

[*]*Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, г. Донецк*

При управлении современными механическими системами (роботами, манипуляторами и др.) широко используются свойства движения подвижных осциллирующих масс. В задачах о движении гиростата с неподвижной точкой применяется подход, использующий переменность гиростатического момента. В данной статье рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. На основе метода интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений найдены условия существования равномерных вращений относительно наклонной оси. Полученные результаты обобщают известные и могут быть применены в управлении стационарными движениями гиростата.

Ключевые слова: гиростат, потенциальные силы, гироскопические силы, гиростатический момент, равномерные вращения, угловая скорость, центр масс, сила тяжести.

Введение. Рассматривается механическая модель, которая называется гиростатом [1]. Предполагается, что гиростатический момент имеет вид $\overline{\lambda}(t) = \lambda(t)\overline{\alpha}$. Единичный вектор $\overline{\alpha}$ неизменно связан с телом-носителем. Следуя статье [2], считаем, что на гиростат действует специальный класс потенциальных и гироскопических сил. Ранее равномерные вращения гиростата относительно наклонной оси рассматривались в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести [3-5]. Показано, что класс таких движений значительно шире класса равномерных вращений гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

В статье изучены условия существования равномерных вращений гиростата в более общей задаче о движении гиростата под действием потенциальных гироскопических сил. Применен метод исследования прецессионных движений в динамике твердого тела, предложенный в книге [6].

Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных гироскопических сил [1, 2]

$$A\dot{\overline{\omega}} = A\overline{\omega}\times\overline{\omega} - \dot{\lambda}(t)\overline{\alpha} + \overline{\omega}\times\left(B\overline{\nu} - \lambda(t)\overline{\alpha}\right) + \overline{\nu}\times\left(C\overline{\nu} - \overline{s}\right), \tag{1}$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu}\times\overline{\omega}. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) введены следующие обозначения: $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $A = (A_{ij})$ - тензор инерции гиростата, компоненты которого формируются в зависимости от способа вращения носимых тел [1]; $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем; $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = (B_{ij}),\ C = (C_{ij})$ – постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\overline{\omega}$ и $\overline{\nu}$, $\lambda(t)$ обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1), (2) допускают два первых интеграла

$$\overline{\nu}\cdot\overline{\nu} = 1,\ \ 2\left(A\overline{\omega} + \lambda(t)\overline{\alpha}\right)\cdot\overline{\nu} - \left(B\overline{\nu}\cdot\overline{\nu}\right) = 2k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Система (1), (2) не замкнута, так как не задан закон изменения функции $\lambda(t)$.

Пусть гиростат равномерно вращается относительно наклонной оси ℓ, неподвижной в пространстве. Считаем, что ℓ не параллельна вектору $\overline{\nu}$. То есть, если $\overline{\gamma}\in\ell$ и $\left|\overline{\gamma}\right| = 1$, то угол $\theta_0 \le (\overline{\gamma}, \overline{\nu}) \ne 0$. Ось ℓ (и вектор $\overline{\gamma}$) неизменна и в гиростате. Обозначим через $\overline{a}$ вектор, который совпадает с $\overline{\gamma}$. Тогда можно записать

$$\overline{a}\cdot\overline{\nu} = a_0,\ (a_0 = \cos\theta_0). \tag{4}$$

Так как гиростат совершает равномерное вращение, то можно записать

$$\overline{\omega} = \omega_0\overline{a}. \tag{5}$$

Подставив выражение (5) в уравнение (2), получим [6]

$$v_1 = a_0' \sin \omega_0 t,\ v_2 = a_0' \cos \omega_0 t,\ v_3 = a_0 . \tag{6}$$

Выберем систему координат так, чтобы вектор $\overline{a}$ имел вид $\overline{a} = (0,0,1)$. Отметим, что соотношения (5), (6) превращают уравнение (2) в тождество. Внесем выражение (5) в уравнение (1) и получим

$$\omega_0^2 \left(A\overline{a} \times \overline{a} \right) + \omega_0 \lambda(t) \left(\overline{\alpha} \times \overline{a} \right) - \dot{\lambda}(t) \overline{\alpha} + \omega_0 \left(\overline{a} \times B\overline{v} \right) + \overline{v} \times \left(C\overline{v} - \overline{s} \right) = 0 . \tag{7}$$

Считая векторы $\overline{a}$, $\overline{v}$, $\overline{a} \times \overline{v}$ независимыми, рассмотрим проекции левой части (7) на эти вектора. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&2C_2 = a_0'^2 \left(C_{22} - C_{11} \right),\ C_2' = a_0'^2 C_{12},\ C_1' = a_0' \left(s_1 - a_0 C_{13} \right),\ C_1 = a_0' \left(s_2 - a_0 C_{23} \right),\\
&2B_2 = a_0'^2 \omega_0 \left(B_{22} - B_{11} \right),\ B_2' = a_0'^2 \omega_0 B_{12},\ B_1' = a_0' \omega_0 \left(a_0 B_{13} - \omega_0 a_{13} \right),\\
&B_1 = a_0' \omega_0 \left(a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23} \right),\ 2D_2 = a_0' \left[\omega_0 \left(B_{22} - B_{11} \right) + a_0 \left(C_{22} - C_{11} \right) \right],\\
&D_2' = a_0' \left(\omega_0 B_{12} + a_0 C_{12} \right),\ D_1 = a_0 \omega_0 B_{23} + C_{23} \left(2a_0^2 - 1 \right) - a_0 s_2 - \omega_0^2 A_{23},\\
&D_1' = a_0 \omega_0 B_{13} + C_{13} \left(2a_0^2 - 1 \right) - a_0 s_1 - \omega_0^2 A_{13},\\
&2D_0 = \mathrm{a}_0' \omega_0 \left(B_{11} + B_{22} \right) + 2a_0' s_3 + a_0 a_0' \left(C_{11} + C_{22} - 2C_{33} \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Тогда, в силу обозначений (8) из уравнения (7) получим (выбором подвижной системы координат можно добиться условия $\alpha_2 = 0$)

$$\alpha_3 \dot{\lambda}(t) = C_2 \sin 2\omega_0 t - C_2' \cos 2\omega_0 t - C_1 \sin \omega_0 t + C_1' \cos \omega_0 t, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha_1 a_0' \sin \omega_0 t + \alpha_3 a_0 \right) \dot{\lambda}(t) + a_0' \omega_0 \alpha_1 \lambda(t) \cos \omega_0 t + B_2 \sin 2\omega_0 t -\\
&-B_2' \cos 2\omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t - B_1' \cos \omega_0 t = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \cos \omega_0 t \cdot \dot{\lambda}(t) - \omega_0 \alpha_1 \lambda(t) \sin \omega_0 t + D_2 \cos 2\omega_0 t +\\
&+ D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos \omega_0 t + D_1' \sin \omega_0 t + D_0 = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Условия существования у системы (9) – (11) решения $\lambda(t)$, $\varphi(t)$ и определяют равномерные вращения гиростата относительно наклонной оси.

Случай 1. $\alpha_3 = 0$. Из уравнения (9) в силу (8) и $\alpha_3 = 0$ имеем

$$C_{11} = C_{22},\ C_{12} = 0,\ s_1 = a_0 C_{13},\ s_2 = a_0 C_{23}. \tag{12}$$

Рассмотрим две комбинации уравнений (10) и (11)

$$\begin{aligned}
&a_0' \omega_0 \lambda(t) = \cos \omega_0 t \left(B_2' \cos 2\omega_0 t - B_2 \sin 2\omega_0 t + B_1' \cos \omega_0 t - B_1 \sin \omega_0 t \right) +\\
&+a_0' \sin \omega_0 t \left(D_2 \cos 2\omega_0 t + D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos \omega_0 t + D_1' \sin \omega_0 t + D_0 \right),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&a_0' \dot{\lambda}(t) = \sin \omega_0 t \left(B_2' \cos 2\omega_0 t - B_2 \sin 2\omega_0 t + B_1' \cos \omega_0 t - B_1 \sin \omega_0 t \right) -\\
&+a_0' \cos \omega_0 t \left(D_2 \cos 2\omega_0 t + D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos \omega_0 t + D_1' \sin \omega_0 t + D_0 \right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя $\lambda(t)$ из соотношения (13) в соотношение (14) и требуя, чтобы полученное равенство было тождеством по t с учетом условий (12) получим окончательные условия существования равномерных вращений гиростата

$$\begin{gathered}
C_{11} = C_{22},\ C_{ij} = 0\ (i \neq j),\ s_2 = s_1 = 0,\\
a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23} = 0,\ 2s_3 = 2a_0 \left(C_{33} - C_{11} \right) - \omega_0 \left(B_{11} + B_{22} \right) = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Зависимость $\lambda(t)$ в силу условий (15) упрощается

$$\lambda(t) = a_0' B_{12} \cos \omega_0 t + \frac{a_0'}{2} \left(B_{11} - B_{22} \right) \sin \omega_0 t + a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}. \tag{16}$$

Классический случай $(B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0,\ i, j = 1,2,3)$ приводит на основании равенств (15), (16) к условию $\overline{s} = \overline{0},\ \lambda(t) = const$ и невозможности существования переменного гиростатического момента.

Случай 2. $\alpha_3 \neq 0$. Из уравнения (9) найдем

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\alpha_3 \omega_0} \left(2C_1 \cos \omega_0 t + 2C_1' \sin \omega_0 t - C_2 \cos 2\omega_0 t - C_2' \sin 2\omega_0 t + 2\lambda_* \right), \tag{17}$$

где λ_* – постоянная.

Подставим выражения (9), (16) в равенства (10) и (11), получим

$$\omega_0(\alpha_1 a_0' \sin\omega_0 t + \alpha_3 a_0)(C_2 \sin 2\omega_0 t - C_2' \cos 2\omega_0 t - C_1 \sin\omega_0 t + C_1' \cos\omega_0 t) +$$
$$+a_0'\omega_0\alpha_1 \cos\omega_0 t(-\frac{C_2}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{C_2'}{2}\sin 2\omega_0 t + C_1\cos\omega_0 t + C_1'\sin\omega_0 t + \lambda_*) +$$
$$+\alpha_3\omega_0(B_2 \sin 2\omega_0 t - B_2' \cos 2\omega_0 t + B_1 \sin\omega_0 t - B_1' \cos\omega_0 t) = 0, \tag{18}$$

$$\alpha_1\omega_0 \cos\omega_0 t(C_2 \sin 2\omega_0 t - C_2' \cos 2\omega_0 t - C_1 \sin\omega_0 t + C_1' \cos\omega_0 t) -$$
$$-\alpha_1\omega_0 \sin\omega_0 t(-\frac{C_2}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{C_2'}{2}\sin 2\omega_0 t + C_1\cos\omega_0 t + C_1'\sin\omega_0 t + \lambda_*) +$$
$$+\alpha_3\omega_0(D_2 \cos 2\omega_0 t + D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos\omega_0 t + D_1' \sin\omega_0 t + D_0) = 0. \tag{19}$$

Уравнения (18), (19) должны быть тождествами по t. Это требование приводит к двум различным случаям существования равномерных вращений гиростата относительно наклонной оси.

В первом случае выполняются условия

$$\begin{gathered}\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 0,\ \ \alpha_3 = 1,\ \ C_{23} = C_{13} = 0,\\ \omega_0^2 A_{23} - a_0\omega_0 B_{23} + a_0 s_2 = 0,\ \omega_0^2 A_{13} - a_0\omega_0 B_{13} + a_0 s_1 = 0,\\ \omega_0\left(B_{22} - B_{11}\right) + a_0\left(C_{22} - C_{11}\right) = 0,\ \omega_0 B_{12} + a_0 C_{12} = 0,\\ 2s_3 = a_0\left(2C_{33} - C_{11} - C_{22}\right) - \alpha_0\left(B_{11} + B_{22}\right),\end{gathered} \tag{20}$$

а зависимость $\lambda(t)$ из (17) имеет вид

$$\lambda(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{a_0'^2}{4}(C_{11} - C_{22})\cos 2\omega_0 t - \frac{a_0'^2}{2}C_{12}\sin 2\omega_0 t + a_0' s_2 \cos\omega_0 t + a_0' s_1 \sin\omega_0 t + \lambda_*\right). \tag{21}$$

Во втором случае имеют место следующие ограничения на параметры

$$C_{11} = C_{22},\ C_{ij} = 0\ \ (i \neq j),$$
$$\alpha_1 s_1 - \frac{\omega_0}{2}\alpha_3(B_{11} - B_{22}) = 0, \alpha_1 s_2 - \omega_0\alpha_3 B_{12} = 0,$$
$$a_0 s_2 + \omega_0\left(\omega_0 A_{23} - a_0 B_{23}\right) = 0,\ \lambda_* = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\left(\omega_0\left(a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}\right) - a_0 s_1\right),$$
$$2s_3 = 2a_0(C_{33} - C_{11}) - \omega_0(B_{11} + B_{22}).,\tag{22}$$

В силу условий (22) и обозначений (8) из формулы (16) получим

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_3\omega_0}(a_0' s_2 \cos\omega_0 t - a_0' s_1 \sin\omega_0 t + \lambda_*). \tag{23}$$

Поскольку вариант (21), (22) получен при условии $\alpha_1 \neq 0$, то из формул (22), (23) вытекает, что этот вариант для классического случая $(B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0\ \ i,j = 1,2,3)$ приводит к случаю постоянного гиростатического момента.

Рассмотрим классическую задачу для случая (20), (21). Из первых трех равенств вытекает $\overline{\alpha} = \overline{a}$. Остальные условия дают

$$\omega_0^2 A_{23} + a_0 s_2 = 0,\ \omega_0^2 A_{13} + a_0 s_1 = 0,\ s_3 = 0\,. \tag{24}$$

Из соотношений (24) при $a_0 = 0$ следует, что ось равномерного вращения является главной. Функцию $\lambda(t)$ можно найти из формулы (21)

$$\lambda(t) = \left(a_0' s_2 \cos\omega_0 t + a_0' s_1 \sin\omega_0 t + \lambda_*\right)/\omega_0\,. \tag{25}$$

Условие $s_3 = 0$ показывает, что центр гиростата масс находится в главной плоскости эллипсоида инерции, то есть $\overline{s}\cdot\overline{a} = 0$.

В случае $a_0 \neq 0$ $(\theta_0 \neq \pi/2)$ координаты s_1, s_2 центра масс примут конкретные значения, а ось вращения не будет являться главной осью эллипсоида инерции. Таким образом, вращение вокруг главной оси при $\overline{s} \neq 0$ может быть только в случае, если эта ось горизонтальна. Применение системы координат, связанной с вектором $\overline{a}$ позволяет значительно упростить доказательства многих факторов [3]. Например, из системы (24) вытекает, что для любого по распределению масс гиростата (то есть для любых значений тензора инерции гиростата) координаты центра масс s_1, s_2 выбираются однозначно (при $a_0 \neq 0$).

Рассмотрим условия (20), (21) и (22), (23). Если случай (20), (21) может переходить в классический случай, то случай (22), (23) не имеет аналога в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести. Пусть в системе (20) $\theta_0 = \pi/2$. Тогда должны выполняться условия

$$A_{13} = A_{23} = 0,\ B_{12} = 0,\ B_{22} = B_{11},\ s_3 = -\omega_0 B_{11}. \qquad (26)$$

Из (26) следует, что ось равномерного вращения является главной осью эллипсоида инерции. Параметры s_1, s_2 принимают произвольные значения. Для условий (22) вариант $\theta_0 = \pi/2$ существенных упрощений не приносит. Если выполнены условия

$$A_{13} = A_{23} = 0,\ B_{ij} = 0\ (i, j = 1,2,3),\ s_3 = 0, a_0 = 0,\ C_{22} \neq C_{11},\ C_{12} \neq 0, \qquad (27)$$

то равномерные вращения относительно горизонтальной оси могут происходить с произвольной угловой скоростью. Вектор гиростатического момента направлен по оси, параллельной оси вращения, а зависимость $\lambda(t)$ можно найти из формулы (21)

$$\lambda(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{4}\left(C_{11} - C_{22}\right)\cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2}C_{12}\sin 2\omega_0 t + \lambda_*\right).$$

Отметим, что аналогичные движения с произвольной угловой скоростью для варианта (22) невозможны. Однако интерес случая (22), (23) состоит в том, что он возможен для произвольных значений θ_0, то есть в случае, когда в системе (22) выполняются условия $A_{23}=0,\ s_2 = \omega_0 B_{23},\ C_{33} = C_{11}$. Ось вращения гиростата является главной, матрица *C* в уравнение (1) не входит. Но матрица *B* в уравнении (1) может считаться не нулевой, а значение λ_* в формуле (23) может принимать произвольные значения.

Выводы. В статье изучены условия существования равномерных вращений относительно наклонной оси гиростата в двух случаях. Первый случай характеризуется свойством, что вектор гиростатического момента ортогонален вектору равномерного вращения. Во втором случае вектор гиростатического момента коллиниарен вектору равномерного вращения. Дан анализ механических условий на параметры в указанных случаях.

РЕЗЮМЕ

При управлінні сучасними механічними системами (роботами, маніпуляторами тощо) широко використовуються властивості руху рухомих осцилюючих мас. У задачах про рух гіростата з нерухомою точкою застосовується підхід, який використовує змінність гіростатичного моменту. У даній статті розглянута задача про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенційних і гіроскопічних сил. На основі методу інтегрування звичайних диференціальних рівнянь знайдені умови існування рівномірних обертань щодо похилої осі. Отримані результати узагальнюють відомі та можуть бути застосовані в управлінні стаціонарними рухами гіростата.

Ключові слова: гіростат, потенційні сили, гіроскопічні сили, гіростатічний момент, рівномірні обертання, кутова швидкість, центр мас, сила тяжіння.

SUMMARY

In the management of modern mechanical systems (robots, manipulators, etc.) are widely used properties of the motion of moving the oscillating masses. The problem of motion gyrostat with a fixed point approach is used, variable gyrostatic moment. In this paper we consider the motion gyrostat with variable gyrostatic moment under the influence of potential and gyroscopic forces. Based on the method of integrating ordinary differential equations are found conditions for the existence of uniform rotation about an inclined axis. The obtained results generalize the known ones and can be applied in the management of steady motion gyrostat.

Keywords: gyrostat, potential forces, gyroscopic forces, gyrostatic moment, uniform rotation, angular velocity, center of mass, gravity.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
2. Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces I: The equations of motion and their transformations./ H. M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – Vol. 5, No 5. – P. 742-754.
3. Волкова О. С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик / О. С. Волкова // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
4. Дружинин Э. И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э. И. Дружинин // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, вып. 5. – С. 825-828.
5. Ковалева Л. М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком / Л. М. Ковалева, Е. В. Позднякович // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
6. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем, связанных твердых тел / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Е. К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.

Поступила в редакцию 20.05.2010 г.