УДК 517.5

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. И. Пайков

В данной работе вводятся новые классы гомеоморфизмов, являющиеся обобщением квазиконформных отображений. Устанавливается их упорядоченность по включению. Доказывается дифференцируемость почти всюду отображений принадлежащих этим классам. Приводится оценка сверху внешней дилатации отображения.

Ключевые слова: гомеоморфизм, квазиконформные отображения, дифференцируемость почти всюду, локальная интегрируемость, внешняя дилатация.

Введение. При изучении пространственных квазиконформных отображений, важную роль сыграли методы модулей семейств кривых и емкостей конденсаторов. Они явились основным инструментом исследований и позволили получить ряд важных результатов [1-3]. В дальнейшем, такие методы были использованы при изучении отображений квазиконформных в среднем, которые послужили обобщением квазиконформных отображений [4-8] . Следующим этапом развития теории выступили отображения, в которых, требование суммируемости функции от коэффициентов квазиконформности, заменяется геометрическими условиями, обобщающими известное характеристическое свойство квазиконформных отображений [9-12], выраженное в терминах модулей семейств кривых, такими явились введенные профессором Олли Мартио, Q-гомеоморфизмы [13-17].

Обозначения и определения. Напомним понятие α -модуля семейства кривых. Пусть D область в R^n, $n \geq 2$ и Γ семейство кривых γ лежащих в D. Будем говорить, что борелевская функция $\rho : R^n \to [0, \infty]$ допустима для семейства кривых Γ в D и обозначать $\rho \in adm\,\Gamma$, если $\int\limits_{\gamma} \rho ds \geq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Величину $M_\alpha(\Gamma) = \inf\limits_{\rho \in adm \Gamma} \int\limits_D \rho dm$ называют α -модулем семейства Γ .

Нам также потребуется емкость конденсатора. Приведём её определение в форме [5, 11, 16]. Под кольцевым конденсатором в R^n, $n \geq 2$ будем понимать пару множеств $A = (F, G)$, где G – область в R^n , а $F \subset G$ – непустое замкнутое множество. Его β -ёмкость ($1 \leq \beta \leq n$) определяется равенством

$$cap_\beta(F, G) = \inf \int\limits_D |\nabla \varphi(x)|^\beta dx,$$

где точная нижняя грань берётся по всем непрерывным ACL -функциям $\varphi : R^n \to R^1$ таким, что $\varphi(x) \leq 0$ при $x \in F$ и $\varphi(x) \geq 1$ при $x \in CG$ (CG – дополнение области G).

Определение отображений. .Пусть D – область в R^n, $n \geq 2$, и $Q\colon D \to [1, \infty]$ – измеримая функция. Тогда Q_α -гомеоморфизмом $1 \leq \alpha \leq n$ будем называть гомеоморфизм $f : D \to \overline{R^n}$, если для любого конденсатора $A = (F, G)$, лежащего в D , условие

$$M_\alpha(f(\Gamma))(m(f(G) \setminus \overline{f(F)}))^{\frac{\alpha - n}{n}} \leq (\int\limits_D Q(x) \rho(x)^n dx)^{\frac{\alpha}{n}} \tag{1}$$

выполнено для любого семейства Γ кривых γ , соединяющих F с ∂G и любой функции $\rho \in adm\,\Gamma$.

Как известно $cap_\alpha(F, G) = M_\alpha(\Gamma)$ [16] и приведённое определение может быть записано в виде

$$cap_\alpha(\overline{f(F)}, f(G)) \leq (m(f(G) \setminus \overline{f(F)}))^{\frac{n - \alpha}{n}} (\int\limits_D Q(x) \rho(x)^n dx)^{\frac{\alpha}{n}}, \tag{2}$$

где, как и в предыдущем определении, ρ – допустимая функция для произвольного семейства кривых Γ соединяющих F с ∂G .

Совокупность всех Q_α -гомеоморфизмов области D обозначим $Q_\alpha(D)$.

Далее изучим дифференциальные и метрические свойства отображений из этих классов.

Основные результаты. Теорема 1. Если $1<\beta<\alpha\le n$, то $Q_\alpha(D)\subset Q_\beta(D)$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством связывающим α -емкости конденсаторов при различных α доказанным в работе [5]

$$cap_\beta^\alpha(F,G)\le[m(G\setminus F)]^{\alpha-\beta}cap_\alpha^\beta(F,G).$$

Выразим из этого неравенства α -емкость

$$cap_\alpha(\overline{f(F)},f(G))\ge\frac{cap_\beta^{\alpha/\beta}(\overline{f(F)},f(G))}{[m(f(G)\setminus\overline{f(F)})]^{\alpha/\beta-1}}$$

И результат подставим в определение (2), получим

$$\frac{cap_\beta^{\alpha/\beta}(\overline{f(F)},f(G))}{[m(f(G)\setminus\overline{f(F)})]^{\alpha/\beta-1}}\le(m(f(G)\setminus\overline{f(F)}))^{1-\alpha/n}(\int_D Q(x)\rho(x)^n\,dx)^{\alpha/n}.$$

Теперь умножаем обе части неравенства на знаменатель дроби, стоящей в левой части

$$cap_\beta^{\alpha/\beta}\left(\overline{f(F)},f(G)\right)\le\left(m\left(f(G)\setminus\overline{f(F)}\right)\right)^{\alpha/\beta-\alpha/n}\left(\int_D Q(x)\rho(x)^n\,dx\right)^{\alpha/n}.$$

Возводим обе части неравенства в степень β/α и получаем окончательно

$$cap_\beta\left(\overline{f(F)},f(G)\right)\le\left(m\left(f(G)\setminus\overline{f(F)}\right)\right)^{n/\beta-1}\left(\int_D Q(x)\rho(x)^n\,dx\right)^{\beta/n}\qquad(3)$$

Таким образом мы показали, что функция удовлетворяющая неравенству (2) удовлетворяет также (3) и утверждение теоремы доказано.

Следствие. Учитывая что Q-гомеоморфизмы в области D образуют семейство функций $Q_n(D)$, то из теоремы 1 следует что все Q_α -гомеоморфизмы при $1\le\alpha\le n$ включают в себя Q-гомеоморфизмы.

Покажем теперь, что в предположении локальной суммируемости функции $Q(x)$ в D Q_α -гомеоморфизмы при $\alpha>n-1$ дифференцируемы почти всюду в D.

Пусть $x,y\in D$ определим величину

$$L(x,f)=\lim_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть D – область в R^n, $n\ge2$ и $f:D\to\overline{R^n}$ Q_α -гомеоморфизм $\alpha>n-1$ с $Q(x)\in L_{loc}^1$, тогда почти всюду справедливо неравенство

$$L(x,f)\le\gamma_n\cdot(\varphi(x))^{\frac{1}{n}}(Q(x))^{\frac{n-1}{n}}.$$

Доказательство. В произвольной точке $x\in D$ построим конденсатор $A_\varepsilon=(F_\varepsilon,G_\varepsilon)$ лежащий в D, где $G_\varepsilon=\{y:|x-y|<2\varepsilon\}$, а $F_\varepsilon=\{y:|x-y|\le\varepsilon\}$. Тогда $f(A_\varepsilon)=\left(\overline{f(F_\varepsilon)},f(G_\varepsilon)\right)$ определяет конденсатор в D' образе D при отображении f. Для оценки α -емкости конденсатора $f(A_\varepsilon)=\left(\overline{f(F_\varepsilon)},f(G_\varepsilon)\right)$ воспользуемся неравенством полученным в работе [5]

$$cap_\alpha^{n-1}(\overline{f(F_\varepsilon)},f(G_\varepsilon))\ge c\frac{\left(diam\overline{f(F_\varepsilon)}\right)^\alpha}{[mf(G_\varepsilon)]^{1-n+\alpha}}.$$

Это неравенство в сочетании с определением (2) позволяет записать следующую цепочку неравенств

$$\frac{\left(diam\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}\right)^{\frac{\alpha}{n-1}}}{[mf\left(G_\varepsilon\right)]^{\frac{1-n+\alpha}{n-1}}} \le c_1 \cdot cap_\alpha\left(\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}, f\left(G_\varepsilon\right)\right) \le c_1 \cdot \left(m\left(f(G)\setminus\overline{f(F)}\right)\right)^{\frac{n-\alpha}{n}}\left(\int\limits_D Q(x)\rho(x)^n\,dx\right)^{\frac{\alpha}{n}},$$

где $c_1 = c^{-1/(n-1)}$ – положительная константа. В полученном неравенстве

$$\frac{\left(diam\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}\right)^{\frac{\alpha}{n-1}}}{[mf\left(G_\varepsilon\right)]^{\frac{1-n+\alpha}{n-1}}} \le c_1 \cdot \left(m\left(f\left(G_\varepsilon\right)\setminus\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}\right)\right)^{\frac{n-\alpha}{n}}\left(\int\limits_D Q(x)\rho(x)^n\,dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} \tag{4}$$

положим

$$\rho(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon,\, x \in G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon \\ 0,\, x \notin G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon \end{cases}$$

В результате имеем соотношение

$$\frac{diam\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}}{\varepsilon} \le \gamma_n \cdot \left(\frac{m\left(f\left(G_\varepsilon\right)\setminus\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}\right)}{m\left(G\setminus F\right)}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{m\left(G\setminus F\right)}\int\limits_D Q(x)dx\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

где γ_n – константа зависящая только от n. Переходя к пределу, получим почти всюду оценку

$$L\left(x,f\right) \le \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{diam\overline{f\left(F_\varepsilon\right)}}{\varepsilon} \le \gamma_n \cdot \left(\varphi\left(x\right)\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(Q(x)\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Под $\varphi\left(x\right)$ в этом равенстве понимаем объёмную производную, которая как следует из [2] конечна почти всюду.

Из леммы 1 легко получаются следующие утверждения:

Теорема 2. Пусть D и D' – области в R^n $(n \ge 2)$ и $f : D \to D'$ является Q_α-гомеоморфизмом при $Q \in L^1_{loc}$ и $\alpha > n-1$. Тогда f дифференцируемо почти всюду в D.

Следствие 1. Пусть область D лежит в R^n $(n \ge 2)$ и $f : D \to \overline{R^n}$ является Q_α-гомеоморфизмом с $\alpha > n-1$ и $Q(x) \in L^1_{loc}$,тогда f имеет локально суммируемые производные.

Следствие 2. Пусть область D лежит R^n $(n \ge 2)$ и $f : D \to \overline{R^n}$ является Q_α-гомеоморфизмом с $\alpha > n-1$ и $Q(x) \in L^1_{loc}$. Тогда почти всюду $K_o\left(x,f\right) \le C_n \cdot Q^{n-1}\left(x\right)$.

$K_o\left(x,f\right)$ как обычно обозначает внешнюю дилатацию отображения f в точках дифференцируемости x

$$K_o\left(x,f\right) = \begin{cases} \dfrac{\left|f'(x)\right|^n}{\left|J\left(x,f\right)\right|}, & \left|J\left(x,f\right)\right| \ne 0 \\ 1, & \left|J\left(x,f\right)\right| \ne 0 \end{cases}.$$

Доказательства теоремы 2 и следствий 1, 2 могут быть осуществлены на основании рассуждений, приведенных в работе [17].

РЕЗЮМЕ

В даній роботі дається ознака нових класів гомеоморфізмів, які є узагальненням квазиконформніх відображень. Встановлюється порядок за вкладенням. Доказується діференційовність майже усюди відображень, що належать до сих класів. Наводиться оцінка зверху зовнішньої дилатації.

Ключові слова: гомеоморфізм, квазиконформі відображення, діференційовність майже усюди, локальна інтегрованість, зовнішня дилатація.

SUMMARY

In this work we introduce the new classes of homeomorphisms, which generalize quasiconformal mappings. Their orderliness on inclusion is established. Differentiability almost everywhere of mappings from this classes is proved. The estimation from above outer dilatation is present.

Keywords: homeomorphism, quasiconformal mappings, differentiability almost everywhere, locally enterable, outer dilatation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gehring F. W. Rings and quasiconformal mappings in space / F. W. Gehring // Transactions of the American Mathematical Society. – 1962. – Vol. 103. – P. 353-393.
2. Vaisala J. Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math. 229 / J. Vaisala-Berlin Springer-Verlag, 1971. – 156 p.
3. Сычёв А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения / А. В. Сычёв. – Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.
4. Песин И. Н. Отображения квазиконформные в среднем /И. Н. Песин // ДАН СССР 1969. – Т. 187, № 4. – С.740-742.
5. Кругликов В. И. Ёмкости конденсаторов и отображения квазиконформные в среднем/ В. И. Кругликов // Математический сборник. – 1986. – Т. 130, № 2. – С. 185-206.
6. Perovich M. Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings / M. Perovich // Lecture Notes in Math. – 1979. – Vol. 743. – P. 212-214
7. Кудьявин В. С. Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке / В. С. Кудьявин // ДАН СССР 1984. – Т. 277, № 5. – С. 1056-1058.
8. Стругов Ю. Ф. О компактности семейств, квазиконформных в среднем / Ю. Ф. Стругов // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243, № 4. – С. 859-861.
9. Gehring F. W. Rings and quasiconformal mappings in space / F. W. Gehring // Transactions of the American Mathematical Society. – 1962. – Vol. 103. – P. 353–393.
10. Rickman S. Quasiregular Mappings / S. Rickman. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 213 p.
11. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением / Ю. Г. Решетняк. – Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1982. – 286 с.
12. Caraman P. n-dimensional quasiconformal mappings / P. Caraman. – Newfoundland: NJ Haessner Publishing, 1974. – 585 p.
13. Q-homeomorphisms / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193-203.
14. On Q-homeomorphisms. / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov // Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica. – 2005. – Vol. 30. – №.1. – P. 49-69.
15. On boundary behavior of Q-homeomorphisms / O. Martio, V .Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov // Department of Mathematics University of Helsinki Annual Report. – 2002. – Vol. 318. – P. 1-12.
16. Moduli in Modern Mapping Theory / O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – 368 p.
17. Салимов Р. Р. Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций / Р. Р. Салимов, Е. А. Севастьянов // Математический сборник. – 2010. – Т. 201, № 6. – С. 131-158.

Поступила в редакцию 22.05.2010 г.